М. Я. Пратусевич
К. М. Столбов
В. Н. Соломин

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

10

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

М. Я. Пратусевич
К. М. Столбов
В. Н. Соломин

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

КНИГА ДЛЯ УЧИТЕЛЯ

10 класс

Профильный уровень

Москва
«Просвещение»
2012

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21
П70

Пратусевич М. Я.
П70 Алгебра и начала математического анализа. Книга для учителя. 10 класс: профил. уровень / М. Я. Пратусевич, К. М. Столбов, В. Н. Соломин. — М. : Просвещение, 2012. — 302 с. : ил. — ISBN 978-5-09-018213-3.

Книга предназначена учителям, работающим по учебнику «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс» М. Я. Пратусевича, К. М. Столбова и А. Н. Головина. В пособии содержатся методические рекомендации учителям, тематическое планирование, решения, указания и ответы к некоторым задачам учебника.

УДК 372.8:[512+517]
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-018213-3

Предисловие

Предлагаемая книга составлена по учебнику М. Я. Пратусевича, К. Н. Столбова и А. Н. Головина «Алгебра и начала математического анализа. 10 класс», предназначенного для профильного и углублённого изучения.

Целью предлагаемого УМК является обобщение, систематизация и распространение опыта, накопленного за время работы физико-математических школ. И если в учебнике отражено собственно содержание курса, то в книге для учителя даны некоторые подходы к его преподаванию, сложившиеся в результате применения учебника на практике.

В составе авторов книги — учителя, использовавшие учебник в повседневной практической работе в классах физико-математического лицея № 239 и лицея «Физико-техническая школа» Санкт-Петербурга.

Одним из принципов построения курса является принцип разделения трудностей. Например, одной из причин известных всем практикующим учителям трудностей при изучении тригонометрии, по мнению авторов, является смешение материала, связанного со свойствами функций (периодичность, чётность), и обилия алгебраических соотношений, специфичного для тригонометрии. Поэтому изучение свойств функций выделено в отдельную главу, в которой отрабатывается и решение уравнений и неравенств с периодическими функциями.

Поскольку одной из основных особенностей учебника является наличие большого числа задач, среди которых есть и весьма сложные, в книге для учителя изложены решения или указания к решению некоторых задач, к более простым задачам приведены ответы. Отметим, что в тексте параграфов учебника имеются как необходимые теоретические сведения, так и многочисленные примеры решения задач различной трудности, причём изложенные с точки зрения того, как соответствующее решение можно придумать.

Авторская концепция предполагает отсутствие ответов в учебнике, а тем более решений задач, предназначенных для самостоятельной работы учащихся. Наличие ответов дезориентирует ученика, невольно заставляет его «подогнать» решение под готовый ответ, а также пренебречь содержанием задачи ради вычислений.

Основной целью авторов являлось показать, как можно выстроить преподавание по данному учебнику в единой методической системе, предусматривающей прежде всего решение большого числа разноплановых задач.

В некоторых разделах даны дополнительные задачи, решение которых, по мнению авторов, может способствовать более успешному изучению материала.

Приведено также примерное тематическое планирование изучения каждой главы. Полагаем, что профильное изучение математики настолько индивидуально, что не существует возможности создать вариант более подробного (например, поурочного) планирования. Каждый учитель, в зависимости от уровня подготовки класса, может составить своё поурочное планирование, используя материалы данного пособия. Вместе с тем соответствующие варианты планирования и контрольные работы по темам опубликованы в № 10 газеты «Математика» за 2009 г.

Подчеркнём авторский взгляд на вопросы оформления решений задач. Полагаем, что вопросы оформления не должны выходить на первый план, но тем не менее отдельным вопросам оформления и написания решений уделено некоторое внимание.

Авторы будут признательны за любые предложения и замечания по учебнику и предлагаемой книге, которые можно присылать по электронной почте на адрес algebraianalyz10@mail.ru, а также почтой на адрес издательства «Просвещение».

Глава I. Введение

К материалу главы I отнесены разделы, полезные для формирования математической культуры учащихся, которые стоят особняком в ряду традиционных тем курса и в силу своего небольшого объёма не могут быть рассмотрены в качестве отдельных глав. В главу входят следующие разделы:

1. Начала формальной логики.
2. Начала теории множеств.
3. Метод математической индукции.
4. Элементы комбинаторики и бином Ньютона.
5. Уравнения и неравенства с одной переменной.

Такая компоновка главы вызвана следующими причинами.

Мы полагаем, что в 10 профильный класс придут дети из разных классов и даже из разных школ, уровень математической подготовки которых в традиционных разделах алгебры может быть весьма различным. Материал главы I — своего рода буфер, который будет интересен детям с различным уровнем подготовки, в то же время этот материал первоначально не требует каких-либо конкретных знаний учащихся, а также содержит элементы повторения и углубления.

Изучение в главе I раздела «Элементы комбинаторики. Бином Ньютона» вызвано двумя причинами:

1. Применение формулы бинома Ньютона существенно сокращает и облегчает вычисления и преобразования при решении задач. Традиционное для углублённого изучения математики рассмотрение этой темы в конце курса мешало такому использованию. А коль скоро решили излагать бином Ньютона, естественно возникает необходимость изложения комбинаторики.
2. С введением ЕГЭ резко повысилась роль итоговой аттестации. Естественным желанием учителя является как можно лучше подготовить учащихся к ЕГЭ. На ЕГЭ практически проверяется умение решать уравнения и неравенства. Поэтому на изучение комбинаторики в 11 классе не остаётся ни времени, ни сил. Материал по комбинаторике, не требующий особой предварительной подготовки, легко переносится в начало 10 класса.

Приведём примерный план изучения главы I (первый столбец означает планирование при 4 часах алгебры в неделю, второй — при 5 часах алгебры в неделю).

Глава I. Введение	39	50
Высказывания, предикаты	4	6
Множества и операции над ними	4	4
Контрольная работа № 1	1	2
Метод математической индукции	6	8
Контрольная работа № 2	1	1
Элементы комбинаторики. Бином Ньютона	10	12
Контрольная работа № 3	1	1
Особенности множества вещественных чисел	2	4
Уравнения и неравенства с одной переменной	8	10
Контрольная работа № 4	2	2

§ 1. Высказывания и предикаты

В тексте параграфа рассматриваются основы исчисления высказываний. Основными понятиями являются понятия высказывания, предиката, квантора.

В логике подачи материала имеется некоторый дефект. Он заключается в том, что предикат, будучи функцией, принимающей значения true и false, должен иметь областью определения некоторое множество. В то же время одним из способов задания множества является задание его характеристического свойства, т. е. предиката, множеством истинности которого является данное множество.

Этот дефект, сознательно допущенный в изложении, связан с тем, что определить, что такое множество (например, с помощью соответствующей аксиоматики), в школьном курсе весьма затруднительно. В то же время ясность понимания того, что есть решение уравнения и неравенства, а также возможность анализа структуры теорем с лихвой искупают этот дефект.

Отметим, что п. 4 § 1 «Свойства операций над высказываниями» является необязательным для изучения. Мы полагаем, что тождественные преобразования логических выражений не являются существенным элементом математической культуры. Поэтому и задач к этому пункту практически не приведено.

Решения и указания к задачам

I.1. и*) **Решение**. Пусть приведённое утверждение является высказыванием. Если это высказывание истинно, то утверждение задания *и** истинно. Получили противоречие. Аналогичное противоречие получится, если предположить ложность этого высказывания.

Таким образом, данному предложению нельзя приписать истинностного значения. Однако тем не менее про это предложение «имеет смысл» говорить, истинно оно или ложно, хотя его истинностное значение установить невозможно.

Замечание. Данный пример может служить поводом для разговора о высказываниях, ссылающихся на себя (см. также парадокс Рассела в примере 13 § 2 учебника), неполноте аксиоматики и других важных вопросах оснований математики. Этот пример полезно обсудить в классе, а не давать его для домашней работы.

I.2. а) $a = 1$. б) $|a| \geqslant 1$. в) $a = 1$. *Замечание.* В ответе приведены все возможные значения a, хотя формулировка задачи предполагает приведение только одного из них. Можно предложить наиболее подготовленным учащимся решить эту задачу в форме: «найдите все значения a, для которых предикат является тождеством».

I.3. Полезно решить задания *д*, *е* в классе, а задания *ж*, *з*, *и* задать домой, обсудив при этом вопрос порядка действий с высказываниями, а заодно и вспомнить про порядок арифметических действий. Общепринятым является следующий порядок действий в отсутствие скобок: первыми выполняются отрицания, затем конъюнкции и дизъюнкции, а последней — импликация.

I.4. а) **Решение**. Если посылка ложна, то импликация истинна. Поэтому осталось рассмотреть случай истинности высказывания $a \wedge (a \to b)$. Это высказывание истинно, только если истинно a, и истинно $a \to b$, откуда следует истинность b. Таким образом, исходная импликация истинна.

в)—д) Утверждения можно доказать аналогично.

Естественно, что все пункты этой задачи можно решить рассмотрением таблиц истинности, однако приведённое решение изящнее.

I.5. Решение аналогично разобранному в примерах 5 и 8 учебника.

I.7. и) **Решение**. Если высказывание a ложно, то заключение импликации истинно, а значит, импликация тоже истинна. Если же высказывание a истинно, то посылка импликации, сама являющаяся импликацией, ложна. (В формулировке задачи в первом издании учебника пропущено слово «истинно», относящееся к приведённому высказыванию.)

I.8. Коля ходил в кино. *Замечание.* Интересно, что ответ не зависит от того, воспринимать выражение «либо ..., либо ...» как строгую дизъюнкцию или как обычную (решение аналогично приведённому в примере 9 учебника).

I.9. а) Заведомо истинными являются высказывания c, e, f. б) Заведомо истинно только высказывание e. в) Заведомо истинны высказывания h, i.

I.10. к) $-2 < x < 2$ или $x > 5$. **Решение.** Можно применить свойство 11 теоремы пункта 4 учебника о том, что $a \to b = (\neg a) \vee b$. Таким образом, исходный предикат можно преобразовать в предикат $\neg((x > 5) \to (x < 3)) \vee (x^2 < 4)$, откуда получим $((x > 5) \wedge \neg(x < 3)) \vee (x^2 < 4)$. Конъюнкция в скобках истинна при $x > 5$, а $x^2 < 4$ при $-2 < x < 2$.

Эта задача является пропедевтической для изучения следующего параграфа. Фактически учащиеся при выполнении заданий осознают связь между операциями над множествами и операциями над высказываниями.

I.11. а) $a > 2$. б) $a \geqslant 2$. в) $1 \leqslant a \leqslant 2$. г) $a \geqslant 2$. д) Ни при каких a. *Указание.* При $x = 2$ независимо от a посылка импликации истинна, а заключение ложно. е) $a \geqslant 1$.

а)—е) Задания являются довольно простыми и сводятся к анализу результата действий с соответствующими множествами.

ж) $2 < a < 7{,}5$. **Решение.** Импликация истинна при $x \in (2;\ 15)$. Чтобы она была истинной при остальных значениях x, нужно, чтобы её посылка была ложной, т. е. чтобы оба неравенства в дизъюнкции были одновременно ложными. Таким образом, нужно, чтобы при всех $x \leqslant 2$ или $x \geqslant 15$ выполнялись одновременно неравенство $(x - a)(x - 2a) > 0$ (1) и одно из неравенств: $x > a + 2$ (2) или $x < a + 1$ (3).

Если $a \leqslant 2$ или $a \geqslant 15$, можно взять $x = a$, и неравенство (1) будет ложным. Значит, искомые значения a удовлетворяют неравенству $2 < a < 15$.

Аналогично, если $a \geqslant 7{,}5$, то можно взять $x = 2a$, при котором неравенство (1) будет ложным. Значит, искомые значения a удовлетворяют неравенству $2 < a < 7{,}5$. Нетрудно видеть, что при любом из таких a и при $x \leqslant 2$ оба сомножителя левой части неравенства (1) будут отрицательны, а при $x \geqslant 15$ оба эти сомножителя будут положительны. Поэтому при $2 < a < 7{,}5$ неравенство (1) будет истинным для всех $x \leqslant 2$ или $x \geqslant 15$.

Кроме того, для всех $x \leqslant 2$ при $2 < a < 7{,}5$ будет истинно неравенство (3), а для всех $x \geqslant 15$ при $2 < a < 7{,}5$ будет истинно неравенство (2).

Итак, мы показали, что никакие значения a, кроме $2 < a < 7{,}5$, не могут являться ответом, а все значения a, удовлетворяющие условию $2 < a < 7{,}5$, ответом являются.

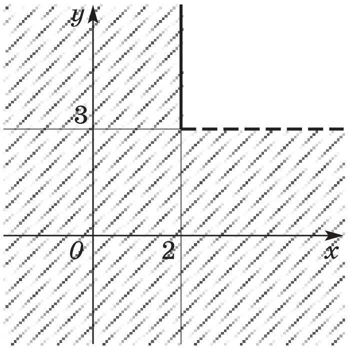


Рис. 1.1

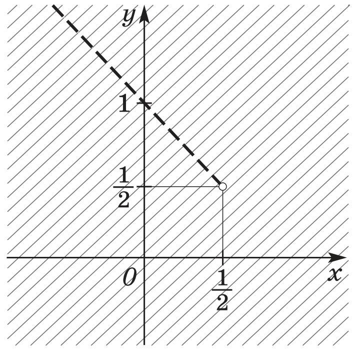


Рис. 1.2

Решение остальных пунктов аналогично приведённому.

з) $a < 13$. *Указание.* Начиная со второго издания формулировка задачи уточнена: $((x - a) \times (x - 2a) \leqslant 0) \lor ((a + 1 \leqslant x \leqslant a + 2) \to (x \in (2;\, 15))$. и) При $a < 1{,}5$ или $a > 5$. к) Ни при каких a. **Решение**. При всех $x > 6$ или $x < 3$ импликация-посылка будет истинной, значит, должно быть истинным заключение. Однако при достаточно больших значениях x неравенство $a - 1 \leqslant x \leqslant a + 1$ выполняться не будет.

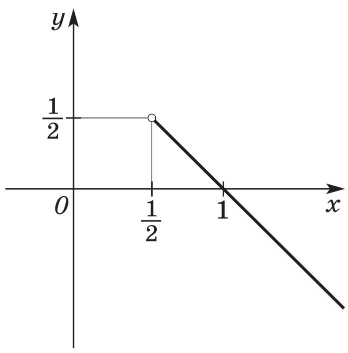


Рис. 1.3

Разумно в сильном классе, разобрав задания *з*, *и* на уроке, задания *ж*, *к* дать в качестве домашнего задания.

I.12. а)—д) Задания достаточно просты и их можно использовать как для работы в классе, так и для домашнего задания.

е)—з) Ответы представлены на рисунках 1.1—1.3.

§ 2. Множества и операции над ними

Понятие множества интуитивно ясно, но на школьном уровне является неопределяемым. Основным содержанием этого параграфа являются способы задания множеств и операции над множествами.

С точки зрения математики как элемента культуры полезно разобрать с учащимися парадокс Рассела.

Однако основное внимание нужно уделить операциям над множествами и их связи с логическими операциями. Полезно решить задачи I.29, I.30, I.32, а также задачи I.39—I.42. Важным является также добиться чёткого осознания того, как доказывается включение (равенство) множеств (примеры 16, 21 учебника, задачи I.24, I.29, I.30, I.31, I.33, I.35).

Решения и указания к задачам

I.14. в) $\{-1; 0; 2; 3\}$. **Решение.** Словесная формулировка задачи: нужно найти все целые числа, представимые в виде $\frac{k-1}{k+1}$ при целых значениях k. Поскольку $\frac{k-1}{k+1} = 1 - \frac{2}{k+1}$, целое число $k + 1$ должно быть делителем двойки, т. е. может быть равным -1, 1, 2, -2. Откуда получаем соответствующие значения x. г) $\{3; 5\}$. *Указание.* Решение аналогично решению задания *в*.

I.15. а) Да. б) Нет. в) Нет. г) Да.

I.16—I.18. *Замечание.* Задачи показывают, что элементами множеств могут быть другие множества. Простые по сути задачи тем не менее требуют внимания и понимания разницы между знаками $\in$ и $\subset$.

I.22. а) $\{-2{,}5; 0{,}5\}$. б) $\{-1; 3\}$. в) $\left\{2; \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Замечание. Полезно обратить внимание на то, что требуется решить несколько уравнений. То есть трудность задачи не в технической реализации, а в том, чтобы верно понять условие. При решении одного из уравнений *в* получается корень 0. Однако в самом множестве имеется элемент $\frac{1}{x}$, который не существует при $x = 0$. Здесь можно либо считать, что в случае $x = 0$ соответствующего множества не существует (этой точки зрения мы и придерживаемся), либо считать, что при $x = 0$ соответствующее множество состоит из меньшего числа элементов. В случае такой договорённости в ответ задания *б* добавляется число 2, а в ответ задания *в* — число 0.

I.23. $\{-2; 0; 1\}$. *Замечание.* Здесь, как и в предыдущей задаче, важно «перевести» условие на язык уравнений. Можно также попросить учащихся посчитать, сколько элементов будет в данном множестве при каждом из найденных значений x.

I.24. **Решение.** Докажем, что $A \subset C$. Возьмём любой $x \in A$ и покажем, что $x \in C$. Если $x \in A$, причём $A \subset B$, то $x \in B$. Если $x \in B$, причём $B \subset C$, то $x \in C$, что и требовалось доказать.

Замечание. Рассуждение, приведённое в решении, должно быть придумано учащимися после изображения соответствующих рисунков, убеждающих в правильности утверждения задачи.

I.26. а) **Решение.** Перепишем условия в одну цепочку включений: $A \subset C \subset E \subset B \subset D$. Поскольку по условию все множества различны, то в каждом следующем содержится как минимум на один элемент больше, чем в предыдущем. Поскольку в множестве A есть хотя бы один элемент 1, в множестве D должно быть как минимум 5 элементов, что противоречит тому, что $D \subset X = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$.

I.28. а) **Решение.** Утверждение следует из цепочки включений $A \subset C \subset B \subset A$. Такая цепочка включений существует, лишь если $A = C = B$.

в) **Решение.** Из условий можно выписать цепочку включений: $A \subset C \subset D \subset E \subset B$. Тогда поскольку множества различны, то в последнем из них должно быть не менее 4 элементов, т. е. $B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4\}$, в то время как первое множество цепочки обязано быть пустым, т. е. $A = \varnothing$.

I.30. а) $\{-2;\ 1\}$. б) $\{1\}$. *Указание.* Полезно заметить, что элемент $2x - 1$ должен быть равен одному из элементов множества, записанного справа. Полученные 4 значения x можно проверить прямой подстановкой.

в) $\left[1;\ \sqrt{18}\right]$. г) $\{2\}$.

Замечание. В этой задаче так же, как и в задаче I.22, важно правильно свести условие к уравнениям и неравенствам.

I.31. а) $a \in [0;\ 4)$. *Указание.* Удобно сформулировать условие так: при каких значениях a уравнение $ax^2 + ax + 1 = 0$ не имеет корней? б) $a \neq 0$. в) $a \in [0;\ 0{,}5]$. г) $a < 0$.

I.32. а) **Решение.** Каким бы ни было множество X, в множестве $X \cup \{1;\ 2;\ 3\}$ должны содержаться все элементы множества $\{1;\ 2;\ 3\}$, в том числе 3, что противоречит условию.

I.33. а) **Решение.** Докажем, что $A \subset B$. Возьмём любой $x \in A$. Так как $A = A \cap B$, то $x \in A \cap B$, а тогда $x \in B$. Итак, взяв произвольный элемент множества A, мы получили, что он принадлежит множеству B, что и требовалось доказать.

Решения остальных пунктов аналогичны. б) $B \subset A$. в) $A \cap B = \varnothing$.

1.34. Решение. Поскольку $A \backslash A = \varnothing$, то искомое равенство выполняется лишь для $A = \varnothing$.

1.42. а) **Решение.** Чтобы $B_a \neq \varnothing$, необходимо и достаточно, чтобы $a - 1 \leqslant 10 - a$, откуда $a \leqslant 5{,}5$. б) $a < 1$. в) $a \in [2;\ 3]$. Чтобы $3 \in A_a \cap B_a$, необходимо и достаточно, чтобы $3 \in A_a$, т. е. $a \leqslant 3 \leqslant 2a - 1$, а также $3 \in B_a$, т. е. $a - 1 \leqslant 3 \leqslant 10 - a$. г) Таких a не существует. д) $a \in$ $\in (-\infty; 2) \cup (3; 4]$. е) $a \in [1; 5]$. *Указание.* Условие задачи равносильно системе двух неравенств, выражающих тот факт, что правый конец каждого отрезка лежит правее левого конца другого или совпадает с ним. ж) $a > \frac{11}{3}$. з) $a \in [3{,}5; 5{,}5]$. и) $a \in [1; 2]$.

§ 3. Кванторы. Структура теорем

Материал этого параграфа очень важен для дальнейшего изучения. Высказывания, полученные «навешиванием кванторов» на предикат с несколькими переменными, встречаются в математике «на каждом шагу», начиная от задач с параметрами и заканчивая материалом начал анализа. Этим высказываниям посвящены задачи I.43, I.47, I.49.

Поэтому важно отработать умение переводить высказывания и теоремы с формального языка на обыденный и обратно. Это умение имеет большое значение для решения сколько-нибудь нестандартно сформулированных задач. Этому посвящена задача I.45.

Другой важной задачей изучения материала этого параграфа является умение переформулировать теорему так, чтобы в её формулировке вычленить, что дано, а что требуется доказать.

Решения и указания к задачам

I.43. а) Ложное. б) Истинное. в) Истинное. г) Истинное. д) Истинное. е) Ложное. ж) Ложное. з) Истинное. и) Ложное. Например, при подстановке $x = 3$ предикат обращается в ложное высказывание.

I.46. а) $\forall x\ \neg P(x) \vee \neg Q(x)$. б) $\exists x\colon R(x) \wedge Q(x)$. в) $\forall x\ P(x) \to$ $\to Q(x)$. г) $\exists x\colon P(x) \wedge Q(x)$. д) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \to R(x)$. е) $\forall x\ (P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (Q(x) \wedge \neg R(x))$.

I.47. а) $\exists x\colon \exists y\colon |x| - y = 1$; $\forall x\ \exists y\colon |x| - y = 1$.

I.49. а) $a \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; +\infty\right)$. *Указание.* Переформулировать высказывание: уравнение $x^2 + ax + 2 = 0$ имеет хотя бы один корень. б) $a \in \left(-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)$. в) При всех a. *Указание.* Можно взять x, равное 0. г) $a \in [0; 4)$.

I.50. а) $y > 8$. *Указание.* Множество истинности исходного предиката от двух переменных изображено на рисунке 1.4. Значение y, для которого высказывание станет истинным, соответствует горизонтальным прямым, целиком лежащим в множестве истинности данного предиката.

б) Таких x не существует. в) $x \geqslant 1$.

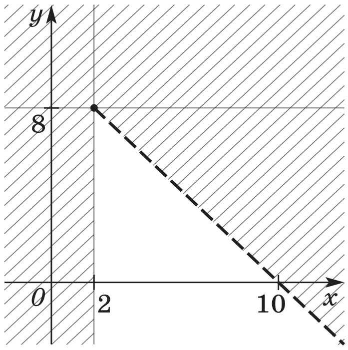


Рис. 1.4

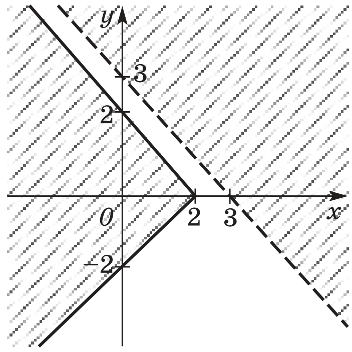


Рис. 1.5

г) $a \neq 1$. **Решение**. При $a^2 - 1 \neq 0$ соответствующее значение x найдётся как $\dfrac{1}{a-1}$. При $a = -1$ уравнение превращается в тождество. При $a = 1$ уравнение решений не имеет. д) $a = -1$. е) $y \in \boldsymbol{R}$. *Указание.* Множество истинности предиката изображено на рисунке 1.5. ж) Таких y не существует. *Указание.* См. рис. 1.5. з) $x \in \boldsymbol{R}$. *Указание.* См. рис. 1.5. и) Таких x не существует.

I.52. а) Истинное. б) Ложное. в) Ложное. **Решение**. При $x = 0$ такого a не существует. г) Ложное. д) Ложное. *Указание.* Условие $\exists x$: $x^2 - ax + b = 0$ означает, что дискриминант соответствующего уравнения неотрицателен. Ясно, что высказывание $\exists a$: $\forall b$ $a^2 - 4b \geqslant 0$ ложно.

Аналогично решаются остальные задания.

е) Истинное. ж) Истинное. з) Истинное. и) Истинное. **Решение**. Можно взять $a = 1$, $c = 1$.

I.53. а) Достаточное. б) Достаточное. в) Условие не является ни необходимым, ни достаточным. г) Условие не является ни необходимым, ни достаточным. д) Необходимое и достаточное.

§ 4. Метод математической индукции

Метод математической индукции — один из важнейших методов доказательства математических утверждений. Но задач на метод математической индукции в «чистом виде» практически не существует. В задачах этот метод используется как важнейшая составная часть решения, требующего ещё каких-либо соображений.

Полагаем, что важным является сначала разобрать пример 38 учебника, в котором метод математической индукции применяется в «чистом виде» (в задачах такими являются I.72, I.73, I.74), а затем уже показать примеры решения стандартных задач: доказательство тождеств, неравенств, соотношений делимости.

Важнейшим является понимание того, что в индукционном переходе берётся утверждение для $k + 1$, которое затем сводится к утверждению для k. Например, при решении задачи I.70 ошибкой будет рассуждение «Возьмём k прямых и добавим к ним ещё одну». Правильным рассуждением является: «Возьмём $k + 1$ прямую и уберём одну из них. Тогда для k оставшихся выполнено предположение индукции».

Это связано с тем, что, «добавляя к k единицу», нужно доказать, что все конфигурации, выражения и т. п. для значения натуральной переменной, равного $k + 1$, могут получиться из соответствующих конфигураций и выражений для k, что далеко не всегда верно.

Обратим внимание на то, что при доказательстве утверждений, связанных с суммой (произведением) n слагаемых (множителей) при $n = 1$ возникает случай суммы (произведения) одного слагаемого (множителя). В этом случае разумно и принято считать выражение равным самому этому слагаемому (множителю). Применение этого соглашения встречается в примере 31 учебника и в задачах I.62, I.72 и др.

Преподаванию метода математической индукции посвящена статья: Рубанов И. С. Как обучать методу математической индукции // Математика в школе. — 1996. — № 1.

Решения и указания к задачам

Задачи I.59—I.73 практически не нуждаются в разборе, поскольку аналогичны разобранным в тексте.

I.61. *Замечание.* Тождество

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$$

встретится нам в 11 классе при изучении комплексных чисел. Оно означает, что (полезно привести эту формулировку): произведение двух чисел, представимых в виде суммы двух квадратов целых чисел, само представимо в виде суммы квадратов целых чисел. Далее применение метода математической индукции не вызывает никаких трудностей.

I.64. Решение. База индукции. Легко проверить, что $111 \vdots 3$.

Индукционный переход. Заметим, что

$$\underbrace{11\ldots1}_{3^{k+1}} = \underbrace{11\ldots1}_{3^k} \cdot 1\underbrace{0\ldots0}_{3^k-1}1\underbrace{0\ldots0}_{3^k-1}1.$$

Первый множитель делится на 3^k по индукционному предположению, а второй делится на 3, поскольку сумма его цифр равна 3.

1.65. а) *Указание.* При переходе от $n = k$ к $n = k + 1$ левая часть изменяется на

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} > 0. \qquad (1)$$

Любопытно, что более слабое неравенство

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > \frac{3}{5}$$

(левая часть увеличилась на $\frac{1}{n}$ по сравнению с левой частью неравенства (1), поэтому, коль скоро верно неравенство (1), верно и более слабое) по индукции доказать не удаётся, так как при переходе от $n = k$ к $n = k + 1$ левая часть изменяется на величину

$$\frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{k} < \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k} - \frac{1}{k} = 0.$$

е) *Указание.* Интересно, что данное неравенство выполнено при $n = 1$, но не выполняется при $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$. Поэтому попытки доказать базу индукции для $n = 1$, а затем доказывать переход обречены на неудачу. Базу индукции нужно доказывать для $n = 5$.

и) *Замечание.* Получение этого неравенства является одним из важных шагов в доказательстве утверждения о том, что между числами n и $2n$ при $n > 1$ существует хотя бы одно простое число (так называемый «постулат Бертрана»).

I.66. Решение. Число n, про которое доказывается утверждение, — это количество знаков квадратного корня.

База индукции. Для $n = 1$ получаем верное неравенство $\sqrt{5} < 5$.

Индукционный переход. Обозначим

$$a_k = \underbrace{\sqrt{5 + \sqrt{5 + \ldots \sqrt{5}}}}_{k \text{ знаков корня}},$$

и пусть $a_k < 5$. Докажем, что $a_{k+1} < 5$. Действительно,

$$a_{k+1} = \sqrt{5 + a_k} < \sqrt{5+5} < 5.$$

Как видно, в доказательстве этого неравенства не используются утверждения 1 и 2, сформулированные в § 4 учебника (с. 33—34).

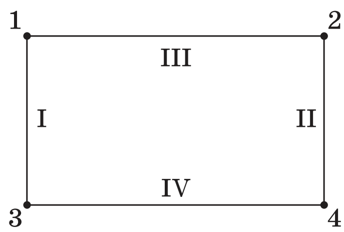


Рис. 1.6

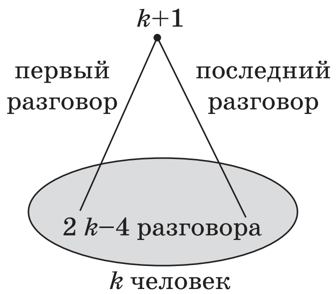


Рис. 1.7

I.70. а) $\frac{n(n+1)}{2}+1$. *Замечание*. Поучительным здесь является то, что при $n = 1$ и $n = 2$ ответ совпадает с 2^n. Нетерпеливые учащиеся дают его в качестве общей гипотезы. Полезно сравнить этот пример с утверждением в конце п. 1 учебника (с. 32).

I.71. Решение. Базу индукции докажем для $n = 4$. Нужно доказать, что 4 человека могут за $2 \cdot 4 - 4$ разговора обменяться четырьмя новостями. Изобразим эту ситуацию схемой: людей будут изображать точки, а разговоры — отрезки, соединяющие эти точки (рис. 1.6). Римские цифры на отрезках означают последовательность разговоров. После разговора I люди 1 и 3 будут знать по две новости. Аналогично после разговора II люди 2 и 4 также знают две новости. После разговора III люди 1 и 2 будут знать по четыре новости. Наконец, после разговора IV люди 3 и 4 также будут знать по четыре новости. Итак, понадобилось 4 разговора, чтобы все люди знали все новости.

Индукционный переход. Пусть для того чтобы k людей обменялись своими новостями, достаточно $2k - 4$ разговоров. Рассмотрим множество из $k + 1$ человека. Выделим одного из них, дав ему номер $k + 1$, и пусть первым разговором этот один сообщит свою новость одному из оставшихся (см. рис. 1.7). Затем, по предположению индукции, k оставшихся человек за $2k - 4$ разговора сообщат друг другу все новости (в том числе и новость $k + 1$-го человека). Наконец, при последнем разговоре $k + 1$-й человек узнает новости остальных k людей, т. е. всего получается $2k - 4 + 2 = 2(k + 1) - 4$ разговора.

I.72. Решение. База индукции. Для $n = 1$ число 2 в разложении имеет ровно одну двойку.

Замечание. Важно обратить внимание учащихся на то, что в произведении присутствуют множители от $n + 1$ до $2n$. При $n = 1$ выполнено равенство $n + 1 = 2n$, а потому множитель в произведении ровно один.

Полезно сравнить это замечание с определением произведения одного множителя или суммы одного слагаемого.

Индукционный переход. Пусть в разложении числа $a_k = (k + 1) \cdot (k + 2) \cdot \ldots \cdot 2k$ на простые множители имеется ровно k двоек. Рассмотрим число $a_{k+1} = (k + 2) \cdot \ldots \cdot 2k \times$ $\times (2k + 1) \cdot 2(k + 1)$ и докажем, что в его разложении на простые множители имеется ровно $k + 1$ двойка. Действительно, имеет место равенство $a_{k+1} = a_k \cdot \dfrac{(2k+1) \cdot (2k+2)}{k+1}$, откуда $a_{k+1} = a_k \cdot (2k + 1) \cdot 2$. Число $2k + 1$ нечётное, а потому умножение на него числа a_k не добавляет двоек в разложение числа a_k. Таким образом, в разложении числа a_{k+1} по сравнению с разложением числа a_k добавилась ровно одна двойка, т. е. в числе a_{k+1} в разложении присутствует ровно $k + 1$ двойка.

I.74. **Решение.** База индукции очевидна.

Индукционный переход. Пусть в стране с k городами такой путь существует. Рассмотрим страну с $k + 1$ городом, каждые два из которых соединены дорогой с односторонним движением. Рассмотрим один из этих городов, обозначив его A. Тогда существует путь, проходящий по остальным городам ровно по одному разу. Изобразим это схематически (рис. 1.8).

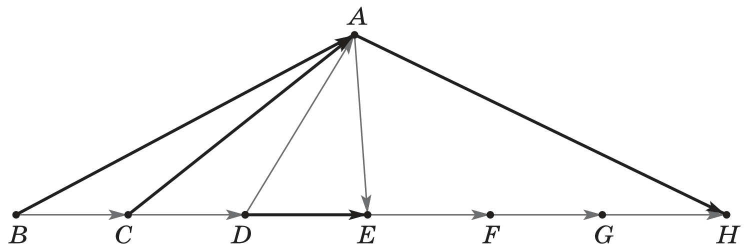


Рис. 1.8

Если дорога, соединяющая A с B, направлена в сторону B, искомый путь найден. Рассмотрим случай, когда дорога направлена к A. Если дорога, соединяющая A и C, направлена в сторону C, то искомый путь идёт от B к A, затем от A к C и далее по существующему пути. Значит, дорога между A и C направлена к A. Если же все дороги, соединяющие A с остальными городами, направлены к A, то искомый путь состоит из имеющегося пути с присоединённой дорогой из H в A.

Таким образом, имеется две «соседних» дороги из A в другие города (на рисунке DA и AE), а тогда искомый путь идёт по имеющемуся пути до вершины D, затем в A, а дальше в E и снова по имеющемуся пути.

§ 5. Элементы комбинаторики. Бином Ньютона

Материал параграфа содержит классические правила и основные формулы комбинаторики. Они охватывают материал, достаточный для усвоения начал комбинаторики в объёме, предусмотренном государственными стандартами.

Основной принцип изучения комбинаторики, по нашему мнению, состоит в том, чтобы подходить к каждой задаче как к отдельной задаче комбинаторики, а не поводу применить ту или иную формулу.

Именно поэтому начала комбинаторики, как раздел, не требующий от учащихся особых знаний из курса основной школы, помещены в начало материала 10 класса. Помимо прочего, изучение этого материала способствует более щадящему режиму адаптации учащихся к программе профильной школы.

Обращаем внимание на то, что во многих задачах возможно различное понимание условия (например, в условии задачи I.123: считать ли фигуры одного достоинства одинаковыми или разными, сравнивая с условием задачи I.102). Такие «недоформулированности» оставлены сознательно, чтобы улучшить навыки понимания прочитанного текста.

При решении задач с целью экономии учебного времени советуем рекомендовать учащимся не доводить ответы до численного значения, а оставлять их в виде выражений, несущих комбинаторный смысл. Это позволит сразу оценить правильность самого решения задачи и облегчит при необходимости поиск ошибки.

Решения и указания к задачам

I.76. $36 \cdot 27$ или $\frac{36 \cdot 27}{2}$. **Решение.** Выбор первой карты можно осуществить 36 способами, а выбор второй — уже 27 способами (поскольку нельзя брать карты той масти, которой была первая выбранная). Если полагать, что условие задачи предполагает существенной очерёдность выбора, то ответом будет $36 \cdot 27$. Если же очерёдность выбора несущественна, а важен лишь набор выбранных карт, то ответом будет $\frac{36 \cdot 27}{2}$, поскольку в предыдущем ответе каждый набор карт посчитан дважды.

I.77. 289. **Решение.** Способов обмена картины на картину будет $15 \cdot 15$, а способов обмена скульптуры на скульптуру будет $8 \cdot 8$. Общее количество способов обмена будет равно $15 \cdot 15 + 8 \cdot 8$. (При решении задачи применяются разбор случаев и правило умножения.)

I.78. $(m+1)(n+1)$. **Решение.** Натуральный делитель числа $2^n \cdot 3^m$ имеет вид $2^a \cdot 3^b$ (где $0 \leqslant a \leqslant n$, $0 \leqslant b \leqslant m$). Указание пары a и b однозначно определяет делитель. Поэтому делителей столько же, сколько пар чисел a и b. Число a можно выбрать $n + 1$ способом, число b можно выбрать $m + 1$ способом. Поэтому искомое число пар равно $(m + 1)(n + 1)$.

I.81. 18 или 36. **Решение.** Задача ничем не отличается от предыдущих, кроме того что среди согласных две одинаковые буквы «к», а среди гласных по две одинаковые буквы «о», «и» и «а». Поэтому число способов выбора гласной буквы равно 3, а число способов выбора согласной буквы равно 6. Поэтому общее число способов выбора равно $3 \cdot 6$. Порядок букв в наборе при таком подсчёте считается несущественным. Если же порядок букв в наборе существенен, то результатом будет $2 \cdot 3 \cdot 6$.

I.82. 64 или 56. **Решение.** Имеется 8 способов выбрать одну дорогу, ведущую наверх, и 8 способов выбрать дорогу, ведущую вниз. Поэтому общее число способов равно $8 \cdot 8$. Если бы Наташа хотела возвратиться вниз другой дорогой, то количество способов было бы равно $8 \cdot 7$.

I.83—I.85. Задачи решаются аналогично предыдущим.

I.86. 2^5. **Решение.** Каждое бросание имеет 2 исхода. Два бросания имеют 2^2 исходов (каждому исходу первого бросания соответствуют 2 исхода второго бросания). Три бросания имеют 2^3 исходов (каждому из 2^2 исходов первых двух бросаний соответствуют 2 исхода третьего бросания). По индукции можно доказать, что при n бросаниях можно получить 2^n различных последовательностей орлов и решек.

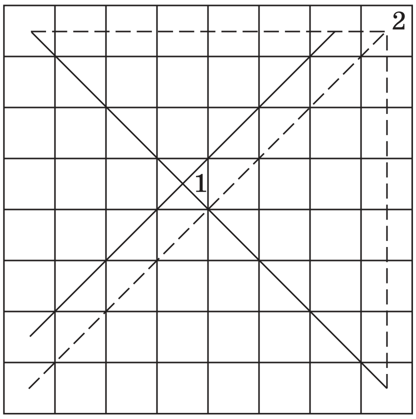
I.87. 5^{20}. **Решение.** Каждой книге можно поставить в соответствие одну из 5 полок. Тогда способов расставить 20 книг будет 5^{20}. (Аналогично предыдущей задаче можно в шутку заметить, что для определения полки для каждой книжки мы подбрасываем монетку с 5 гранями.)

I.89, I.90. Задачи решаются аналогично задачам I.86—I.87.

I.91. $64 \cdot 49$. **Решение.** Белую ладью можно поставить на любую из 64 клеток. Она бьёт 15 клеток (включая ту, на которой стоит). Осталось 49 клеток, на которые можно поставить чёрную ладью.

Следующие задачи используют разбор случаев.

I.92. $4 \cdot 36 + 12 \cdot 38 + 20 \cdot 40 + 28 \cdot 42$. **Решение.** В отличие от предыдущей задачи ферзь бьёт разное число клеток, которое зависит от того, на какой клетке он стоит. В каждом своём положении ферзь бьёт 14 клеток в своей строке и в своём столбце (клетку, на которой он стоит, учтём среди диагоналей). А вот количество клеток, которые ферзь а)



б)

22	22	22	22	22	22	22	22
22	24	24	24	24	24	24	22
22	24	26	26	26	26	24	22
22	24	26	28	28	26	24	22
22	24	26	28	28	26	24	22
22	24	26	26	26	26	24	22
22	24	24	24	24	24	24	22
22	22	22	22	22	22	22	22

Рис. 1.9

бьёт по диагоналям, может изменяться. Так, ферзь, стоящий в углу (положение 2), бьёт 22 клетки (включая ту, на которой стоит он сам), а стоящий в одной из центральных клеток (положение 1) бьёт 28 клеток (рис. 1.9, *а*).

На рисунке 1.9, *б* в каждой клетке выделенной фигуры поставлено количество клеток, которые бьёт стоящий в этой клетке ферзь (включая её саму). Учитывая симметрию шахматной доски относительно диагоналей и средних линий, получаем возможность написать соответствующее число в каждой клетке доски. Таким образом, на доске имеется 4 клетки, для которых стоящий в них ферзь бьёт 28 клеток, 12 клеток, для которых стоящий в них ферзь бьёт 26 клеток, 20 клеток, для которых стоящий в них ферзь бьёт 24 клетки, наконец, 28 клеток, для которых стоящий в них ферзь бьёт 22 клетки. Если поставить белого ферзя в одну из центральных клеток, то чёрный ферзь может стоять в одной из 36 оставшихся. Число способов поставить белого ферзя в центральную клетку равно 4, а значит, расстановок, не бьющих друг друга ферзей, в которых белый ферзь стоит в одной из центральных клеток, будет $4 \cdot 36$. Аналогично расстановок, где белый ферзь стоит в клетках с числом 26, будет $12 \cdot 38$ и т. д.

I.93. $9 \cdot 5^4$. **Решение.** Способ 1. Если все цифры пятизначного числа нечётные, то каждую из них можно выбрать 5 способами, таким образом, пятизначных чисел, составленных только из нечётных цифр, будет 5^5.

Если же все цифры пятизначного числа чётные, то на первом месте могут стоять только 4 цифры (чётные цифры без 0). На каждое из остальных мест можно поставить цифру 5 способами. Поэтому пятизначных чисел, составленных только из чётных цифр, будет $4 \cdot 5^4$.

Всего пятизначных чисел, составленных из цифр одинаковой чётности, будет $4 \cdot 5^4 + 5^5 = 9 \cdot 5^4$.

Способ 2. Этот же результат можно получить и по-другому. Выберем первую цифру произвольно. Это можно сделать 9 способами (на первом месте не может стоять 0). Выбранная цифра задаёт чётность остальных цифр. Независимо от того, какая это чётность, цифр с такой чётностью будет 5. Поэтому на каждое из оставшихся мест ставится одна из 5 цифр, и мы приходим фактически к задаче I.87.

I.94. а) $2^5 - 1$. *Указание.* Будем писать рядом с книгой 0, если она не попала в стопку, и 1 — если попала. Тогда число стопок (без учёта порядка книг) равно числу последовательностей из 5 символов, каждый из которых 0 или 1. Практически это задача I.90. А если вместо нулей и единиц писать орлы и решки, получим в точности задачу I.86. Обратим внимание, что в этих рассуждениях в качестве стопки книг учитывалась и не содержащая ни одной книги. По смыслу задачи такую стопку книг не нужно учитывать.

б) 325. **Решение.** Стопок, состоящих из одной книги, будет 5. Стопок, состоящих из двух книг, будет $5 \cdot 4$ (нижнюю книгу выбираем 5 способами, верхнюю выбираем 4 способами). Аналогично стопок, состоящих из трёх книг, будет $5 \cdot 4 \cdot 3$, стопок, состоящих из четырёх книг, будет $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$, а стопок, состоящих из пяти книг, будет $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (в решении задачи применён разбор случаев).

I.95. $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4$. *Указание.* Задача решается аналогично заданию I.94, *б*.

I.97. *Указание.* Задача является обобщением задачи I.78. Решение такое же, как в примере 20 главы II учебника.

I.98. 9^7. **Решение.** Первую цифру можно выбрать 9 способами. Вторую — тоже 9 способами (из 10 цифр нельзя выбрать ту, которая стоит на первом месте). Аналогично третью цифру можно выбрать 9 способами и т. д.

I.99—I.101, I.104. Решения аналогичны решениям примеров 45, 46 учебника.

I.102. 8!. **Решение.** Если 8 ладей не бьют друг друга, то в каждом столбце и в каждой строке должна стоять ровно одна ладья. В первый столбец ладью можно поставить 8 способами, во второй — 7 способами и т. д.

I.103. а) $7 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. **Решение.** Способ 1. Поставим сначала одного из учеников на первое место (это можно сделать 7 способами), затем одного на последнее (это можно сделать 6 способами). На второе место можно выбрать ученика 6 способами (туда можно ставить Вову), на третье место можно выбрать ученика 5 способами и т. д.

Способ 2. Этот же ответ можно получить по-другому. Всего расстановок учеников 8!. Расстановок, где Вова стоит с краю, $2 \cdot 7!$ (когда Вова стоит первым или последним, оставшихся детей можно расположить 7! способами). Таким образом, требуемое число способов равно $8! - 2 \cdot 7!$. Нетрудно проверить, что этот ответ численно равен предыдущему.

б) $2 \cdot 7!$. *Указание.* Решение аналогично решению примера 50, *а* учебника.

в) $8! - 2 \cdot 7!$ *Указание.* Используйте результат задачи I.103, *б*.

г) $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи I.103, *а*.

I.105. $2 \cdot 3! \cdot 3!$. **Решение.** Ясно, что либо на чётных местах стоят гласные буквы, а на нечётных — согласные, либо наоборот. На 3 чётных места поставить 3 различные буквы можно 3! способами. Для каждого из этих способов существуют 3! способов расстановки оставшихся 3 букв на оставшихся местах. С учётом выбора того, гласные или согласные стоят на чётных местах, получаем $2 \cdot 3! \cdot 3!$.

I.106. $2 \cdot 8! \cdot 8!$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи I.105.

I.107. *Указание.* Решение аналогично решению примера 49 учебника.

I.108. $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$. **Решение.** Первую цифру выбираем 9 способами (на первом месте в записи числа не может стоять 0), для каждого выбора первой цифры вторую выбираем 9 способами, третью — 8 способами и т. д.

I.109. $9 \cdot 10^6 - 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$. **Решение.** Всего семизначных чисел существует $9 \cdot 10^6$. Чисел, в которых все цифры различны, аналогично предыдущей задаче, существует $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$.

I.110, I.111. Решаются аналогично задаче I.109.

I.110. $6^6 - 6!$. Указание. Из количества всех слов вычитается количество слов, в которых все буквы различны.

I.111. $6^3 - 5^3$.

I.112. $\frac{10!}{2}$ или 9!. **Решение.** Полезно заметить, что условие задачи допускает 2 интерпретации.

1) Между Машей и Витей могут быть люди, а тогда каждой расстановке, где Маша стоит после Вити, соответствует расстановка, где Маша стоит перед Витей (просто поменяем Машу и Витю местами, а остальных учеников оставим на своих местах). Поэтому ровно половина всех расстановок нужные, т. е. учеников можно расставить $\frac{10!}{2}$ способами.

2) Маша должна стоять сразу после Вити, тогда Машу и Витю можно считать как одного человека. И тогда способов расстановки учеников 9!.

I.113. $\frac{10!}{3}$. **Решение.** Задача похожа на задачу I.112. Разница в том, что каждой перестановке цифр ставим в соответствие ещё 5, полученных всевозможными перестановками цифр 0, 1 и 2, притом что остальные цифры остаются на месте. Таким образом, все расстановки цифр разбиваются на группы по 6 расстановок в каждой группе. При этом расстановки цифр в одной группе могут отличаться лишь положением цифр 0, 1 и 2. Из 6 расстановок группы ровно 2 удовлетворяют условию. Значит, треть всех расстановок искомые.

I.115. C_{20}^2. *Замечание.* Полезно рассмотреть также решение непосредственно по правилу умножения.

I.116. $C_8^2 \cdot C_7^1$. *Указание.* При решении задачи воспользоваться правилом умножения и определением числа сочетаний.

I.117, I.118. Задачи решаются аналогично задачам I.115, I.116.

I.119. $\frac{9!}{2!\,3!\,4!}$. *Указание.* Задача решается аналогично примеру 49 учебника. Если бы все фрукты были разными, ответом являлось бы число 9!. Однако, так как некоторые фрукты одинаковы, то способов дать фрукты сыну $\frac{9!}{2!\,3!\,4!}$.

I.120. $\frac{7!}{2!\,4!}$. *Указание.* Задача аналогична предыдущей. Если бы все комнаты были одноместными, ответ был бы 7!. А поскольку часть расстановок совпадает, то поселить студентов можно $\frac{7!}{1!\,2!\,4!}$ способами.

I.121. $\frac{16!}{3!5!8!}$.

I.122. $\frac{18!}{7!2!2!3!}$. *Указание.* Внимательно подсчитайте количество одинаковых букв.

I.123. $\frac{8!}{2!2!2!}$.

I.124. $C_n^2 - n$. **Решение.** Если соединять вершины n-угольника отрезками, то будет проведено отрезков столько, сколько пар вершин, т. е. C_n^2. Среди этих отрезков имеется n сторон, а остальные отрезки являются диагоналями.

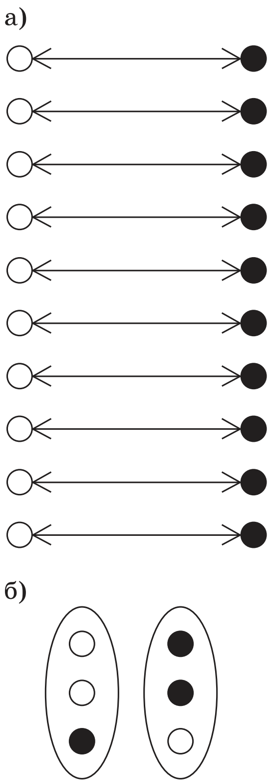


Рис. 1.10

I.126. $\frac{C_{20}^3}{2}$. **Решение.** Поставим в соответствие каждому вопросу, ответ на который школьник знает, один и ровно один вопрос, ответ на который школьник не знает (это возможно сделать, потому что и тех и других вопросов по 10). Такое соответствие изображено на рисунке 1.10, *а* (закрашенный кружок — вопрос, на который ответ неизвестен, пустой кружок — вопрос, ответ на который известен). Тогда каждому билету, отвечая на который школьник сдаст экзамен (назовём такой билет благоприятным), соответствует один и ровно один билет, отвечая на который школьник не сдаст экзамен (назовём такой билет неблагоприятным). Этот билет получается заменой вопросов, ответы на которые известны, на соответствующие им вопросы с неизвестными ответами (рис. 1.10, *б*). Таким образом, всё множество билетов разбивается на пары, в каждой из которых один билет для ученика благоприятен, а другой неблагоприятен. Значит, количество благоприятных билетов равно половине общего количества возможных билетов.

I.127. $\frac{C_{12}^4 \cdot C_8^4 \cdot C_4^4}{6}$. *Указание.* Решение задачи аналогично решению примера 55 учебника. Ответ приведён для случая, когда учитывается состав команд, но не их порядок.

I.129. $C_6^3 \cdot 5^6 - C_5^2 \cdot 5^5$. **Решение.** Выберем из 6 мест в записи шестизначного числа 3 места, на которых могут стоять чётные цифры (это можно сделать C_6^3 способами). На каждое из этих мест можно поставить 1 из 5 цифр. Однако ошибочно ответом считать число $C_6^3 \cdot 5^6$, так как в подсчитанные расстановки входят те, у которых на первом месте стоит 0. Остаётся из общего числа расстановок вычесть количество расстановок, у которых на первом месте стоит 0 (их число равно $C_5^2 \cdot 5^5$).

I.130. $3! \cdot (5!)^3$. **Решение.** Сначала определимся с порядком следования собраний сочинений. Их можно расставить 3! способами. В каждом собрании сочинений тома можно расставить 5! способами. Таким образом, общее количество способов равно $3! \cdot (5!)^3$.

I.131. 2^{10}. *Указание.* Читать слово можно либо слева направо, либо сверху вниз. На каждой букве, кроме последней, есть 2 варианта выбора направления чтения.

I.132. $\dfrac{14!}{(2!)^7}$.

I.133. C_{10}^7. **Решение.** Условие задачи предполагает, что все цифры в этом числе разные. А 7 различных цифр можно единственным образом расположить в порядке возрастания справа налево. Таким образом, искомых чисел ровно столько, сколько способов выбрать 7 различных цифр из 10. (Очень поучительная задача!)

I.134. б) C_n^4. **Решение.** Каждым четырём вершинам выпуклого n-угольника однозначно соответствует точка пересечения диагоналей соответствующего четырёхугольника (рис. 1.11). Поэтому точек пересечения диагоналей n-угольника столько же, сколько четырёхугольников с вершинами в его вершинах.

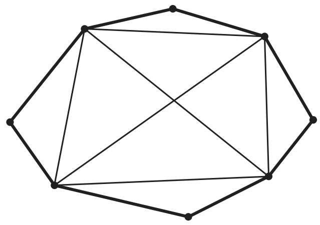


Рис. 1.11

I.135. $4 \cdot C_{13}^3 \cdot 13^3 + C_4^2 \cdot (C_{13}^2)^2 \cdot 13^2$. *Замечание.* Приведём типичное неверное решение. Выберем по одной карте каждой масти (это можно сделать 13^4 способами), а оставшиеся две карты выберем произвольно (это можно сделать C_{48}^2 способами). Таким образом, количество способов выбрать 6 карт так, чтобы среди них были представители всех мастей, казалось бы, равно $C_{48}^2 \cdot 13^4$. Однако при этом выбор дамы пик среди первых четырёх карт и туза пик среди оставшихся карт мы считаем отличающимся от выбора туза пик среди первых четырёх карт и дамы пик среди оставшихся двух карт. Таким образом, в наших подсчётах один и тот же набор карт подсчитывается несколько раз.

Задачу можно решить следующим образом.

Решение. Если 6 карт содержат представителей всех четырёх мастей, то оставшиеся две карты могут быть либо одной масти, либо двух мастей.

В первом случае можно выбрать одну из четырёх мастей, а затем выбрать 3 карты этой масти и по одной карте оставшихся мастей. Тем самым эта возможность может быть реализована $4 \cdot C_{13}^3 \cdot 13^3$ способами.

Во втором случае можно выбрать две масти, в которых будет по две карты, C_4^2 способами, а затем выбрать в этих мастях по две карты, а в оставшихся — по одной. Количество способов во втором случае, таким образом, равно $C_4^2 \cdot (C_{13}^2)^2 \cdot 13^2$.

I.136. $\dfrac{A_{100}^8}{(2!)^4}$.

I.137. $A_{16}^4 \cdot A_5^4$.

I.138. $1 + C_5^1 + C_6^2 = C_7^2$. *Указание.* Условие задачи предполагает, что должны быть использованы все буквы A.

I.139. **Решение.** Доказательство равенства с помощью формулы очевидно.

Докажем равенство с помощью комбинаторных рассуждений. Рассмотрим выбор из n человек команды, состоящей из k человек, возглавляемой капитаном. Этот выбор можно осуществить, набрав сначала команду из k человек (что можно сделать C_n^k способами), а затем из этих k человек выбрать капитана, что можно сделать k способами. Таким образом, число способов выбрать из n человек команду из k человек с капитаном равно kC_n^k.

С другой стороны, можно сначала выбрать капитана (n способами), а затем выбрать из оставшихся $n - 1$ человек $k - 1$ члена команды, что можно сделать C_{n-1}^{k-1} способами. Итак, искомое число способов равно nC_{n-1}^{k-1}.

Полученный двумя различными способами один и тот же комбинаторный результат доказывает утверждение задачи.

I.143. 26. **Решение.** Слагаемые будут рациональными, если $\sqrt{2}$ будет возводиться в чётную степень, а $\sqrt[4]{3}$ будет возводиться в степень, показатель которой кратен 4. Так как сумма показателей равна 100, а от 0 до 100 имеется 26 чисел, кратных 4, то всего имеется 26 рациональных слагаемых.

I.147. Коэффициент второго разложения больше. **Решение.** Все одночлены 17-й степени в первом выражении после раскрытия скобок до приведения подобных слагаемых имеют вид $a_{k,\,l}(x^2)^k(-x^3)^l$, а во втором выражении $a_{k,\,l}(-x^2)^k(x^3)^l$, где $2k + 3l = 17$ (обратите внимание, что коэффициент $a_{k,\,l}$ в обоих разложениях один и тот же для одинаковых наборов k и l и является натуральным числом). Поскольку $3l = 17 - 2k$ является нечётным числом, то l нечётно. В то же время k может принимать как чётные (например, $k = 4$, $l = 3$), так и нечётные (например, $k = 1$, $l = 5$) значения. Поэтому в первом разложении все слагаемые степени 17 будут с отрицательными коэффициентами, а во втором разложении некоторые — с положительными коэффициентами, а некоторые — с отрицательными. Поэтому после приведения подобных слагаемых коэффициент первого разложения при x^{17} меньше.

Замечание. Коэффициенты $a_{k,\,l}$ не надо вычислять, достаточно знать, что они одинаковы в обоих разложениях и положительны.

I.148. *Указание.* Для вычисления сумм достаточно подставить в формулу бинома $(1 + x)^n$ значение: а) $x = 2$, б) $x = 3$, в) $x = -1$.

I.149. а) *Указание.* Тождество получается как равенство коэффициентов при x^n в левой и правой частях равенства $(1 + x)^{n+m} = (1 + x)^n(1 + x)^m$.

б) *Указание.* Можно воспользоваться результатом задачи I.139 и тождеством из примера 59 учебника.

в) *Указание.* Можно воспользоваться для $m = n$ тождеством из задания I.149, *а* с учётом равенства $C_n^k = C_n^{n-k}$.

I.150. $2^{11} - (1 + 11 + C_{11}^2)$. **Решение.** Каждому множеству точек окружности (если точек в наборе больше 2) соответствует единственный выпуклый многоугольник с вершинами в точках этого множества. Поэтому количество возможных выпуклых многоугольников равно количеству возможных множеств точек. Количество возможных подмножеств множества из 11 элементов равно 2^{11}. Однако нужно исключить пустое подмножество, а также множества из одного и двух элементов.

I.151. *Указание.* Утверждение, которое требуется доказать, является следствием результата задания I.148, *в*.

I.152. а) C_{28}^6. *Указание.* Задача сводится к выбору 6 промежуточных позиций ладьи на полоске, которые выбираются из 28 промежуточных клеток полоски.

б) $2^{28} - 1$. *Указание.* Аналогично заданию I.152, *а* это количество равно $C_{28}^1 + C_{28}^2 + \ldots + C_{28}^{28}$, и с учётом равенства примера 59 учебника оно равно $2^{28} - 1$.

§ 6. Особенности множества вещественных чисел

Основными понятиями параграфа являются понятия супремума и инфимума. Важно озвучить ученикам следующий критерий супремума:

Число M является супремумом непустого множества A тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

1) M — верхняя граница множества A.

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in A$: $x > M - \varepsilon$.

Можно сказать, что в словосочетании «точная верхняя граница» первое условие отвечает за слова «верхняя граница», а второе отвечает за слово «точная» (если взять число хоть чуть меньше, оно уже не станет верхней границей).

Решения и указания к задачам

I.163. *Замечание.* Важно провести доказательство с использованием определений супремума и инфимума.

а) **Решение.** Пусть M — верхняя граница множества B. Тогда $\forall x \in A \ \exists y \in B$: $x \leqslant y \leqslant M$. Итак, $\forall x \in A \ x \leqslant M$, что и означает ограниченность множества A.

б) **Решение.** В задании *а* доказано, что любая верхняя граница множества B является верхней границей множества A, в том числе и наименьшая из верхних границ B, т. е. $\sup B$.

Итак, $\sup B$ — это верхняя граница множества A. Так как $\sup A$ — наименьшая из верхних границ множества A, то $\sup A$ не превосходит любой верхней границы множества A, в том числе и $\sup B$.

Замечание. Рассуждение *б* имеет смысл при условии существования $\sup A$ и $\sup B$.

§ 7. Мощность множеств

Мы полагаем, что материал этого параграфа чрезвычайно важен для формирования математической культуры. Изучить этот материал можно, например, в форме беседы или докладов учащихся. Но мы считаем, что этим материалом, несмотря на его необязательность, нельзя пренебрегать. Более того, соображения, связанные с исследованием мощности множеств, могут играть существенную роль в решении задач.

Можно предложить учащимся решить следующие задачи:

1. Представьте множество натуральных чисел в виде объединения счётного множества непересекающихся счётных множеств.
2. а) Докажите, что множество всех многочленов с целыми коэффициентами счётно.

   б) Докажите, что множество корней всевозможных многочленов с целыми коэффициентами (такие числа называются алгебраическими) счётно.

   в) Докажите, что существуют вещественные числа, не являющиеся алгебраическими (т. е. каждое из этих чисел не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами). Такие числа называются трансцендентными.

§ 8. Уравнения с одной переменной. Равносильность и следствие

Данный параграф вместе с двумя последующими призван обобщить и систематизировать имеющиеся у школьников знания, связанные с уравнениями и неравенствами. Поскольку уравнения и неравенства в силу исторической традиции (от которой, по мнению авторов, нужно постепенно отходить), с одной стороны, являются основным содержанием курса алгебры и начал анализа в школе, а с другой — основными инструментами в решении таких задач, как, например, исследование функции с помощью производной, необходимо уделить им в курсе должное внимание. В частности, рассмотреть на новом уровне с учётом уже полученных знаний понятие корня уравнения, равносильности и следования уравнений.

Поэтому основной целью при изучении параграфа является овладение понятиями равносильности и следования уравнений, с тем чтобы в дальнейшем осознанно пользоваться ими. При этом в параграфе не изучаются специальные методы и классы уравнений, которым будет полностью посвящена глава XIII.

Другой целью изучения материала является понимание учащимися того, что решить уравнение означает записать множество истинности соответствующего предиката в специально оговорённом виде.

На уроках, посвящённых изучению материала данного параграфа, необходимо особое внимание уделить причинам, по которым нарушается равносильность.

Решения и указания к задачам

I.169, I.170. Примеры предназначены для устной работы в классе. Они демонстрируют важность понятия области определения и её влияние на множество корней уравнения.

I.171. а) Да. б) Нет. в) Да. г) Нет. д) Нет. е) Нет. ж) Нет.

Замечание. Обратим внимание, что отсутствие равносильности можно доказать просто предъявлением корня одного из уравнений, не являющегося корнем другого, в то время как наличие равносильности придётся доказывать, показав совпадение множеств корней обоих уравнений. Здесь уместно напомнить учащимся, что это происходит потому, что равносильность предикатов является утверждением, записанным с помощью квантора всеобщности, поэтому для его опровержения достаточно примера.

I.172. а) Да. б) Нет. в) Да. г) Нет. д) Нет. е) Да. ж) Нет. з) Да. и) Нет. к) Нет. л) Да. м) Нет.

Замечание. С учащимися можно проанализировать результаты решения этих задач и выявить две основные причины появления неравносильности:

1) изменение области определения (например, I.171, *б*, *г*, *д*, *е*, I.172, *б*, *г*, *ж*, *к*, *м*);

2) совершение с уравнением некоторых действий, не изменяющих области определения, но приводящих к появлению новых корней или утрате имеющихся (например, I.171, *ж*, I.172, *д*, *и*, *м*).

Следует указать учащимся, что само по себе действие, ведущее к изменению области определения, может не привести к утрате равносильности (например, I.171, *в*, I.172, *а*, *в*, *л*), равно как, например, умножение (или деление) обеих частей равенства на выражение, содержащее переменную (например, I.172, *е*, *з*).

Таким образом, решение уравнений требует осознанных действий. Поэтому авторы не прибегали к широко распространённым «рецептам» решений различных видов и типов уравнений, справедливо полагая, что «на каждый чих не наздравствуешься», и лучше вооружить учащихся методологией решения уравнений и основными подходами, нежели своего рода «сборником рецептов».

I.174. ж) 1. **Решение.**

$$\sqrt{x^2+8} = 2x+1 \Rightarrow x^2+8 = (2x+1)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\dfrac{7}{3}. \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что ответом является $x = 1$.

и) 3. **Решение.**

$$\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{3x-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2}\right)^2 = \left(\sqrt{7x+4} - \sqrt{3x-5}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (8x+1)(2x-2) = (7x+4)(3x-5) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -\dfrac{6}{5}. \end{array}\right.$$

Проверкой убеждаемся, что ответом является лишь $x = 3$ $\left(x = -\dfrac{6}{5} \text{ не входит в ООУ}\right)$.

§ 9. Неравенства с одной переменной

Как уже отмечалось выше, этот параграф призван обобщить и систематизировать знания школьников о неравенствах на основе теоретических сведений, изученных в главе I.

Пункты, посвящённые области определения неравенства, а также понятию равносильности неравенств, несколько повторяют соответствующие пункты для уравнений. Однако в отличие от уравнений нет возможности решить неравенство с помощью цепочки следствий. Поэтому вопрос о сохранении равносильности неравенств при преобразованиях приобретает первостепенное значение.

Мы полагаем, что основная цель изучения этого параграфа — овладение методом интервалов как основным методом решения неравенств. В дальнейшем (глава XIII) метод интервалов получит своё развитие применительно к различным видам неравенств, а также при решении неравенств с параметром методом областей.

Конечно же, основное внимание при решении задач следует уделить методу интервалов. Почти всегда решение неравенств методом интервалов является наиболее предпочтительным. Одним из немногих исключений является решение неравенств вида $|f| > g$ или $|f| < g$.

Можно сформулировать на уроке следующий алгоритм решения неравенств с помощью метода интервалов:

1. Привести неравенство к виду неравенства, в правой части которого стоит 0 (перенести все слагаемые в одну часть).
2. Нарисовать ось.
3. Найти область определения неравенства и нанести её на ось. При этом выколотые точки отметить «полыми» кружочками.
4. Найти корни левой части неравенства и нанести их на ось. Если знак неравенства нестрогий, корни отмечаются «сплошными» кружочками. В результате (в случае обычных «школьных» неравенств) область определения разбивается на промежутки, в каждом из которых левая часть неравенства имеет один и тот же знак.
5. Определить знаки левой части неравенства на полученных промежутках. Это можно сделать либо анализом того, что происходит при движении вдоль оси при переходе через отмеченные на оси точки (наподобие того, как это показано в примерах 82 и 83 учебника), либо вычислением значений функции, стоящей в левой части, в точках, взятых по одной на каждом из промежутков.
6. Записать ответ, «считав» его с рисунка.

Этот алгоритм универсален для всех неравенств с непрерывными функциями. В дальнейшем при изучении материала главы VIII можно акцентировать на этом внимание, уточнив, что на ось нужно наносить не только выколотые точки, но и точки разрыва функции.

Фактически грамотным применением этого алгоритма исчерпываются все задачи I.184—I.194, за исключением задачи I.191.

Обратите внимание, что при решении задач I.190 *г* и *д* в ответе возникают выколотые точки, а при решении задач I.193 и I.194 — изолированные точки.

При решении неравенств методом интервалов учащиеся должны понимать, за счёт чего могут появляться изолированные и выколотые точки решений. Это способствует формированию навыков самоконтроля, которые могут позволить избежать ошибок при решении неравенств более сложного вида (например, иррациональных), для этого полезно разобрать задачу I.191.

Решения и указания к задачам

I.176. а) Да. б) Нет. в) Да. г) Нет. е) Нет. ж) Да. з) Нет. и) Да. к) Нет. л) Да. м) Нет. н) Нет. о) Нет. п) Нет. р) Нет. с) Нет. т) Нет. у) Да. ф) Нет.

Замечание. Достаточно часто примеры расположены парами, в которых происходят похожие преобразования, но с различным результатом для равносильности неравенств (например, задания *а* и *б*, *г* и *д*, *и* и *к*, *л* и *м* и т. д.). Это позволяет проанализировать причины, по которым нарушается равносильность, сравнив эти задачи с утверждениями о равносильных преобразованиях неравенств в тексте параграфа.

В задании *з* следует обратить внимание учащихся на то, что обычно умножение обеих частей неравенства на выражение, содержащее переменную, есть грубейшая ошибка!

Как и в случае уравнений, для доказательства отсутствия равносильности достаточно привести пример числа, являющегося решением одного из неравенств и не являющегося решением другого. Здесь уместно напомнить учащимся, что это происходит потому, что равносильность предикатов является утверждением, записанным с помощью квантора всеобщности, поэтому для его опровержения достаточно примера.

§ 10. Уравнения и неравенства с модулем

Изучение уравнений и неравенств с модулем является пропедевтическим для изучения основ анализа (определения предела функции и предела последовательности). Для этих целей можно было бы ограничиться решением неравенств вида $|f| > g$ или $|f| < g$. Но чтобы больше не возвращаться к вопросу об уравнениях и неравенствах, содержащих модуль, рассмотрен метод их решения посредством раскрытия модуля, в каком-то смысле примыкающий к методу интервалов.

Особое внимание обращаем на описанный в примерах 86, 87, 88 и 89 учебника способ записи раскрытия модуля. Опыт преподавания авторов говорит, что такая запись помогает уменьшить число ошибок и облегчает отбор корней.

Важно обратить внимание учащихся, что в задачах, где сравниваются два модуля (например, I.181, *д* и I.182, *а*), наряду с решением, использующим раскрытие модуля по определению, полезно возвести обе части неравенства в квадрат (данное преобразование приведёт к равносильному неравенству, поскольку обе части исходного неравенства заведомо неотрицательны).

Стоит обратить внимание учащихся на то, что своевременное наблюдение за полученными выражениями может упростить решение задачи.

Решения и указания к задачам

I.180. д) $x \in [0;\ 1]$. **Решение.** Условие $|x| + |x - 1| = 1$ означает, что на числовой оси сумма расстояний от точки x до точки 0 и до точки 1 равна 1, т. е. длине отрезка $[0;\ 1]$. Такое возможно в том и только том случае, когда точка x лежит на этом отрезке.

е) **Решение.** Заметим, что $1 - |x| \leqslant 1$, а потому исходное уравнение равносильно уравнению $1 - |x| = -14$, откуда $x = 15$ или $x = -15$.

ж) *Указание.* Решение уравнения сильно упростится, если принять $|x|$ за новую переменную.

з) $[-3;\ 1]$. **Решение.** Заметив, что $3 - 2x - x^2 = -(x^2 + 2x - 3)$, и заменив $x^2 + 2x - 3 = a$, получим, что $|a| = -a$, что бывает при $a \leqslant 0$ (вот где пригодится более удобная форма записи определения модуля, приведённая на с. 73 учебника). Таким образом, остаётся решить неравенство $x^2 + 2x - 3 \leqslant 0$.

и) *Указание.* Решается аналогично заданию *з*.

к) $x = 2$. **Решение.** Заметим, что $\dfrac{1}{|x - 1|} > 0$, а потому решения стоит искать среди тех x, для которых $x - 1 > 0$, а тогда $|x - 1| = x - 1$, и можно решать уравнение $(x - 1)^2 = 1$ при условии $x > 1$.

I.181. г) $x < 1$. **Решение.** Запишем неравенство в виде $|x + 2| - |x - 1| < 3$. Выполнение этого неравенства означает, что разность расстояний от точки, изображающей на числовой оси число x, до точек, изображающих числа

–2 и 1, должно быть меньше 3, т. е. расстояния между точками, изображающими числа –2 и 1, что выполнено для всех точек, лежащих левее 1.

д) $(-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. *Указание*. Решается аналогично заданию *г*. Раскрытие модуля $|x^2 - 5x + 9|$ облегчается тем, что $x^2 - 5x + 9 > 0$ при всех вещественных значениях x. Таким образом, раскрытие модуля сводится к сравнению x с 6. Приведём решение с возведением обеих частей в квадрат.

$$|x - 6| \leqslant |x^2 - 5x + 9| \Leftrightarrow (x - 6)^2 \leqslant (x^2 - 5x + 9)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^2 - 6x + 15)(x^2 - 4x + 3) \geqslant 0.$$

Последнее неравенство решается методом интервалов.

Такое решение в данном случае не даёт существенной экономии времени и сил. Однако, если бы квадратичная функция под знаком модуля имела бы корни, решение данного примера прямым раскрытием модуля было бы существенно длиннее решения, связанного с возведением обеих частей неравенства в квадрат.

л), м) *Указание*. Решение неравенств можно начать (ещё до раскрытия модуля) с умножения обеих частей неравенства на знаменатель, который, хотя и содержит переменную, является положительным при всех значениях x.

I.182. а) $x > 0$. **Решение**. Исходное неравенство означает, что расстояние от точки x до 1 меньше, чем расстояние от точки x до –1. Это бывает тогда и только тогда, когда точка находится правее середины отрезка, между 1 и –1, т. е. правее 0. Напомним, что при решении этого неравенства можно также использовать возведение в квадрат обеих частей.

г), д) *Указание*. Решение станет несколько проще, если принять $|x|$ за новую переменную.

Глава II. Целые числа

Основная цель данной главы — систематизировать и обобщить сведения о свойствах целых чисел, делимости и т. д. Следует признать, что после изучения соответствующего материала в 5 и 6 классах (где он имел в основном вспомогательное значение для поиска общих знаменателей обыкновенных дробей) в учебных программах, да и в практике преподавания целым числам почти не отводится места. Это тем более удивительно, что теория целых чисел уникальна по своему развивающему потенциалу и способности вызвать у детей интерес к математике. А в последние десятилетия выяснилось, что это не просто высокая теория, а основа современных технологий шифрования и передачи информации.

Наличие в федеральном компоненте стандартов по математике профильного уровня материала, посвящённого целым числам, мы считаем благоприятным поводом для серьёзного рассмотрения соответствующей теории, подкреплённой набором задач. Отметим также, что задачи с целыми числами являются весьма распространённым классическим элементом содержания математических олимпиад разного уровня.

В этой главе продолжается линия изучения дискретных объектов, начатая в главе I с изучения метода математической индукции и комбинаторики. Избранная последовательность изложения единообразна как для изучения целых чисел, так и для изучения алгебраических свойств многочленов.

При изучении данной главы основное внимание должно уделяться:

1. Схеме построения теории делимости целых чисел. Эта схема в дальнейшем будет практически дословно повторяться для многочленов.
2. Решению задач с целыми числами. Решение задач должно быть ведущим видом деятельности.

Следует обратить внимание на то, что методы доказательства теорем этой главы практически совпадают с методами решения задач.

Очень многие свойства (например, свойства делимости, связанные с простыми и взаимно простыми числами) настолько привычны для учащихся, что применяются ими неосознанно. Авторы считают, что это вполне допустимо. Более того, в параграфах 9—13 в ряде задач используются свойства взаимной простоты в приложении к делимости. Однако в этих задачах применение таких свойств не является основной идеей. В то же время исключение таких задач существенно обеднит задачный материал соответствующих разделов. Поэтому при изучении материала возможны два подхода:

- рассмотрение теории крупным блоком, с тем чтобы содержательные свойства появились практически сразу, и последующее решение большого количества задач;
- заострение внимания учащихся на недоказанных утверждениях, которые используются в решении той или иной задачи, с последующим доказательством таких утверждений.

Поэтому в приведённом ниже планировании изучения главы II крупные разделы материала не детализированы.

Обращаем также внимание на то, что материал главы находит малое применение в дальнейшем изучении курса и в материалах различных экзаменов. Поэтому (в случае острой нехватки учебного времени) можно ограничиться его частичным изучением, оставив в рамках элективных курсов вопросы взаимной простоты, доказательства основной теоремы арифметики и получения линейного представления наибольшего общего делителя целых чисел.

Приведём примерный план изучения материала главы II в основном курсе (без учёта элективных курсов).

Глава II. Целые числа	**10**	**12**
Деление с остатком целых чисел. Сравнения. Перебор остатков	4	6
Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух целых чисел. Алгоритм Евклида	4	4
Контрольная работа № 5	2	2

§ 11. Деление с остатком целых чисел

Как ни странно, несмотря на то, что делить с остатком натуральные числа ученики обычно умеют, определение деления с остатком они не осознают. Это становится причиной многочисленных ошибок или даже неумения решать текстовые задачи на деление с остатком, в изобилии представленные в разного рода экзаменационных материалах.

Поэтому основное внимание при изучении этого параграфа должно быть уделено применению определений деления с остатком и делимости, а также отработке простейших свойств делимости.

II.3. а) –21; 8. **Решение.** По определению деления с остатком можно записать: $-538 = 26b + r$, где $0 \leqslant r < |b|$. Из этого равенства следует, что $-538 - r = 26 \cdot b$, откуда получаем, что $b < 0$. Кроме того, $|-538 - r| = 538 + r$ в силу неотрицательности r, а потому $26|b| \geqslant 538$, откуда $|b| \geqslant \frac{538}{26}$, что с учётом целочисленности числа b даёт $|b| \geqslant 21$.

С другой стороны, так как $b < 0$, а $0 \leqslant r < |b|$, то $26b + r < 25b$, откуда $-538 < 25b$. Принимая во внимание знак b, получим $|b| < \frac{538}{25}$, т. е. с учётом целочисленности b имеет место неравенство $|b| \leqslant 21$. Таким образом, $|b| = 21$, а тогда так как $b < 0$, то $b = -21$. Дальнейшее очевидно.

б) **Решение.** По определению деления с остатком имеем $-2007 = -109b + r$. Аналогично решению задания *а* получаем, что $b > 0$, причём $b > \frac{2007}{109}$, откуда $b \geqslant 19$. С другой стороны, $-109b + r < -108b$, откуда $b < \frac{2007}{108}$, т. е. $b \leqslant 18$. Таким образом, подходящих значений b не существует.

II.4. –1; 1.

II.5. 431. **Решение.** $18 \cdot 23 + 17 = 431$.

II.6. *Указание.* Ответ следует искать среди делителей числа $341 - 18$, по модулю больших 18, т. е. среди чисел 323, –323, 19 и –19.

II.7. $r \in \{2; 12; 14; 20; 24; 26; 30; 32; 36; 42; 44; 48; 50; 54; 56; 60; 62; 64; 66; 68; 70; 72; ...; 84; 85; ...; 126\}$. *Указание.* Фактически эта задача является логическим продолжением предыдущей. Отметим, что в задаче подразумевается существование единственного натурального b, удовлетворяющего условию задачи (в противном случае задача решений не имеет, так как можно поменять знак одновременно делимого и неполного частного и получить запись деления с остатком на $-b$).

Решение. Пусть $253 = bq + r$. Тогда $bq = 253 - r$. Искомое b может быть лишь среди делителей числа $253 - r$, причём оно должно быть больше r. Но тогда и само число $253 - r$ тоже будет больше r, т. е. запись $253 = (253 - r) \cdot 1 + r$ будет записью деления с остатком. Поскольку запись деления с остатком r должна быть единственной, то никаких других записей деления с остатком не должно быть. Это означает, что все делители числа $253 - r$, отличные от самого этого числа, не превосходят r.

Учитывая условие $253 - r > r$, откуда $r \leqslant 126$, приходим к необходимости перебора значений r. Этот перебор может быть существенно сокращён использованием соображений чётности.

В ответ входят все чётные числа, большие 64. Это связано с тем, что при вычитании из 253 чётного числа, большего 64, полученная разность будет нечётна и меньше, чем $3 \cdot 64$, поэтому все её делители (кроме самого числа) будут заведомо меньше 64, а значит, и вычитаемого числа r.

Рассмотрим нечётные числа r. Если r нечётно, то $253 - r$ чётно. Значит, число $253 - r$ имеет делитель $\frac{253 - r}{2}$. Этот делитель должен быть меньше r, а тогда $r \geqslant 85$. Поэтому, начиная с 85, все числа входят в ответ.

II.8. Среда. **Решение**. Пусть вторник приходится на чётное число. Тогда следующий вторник будет приходиться на нечётное число. Поэтому в рассматриваемом месяце вторников как минимум 5. Но больше 5 вторников в месяце быть не может. Итак, в месяце ровно 5 вторников, причём первый из них — чётное число. Но тогда первый вторник может быть только вторым числом (иначе в месяце будет больше 31 дня). Значит, 10-е число месяца — это среда.

II.9. 3. *Замечание.* Задача является пропедевтической для введения понятия наибольшего общего делителя.

Решение. Из условия следует, что число b должно являться делителем чисел $2810 - 2006 = 804$ и $2006 - 1607 = 399$. Таким числом является только 3.

II.10. Решение. Пусть $a = bq + r$. Отметим, что из условия $a > b$ следует, что $q \geqslant 1$. Если $r \geqslant \frac{a}{2}$, то $b > \frac{a}{2}$, а тогда $bq + r > \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$, что противоречит исходному равенству.

II.11—II.16. Решения задач аналогичны решениям примеров 3 и 4, приведённых в тексте главы.

II.17. а) **Решение.** $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$, поэтому $a^2 + b^2$ делится на 9 как разность двух чисел, делящихся на 9.

б) *Указание.* Решение, использующее формулу суммы кубов, аналогично решению задания *а*.

в) **Решение.** $a^3 + b^3 = (a + b)((a + b)^2 - 3ab)$. Первый множитель разложения делится на 9. А вот $((a + b)^2 - 3ab) \,\vdots\, 27$, поскольку $(a + b)^2 \,\vdots\, 81$, а $3ab \,\vdots\, 27$.

II.18. а) **Решение.** Каждая цифра встречается на каждом месте десятичной записи одно и то же количество раз. Поэтому сумма всех шестизначных чисел, составленных из цифр от 1 до 8, равна $111\,111 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \cdot A$. Утверждение задачи следует из того, что $111\,111 \vdots 11$, а $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) \vdots 9$.

II.19, II.20. Решения этих задач являются поводами для разговора о том, какие свойства целых чисел в приложении к делимости нужно доказать. Если учитель не хочет усложнять структуру изложения материала, он может вернуться к этим задачам при изучении § 14 и 15. Эти задачи должны быть рассмотрены только на уроке.

II.19. Решение. Чтобы доказать утверждение задачи, полезно сделать эти числа «более похожими». Этого можно добиться, умножив $\overline{eabcd}$ на 10. Так как $\overline{abcde} \vdots 41$ и если доказать, что $\overline{eabcd0} \vdots 41$, то и $\overline{eabcd} \vdots 41$.

Замечание. Здесь происходит обман учащихся, потому что соответствующее утверждение следует из взаимной простоты чисел 10 и 41. Однако авторам ни разу не встречался ученик, который задал бы в этом месте соответствующий вопрос. К этому вопросу можно вернуться при изучении материала пункта 2 § 14.

У полученных чисел почти все одинаковые цифры стоят в одинаковых разрядах. Поэтому естественно вычесть эти числа: $\overline{eabcd0} - \overline{abcde} = 10^5 \cdot e - e = e \cdot (10^5 - 1) = 99\,999 \cdot e$. Осталось заметить, что $99\,999 \vdots 41$. Поскольку разность чисел делится на 41 и вычитаемое делится на 41, то и уменьшаемое делится на 41.

II.20. *Указание.* Применить свойство 2 (с. 119 учебника) простых чисел.

Решение. Если произведение делится на 239, то один из множителей делится на 239 (здесь тоже используется свойство простых чисел, не изученное, но интуитивно очевидное). Значит, этот сомножитель не меньше 239, а тогда сумма его со вторым натуральным числом больше 239.

II.21. *Указание.* Утверждение следует из того, что $\overline{abcdef} - (\overline{abc} + \overline{def}) = 999 \cdot \overline{abc}$, а $999 \vdots 37$.

II.22. *Замечание.* Утверждение задачи служит пропедевтикой изучения материала следующего параграфа. Полезно дать её в качестве домашнего задания.

II.23. Решение. $(41a + 83b) - (3a + 7b) = 38a + 76b$. Числа 38 и 76 кратны 19.

II.24. Продавец неправ. **Решение.** Все цены делятся на 7, а итоговая сумма на 7 не делится.

II.25. Решение. Пусть $n = ab$ и $a \neq 1$. Тогда $a \geqslant 2$, а тогда $b \leqslant \frac{n}{2}$. Таким образом, различных делителей b может быть не больше, чем $\frac{n}{2}$, а с учётом делителя, равного n (соответствующего $a = 1$), не больше $\frac{n}{2} + 1$.

Доказательство показывает, что количество делителей числа равно $\frac{n}{2}+1$, если все числа от 1 до $\frac{n}{2}$ являются его делителями. Такими числами являются, например, 2 и 6.

II.26. **Решение**. По свойству делимости 4 (с. 102 учебника) имеем $ab \vdots (ab - cd)^2$ и $cd \vdots (ab - cd)^2$, откуда $(ab - cd) \vdots (ab - cd)^2$. По условию $ab - cd \neq 0$, поэтому $ab - cd \geqslant (ab - cd)^2$. Единственным натуральным решением неравенства $x \geqslant x^2$ является число 1.

§ 12. Сравнения. Перебор остатков

В этом параграфе рассматривается метод перебора остатков как основной для решения большого количества задач. Сравнение можно воспринимать как удобный способ записи того, что числа имеют одинаковые остатки, а свойства сравнений — как свойства, помогающие быстрому нахождению остатков. Важной представляется параллель, проведённая между равенством и сравнением. Учитель может коснуться в своих объяснениях понятия эквивалентности, приведя соответствующие примеры (параллельность прямых, сонаправленность лучей и т. д.).

Обратите внимание, что содержанием замечания 2 пункта 1 является утверждение задачи II.22.

Полезно обратить внимание учащихся на доказательство признаков делимости (сравнимости) на 3, 9, 11 и степени 2 и 5. Можно придумать признаки делимости на другие числа (все такие признаки основываются на нахождении такого числа n, что $10^n \equiv \pm 1$ по модулю данного числа).

Рекомендуем, разобрав задачу II.29 в классе, обратить внимание учащихся на полученные в ней результаты, а затем задать на дом задачу II.34.

Задачи II.39, II.41—II.43, посвящённые разбору остатков от деления чисел на 3, можно использовать в различных формах работы. Более сложной задачей, решаемой перебором остатков по модулю 3, является задача II.66.

Решения и указания к задачам

II.27—II.31. *Указание.* Задачи решаются непосредственным перебором остатков (аналогично разобранным в тексте учебника примерам).

II.27. а) 985. *Указание.* Полезно заметить, что $999 \vdots 27$. б) 997. в) 996.

II.28. а) 102. б) 100. в) 100. *Указание.* При решении задачи полезно использовать свойство II.4 (с. 105) сокращения сравнений.

II.29. Дадим ответы в виде таблицы остатков:

	x^2	x^3
Остатки при делении на 4	0, 1	0, 1, 3
Остатки при делении на 5	0, 1, 4	0, 1, 2, 3, 4
Остатки при делении на 8	0, 1, 4	0, 1, 3, 5, 7

II.30. Сравнение $2x \equiv 1 \pmod 6$ не выполняется ни для каких целых x.

II.31. а) 3. *Указание.* Можно заменить 8 на 1, поскольку $8 \underset{7}{\equiv} 1$. б) 4. *Указание.* Заменить 6 на –1 и затем умножить обе части сравнения на –1. в) 6.

II.32. а) 6. б) 9. в) 8. г) 8. *Указание.* Полезно обратить внимание на необходимость доказать, что при вычитании получилось положительное число, так как в случае отрицательного числа остаток от деления этого числа на 10 не равен его последней цифре (например, остаток от деления числа –8 на 10 равен 2).

II.33. а) 3. б) 2. в) 5. **Решение.** Остатки, даваемые степенями 3 при делении на 7, повторяются через 6. Поэтому ответ задачи зависит от остатка числа 11^9 при делении на 6. В свою очередь, так как $11 \underset{6}{\equiv} -1$, то степени числа 11 дают при делении на 6 остатки 1 и 5 в зависимости от чётности показателя степени. Таким образом, 11^9 даёт остаток 5 при делении на 6, а значит, $3^{11^9} \underset{7}{\equiv} 3^5 \underset{7}{\equiv} 5$.

г) 3.

II.34. *Указание.* При решении этой задачи полезна таблица из ответа задачи II.29.

а) При делении на 5 число даёт остаток 2, который квадраты давать не могут. б) При делении на 4 число даёт остаток 2, который квадраты давать не могут. в) При делении на 5 число даёт остаток 3, который квадраты давать не могут. г) При делении на 4 данное число даёт остаток 2, который квадраты давать не могут.

II.35. а) **Решение.** Не существует, поскольку $n^2 + n + 1$ при всех целых n является нечётным числом, а значит, не может делиться на 1996.

б) *Указание.* Перебором остатков по модулю 5 убеждаемся, что $n^2 + n + 1$ ни при каких целых n не делится на 5.

II.36. 1; –1.

II.37. **Решение.** Если дробь сократима, то для некоторого d выполнено $(n^2 + 1) \vdots d$, откуда $(4n^2 + 4) \vdots d$, в то время как $(4n^2 + 7) \vdots d$, а тогда $3 \vdots d$. В то же время число $n^2 + 1$ не делится на 3 ни при каком целом значении n.

II.38. *Указание.* Перебором остатков от деления на 8 (см. таблицу в ответе к задаче II.22) убедиться, что сумма трёх кубов не даёт остатка 7 от деления на 8.

II.39. *Указание.* Перебором остатков от деления на 3 убедиться, что $(a^2 + b^2) \vdots 3$ только в случае, если оба числа a и b кратны 3.

II.42. **Решение.** Сумма квадратов трёх последовательных целых чисел даёт от деления на 3 остаток 2 (одно из этих чисел делится на 3, квадраты оставшихся дают от деления на 3 остаток 1), который квадраты чисел при делении на 3 давать не могут.

II.43. **Решение.** Если в десятизначном числе все цифры различны, то каждая из цифр встречается в нём ровно 1 раз, а тогда сумма его цифр равна 45, т. е. это число делится на 3. Тогда квадрат, на 1 меньший этого числа, даёт от деления на 3 остаток 2, чего не может быть.

II.44. *Указание.* Задача аналогична задаче II.31 с точностью до изменения формулировки: вместо нахождения остатка просят описать все целые x. Однако, найдя, например, в задании *а*, что искомые x дают остаток 9 по модулю 11, можно записать множество искомых x как $x \underset{11}{\equiv} 9$. б) $x \underset{18}{\equiv} 1$. в) $x \underset{13}{\equiv} 7$. г) $x \underset{18}{\equiv} 13$.

II.45. а) 1) $x \underset{17}{\equiv} -1$ или $x \underset{17}{\equiv} 3$. **Решение.** $x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$. Это число кратно 17 тогда и только тогда, когда один из множителей кратен 17 (в отличие от решения задачи II.20 доказательство этого утверждения можно провести перебором остатков, а не используя свойство простого числа 17).

2) *Указание.* Заметив, что $14 \underset{17}{\equiv} -3$, получаем то же самое сравнение, что и в пункте 1 задачи.

II.46. **Решение.** При делении на 7 квадраты чисел могут давать остатки 0, 1, 2, 4, т. е. четыре различных остатка, поэтому среди пяти чисел найдутся два, квадраты которых имеют равные остатки.

II.47. **Решение.** При разрывании куска бумаги на 8 частей вместо одного куска становится 8, т. е. количество кусков увеличивается на 7. Поэтому число кусков после n разрываний равно $7n + 1$. Очевидно, что при целых n равенство $7n + 1 = 2008$ выполняться не может.

II.48. а) **Решение.** $ab + cd - (ad + bc) = (a - c)(b - d)$. Если разность и уменьшаемое делятся на одно и то же число, вычитаемое также делится на это число.

II.49. **Решение.** Заметим, что $n \underset{8}{\equiv} 7$. Пусть d — натуральный делитель числа n. Пусть $n = kd$. Перебирая остатки от деления на 8, можно убедиться, что если $d \underset{8}{\equiv} m$, то $k \underset{8}{\equiv} 8 - m$. Поэтому все делители числа n разбиваются на пары, сумма чисел в каждой из которых кратна 8 (числа в парах различны, поскольку квадрат от деления на 8 не даёт остаток 7).

II.50. **Решение.** Заметим, что $a^2 \underset{a^2-a+1}{\equiv} a - 1$, поэтому $a^{2(n+2)} \underset{a^2-a+1}{\equiv} (a-1)^{n+2}$. Таким образом, $a^{2n+1} + (a-1)^{n+2} \underset{a^2-a+1}{\equiv}$ $\equiv a^{2n+1} + a^{2(n+2)}$. Последнее выражение делится на $a^2 - a + 1$, поскольку $a^{2n+1} + a^{2n+4} = a^{2n+1}(a^3 + 1) = a^{2n+1}(a + 1) \times$ $\times (a^2 - a + 1)$.

Замечание. Задачу можно решить и методом математической индукции.

II.51. **Решение.** Число, стоящее в правой части, нечётно, значит, все множители в левой части тоже нечётны, что невозможно, так как при нечётных x и y число $x + y$ будет чётным.

II.52. **Решение.** Если числа 2^m и 2^n имеют одинаковые наборы цифр в десятичной записи, то эти числа имеют одинаковые остатки при делении на 9, т. е. $(2^m - 2^n) \vdots 9$ (не умаляя общности, будем считать, что $m > n$).

Итак, $2^n(2^{m-n} - 1) \vdots 9$. Перебором остатков степеней 2 по модулю 9 убеждаемся, что наименьшее число k, такое, что $2^k - 1$ кратно 9 — это число 6. Поэтому $m - n \geqslant 6$. Но тогда $\frac{2^m}{2^n} \geqslant 2^6 > 10$, откуда количества цифр в десятичной записи (и подавно наборы этих цифр) чисел 2^m и 2^n различны.

Указание. При решении задачи также используется свойство 2 взаимно простых чисел.

II.53. а) **Решение.** Пусть $(5^n - 1) \vdots (4^n - 1)$. Поскольку $(4^n - 1) \vdots 3$ при всех натуральных n, должно выполняться $(5^n - 1) \vdots 3$, что возможно только при чётных n. Но при чётных n выполняется $(4^n - 1) \vdots 5$ (это можно получить возведением обеих частей сравнения $4 \underset{5}{\equiv} -1$ в степень n), в то время как $(5^n - 1) \not\vdots\, 5$. Поэтому искомое соотношение делимости не выполнено ни при каких натуральных значениях n.

б) Решение пункта аналогично решению задания *а*.

Замечание. Можно попросить учеников сформулировать и доказать аналогичное утверждение в общем виде.

II.54. $n = 1$. **Решение.** Пусть $n \geqslant 2$. Тогда с учётом того, что $2^n \vdots 4$, $4^n \vdots 4$, и того, что квадраты при делении на 4 дают остатки 0 или 1, получаем, что должно выполняться $3^n \underset{4}{\equiv} 1$, что верно лишь при чётных значениях n.

При чётных n имеем $2^n \underset{3}{\equiv} 1$, $4^n \underset{3}{\equiv} 1$, откуда $2^n + 3^n + 4^n \underset{3}{\equiv} 2$. Однако квадраты натуральных чисел не могут быть сравнимы с 2 по модулю 3. Итак, $n \geqslant 2$ не могут являться искомыми, а при $n = 1$ данная сумма равна 9.

II.55. Решение. Из условия следует, что число кратно 3, а тогда сумма его цифр кратна 3. Значит, само число кратно 9, а тогда сумма его цифр кратна 9, откуда число кратно 27.

II.56. а) $\varnothing$. **Решение.** Остатками квадратов при делении на 5 служат числа 0, 1 и 4. Тогда левая часть уравнения при делении на 5 может давать остатки $3 \cdot 0 + 1$, $3 \cdot 1 + 1$ и $3 \cdot 4 + 1$, среди которых нет остатка 0, т. е. левая часть ни при каких целых x не делится на 5. Поэтому уравнение не имеет решений в целых числах.

б) *Указание.* См. задачу II.54.

в) (10; 33); (10; –33); (4; 9); (4; –9). **Решение.** Отметим, что x — положительное число. Кроме того, при одном и том же x из одной пары $(x; y)$, являющейся решением, получается другая пара $(x; -y)$, также являющаяся решением нашего уравнения. Поэтому в дальнейшем можно считать, что y — натуральное число.

Правая часть по модулю 5 может давать остатки 0, 1 или 4. Перебором остатков степеней 2 убеждаемся, что левая часть даёт при делении на 5 остатки 1 или 4 при чётных x. Поэтому решения уравнения существуют лишь с чётными x. Пусть $x = 2a$, тогда $2^{2a} + 65 = y^2$, откуда $65 = y^2 - (2^a)^2$, т. е. $65 = (y - 2^a)(y + 2^a)$.

Поскольку второй множитель положителен, то первый тоже должен быть положителен и при этом меньше, чем второй. Таких разложений числа 65 на множители имеется два: $65 = 1 \cdot 65$ и $65 = 5 \cdot 13$. Таким образом, осталось решить в натуральных числах две системы уравнений:

1) $\begin{cases} y - 2^a = 1, \\ y + 2^a = 65, \end{cases}$ откуда $y = 33$, $a = 5$ и 2) $\begin{cases} y - 2^a = 5, \\ y + 2^a = 13, \end{cases}$

откуда $y = 9$, $a = 2$.

Таким образом, уравнение в целых числах имеет четыре решения: (10; 33); (10; –33); (4; 9); (4; –9).

г) (6; 28); (6; –28); (2; 8); (2; –8). *Указание.* Решение аналогично решению задания *в*.

д) (0; 0); (1; 0); (2; 1). **Решение**. При $n \geqslant 3$ левая часть даёт остаток 2 при делении на 3, т. е. не может быть равна квадрату целого числа. Проверка показывает, что $n = 0$, $n = 1$ и $n = 2$ дают решения этого уравнения.

II.58. Решение. Если последняя цифра числа a чётная, утверждение задачи верно. Если же последняя цифра числа a нечётная, то перебором остатков по модулю 10 можно установить, что это может быть цифра 1, 5 или 9. Если перед каждой из этих цифр стоит какая-либо нечётная цифра, то получившееся число даёт остаток 3 при делении на 4, т. е. число a не может являться квадратом натурального числа.

Замечание. Во втором издании задачи II.58 и II.57 поменяются местами.

II.57. Решение. Из задачи II.58 следует, что эта повторяющаяся цифра должна быть чётной. Числа вида $\overline{\ldots 2222}$ или $\overline{\ldots 6666}$ при делении на 4 дают остаток 2, поэтому не могут быть квадратами натуральных чисел. Верны сравнения $\overline{\ldots 4444} \underset{16}{\equiv} 12$ и $\overline{\ldots 8888} \underset{16}{\equiv} 8$, в то время как квадраты чисел при делении на 16 могут давать остатки 0, 1, 4 или 9.

Рассмотрение остатков по модулю 16 мотивировано тем, что знание четырёх последних цифр — это знание остатка от деления числа на 2^4 и на 5^4.

Отметим, что так как $1444 = 38^2$, аналогичные рассуждения по модулю 2^3 или 5^3 привести к успеху не могут.

II.59. Решение. Если число не является квадратом, то все его натуральные делители разбиваются на пары, в произведении дающие это число, т. е. число делителей будет чётно.

Если же число является квадратом некоторого натурального числа, то ровно в одной из этих пар оба делителя будут одинаковыми, поэтому один из них считать в общем количестве натуральных делителей будет не нужно.

II.60. а) Не делится. **Решение**. Поскольку число сравнимо со своей суммой цифр по модулю 3, то сумма цифр полученного большого числа будет сравнима по модулю 3 с суммой чисел от 1 до 2008, т. е. с числом $\frac{2008 \cdot 2009}{2}$, которое на 3 не делится.

б) $n \underset{3}{\not\equiv} 1$. **Решение**. Полученное число будет сравнимо по модулю 3 с суммой чисел от 1 до n, т. е. с числом $\frac{n(n+1)}{2}$. Чтобы число $\frac{n(n+1)}{2}$ делилось на 3, нужно, чтобы n или $n + 1$ делилось на 3, т. е. n не давало остаток 1 от деления на 3.

II.61. Решение. Заметим, что $1981 \underset{9}{\equiv} 1$ и $1981 \underset{11}{\equiv} 1$, поэтому 1981^n при делении на 9 и на 11 даёт остаток 1.

В соответствии с признаком сравнимости по модулю 9 сумма цифр числа 1981^n сравнима с 1 по модулю 9. Очевидно, что эта сумма цифр не равна 1. Тогда она может быть равна 10, 19, ... Тем самым осталось показать, что сумма цифр числа 1981^n не может быть равна 10.

В самом деле, по модулю 11 число сравнимо с разностью сумм цифр на нечётных и на чётных местах (считая с разряда единиц). Значит, указанная разность может быть равна ..., –10, 1, 12, 23, ...

Если эта разность по модулю больше 10, то сумма всех цифр числа также больше 10. Если разность сумм цифр на чётных и на нечётных местах равна –10, а сумма всех цифр числа равна 10, значит, на всех нечётных местах стоят 0, что неверно, так как последней цифрой числа 1981^n является 1. Если разность сумм цифр на чётных и на нечётных местах равна 1, то эти суммы цифр — числа разной чётности, а значит, их сумма является числом нечётным, т. е. не равна 10.

II.62. Нет. **Решение.** Сумма цифр, стоящих на чётных местах, должна быть сравнима по модулю 11 с суммой цифр, стоящих на нечётных местах. Эти две суммы не равны, поскольку общая сумма цифр равна 21. Значит, разность этих сумм цифр равна 11 (равной 22, 33 и т. д. она быть не может), а тогда одна из этих сумм цифр равна 16, а другая равна 5. Но нельзя взять три цифры от 1 до 6 так, чтобы они в сумме давали 5.

II.63. Решение. Пусть признак делимости на некоторое натуральное число d не зависит от порядка цифр в числе. Рассмотрим число, кратное d, в котором существуют две цифры, отличающиеся на 1 (вопрос существования такого числа будет рассмотрен позднее, а в более слабых классах может остаться без доказательства). Назовём эти цифры a и b.

Переставим эти цифры на последние места (делимость на d сохранится в силу нашего предположения) и рассмотрим полученные два числа: $\overline{...ab}$ и $\overline{...ba}$. Оба они по условию кратны d, так как получены перестановкой цифр в числе, кратном d. Разность этих двух чисел будет равна 9 (здесь использован выбор цифр a и b, отличающихся на 1). Значит, d является делителем 9, т. е. равно 1, 3 или 9.

Осталось доказать, что для любого d существует число, кратное d, в котором есть две цифры, отличающиеся на 1. Докажем, что для произвольного d есть ненулевое число, записанное единицами и нулями, делящееся на d.

Рассмотрим для этого числа вида 1, 11, ..., $\underbrace{11\ldots1}_{d}$, $\underbrace{11\ldots1}_{d+1}$. Среди этих $d + 1$ чисел есть два, сравнимых по модулю d. Их разность даст ненулевое число, записанное единицами и нулями, кратное d.

II.64. а), б), в) *Указание.* Решать перебором остатков по соответствующим модулям. г) *Указание.* Решать перебором остатков по модулю 8. Перебора по модулю 4 не хватает, так как из того, что квадрат числа делится на 4, не следует, что само число делится на 4, а следует лишь делимость самого числа на 2. А вот из делимости квадрата числа на 8 уже следует делимость самого числа на 4.

II.65. Решение. Число $2m$ сравнимо со своей суммой цифр по модулю 9. В свою очередь, сумма цифр числа $2m$ равна сумме цифр числа m, которая сравнима по модулю 9 с самим числом m. Значит, $2m \underset{9}{\equiv} m$, откуда следует, что $m \underset{9}{\equiv} 0$.

II.66. *Указание.* Эти числа при любом n имеют разные остатки от деления на 3.

II.67. Решение. Перебором остатков степеней 2 при делении на 10 убеждаемся, что последние цифры степеней 2 повторяются через четыре (возможные остатки 2, 4, 8 и 6). Если последняя цифра числа 2^n равна 6, то утверждение доказано. В противном случае достаточно показать, что число десятков числа 2^n кратно 3 (поскольку число единиц чётное). Для этого достаточно показать, что разность числа 2^n с числом его единиц даст число, кратное 3.

Пусть последняя цифра числа 2^n равна 2. Это бывает, если n имеет вид $4k + 1$. Рассмотрим разность $2^{4k+1} - 2 = 2(2^{4k} - 1)$. Второй сомножитель кратен 3, что можно получить возведением обеих частей сравнения $2 \underset{3}{\equiv} -1$ в степень $4k$.

Пусть последняя цифра числа 2^n равна 4. Это бывает, если n имеет вид $4k + 2$. Рассмотрим разность $2^{4k+2} - 4 = 4(2^{4k} - 1)$. Вновь полученная разность кратна 3.

Наконец, пусть последняя цифра числа 2^n равна 8. Это бывает, если n имеет вид $4k + 3$. Рассмотрим разность $2^{4k+3} - 8 = 8(2^{4k} - 1)$. Полученная разность опять кратна 3.

§ 13. Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное двух целых чисел

Стержнем содержания этого параграфа является алгоритм Евклида. Это основной инструмент, с помощью которого получаются практически все дальнейшие результаты.

Идея «взрослой математики», стоящая за таким построением курса (в частности, с доказательством основной теоремы арифметики) состоит в том, что наличие алгоритма Евклида в некотором кольце (совокупности объектов с арифметическими действиями, подчиняющимися естественным свойствам) означает наличие простых элементов, аналога основной теоремы арифметики, свойств взаимной простоты и т. д. Хотелось бы, чтобы при изложении содержания эта линия была подчёркнута.

В то же время алгоритм Евклида является эффективным вычислительным алгоритмом, позволяющим за разумное число шагов найти наибольший общий делитель и, как следствие, наименьшее общее кратное двух чисел. Следует обратить особое внимание на комментарий, связанный с преимуществами нахождения НОД с помощью алгоритма Евклида по сравнению с разложением на простые множители (с. 110).

При доказательстве теоремы пункта 2 полезно обратить внимание на применение способа доказательства равенства двух множеств.

При решении задач следует обратить внимание на то, что многие из них используют свойства делимости, связанные с простыми и взаимно простыми числами (например, если произведение чисел делится на простое число, то один из сомножителей делится на это простое число). Таковы, например, задачи II.72, *в*, II.77, II.78, II.82 и т. д.

Конечно же, это нарушает стройность изложения, но подобные свойства использовались учащимися ещё в основной школе, поэтому мы надеемся, что их применение не повлечёт существенных затруднений. Во всяком случае при желании можно сформулировать соответствующие свойства из § 14, разрешив пользоваться ими без доказательства. Возможен также вариант изучения материала § 13 с решением простейших упражнений, затем изучение материала § 14 с последующим решением задач к § 13, требующих применения свойств взаимно простых чисел.

Особое внимание стоит уделить задаче II.81. Фактически в её решении представлен общий алгоритм решения линейных уравнений в целых числах.

Решения и указания к задачам

II.68. а) 6. б) 23. в) 1. г) 17.

II.69. *Указание.* Необходимо обратить внимание на то, что линейных представлений НОД может быть бесконечно много.

II.71. **Решение.** Применим «медленный алгоритм Евклида», вычитая из «большего» числа «меньшее»: $(5a + 3b;\ 8a + 5b) = (5a + 3b;\ 3a + 2b) = (2a + b;\ 3a + 2b) = (2a + b;\ a + b) = (a;\ a + b) = (a;\ b) = 1$.

II.72. а) (30; 150); (150; 30). **Решение.** Из второго уравнения системы следует $x = 30a$, $y = 30b$. Подставим x и y в первое уравнение и после сокращения на 30 получим $a + b = 6$. Осталось перебрать пары a и b, чтобы получившиеся числа x и y имели бы наибольшим общим делителем именно 30, а не большее число (например, при $a = 2$, $b = 4$ $(60;\ 120) = 60$).

б) (24; 144); (48; 120); (72; 96); (96; 72); (120; 48); (144; 24).

в) (495; 77). *Указание.* При решении задачи потребуются свойства взаимно простых чисел.

Решение. Из второго уравнения следует $x = 45a$, $y = 45b$. Подставив x и y в первое уравнение, получаем $7a = 11b$, откуда $a \vdots 11$, т. е. $a = 11c$, и следовательно $b = 7c$. Но если $c \neq 1$, то среди общих делителей чисел x и y будет число $45c$ больше 45, что противоречит второму уравнению системы. Поэтому $c = 1$, откуда $x = 45 \cdot 11$, $y = 7 \cdot 11$.

г) (4; 180); (20; 36); (36; 20); (180; 4). **Решение.** Из второго уравнения системы следует $x = 4a$, $y = 4b$. Подставив x и y в первое уравнение, после сокращения на 16 получим $ab = 45$. Если a и b будут иметь общий делитель, больший 1, то x и y будут иметь общий делитель, больший 4, что невозможно. Поэтому приемлемыми значениями для a и b являются (1; 45); (5; 9); (9; 5); (45; 1).

II.73. 13. **Решение.** Дробь можно сократить лишь на общий делитель её числителя и знаменателя. Все общие делители двух чисел являются делителями наибольшего общего делителя. Поэтому найдём возможные значения $(8n + 7;\ 5n + 6)$. Запишем «медленный» алгоритм Евклида: $(8n + 7;\ 5n + 6) = (5n + 6;\ 3n + 1) = (3n + 1;\ 2n + 5) = (2n + 5;\ n - 4) = (n + 9;\ n - 4) = (n - 4;\ 13)$.

Итак, наибольший общий делитель числителя и знаменателя является делителем числа 13. Поэтому, если он не равен 1, он может быть равен только 13. Нетрудно видеть, что, например, при $n = 4$ дробь действительно сокращается на 13 (то, что для построения примера n можно взять равным 4, видно из последнего равенства в записи алгоритма Евклида).

II.74. $n = 993$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи II.73.

II.75. $n \underset{13}{\equiv} 4$. **Решение.** Нужно найти, при каких натуральных n числитель и знаменатель дроби будут иметь общий делитель (а следовательно, и НОД), больший 1. Заметим, что если умножить числитель дроби на $2n$, а знаменатель дроби — на 7, то НОД полученных чисел может лишь увеличиться, но все общие делители исходных чисел будут общими делителями полученных.

Итак, $(14n^2 - 4n;\ 14n^2 + 7n + 21) = (11n + 21;\ 14n^2 - 4n)$. Тогда искомые общие делители исходных чисел находятся среди делителей числа $11n + 21$. Кроме того, они находятся среди делителей числителя исходной дроби $7n - 2$. Таким образом, общие делители числителя и знаменателя исходной дроби находятся среди делителей НОД$(11n + 21;\ 7n - 2)$.

Применив «медленный» алгоритм Евклида, найдём, что $(11n + 21;\ 7n - 2) = (7n - 2;\ 4n + 23) = \ldots = (n + 48;\ 169)$. Последний НОД не будет равным 1 в том и только в том случае, когда $(n + 48) \vdots 13$, т. е. если $n \underset{13}{\equiv} 4$. Подставляя вместо n число 4, убеждаемся, что и числитель, и знаменатель исходной дроби действительно делятся на 13, а значит, будут сокращаться на 13 и при всех n таких, что $n \underset{13}{\equiv} 4$.

II.76. *Указание.* При решении задачи потребуются свойства взаимно простых чисел.

а) (15; 420); (60; 105); (105; 60); (420; 15).

б) (12; 840); (24; 420); (60; 168); (84; 120); (120; 84); (168; 60); (420; 24); (840; 12).

в) (552; 115); (115; 552); (435; 232); (232; 435).

г) (4; 24); (12; 8); (16; 12); (48; 4).

II.77. Решение. Заметим, что $30\,030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$. Если произведение чисел делится на 30 030, то оно делится и на 2, а тогда одно из чисел делится на 2. Коль скоро сумма двух чисел равна 30 030, то второе из них тоже делится на 2. Итак, оба числа делятся на 2. Аналогичное рассуждение показывает, что оба числа делятся на 3, на 5, на 7, на 11 и на 13, т. е. каждое число делится на 30 030, но тогда их сумма не может быть равной 30 030.

II.78. Решение. Пусть $m > n$. Применим «медленный» алгоритм Евклида: $(2^m - 1;\ 2^n - 1) = (2^m - 2^n;\ 2^n - 1) = (2^n(2^{m-n} - 1);\ 2^n - 1)$. Делители числа $2^n - 1$ взаимно просты с числом 2^n, а потому общие делители чисел $2^n(2^{m-n} - 1)$ и $2^n - 1$ являются общими делителями чисел $2^{m-n} - 1$ и $2^n - 1$, поэтому $(2^n(2^{m-1} - 1);\ 2^n - 1) = (2^{m-n} - 1;\ 2^n - 1)$ (здесь использовано свойство, сформулированное в задаче II.87, *б*).

Итак, в результате применения «медленного» алгоритма Евклида получено равенство $(2^m - 1;\ 2^n - 1) = (2^{m-n} - 1;\ 2^n - 1)$. Таким образом, произошёл шаг «медленного» алгоритма Евклида в показателе степени. Следовательно, с окончанием алгоритма Евклида для исходных чисел закончится алгоритм Евклида для показателей степени. Отсюда и следует равенство $(2^m - 1,\ 2^n - 1) = 2^{(m,\ n)} - 1$.

II.79. Решение. Решение аналогично решению задачи II.78. Применяя «медленный» алгоритм Евклида, получаем на первом шаге

$$\Bigl(\underbrace{111\ldots11}_{m};\ \underbrace{111\ldots11}_{n}\Bigr) = \Bigl(\underbrace{111\ldots11}_{m} - \underbrace{111\ldots11}_{n};\ \underbrace{111\ldots11}_{n}\Bigr) =$$

$$= \Bigl(\underbrace{111\ldots11}_{m-n}\underbrace{00\ldots0}_{n};\ \underbrace{111\ldots11}_{n}\Bigr).$$

При этом поскольку 10^n взаимно просто с $\underbrace{111\ldots11}_{n}$, то

$$\Bigl(\underbrace{111\ldots11}_{m-n}\underbrace{00\ldots0}_{n};\ \underbrace{111\ldots11}_{n}\Bigr) = \Bigl(\underbrace{111\ldots11}_{m-n};\ \underbrace{111\ldots11}_{n}\Bigr)$$

(здесь использовано свойство, сформулированное в задаче II.87, *б*). Таким образом, наряду с шагом алгоритма Евклида для исходных чисел происходит шаг алгоритма Евклида для m и n, выражающих количества единиц. Отсюда и следует утверждение задачи.

Замечание. Любопытно, что если воспринимать числа этой задачи как двоичные записи, то утверждение этой задачи превращается в утверждение задачи II.78.

II.80. а) **Решение.** Утверждение можно доказать по индукции. База индукции очевидна. Переход индукции. Пусть $(u_k;\ u_{k+1}) = 1$. Докажем, что $(u_{k+1};\ u_{k+2}) = 1$. В самом деле, $(u_{k+1};\ u_{k+2}) = (u_{k+1};\ u_{k+1} + u_k) = (u_{k+1};\ u_k) = 1$ (предпоследнее равенство получено применением шага «медленного» алгоритма Евклида, а последнее равенство верно по индукционному предположению).

б*) **Решение.** По индукции можно доказать при $m > n$ равенство $u_m = u_n \cdot u_{m-n+1} + u_{n-1} \cdot u_{m-n}$. Согласно теореме пункта 2 § 13 учебника $(u_m;\ u_n) = (u_n;\ u_{n-1} \cdot u_{m-n})$. Из задания *а* имеем $(u_n;\ u_{n-1}) = 1$, поэтому $(u_n;\ u_{n-1} \cdot u_{m-n}) = (u_n;\ u_{m-n})$ (здесь использовано свойство, сформулированное в задании II.87, *б*). Итак, $(u_m;\ u_n) = (u_n;\ u_{m-n})$. Таким образом, при нахождении наибольшего общего делителя двух чисел Фибоначчи происходит шаг «медленного» алгоритма Евклида в их индексах, и поэтому $(u_m;\ u_n) = u_{(m,\ n)}$.

II.81. а) **Решение.** При целых значениях x и y в равенстве $4x + 6y = 5$ левая часть чётна, а правая нечётна.

б) **Решение.** Пусть $(a;\ b)$ — координаты точки, через которую проходит прямая $4x + 6y = c$. Тогда $4a + 6b = c$. Заметим, что $4(a + 3) + 6(b - 2) = c$, поэтому прямая проходит также через точку с координатами $(a + 3;\ b - 2)$, а также любую из точек с координатами $(a + 3k;\ b - 2k)$, где k — произвольное целое число.

в) При $c \mathrel{\vdots} 2$. **Решение.** Поскольку при целых значениях x и y левая часть равенства $4x + 6y = c$ кратна 2, правая часть также должна быть кратна 2. Поэтому, чтобы прямая проходила через целую точку, необходимо, чтобы $c \mathrel{\vdots} 2$.

С другой стороны, $(4;\ 6) = 2$, а тогда по теореме о линейном представлении НОД существуют такие целые a и b, что $4a + 6b = 2$. Если c чётно, то можно умножить это равенство на целое число $\frac{c}{2}$, получив равенство $4\left(\frac{ac}{2}\right) + 6\left(\frac{bc}{2}\right) = c$, показывающее, что прямая $4x + 6y = c$ проходит через точку $\left(\frac{ac}{2};\ \frac{bc}{2}\right)$ с целыми координатами.

Замечание. Полезно привести алгоритм нахождения всех решений линейных уравнений в целых числах с двумя переменными: уравнение $ax + by = c$ имеет решение в целых числах при целых a и b тогда и только тогда, когда $c \mathrel{\vdots} (a;\ b)$. При этом, чтобы найти все решения этого уравнения, достаточно найти одно из них $(x_0;\ y_0)$. Для этого можно воспользоваться линейным представлением $(a;\ b)$ с последующим умножением обеих частей равенства на $\frac{c}{(a;\ b)}$. Тогда все целочисленные решения этого уравнения выражаются формулой

$$\begin{cases} x = x_0 + \dfrac{b}{(a;\ b)} \cdot k, \\ y = y_0 - \dfrac{a}{(a;\ b)} \cdot k, \end{cases} \quad \text{где } k \in \mathbf{Z}.$$

II.82. Решение. Заметим, что $\frac{a^m - 1}{a - 1} = a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + 1$. Поскольку $a \underset{a-1}{\equiv} 1$, то $a^k \underset{a-1}{\equiv} 1$ при всех целых k. Таким образом, $a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + 1 \underset{a-1}{\equiv} m$. Это равенство означает, что $a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + 1 = l(a - 1) + m$ при некотором целом l. По теореме пункта 2 (с. 108, 109 учебника) получаем $(a^{m-1} + a^{m-2} + \ldots + 1;\ a - 1) = (a - 1;\ m)$.

II.83. Решение. Пусть $A = [a_1;\ \ldots;\ a_n]$. Тогда $\frac{A}{a_1} > \frac{A}{a_2} > \ldots > \frac{A}{a_n}$ — n различных натуральных чисел, поэтому самое большое из них не меньше n, т. е. $\frac{A}{a_1} \geqslant n$, откуда и следует требуемое неравенство.

II.84. **Решение.** Если последовательность натуральных чисел ограничена, то в этой последовательности будет конечное число различных членов. Каждый член последовательности имеет конечное число натуральных делителей. Значит, делителями членов ограниченной последовательности натуральных чисел может быть лишь конечное количество чисел. Остаётся заметить, что каждое из чисел a_k является делителем числа b_k.

Обратное утверждение неверно. Примером может служить последовательность 1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, ...

§ 14. Взаимно простые числа

Этот параграф играет ключевую роль в материале главы II. Основой параграфа являются доказательства естественных свойств взаимно простых чисел, сформулированных в пункте 2. Ключом к этим свойствам служит теорема — критерий взаимной простоты, сформулированная в пункте 1. Материал параграфа служит краеугольным камнем в доказательстве основной теоремы арифметики.

Отметим, что доказательство утверждения примера 14 учебника с последующим рассмотрением свойств пункта 4 § 15 может служить основой для отдельного урока в сильном классе. Однако при недостатке времени или интереса у учеников пример 14 можно и нужно выпустить из рассмотрения.

Решения и указания к задачам

II.85. Неверно. **Решение.** Например: $(6; 7) = 1$, $(7; 15) = 1$, но $(6; 15) = 3$. Интересно, что это неверное утверждение являлось базой для одного из «доказательств» Большой теоремы Ферма.

II.86. а) **Решение.** Пусть $a, b \in \boldsymbol{Z}$ и $d = (a; b)$. Тогда $\exists x, y \in \boldsymbol{Z}$: $d = ax + by$. Разделив обе части этого равенства на d, получим, что $\exists x, y \in \boldsymbol{Z}$: $1 = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}y$. По теореме из пункта 1 учебника (с. 115) это означает, что числа $\frac{a}{d}$ и $\frac{b}{d}$ взаимно просты.

б) Неверно. **Решение.** Пусть $a = 12$, $b = 18$. Тогда $(a; b) = 6$ и $a_1 = 2$, $b_1 = 3$. Ни одно из этих чисел не взаимно просто с 6.

Замечание. «Утверждение», сформулированное в задаче II.86, *б*, часто приходилось слышать от учеников при решении задач по теории чисел.

II.87. а) **Решение.** Из того что $(a; c) = 1$, следует существование целых x и y, таких, что $1 = ax + cy$. Умножив обе части этого равенства на b, получим $b = abx + bcy$. Правая часть полученного равенства, очевидно, кратна $(ab; c)$, поскольку каждое слагаемое кратно этому числу. Значит, и b кратно $(ab; c)$.

б) **Решение.** Докажем, что множество общих делителей чисел ac и b совпадает с множеством общих делителей чисел c и b. Для доказательства равенства двух множеств нужно показать, что каждый элемент одного множества является элементом другого.

Очевидно, что каждый общий делитель чисел c и b является общим делителем чисел ac и b. Возьмём d — общий делитель чисел ac и b. По определению числа d ясно, что $b \vdots d$. Осталось доказать, что $c \vdots d$. Из взаимной простоты чисел a и b следует существование целых x и y, таких, что $1 = ax + by$. Умножив обе части этого равенства на c, получим равенство $c = (ac) \cdot x + b \cdot cy$, правая часть которого, очевидно, кратна d. Значит, и c кратно d.

в) **Решение.** Применив свойство 2 теоремы пункта 2 к соотношениям $(a; a + b) = 1$ и $(b; a + b) = 1$, верным в силу теоремы пункта 2 § 13, получаем требуемое.

II.88. Решение. Пусть $n = 2007q_1 + r_1 = 100q_2 + r_2$ $(0 \leqslant r_1 < 2007,\ 0 \leqslant r_2 < 100)$, причём

$$q_1 + r_1 = q_2 + r_2. \tag{1}$$

Заметим, что поскольку n — натуральное число, то q_1 и q_2 неотрицательны. Тогда, вычитая из одного равенства другое, получим

$$2006q_1 = 99q_2. \tag{2}$$

Так как $(99; 2006) = 1$, то по свойству 1 теоремы пункта 2 выполняется $q_1 \vdots 99$, откуда $q_1 = 99k$ $(k \in \boldsymbol{Z})$. Подставив найденное значение q_1 в равенство (2), получим $q_2 = 2006k$.

Подставим найденные q_1 и q_2 в равенство (1) и получим после приведения подобных слагаемых, что $1907k = r_1 - r_2$. Поскольку $r_1 < 2007$, а $r_2 \geqslant 0$, то $r_1 - r_2 < 2007$, а поскольку k — неотрицательное число, то $r_1 - r_2 \geqslant 0$. Тогда, так как $(r_1 - r_2) \vdots 1907$, возможны два случая:

1) $r_1 - r_2 = 0$, откуда $k = 0$, а тогда $q_1 = q_2 = 0$. В этом случае r_1 и r_2 могут быть неотрицательными равными числами, меньшими 100.

2) $r_1 - r_2 = 1907$, откуда $k = 1$, а тогда $q_1 = 99$, $q_2 = 2006$, r_2 может быть любым неотрицательным целым числом, меньшим 100, $r_1 = 1907 + r_2$.

II.89. **Решение.** Из условия следует, что n нечётно, а тогда $n^2 \underset{8}{\equiv} 1$, откуда $(n^2 - 1) \,\vdots\, 8$. Кроме того, $n \not\vdots\, 3$, а тогда $n^2 \underset{3}{\equiv} 1$, откуда $(n^2 - 1) \,\vdots\, 3$. Поскольку $(3; 8) = 1$, то по свойству 3 теоремы пункта 2 получаем $(n^2 - 1) \,\vdots\, 24$.

II.90. *Указание.* Нужно подбирать цифру из соображений делимости на 2, 3, 5, 8 и 9, пользуясь соответствующими признаками. а) $x \in \{1; 4; 7\}$. б) $x = 3$. в) Нет таких цифр.

II.91. а) $x = 9$, $y = 2$. б) $x = 4$, $y = 0$ или $x = 8$, $y = 5$. в) $x = 8$, $y = 1$ или $x = 1$, $y = 5$ или $x = 5$, $y = 9$.

II.92. 25. **Решение.** Пусть n — данное натуральное число. Из условия следует, что $(n - 315) \,\vdots\, 2001$ и $(n - 315) \,\vdots\, 2002$. Поскольку 2001 и 2002 взаимно просты, то по свойству 3 взаимно простых чисел (с. 116 учебника) получаем $(n - 315) \,\vdots\, (2001 \cdot 2002)$. Отметим, что $2001 \,\vdots\, 29$ и $2002 \,\vdots\, 2$, а потому $(2001 \cdot 2002) \,\vdots\, 58$. Поэтому $(n - 315) \,\vdots\, 58$, а тогда $n \underset{58}{\equiv} 315$, т. е. искомое число даёт тот же остаток при делении на 58, что и 315.

II.93. **Решение.** Пусть d — разность прогрессии. Члены прогрессии имеют вид $a + nd$, где a — некоторое целое число. В нашем случае можно, не умаляя общности, считать, что рассматриваемые члены прогрессии идут первыми, т. е. имеют вид a, $a + d$, ..., $a + (k - 1)d$.

Пусть два члена прогрессии имеют одинаковые остатки при делении на k, т. е. $a + ld \underset{k}{\equiv} a + md$, тогда по свойству сравнений получаем $(l - m)d \underset{k}{\equiv} 0$. Сокращая сравнение на число d, взаимно простое с k (см. пример 13 учебника), получаем $(l - m) \,\vdots\, k$, т. е. если $l \neq m$, то $|l - m| \geqslant k$, что противоречит выбору чисел l и m от 0 до $k - 1$.

Таким образом, все рассматриваемые члены прогрессии дают разные остатки при делении на k. Поскольку членов прогрессии ровно k, то они дадут все остатки при делении на k, причём по одному разу каждый.

Замечание. Частным случаем утверждения задачи является утверждение пункта 2 § 11 о том, что среди n подряд идущих натуральных чисел есть ровно одно, кратное n.

II.94. *Указание.* Утверждение следует из того, что $a^3 \underset{2}{\equiv} a$ и $a^3 \underset{3}{\equiv} a$ (эти сравнения можно доказать методом перебора остатков), а тогда $a^3 \underset{6}{\equiv} a$.

II.95. 461. **Решение.** Пусть n — искомое натуральное число. Из условия задачи следует, что число $n + 1$ кратно 6, 7 и 11. Поскольку эти числа попарно взаимно просты, то $(n+1) \vdots (6 \cdot 7 \cdot 11)$, откуда (с учётом того, что $n \in \boldsymbol{N}$) следует, что $n + 1 \geqslant 6 \cdot 7 \cdot 11$. Тем самым, очевидно, что число $n = 6 \cdot 7 \cdot 11 - 1$ обладает требуемым свойством и что меньшего натурального числа с таким свойством нет.

II.96. (4; –1), (–1; 4). **Решение.** Согласно утверждению задания II.87, *в* $(a + b; ab) = 1$. Представим знаменатель дроби в виде $(a + b)^2 - ab$ и заметим, что это число взаимно просто с $a + b$. В самом деле, если $(a + b) \vdots d$ и $((a + b)^2 - ab) \vdots d$, то и $ab \vdots d$, а тогда числа $a + b$ и ab не будут взаимно простыми.

Таким образом, дробь $\dfrac{a+b}{a^2+ab+b^2}$ не может быть сократимой при взаимно простых a и b.

Тогда, с учётом того, что при ненулевых a и b выполнено $a^2 + ab + b^2 > 0$ $\begin{cases} a + b = 3, \\ a^2 + ab + b^2 = 13, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} a + b = 3, \\ ab = -4, \end{cases}$ т. е. $a = 4$, $b = -1$ или $a = -1$, $b = 4$.

II.97. а) **Решение.** Заметим, что $a \underset{a+1}{\equiv} -1$, и следовательно $(a^{2k} - 1) \vdots (a + 1)$. Если $(a^{2k} + 1) \vdots d$ и $(a + 1) \vdots d$, то и $(a^{2k} + 1 - (a^{2k} - 1)) \vdots d$, т. е. $2 \vdots d$. Но $d \neq 2$, поскольку $a + 1$ по условию является нечётным числом.

б) *Указание.* Пусть $m > k$. Утверждение задачи следует из задания *а* при $a = 2^{2^k}$. В роли показателя степени нужно взять число 2^{m-k-1}.

II.98. а) **Решение.** Пусть $x \vdots d$, $y \vdots d$. Тогда $x^2 \vdots d^2$, $y^2 \vdots d^2$, а тогда $z^2 \vdots d^2$, откуда $z \vdots d$ (полезно попросить учащихся доказать[1], что если $z^2 \vdots d^2$, то $z \vdots d$). Итак, общие делители чисел x и y являются также делителями числа z, аналогично общие делители любых двух из чисел являются делителями третьего. Таким образом, множества общих делителей всех трёх рассмотренных пар чисел одинаковы, а значит, одинаковы и НОД этих пар чисел.

б) *Указание.* Проверяется делением обеих частей уравнения на d^2.

в) *Указание.* Проверяется перебором остатков квадратов по модулю 4 (см. задачу II.64).

---

[1] Без основной теоремы арифметики это сделать непросто. Один из вариантов доказательства таков:
Если $z \not\vdots\, d$, то $(z; d) = q < d$. Пусть $z = z_1 q$, $d = d_1 q$, причём $d_1 > 1$. Согласно результату задания II.86, *а* $(z_1; d_1) = 1$. Так как $z^2 \vdots d^2$, существует такое целое число k, что $z^2 = kd^2$, т. е. $z_1^2 q^2 = kd_1^2 q^2$, откуда $z_1^2 = kd_1^2$. Но тогда $z_1^2 \vdots d_1^2$, что противоречит взаимной простоте чисел z_1 и d_1 (свойство 2 взаимно простых чисел даёт взаимную простоту чисел z_1^2 и d_1, а повторное применение этого свойства даёт взаимную простоту чисел z_1^2 и d_1^2).

г) **Решение**. Из исходного уравнения получаем $y^2 = (z - x)(z + x)$.

Докажем, что числа $z - x$ и $z + x$ взаимно просты. В самом деле, если оба эти числа делятся на d, то их сумма и разность также делятся на d, т. е. $2x$ и $2y$ кратны d. Заметим, что и $z - x$, и $z + x$ являются нечётными в силу предыдущего пункта (напомним, что x считаем чётным). Тогда d также нечётно. Поэтому x и z кратны d, откуда $d = 1$ в силу взаимной простоты x и z.

Напомним, что если произведение двух взаимно простых чисел есть квадрат целого числа, то каждое из этих чисел является квадратом целого числа (см. пример 14 учебника). Поэтому $z - x = m^2$, $z + x = n^2$, причём числа m и n взаимно просты.

д) *Указание.* Из равенств предыдущего пункта (с учётом того, что $n = u + v$, $m = v - u$) выразить z через u и v, а из исходного уравнения после подстановки найденных x и z найти y.

е) **Решение**. Если числа u и v будут одной чётности, то полученные числа x и y будут чётными. Если числа u и v не будут взаимно простыми, то x и y будут кратны квадрату их наибольшего общего делителя.

Интересно описать абсолютно другое решение уравнения Пифагора. Разделим обе части уравнения на z^2 и будем решать уравнение $a^2 + b^2 = 1$ в положительных рациональных числах. Найдя рациональные решения полученного уравнения и умножив обе части равенства на общий знаменатель, найдём целочисленные решения исходного уравнения. Если считать x, y и z попарно взаимно простыми числами, то $a = \frac{x}{z}$ и $b = \frac{y}{z}$ будут несократимыми дробями.

Заметим, что a и b суть синус и косинус угла в прямоугольном треугольнике с целочисленными сторонами x, y и z. Однако, если в прямоугольном треугольнике длины катетов являются целыми числами (рис. 2.1), тангенс половины острого угла будет рациональным числом

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{CL}{AC} = \frac{y}{x + z}$$

(отрезок CL найден по свойству биссектрисы треугольника делить противоположную сторону пропорционально боковым сторонам). С другой стороны, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ — рациональное

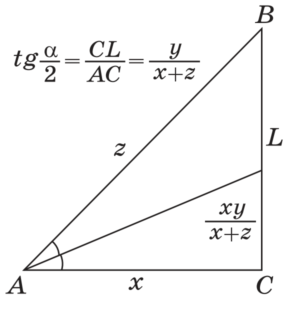


Рис. 2.1

число, то в силу формул, выражающих синус и косинус через тангенс половинного аргумента (с. 301 учебника), $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ также будут рациональными числами.

Таким образом, *чтобы синус и косинус острого угла были рациональными, необходимо и достаточно, чтобы рациональным являлся тангенс половинного угла.*

Пусть теперь $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{u}{v}$. В соответствии с формулами пункта 6 § 35 учебника $\sin\alpha = \dfrac{2\frac{u}{v}}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1-\left(\frac{u}{v}\right)^2}{1+\left(\frac{u}{v}\right)^2}$, откуда получаем $\sin\alpha = \dfrac{2uv}{u^2+v^2}$, $\cos\alpha = \dfrac{v^2-u^2}{u^2+v^2}$. Если u и v — взаимно простые числа разной чётности, то полученные дроби будут несократимы. Поэтому $x = 2uv$, $y = v^2 - u^2$, $z = u^2 + v^2$.

Приведённое рассуждение является истоком мощной и бурно развивающейся ветви современной теории чисел.

II.99. *Указание.* Проверяется перебором остатков числа n по модулям 3 и 8.

II.100. а) **Решение.** Пусть данные числа равны a, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$. Тогда $a + 1$ взаимно просто с a и $a + 2$, а общим делителем $a + 1$ и $a + 3$ может быть лишь 2. Аналогично $a + 2$ взаимно просто со своими соседями, а общим делителем a и $a + 2$ может быть лишь 2. Но из чисел $a + 1$ и $a + 2$ одно является нечётным, поэтому не делится на 2, а значит, будет взаимно простым с остальными числами.

б) **Решение.** Аналогично заданию *а*, если среднее число нечётно, то оно взаимно просто с остальными, в противном случае одно из второго и четвёртого чисел (оба из которых нечётны) не делится на 3, а значит, взаимно просто с остальными.

в) *Указание.* Аналогично предыдущим пунктам.

г) **Решение.** Утверждение неверно. Рассмотрим 19 чисел: $n - 1$, n, ..., $n + 17$. Пусть число n таково, что $(n - 1) \vdots (3 \cdot 7 \cdot 17)$, $n \vdots 5$, $(n + 1) \vdots (2 \cdot 11)$, $(n + 4) \vdots 13$. Тогда $n - 1$ не взаимно просто с $n + 16$ (они оба кратны 17), а также с числами $n + 6$, $n + 13$ (эти числа кратны 7) и с числами $n + 2$, $n + 5$, $n + 8$, $n + 11$, $n + 14$, $n + 17$ (эти числа кратны 3). Кроме того, n не взаимно просто с $n + 5$, $n + 10$, $n + 15$ (эти числа кратны 5) и $n + 1$ не взаимно просто с $n + 12$ (эти числа кратны 11), а также с числами $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$ (эти числа кратны 2, остальные чётные числа упоминались ранее). И наконец, число $n + 4$ не взаимно просто с $n + 17$, поскольку оба эти числа кратны 13.

Примером такого числа n может служить $n = 347\,005$.

Замечание. Проверку этого примера в классе лучше производить, вычёркивая числа на доске наподобие решета Эратосфена.

II.101. **Решение.** Докажем, что $[a; b] = \frac{ab}{(a; b)}$. Обозначим $(a; b) = d$. Пусть $a = a_1 \cdot d$, $b = b_1 \cdot d$. Тогда, как доказано в задании II.86, а, $(a_1; b_1) = 1$, следовательно $\frac{ab}{(a; b)} = a_1 b_1 d$. Очевидно, что это число кратно числам a и b. Чтобы доказать, что это число есть наименьшее общее кратное, достаточно показать, что любое общее кратное чисел a и b делится на число $a_1 b_1 d$.

Пусть S — общее кратное чисел a и b. Так как $S \vdots a$, можно записать $S = ak = a_1 dk$. Это число делится на $b = b_1 d$, а тогда $a_1 k \vdots b_1$. Поскольку $(a_1; b_1) = 1$, то $k \vdots b_1$ (по свойству 1 взаимно простых чисел). Тогда $k = b_1 l$, откуда $S = a_1 d b_1 l$, т. е. $S \vdots a_1 d b_1$, что и требовалось доказать.

II.102. а) **Решение.** Рассмотрим числа 1, a, a^2, a^3, ..., a^{m-1}. Так как выписанных чисел m штук и ни одно из них не кратно m (они все взаимно просты с m по свойству 2 взаимно простых чисел), то среди этих чисел есть два, дающих одинаковый остаток от деления на m. Пусть это числа a^k и a^l (где $k > l$). Тогда $(a^k - a^l) \vdots m$, откуда $a^l(a^{k-l} - 1) \vdots m$. Однако a^l взаимно просто с m, поэтому (по свойству 1 взаимно простых чисел, с. 116 учебника) $(a^{k-l} - 1) \vdots m$. Таким образом, в роли требуемого d можно взять $k - l$.

б) **Решение.** Пусть число n таково, что $a^n \underset{m}{\equiv} 1$, и при этом $n \not\vdots\, d$. Разделим n на d с остатком: $n = dq + r$ $(0 < r < d)$. Тогда, умножив обе части верного сравнения $a^{dq} \underset{m}{\equiv} 1$ на a^r, получим $a^{dq+r} \underset{m}{\equiv} a^r$, откуда $a^n \underset{m}{\equiv} a^r$, т. е. $a^r \underset{m}{\equiv} 1$. Но полученное сравнение противоречит выбору d как наименьшего показателя степени, при возведении в которую получается остаток 1 по модулю m, ведь $r < d$.

Замечание. Поучительно сравнить это доказательство с доказательством теоремы о делении с остатком и другим доказательством теоремы о линейном представлении НОД, приведённым в конце пункта 3 § 13, а также решением примера 12 пункта 4 § 13 учебника.

§ 15. Простые числа. Основная теорема арифметики

Свойства простых чисел являются важнейшим применением свойств взаимной простоты.

Жемчужиной математической мысли является приводимое доказательство бесконечности множества простых чисел. Очень бы хотелось, чтобы ученики осознали его красоту и «культурную значимость». Идея этого доказательства применяется в решении задачи II.113.

Естественно, что важнейшим результатом параграфа является основная теорема арифметики. Материал параграфа вполне усваивается за один урок, а вот задачи к нему весьма сложны. При недостатке времени можно ограничиться решением задач II.103, II.105, II.108, II.115.

Решения и указания к задачам

II.103. Решение. Если p — составное число, то оно представимо в виде $p = ab$, где $a > 1$ и $b > 1$. Пусть $a \leqslant b$. Тогда $a^2 \leqslant ab = p$, откуда $a \leqslant \sqrt{p}$.

II.105. $2^{70} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15}$. **Решение.** В искомом числе должны быть простые множители 2, 3 и 5. При этом степени всех простых множителей, кроме 2, должны быть кратны 3, степени всех простых множителей, кроме 3, должны быть кратны 5, а степени всех простых множителей, кроме 5, должны быть кратны 7.

Итак, степень числа 2 должна быть кратна 35. При этом эта степень, уменьшенная на 1, должна быть кратна 3. Наименьшее такое число — это 70.

Аналогично 3 должно входить с показателем, кратным 21, а уменьшенный на 1 этот показатель должен быть кратен 5. Наименьшим таким числом является 21.

Наконец, 5 должно входить в разложение с показателем, кратным 15, а этот показатель, уменьшенный на 1, кратен 7. Наименьшим таким числом является 15.

Таким образом, $n = 2^{70} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15} \cdot c$. Нетрудно видеть, что число $n = 2^{70} \cdot 3^{21} \cdot 5^{15}$ удовлетворяет условиям задачи, а предыдущие рассуждения показывают, что оно является наименьшим.

II.106. Решение. Поскольку 11 — простое число, то по крайней мере один из множителей кратен 11. Пусть $(16a + 17b) \vdots 11$. Тогда и $17(16a + 17b) \vdots 11$. Вычтем из числа $17(16a + 17b)$ число $16(17a + 16b)$. Получим $33b$, т. е. число, кратное 11. Значит, $16(17a + 16b) \vdots 11$, а тогда, поскольку 16 не кратно 11, то $(17a + 16b) \vdots 11$, откуда и следует утверждение задачи.

II.107. (107; 19; 2), (107; 2; 19). **Решение.** Заметим, что 1995 ⋮ 19. Поэтому и yz ⋮ 19, а поскольку y и z — простые числа, то одно из них равно 19. Не умаляя общности, пусть $y = 19$. Тогда $x - z = 105$. Значит, числа x и z разной чётности. Единственным чётным простым числом является 2. Значит, $z = 2$, а тогда $x = 107$.

II.108. 144, 324. **Решение.** Утверждение задачи II.59 показывает, что искомое число является квадратом некоторого натурального числа. Число 15 раскладывается на не более чем 2 множителя, больших 1. Значит, искомое число может иметь либо 1, либо два простых делителя.

Если число имеет ровно один простой делитель, то степень этого делителя равна 14, но даже $2^{14} > 400$. Значит, в канонической форме записи искомого числа имеются два простых делителя, один из которых входит в степени 2, а другой — в степени 4. В канонической форме записи корня из искомого числа имеются те же делители, но один из них в первой степени, а другой во второй. Среди чисел от 1 до 19 таких чисел только два: $12 = 2^2 \cdot 3$ и $18 = 2 \cdot 3^2$.

II.109. а) **Решение.** Остатки от деления простых чисел, меньших 30, на 30 совпадают с самими этими простыми числами. Заметим, что все составные остатки от деления на 30 не взаимно просты с 30. Поэтому число, дающее составной остаток от деления на 30, кратно наибольшему общему делителю этого остатка и 30. Поскольку это число больше 30, оно не будет простым.

б) Неверно. **Решение.** Простое число 109 при делении на 60 даёт составной остаток 49.

II.110. Не может. **Решение.** Заметим, что $2006 = 2 \cdot 1003$, где оба множителя — простые числа. Значит, в формуле числа натуральных делителей участвуют не более двух показателей степеней простых чисел. В то же время, чтобы число было кратно 182, оно должно иметь своими простыми делителями 2, 7 и 13, а тогда в формуле числа простых делителей будут участвовать как минимум три множителя, больших 1.

II.111. *Замечание.* Условие задачи подразумевает, что прогрессия является возрастающей.

Решение. Пусть разность прогрессии взаимно проста с 2, т. е. нечётна. Тогда среди рассмотренных шести чисел прогрессии будет как минимум три чётных числа, что невозможно. Аналогично если разность прогрессии не кратна 3, то в этой прогрессии будут как минимум два числа, кратных 3 (для доказательства этого достаточно разбить 6 членов прогрессии на 2 множества, по 3 члена в каждом, и воспользоваться утверждением задачи II.93). Значит, разность прогрессии кратна 2 и 3, т. е. кратна 6.

Если разность прогрессии не кратна 5, то в ней есть член, кратный 5. Тогда это просто число 5.

Если 5 — первый член прогрессии, то среди оставшихся 5 членов есть ещё один член, кратный 5, что невозможно.

Если же 5 не является первым членом, то первый член будет отрицательным, так как ранее доказано, что разность прогрессии не меньше 6. Итак, разность прогрессии кратна 5 и 6, т. е. кратна 30, а значит, не менее 30.

Интересно, что прогрессия 7, 37, 67, 97, 127, 157 состоит из простых чисел.

II.112. $(p + 1;\ p^2 + p)$; $(2p;\ 2p)$; $(p^2 + p;\ p + 1)$. **Решение.** Из условия следует, что оба неизвестных должны быть больше p. Левую часть уравнения можно привести к общему знаменателю. После преобразований исходное уравнение примет вид

$$xy = p(x + y).$$

Это уравнение можно записать в виде $(x - p)(y - p) = p^2$. Из разложения следуют три системы уравнений:

$$\begin{cases} x - p = 1, \\ y - p = p^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x - p = p, \\ y - p = p, \end{cases} \quad \begin{cases} x - p = p^2, \\ y - p = 1, \end{cases}$$

решив которые, получим ответ.

II.113. *Указание.* Решение почти дословно (с заменой 4 на 6) повторяет решение примера 18 учебника.

II.114. г) $(n + 1)! + 2,\ (n + 1)! + 3,\ \ldots,\ (n + 1)! + n + 1$.

II.115. а) 3. **Решение.** Если $p \neq 3$, то p даёт при делении на 3 остатки 1 и 2. В первом случае $p + 14$ кратно 3, а во втором случае $p + 10$ кратно 3. Подходит $p = 3$.

б) 7. *Указание.* Решается аналогично заданию *а*. в) 5. г) Во втором издании задание снято. д) Нет таких p (используются соображения чётности). е) 3.

II.116. Решение. Способ 1. Если произведение целых чисел кратно p, то одно из чисел кратно p, а тогда и второе кратно p, поскольку сумма кратна p.

Способ 2. Элегантное доказательство можно привести с использованием теоремы Виета. В самом деле, пусть сумма и произведение чисел равны a и b. Тогда сами числа суть корни квадратного уравнения $x^2 - ax + b = 0$. При целом x два последних слагаемых по условию кратны p, а значит, x^2 кратно p, а тогда и x кратно p.

Для составного числа утверждение неверно. Например, сумма и произведение чисел 3 и 6 кратны 9, но сами числа 3 и 6 на 9 не делятся.

Замечание. Отметим, что утверждение задачи верно для составных чисел p, все простые множители которых входят в разложение в первых степенях.

II.117. 2^n, $n \in \boldsymbol{N}$. *Замечание*. В первом издании опечатка. Должно быть: «...если a делится на простое число p, то $a - 1$ делится на $p - 1$...»

Решение. Если p нечётно, то $p - 1$ чётно, а тогда нечётное число $a - 1$ не может быть кратно числу $p - 1$. Значит, среди простых делителей числа a есть только двойки, т. е. число a — натуральная степень двойки. Все такие a подходят.

II.118. а) **Решение**. Пусть p_1, p_2, ..., p_k — все простые множители, входящие в разложение числа a. Пусть x_0 — число, содержащее в своём разложении те же простые множители в степенях больших, чем в числе a. Тогда при $x > x_0$ число $x! + a$ содержит упомянутые множители в тех же степенях, что и число a, т. е. хотя бы один из этих простых множителей будет входить в нечётной степени. Число, в которое один из простых множителей входит в нечётной степени, не может быть квадратом. Значит, решений уравнения меньше, чем x_0.

б) **Решение**. Если a не является квадратом натурального числа, рассуждения аналогичны решению задания a.

Пусть a — квадрат натурального числа. Если a не кратно 3, то при $x \geqslant 3$ число $x! - a$ даёт остаток 2 при делении на 3, т. е. не является квадратом. Таким образом, в этом случае решений может быть не более двух.

Если же $a \vdots 3$, то представим a в виде $a = 3^{2k} \cdot a_1$, где $a_1 \not\vdots\, 3$. Отметим, что a_1 является квадратом натурального числа. Пусть $x \geqslant 3^{2k}$. Тогда $x! - a = 3^{2k}\left(\dfrac{x!}{3^{2k}} - a_1\right)$. Чтобы это выражение являлось квадратом натурального числа, необходимо, чтобы $\left(\dfrac{x!}{3^{2k}} - a_1\right)$ также являлось квадратом натурального числа, что невозможно, поскольку оно даёт остаток 2 при делении на 3. Таким образом, уравнение может иметь не более чем 3^{2k} решений.

в) (1; 1).

II.119. *Указание*. Доказать с помощью основной теоремы арифметики и представления наибольших общих делителей и наименьших общих кратных через максимумы и минимумы степеней простых множителей с помощью равенства $\min(\alpha; \beta) + \min(\beta; \gamma) + \min(\alpha; \gamma) - 2\min(\alpha; \beta; \gamma) = \max(\alpha; \beta) + \max(\beta; \gamma) + \max(\alpha; \gamma) - 2\max(\alpha; \beta; \gamma)$.

Для доказательства равенства в силу его симметрии относительно перестановок букв можно, не умаляя общности, положить $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, а тогда указанное равенство примет вид $\alpha + \beta + \alpha - 2\alpha = \beta + \gamma + \gamma - 2\gamma$, что верно.

II.120. а) $\{6;\ 10;\ 14;\ 30;\ 42;\ 70;\ 105;\ 210\}$. б) $\{15;\ 30;\ 39;\ 65;\ 78;\ 130;\ 195;\ 390\}$. в) $\{6;\ 15;\ 30;\ 33;\ 66;\ 110;\ 165;\ 330\}$.

II.121. а) **Решение.** Пусть $k = ab$, где $a,\ b > 1$. Тогда число $2^{ab} - 1$ будет кратно числу $2^a - 1$ большему 1, что невозможно.

б) **Решение.** Пусть среди делителей числа k есть нечётный делитель $a > 1$. Пусть $k = ab$. Тогда, так как $2^b \underset{2^b+1}{\equiv} -1$, возведя обе части сравнения в нечётную степень a, получим $2^k \underset{2^b+1}{\equiv} -1$, т. е. $(2^k + 1) \vdots (2^b + 1)$, что невозможно.

II.122. **Решение.** Если упомянутое число взаимно просто с числами 2, 3, 4, ..., n, то и его делители взаимно просты с этими числами. Если оба делителя меньше, чем само число, получаем противоречие с выбором этого числа как наименьшего.

II.123. $\dfrac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \dfrac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \cdot \ldots \cdot \dfrac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1}$.

II.124. **Решение.** Так как $p_2 = 3$, а при $n > 2$ числа 2 и 3 не могут быть делителями числа $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$, т. е. в частности все последующие члены последовательности нечётны. Если $p_{n+1} = 5$, то число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ не имеет простых делителей, больших 5. При этом числа 2 и 3 не являются делителями данного числа, а значит, никаких других делителей, кроме 5, число $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$ не имеет. Тогда $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1 = 5^k$. Однако $5^k - 1$ кратно 4, в то время как $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ в составе своих простых делителей имеет лишь одну двойку.

II.125. а) 30. б) Нет. **Решение.** Если $m < n$, то $a_n \vdots a_m$, а тогда и $(a_m + a_n) \vdots a_m$.

в) Нет. **Решение.** Заметим, что $32\,842 \not\vdots\ 3$. Если бы m и n оба были не меньше 2, то оба числа a_m и a_n делились бы на 3, а тогда и их сумма делилась бы на 3. Значит, одно из чисел m и n равно 1. Пусть, например, $m = 1$, тогда $a_m = 2$. Тогда $a_n = 32\,840$. Но $32\,840 \not\vdots\ 3$ (при том, что, очевидно, $n > 2$).

г) **Решение.** Ясно, что $m \geqslant 6$ (иначе $a_m < 30\,000$). Тогда $a_m \vdots 7$. Поскольку $(a_m - a_n) \not\vdots\ 7$, но $(a_m - a_n) \vdots 30$, значит, $n = 3$, откуда $a_n = 30$, а тогда $a_m = 30\,030 = 2 \cdot 3 \times$ $\times\, 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$.

д) $n = 1$, $y = 1$. **Решение.** Из первого уравнения $a_n = x^2 - 1$. Так как a_n при всех n является чётным числом, то x — нечётное число, а потому $x^2 - 1$ кратно 4. Однако a_n имеет в составе своих простых множителей лишь одну двойку. Значит, уравнение решений не имеет.

Решим второе уравнение $a_n - 1 = y^2$. При $n \geqslant 2$ имеем $a_n \vdots 3$, а тогда $a_n - 1$ даёт остаток 2 от деления на 3, т. е. не может быть квадратом натурального числа. При $n = 1$ получаем равенство $2 - 1 = 1^2$.

II.126. Решение. Примерами таких чисел заведомо могут служить числа вида y^2, для которых число $2y - 1$ является составным. Ясно, что таких чисел будет бесконечно много. Покажем, что они не представимы в виде суммы квадрата и простого числа.

Действительно, пусть $y^2 = x^2 + p$. Тогда $p = (y - x)(y + x)$. Так как p — простое число, то может подойти только такое значение x, при котором $y - x = 1$, а тогда $p = y + x = 2y - 1$, и p является составным числом благодаря выбору числа y.

II.127. Решение. Докажем утверждение задачи методом математической индукции.

База индукции. $n = 12$, $p_{12} = 37 > 3 \cdot 12$ — утверждение верно.

Переход индукции. Пусть $p_k > 3k$. Докажем, что $p_{k+1} > 3k + 3$. Действительно, так как p_k является нечётным числом, то p_{k+1} не может быть равно $p_k + 1$, т. е. $p_{k+1} \geqslant p_k + 2$. По индукционному предположению $p_k > 3k$, а значит, $p_k \geqslant 3k + 1$. Тогда $p_{k+1} \geqslant 3k + 3$. Но p_{k+1} не может быть равно $3k + 3$, поскольку это число кратно 3. Поэтому $p_{k+1} > 3k + 3$.

II.128. Решение. Пусть n — совершенное число, равное квадрату натурального числа. Значит, все его простые делители входят в разложение n в чётных степенях. Пусть $n = p_1^{2\alpha_1} \cdot p_2^{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{2\alpha_k}$.

Сумма всех делителей числа n в силу совершенности n равна $2n$. С другой стороны, эта же сумма выражается формулой

$$(1 + p_1 + \ldots + p_1^{2\alpha_1})(1 + p_2 + \ldots + p_2^{2\alpha_2}) \cdot \ldots \times \\ \times (1 + p_k + \ldots + p_k^{2\alpha_k}).$$

В каждой скобке находится нечётное число слагаемых, из которых либо все нечётны (если соответствующее простое число нечётно), либо нечётно только одно слагаемое (если соответствующее простое число 2). Значит, каждая скобка является нечётной, а тогда и произведение скобок нечётно, что противоречит тому, что оно должно быть равно $2n$.

II.129. Решение. Способ 1. Из условия следует, что $x^2 \underset{a}{\equiv} -y^2$ и $z^2 \underset{a}{\equiv} -t^2$. Перемножив эти сравнения, получаем $x^2z^2 \underset{a}{\equiv} y^2t^2$, откуда $(x^2z^2 - y^2t^2) \,\vdots\, a$. Если a — простое число, то одно из чисел $xz - yt$ или $xz + yt$ должно быть кратно a.

Заметим, однако, что оба этих числа по модулю не превосходят $xz + yt$. В свою очередь, $xz \leqslant \frac{x^2 + z^2}{2}$, $yt \leqslant \frac{y^2 + t^2}{2}$, а тогда $xz + yt \leqslant \frac{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}{2} = a$. При этом равенство достигается лишь при $x = z$ и $y = t$, что противоречит условию различности данных чисел.

Осталось разобрать случай, когда число с меньшим модулем кратно числу с большим модулем. Это бывает, если число с меньшим модулем равно 0. Пусть $xz - yt = 0$, т. е. $xz = yt$. Поскольку a — простое число, то x и y взаимно просты (иначе a было бы кратно квадрату их наибольшего общего делителя). В решении примера 14 учебника было показано, что в таком случае $x = t$, $z = y$, а это опять-таки противоречит тому, что данные числа различны.

Способ 2. Из равенства $x^2 + y^2 = z^2 + t^2$ следует $(x - z) \times$ $\times (x + z) = (t - y)(t + y)$. В решении примера 14 учебника было показано, что если $ab = cd$, то существуют целые числа α, β, γ и δ, такие, что $a = \alpha\beta$, $b = \gamma\delta$, $c = \alpha\gamma$ и $d = \beta\delta$. Положив $a = x - z$, $b = x + z$, $c = t - y$ и $d = t + y$, получим $x = \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}$, $z = \frac{\gamma\delta - \alpha\beta}{2}$, $t = \frac{\alpha\gamma + \beta\delta}{2}$ и $y = \frac{\beta\delta - \alpha\gamma}{2}$. Тогда

$$a = x^2 + y^2 = \frac{\alpha^2\beta^2 + \gamma^2\delta^2 + \beta^2\delta^2 + \alpha^2\gamma^2}{4} = \frac{(\alpha^2 + \delta^2)(\gamma^2 + \beta^2)}{4}.$$

Поскольку числа α, β, γ и δ не все равны 1, то значения в каждой скобке больше 2, при этом сумма квадратов двух натуральных чисел не может равняться 4. Поэтому каждый из множителей после сокращения дроби останется большим 1, т. е. a — составное число.

Замечание. Решение задачи особенно просто, если применить теорию гауссовых чисел, т. е. комплексных чисел вида $a + bi$, где a и b — целые числа. Эти числа можно делить с остатком, а значит, для них верна вся построенная теория, вплоть до основной теоремы арифметики и единственности разложения на простые множители.

Подробнее о гауссовых числах см. книгу для учителя 11 класса.

Глава III. Многочлены

Основная цель изучения данной главы — обобщить, углубить и систематизировать материал по теории многочленов, рассмотренный ранее.

С точки зрения математической культуры представляется важным проведение параллели между многочленами от одной переменной и целыми числами, позволяющей «даром» получать многие важные утверждения (аналоги теоремы о линейном представлении, наличие неприводимых многочленов и, как следствие, существование и единственность разложения многочлена на неприводимые сомножители).

Вместе с тем понимание многочлена не только как алгебраического объекта, но и как функции даёт возможность обогащения соответствующих методов новыми, основанными на подстановке значений переменной в многочлен.

Связующим звеном между алгебраической и функциональной точкой зрения на многочлен является теорема Безу. Отметим, что в «большой» математике теоремой Безу называется очень серьезное обобщение данной теоремы.

В силу ограниченности учебного времени в учебнике не рассмотрены интереснейшие вопросы, связанные с неприводимостью многочленов над $\boldsymbol{Z}$, в частности критерий Эйзенштейна и теорема об избавлении от иррациональности. Эти вопросы могут быть рассмотрены на факультативных занятиях после изучения на уроках § 20. Далее будет затронут соответствующий материал.

Планирование изучения материала приведено ниже.

Глава III. Многочлены	**10**	**12**
Понятие многочлена. Многочлены от одной переменной. Метод неопределённых коэффициентов	4	4
Теорема Безу и её следствия. Совпадение формального и функционального равенства многочленов	4	4
Интерполяционная формула Лагранжа		2
Контрольная работа № 6	2	2

§ 16. Понятие многочлена

Материал параграфа элементарен по сути и не содержит ничего принципиально нового для учащихся, окончивших основную школу. Вместе с тем он представляет широкие возможности для «игры в определения», т. е. для понимания того, сколь трудно определить очевидные вещи. Например, если попросить учащихся дать определение равенства двух многочленов самостоятельно, то оборот «не содержащие подобных слагаемых» будет пропущен. Необходимость этого оборота показывает пример 4 учебника. То же самое касается необходимости этого оборота в определении степени многочлена, как показано в замечании после определения (с. 137 учебника). Любопытным является также «обоснование» того, что степень нулевого многочлена равна $-\infty$, приведённое в сноске на с. 137 учебника.

Существенным является введение вопреки существующей традиции отдельного обозначения для нулевого многочлена. По нашему мнению, это должно устранить обычно возникающую путаницу в понимании записи $f(x) = 0$ как записи уравнения или того факта, что многочлен нулевой.

Вместе с тем «игры в строгость» при изучении данного параграфа не должны занимать много времени. Одного урока на это более чем достаточно.

Решения и указания к задачам

III.2. а) Верно. б) Верно. в) Ложно. **Решение.** Два многочлена, подобные нулевому, необязательно подобны между собой. Такая же ситуация возникает, например, с сонаправленностью векторов, поскольку любой вектор сонаправлен нулевому.

III.4. *Замечание.* На утверждение этой задачи полезно обратить внимание учащихся как на теоретический факт.

§ 17. Многочлены от одной переменной. Метод неопределённых коэффициентов

Ключевым в содержании параграфа является, безусловно, метод неопределённых коэффициентов. Именно он позволяет решать многочисленные задачи и имеет широкое применение.

Важно обратить внимание на утверждения пункта 1, посвящённые поведению степеней при различных действиях с многочленами. Вместе с утверждением задачи III.4 они дают возможность упростить применение метода неопределённых коэффициентов, заранее сделав вывод о степенях многочленов, как это сделано в начале решения примера 11 учебника.

Решения и указания к задачам

III.7. а) **Решение**. Пусть $P(x)$ — многочлен второй степени. Пусть $P(x) = f(f(x))$ и пусть $\deg f(x) = m$. Тогда $\deg P(x) = (\deg f(x))^2$, т. е. $m^2 = 2$, что невозможно.

б) Неверно. **Решение**. Например, пусть $P(x) = x$, $f(x) = -x$. Тогда $P(x) = P(P(x)) = f(f(x))$.

III.8. $a = 1$, $b = 15$. *Указание.* Обязательным элементом решения после нахождения значений a и b должна быть проверка.

III.9. Нет таких чисел. *Указание.* Если пренебречь проверкой, может получиться неверный ответ: $s = -4$, $r = 2$.

III.10. а) $P(x) = 2x - 1$. **Решение**. Заметим, что $\deg P(x) \geqslant 1$. Обозначим $\deg P(x) = m$. Тогда $\deg P^3(x) = 3m$, $\deg(xP(x)) = m + 1$. При $m \geqslant 1$ выполнено неравенство $3m > m + 1$. Поэтому старший член многочлена $P^3(x)$ не сократится, а потому $\deg(P^3(x) + xP(x)) = 3m$. Значит, $m = 1$, поскольку в правой части стоит многочлен степени 3. С помощью метода неопределённых коэффициентов можно получить $P(x) = 2x - 1$. Обращаем внимание, что здесь также необходима проверка, поскольку для отыскания коэффициентов многочлена P использовались только старший коэффициент и свободный член.

Указание. В решении следующих пунктов также необходима проверка.

б) $P(x) = x^2 - x - 3$. в) $P(x) = x^2 - x + 2$. г) $P(x) = x^2 - x - 3$. д) $P(x) = x^2 - x - 1$.

III.11. а) $P(x) = x$. **Решение**. Пусть $P(x) = ax + b$, $Q(x) = mx^2 + nx + p$. Тогда старший коэффициент многочлена $P(Q(x))$ равен am, а многочлена $Q(P(x))$ равен a^2m. С учётом того, что a и m не равны нулю, получаем $a = 1$. Средний коэффициент многочлена $P(Q(x))$ равен n, а многочлена $Q(P(x))$ равен $2mb + n$ (с учётом найденного значения a). Отсюда следует, что $b = 0$.

б) **Решение**. Пусть $P(x) = ax^2 + bx + c$, $Q(x) = mx^2 + nx + p$. Тогда старший коэффициент многочлена $P(Q(x))$ равен am^2, а многочлена $Q(P(x))$ равен a^2m. С учётом того, что a и m не равны 0, получаем $a = m$.

Коэффициент при x^3 многочлена $P(Q(x))$ равен $2a^2n$, а многочлена $Q(P(x))$ равен $2a^2b$. Из равенства этих коэффициентов получаем $n = b$. Наконец, сравнивая коэффициенты при x, получаем $p = c$.

в) $P(x) = 2x^2 - 1$. *Замечание.* Отметим, что при подстановке $x = \cos\alpha$ в формулы многочленов P и Q получаем формулы $\cos 2\alpha$ и $\cos 3\alpha$ соответственно. Можно показать, что условию $P(Q(x)) = Q(P(x))$ при неравных степенях многочленов P и Q удовлетворяют только так называемые многочлены Чебышева, получаемые заменой $\cos\alpha = x$ в формуле, выражающей $\cos n\alpha$ через $\cos\alpha$.

III.12. Решение. Применим дважды способ, описанный в решении примера 9 учебника. А именно, пусть $t = x - 1$, тогда $x = t + 1$, и можно записать $Q(t) = (t + 1)^2 - 2(t + 1) - 1$, откуда $Q(t) = t^2 - 2$.

Итак, $Q(x) = x^2 - 2$. Тогда $P(x^2 - 2) = x^4 - 5x^2 + 7$. Пусть теперь $s = x^2 - 2$, тогда $x^2 = s + 2$, и можно записать $P(s) = (s + 2)^2 - 5(s + 2) + 7$, откуда $P(s) = s^2 - s + 1$.

III.13. Решение. Предположим, что многочлен $f(x, y)$ представим в виде произведения двух многочленов, отличных от константы. Пусть $p(x) + y = g(x, y) \cdot h(x, y)$. Запишем g и h как многочлены от y с коэффициентами, являющимися многочленами от x:

$$g(x, y) = a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \ldots + a_1(x)y + a_0(x);$$
$$h(x, y) = b_m(x)y^m + b_{m-1}(x)y^{m-1} + \ldots + b_1(x)y + b_0(x).$$

При этом «старшие коэффициенты» $a_n(x)$ и $b_m(x)$ являются ненулевыми многочленами. Тогда при умножении многочленов g и h старшая степень переменной y будет равна $m + n$. Значит, одно из чисел (например, m) равно 0, а другое равно 1. Таким образом, $h(x, y) = b_0(x)$, а $g(x, y) = a_1(x)y + a_0(x)$, причём $a_1(x) \cdot b_0(x) = 1$, откуда $b_0(x) = 1$, т. е. многочлен $h(x, y)$ — константа. Следовательно, наше предположение было неверно.

§ 18. Деление многочленов с остатком

Основной целью данного параграфа является усвоение различных алгоритмов деления с остатком (деление столбиком и схема Горнера). Место этого параграфа в общем курсе алгебры определяется тем, что именно здесь говорится о глубокой аналогии между соответствующими теориями целых чисел и многочленов. Важно, чтобы в результате изучения параграфа учащиеся уяснили эту аналогию и сферы её применения, а также ознакомились с методом разложения по степеням линейного двучлена.

Полезно также обратить внимание учащихся на результат задачи III.15 как на полезный теоретический факт.

В качестве задач к данному параграфу можно использовать, кроме задач III.14—III.24, также задачу III.26.

III.15. а) *Указание.* Следует из того, что $a^n - b^n$ при натуральных значениях n кратно $a - b$, поскольку существует разложение $a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$.

б) *Указание.* Следует из разложения, упомянутого в указании к заданию a.

III.16. $(2x^2 - x + 1)^2$. **Решение.** Из условия следует, что $P = QS + 2x^2 - x + 1$. Возведя обе части равенства в квадрат, получим $P^2 = Q^2S^2 + 2QS(2x^2 - x + 1) + (2x^2 - x + 1)^2 = SR + (2x^2 - x + 1)^2$, где $R = Q^2S + 2Q(2x^2 - x + 1)$.

Поскольку $\deg(2x^2 - x + 1)^2 = 4$, а $\deg S = 5$, то полученная запись есть запись деления с остатком. Искомый остаток равен $(2x^2 - x + 1)^2$.

III.17, III.18. *Указание.* Достаточно записать соответствующие равенства, показав, что они являются записями деления с остатком.

III.17. а) Θ. б) $\frac{1}{2}$. в) x.

III.18. а) $\frac{1}{2}q(x)$ и $r(x)$. б) $2q(x)$ и $2r(x)$. в) $-\frac{3}{2}g(x)$ и $-3r(x)$.

III.19. а) **Решение.** Запишем деление с остатком $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg s$. Условие запишем в виде равенства $2p(x) = q(x) + r(x)$. Умножив первое равенство на 2 и вычтя из полученного равенства второе, получим

$$(2s(x) - 1)q(x) + r(x) = \Theta. \qquad (1)$$

Если $q(x) \neq \Theta$, то при $2s(x) - 1 \neq \Theta$ получим $\deg((2s(x) - 1)q(x)) \geqslant \deg s(x) > \deg r(x)$, поэтому равенство (1) не будет выполняться.

Значит, либо $q(x) = \Theta$, а тогда $p(x) = \Theta$ и делителем может быть любой ненулевой многочлен, либо $s(x) = \frac{1}{2}$, и тогда $r(x) = 0$.

б) Θ. **Решение.** Запишем деление с остатком $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg s$. Условие запишем в виде равенства $p(x) = s(x)r(x)$. Вычитая из одного равенства другое, получим $r(x) = s(x)(r(x) - q(x))$.

Если в обеих частях равенства стоят нулевые многочлены, то $p(x) = \Theta$. В противном случае степень левой части будет меньше степени правой части, что невозможно.

в) Θ. **Решение.** Запишем деление с остатком $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg s$. Условие запишем в виде равенства $p(x) = q(x)r(x)$.

Вычитая из одного равенства другое, получим $q(x)(r(x) - s(x)) - r(x) = \Theta$. Это равенство возможно лишь при $q(x) = \Theta$, поскольку в противном случае $\deg q(x)(s(x) - r(x)) > \deg r(x)$. Следовательно, $p(x) = \Theta$.

г) 1. **Решение**. Запишем деление с остатком $p(x) = s(x)q(x) + r(x)$, $\deg r < \deg s$. Условие запишем в виде равенства $p(x) = s(x) + r(x)$. Последнее равенство является записью деления с остатком, если неполное частное равно 1.

III.20. $4x$. **Решение**. Условие задачи можно записать в виде равенства $P(x) = S(x) \cdot (x^2 + 1) + x^3 + 5x$. Деление с остатком $R(x)$ на $Q(x)$ запишем в виде равенства $x^3 + 5x = (x^2 + 1)x + 4x$. Подставив второе равенство в первое, получим $P(x) = (S(x) + x) \cdot (x^2 + 1) + 4x$. Заметим, что полученное равенство является записью деления с остатком $P(x)$ на $Q(x)$. Искомый остаток равен $4x$.

III.22. Решение. Разложим данный многочлен по степеням двучлена $x - 2$ (это разложение произведено в примерах 16—18 учебника). Поскольку все коэффициенты разложения положительны, то при неотрицательных значениях выражения $x - 2$ положительными будут и значения многочлена.

III.23. Решение. Запишем, используя данное в задаче равенство $P(P(x)) - Q(Q(x)) = P(P(x)) - P(Q(x)) + Q(P(x)) - Q(Q(x))$.

В силу результата задания III.15, *б* имеем $(P(P(x)) - P(Q(x))) \vdots (P(x) - Q(x))$ и $(Q(P(x)) - Q(Q(x))) \vdots (P(x) - Q(x))$, откуда и следует требуемое.

III.24. Такого числа a не существует. **Решение**. Предположим, что такое число a существует. Запишем деление с неопределёнными коэффициентами $x^6 + x^3 + a = (x^3 + x + a) \times (x^3 + bx^2 + cx + 1)$, откуда, раскрывая скобки в правой части, получим $x^6 + x^3 + a = x^6 + bx^5 + (c + 1)x^4 + (a + b + 1)x^3 + (c + ab)x^2 + (1 + ac)x + a$.

Сравнив коэффициенты при x^5, получим $b = 0$, сравнив коэффициенты при x^4, получим $c = -1$, а сравнив коэффициенты при x^3, получим $a = 0$. Таким образом, определены все неизвестные коэффициенты, но при этом коэффициенты при x^2 в левой и правой частях равенства не совпадают. Значит, наше предположение было неверным.

§ 19. Теорема Безу и её следствия. Совпадение формального и функционального равенства многочленов

Данный параграф должен занимать центральное место в изложении материала. Как уже отмечалось ранее, основная роль теоремы Безу — установление связи между многочленом как формальной записью с определёнными правила-ми действий и многочленом как функцией, определённой на некотором числовом множестве.

Отметим, что приведённое в учебнике доказательство не совсем строгое. В сноске (с. 151 учебника) указано, например, на отсутствие доказательства того, что значение многочлена в данной точке не зависит от того, в каком виде он представлен.

Важным является комментарий о том, что теорему можно использовать в обе стороны: и для нахождения остатков, и для нахождения значений многочлена. Важным для решения уравнений подбором корней является следствие, устанавливающее делимость на линейный двучлен при наличии корня. И, естественно, важнейшей является теорема о совпадении формального и функционального равенства многочленов, сформулированная в пункте 3. У учащихся должно быть сформировано чёткое понимание того, что многочлен степени n полностью определяется своими значениями в $n + 1$ точке. Конкретным способом этого определения служит, например, интерполяционная формула Лагранжа. Впрочем, её изучение не является обязательным, но может оказаться полезным.

Решения и указания к задачам

III.25. $-\frac{2}{3}x + 6\frac{1}{3}$. **Решение.** Условие об остатке при делении на $x - 2$ означает, что $P(2) = 5$, аналогично $P(-1) = 7$.

Запишем деление с остатком: $P(x) = (x^2 - x - 2)\,Q(x) + ax + b$. Подставив в это равенство $x = 2$ и $x = -1$, получим

$$P(2) = (2^2 - 2 - 2)\,Q(2) + 2a + b$$

и

$$P(-1) = ((-1)^2 - (-1) - 2)\,Q(-1) - a + b,$$

откуда $\begin{cases} 2a + b = 5, \\ -a + b = 7, \end{cases}$ и получим $a = -\frac{2}{3}$, $b = 6\frac{1}{3}$.

III.26. *Замечание.* Эта задача стала бы задачей на применение теоремы Безу, если можно было подставить вместо x корень многочлена $x^2 + 1$. Поэтому полезно наряду с такой задачей рассмотреть сначала аналогичную с делимостью на $x^2 - 1$, где значения a и b находятся из условий обращения делимого в 0 при $x = 1$ и $x = -1$. В обоих пунктах в этом случае $a = b = 1$.

Теперь рассмотрим исходную формулировку задания *а* и за невозможностью подставить мнимую единицу (о которой в этом контексте полезно упомянуть) просто поделим в столбик и получим остаток $-(a + 1)x - b - 1$. Этот остаток является нулевым многочленом лишь при $a = b = -1$.

а) *Указание.* Если $ab = 1$, то делимость наступает лишь при $a = b = -1$.

б) *Указание.* См. задание *а*.

III.27. $a = -2$, $b = 2$. *Указание.* В этой задаче в отличие от предыдущей можно обозначить $x^2 = t$, после чего задача превращается в такую: при каких значениях параметров a и b многочлен $(t^2 + at + 1)^4 + (t^2 - bt + 1)^4$ делится на $t + 1$? Иначе говоря, при каких значениях этот многочлен обращается в 0 при $t = -1$?

Замечание. Полезно обсудить с учащимися правомерность такого хода — ведь вещественного значения x, обращающего $x^2 + 1$ в 0, нет! Дело в том, что делимость $(t^2 + at + 1)^4 + (t^2 - bt + 1)^4$ на $t + 1$ означает, что можно записать этот многочлен в виде произведения двух множителей, один из которых равен $t + 1$. А это после возвращения к переменной x означает, что исходный многочлен записан в виде произведения двух множителей, один из которых равен $x^2 + 1$. Таким образом, в этом решении речь идёт о чисто алгебраических преобразованиях многочленов, просто для доказательства возможности одного из этих преобразований использована теорема Безу.

III.28. 7 ($a = 5$, $x = -3$).

III.29. $\frac{24}{25}\left(a = -\frac{49}{25}\right)$.

III.30. $-16\,949\frac{14}{23}$. **Решение.** Запишем деление с остатком: $P(x) = (x^2 - 1)\,Q(x) + 15x - 12$. Если в это равенство подставить $x = 1$ и $x = -1$, то получим $P(1) = 3$, $P(-1) = -27$. Эти равенства позволяют найти значения a и b $\left(a = -\frac{39}{23};\ b = \frac{27}{23}\right)$, откуда найти искомый остаток как $P(3) = -16\,949\frac{14}{23}$.

III.31. Задача на комбинацию метода неопределённых коэффициентов и теоремы Безу.

а) $P(x) = 2x^3 - x - 1$. **Решение.** Способ 1. Пусть $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Тогда $P(x + 1) = ax^3 + (3a + b)x^2 + (3a + 2b + c)x + a + b + c + d$, откуда получим систему уравнений $\begin{cases} 3a = 6, \\ 3a + 2b = 6, \\ a + b + c = 1, \end{cases}$ из которой находим $a = 2$, $b = 0$, $c = -1$. Из условия $P(1) = 0$ находим коэффициент $d = -1$.

Возможно идейно другое, технически более сложное решение этой задачи.

Способ 2. Подставив в исходное условие $x = 0$, получим $P(1) - P(0) = 1$. Но $P(1)$ по условию равно 0, а $P(0) = d$ (в исходных обозначениях неизвестных коэффициентов). Отсюда $d = -1$. Далее, подставим в исходное условие $x = 1$, получим $P(2) - P(1) = 13$, откуда $P(2) = 13$. Наконец, подставив в исходное условие $x = -1$, получаем $P(0) - P(-1) = 1$, откуда $P(-1) = -2$.

Получив значения многочлена третьей степени в четырёх точках (точки -1; 0; 1; 2), можно найти этот многочлен, например, решив систему уравнений на коэффициенты или применив интерполяционную формулу Лагранжа.

б) $P(x) = \frac{8}{9}x^3 - \frac{1}{9}x^2 - \frac{50}{27}x + \frac{104}{27}$. *Указание.* Отметим, что свободный член можно найти из исходного условия, подставив в него $x = -1$. Получим $P(-2) + P(-1) - 2P(0) = -3$, причём по условию известно, что $P(-2) = 0$, а $P(0)$ — это свободный член многочлена P.

III.32. Нет. **Решение.** Запишем оба деления с остатком

$$P(x) = (x^2 - 5x + 4)\,Q(x) + 2x + 3$$

и

$$P(x) = (x^2 - 3x + 2)\,S(x) + 3x - 2.$$

Подставив $x = 1$ в оба равенства, получим два числовых равенства $P(1) = 5$ и $P(1) = 1$, одновременное выполнение которых невозможно.

III.33. а) $\frac{11}{2}x + 3$. **Решение.** Запишем деления с остатком $P(x) = (x^2 - 3x + 2)\,S(x) + 5x + 4$ и $P(x) = (x^2 - x - 6)\,S(x) + 3x - 2$.

Подставляя в первое равенство $x = 1$ и $x = 2$, а во второе равенство $x = -2$ и $x = 3$, получаем $P(1) = 9$, $P(2) = 14$, $P(-2) = -8$, $P(3) = 7$. Далее задача решается аналогично задаче III.25.

б) $-6x^2 + 23x - 8$. *Указание.* Задача решается аналогично задаче III.25, только искомый остаток будет квадратичным, соответственно искомых коэффициентов будет три.

в) 3. **Решение.** Поскольку условиями заданы значения многочлена в четырёх точках, причём квадратичный многочлен, полученный в задании *б* и совпадающий с многочленом P в трёх точках, не совпадает с ним в оставшейся точке (при $x = -2$ его значение равно -78), то наименьшая степень многочлена P может быть равна 3. Такой многочлен может быть построен (например, по формуле Лагранжа) и будет удовлетворять всем условиям задачи.

III.34. а) 1. *Указание.* Сумма коэффициентов многочлена — это его значение при $x = 1$.

б) $\frac{1-3^{239}}{2}$. **Решение.** Сумма коэффициентов при чётных степенях равна полусумме значений многочлена при $x = 1$ и $x = -1$, т. е. $\frac{3^{239}+1}{2}$. Аналогично сумма коэффициентов при нечётных степенях равна полуразности значений многочлена при $x = 1$ и $x = -1$, т. е. $\frac{1-3^{239}}{2}$.

III.35. а) 3. б) 3. в) 4. г) 3.

III.36. а) $a = 2$ или $a = -2$. б) $a = \sqrt{7}$ или $a = -\sqrt{7}$. в) $a = -1$ или $a = 4$.

III.37. а) Нет. **Решение.** Заметим, что значения данного многочлена совпадают со значениями многочлена $P(x) = x$ в 10 точках. Многочлен степени не выше 9 полностью определяется своими значениями в 10 точках. Поэтому единственный многочлен степени не выше 9, принимающий в заданных точках заданные значения, — это многочлен $P(x) = x$.

б) Да, существует, например, $(x - 1)(x - 2) \cdot ... \times \times (x - 10) + x$.

III.38. -3. *Указание.* Решение задачи аналогично решению примера 20 учебника. **Решение.** Подставим $x = = -y - z$, потребовав, чтобы полученное выражение $-3yz^2 - - 3y^2z - ayz^2 - ay^2z$ было бы равно нулю при всех значениях y и z. Поскольку это выражение является многочленом второй степени относительно y, оно равно нулю при всех значениях y, лишь если все его коэффициенты (как многочлена относительно y) равны 0, т. е. при $a = -3$.

III.39. а) **Решение.** Если многочлен $P(x)$ степени n принимает своё значение a хотя бы $n + 1$ раз, то многочлен $P(x) - a$ степени n имеет хотя бы $n + 1$ корень, что невозможно (существенным является условие $n \in \boldsymbol{N}$, поскольку многочлен нулевой степени принимает соответствующее значение бесконечно много раз).

б) Например, $P(x) = x^3$ принимает каждое своё значение ровно 1 раз.

в) Да, существует. Например, $P(x) = x$.

Замечание. Довольно трудной задачей является доказательство того факта, что многочлен, принимающий каждое своё значение столько раз, какова его степень, — это многочлен первой степени.

III.40. *Указание.* Разность таких многочленов является многочленом степени, меньшей n, имеющим n корней.

III.41. *Указание.* Разность таких многочленов имеет $n - 1$ корень в соответствующих точках, а также корень 0, являясь многочленом степени не выше $n - 1$.

III.42. Только константы. **Решение.** Действительно, каждый такой многочлен принимает любое своё значение сколь угодно большое количество раз.

III.43. 17. **Решение.** Обозначим искомый многочлен $P(x)$. Рассмотрим многочлен $P(x) - 5$. Этот многочлен имеет корни 1, 2 и 3 и старший коэффициент 2. Поэтому он равен $2(x-1)(x-2)(x-3)$, а значит, $P(x) = 2(x-1)(x-2) \times$ $\times (x-3) + 5$. Искомый остаток равен $P(4) = 17$.

III.44. а) x. **Решение.** Выражение является записью интерполяционной формулы Лагранжа для многочлена $P(x)$, степень которого не выше 2, где $P(a) = a$, $P(b) = b$, $P(c) = c$. Такой многочлен, очевидно, равен x.

б) 0. **Решение.** Выражение является свободным членом многочлена из задания *а*.

в) -1. **Решение.** Выражение является коэффициентом при x, взятом с противоположным знаком, многочлена из задания *а*.

г) 0. **Решение.** Выражение является свободным членом записанного по формуле Лагранжа многочлена $P(x)$ степени не выше 3, для которого $P(a) = a^3$, $P(b) = b^3$, $P(c) = c^3$, $P(d) = d^3$. Очевидно, $P(x) = x^3$, поэтому данное выражение равно 0.

Замечание. Полезно обратить внимание учащихся на то, что решать задания *б* и *в* без задания *а* довольно трудно. Что касается задания *г*, его решение при сегодняшнем уровне навыка тождественных преобразований без приведённой теории представляется практически нереальным.

III.45. **Решение.** Система составлена для нахождения неизвестных коэффициентов многочлена степени не выше $n - 1$ (они обозначены буквами x_1, x_2, ..., x_n) по его известным значениям (они обозначены буквами b_1, b_2, ..., b_n) в n различных точках (они обозначены буквами a_1, a_2, ..., a_n). Как показано, задача нахождения такого многочлена имеет единственное решение, причём многочлен может быть записан по формуле Лагранжа. Переменная x_1 обозначает старший коэффициент такого многочлена, который из формулы Лагранжа оказывается равным

$$\frac{b_1}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)\cdot\ldots\cdot(a_1-a_n)} + \frac{b_2}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)\cdot\ldots\cdot(a_2-a_n)} +$$
$$+ \ldots + \frac{b_n}{(a_n-a_1)(a_n-a_2)\cdot\ldots\cdot(a_n-a_{n-1})}.$$

III.46. **Решение.** Рассмотрим одно слагаемое интерполяционной формулы Лагранжа

$$f(k)\frac{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(k-1))\cdot(x-(k+1))\cdot\ldots\cdot(x-n)}{(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-(k-1))\cdot(k-(k+1))\cdot\ldots\cdot(k-n)}.$$

Докажем, что в условиях задачи при целых значениях x данное выражение будет целым числом. Достаточно рассмотреть значения x либо отрицательные, либо большие n. Пусть $x < 0$ — целое число. Запишем равенство

$$\frac{(x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-(k-1))}{(k-1)(k-2)\cdot\ldots\cdot(k-(k-1))} =$$

$$= \frac{(x-(k-1))(x-(k-2)\cdot\ldots\cdot(x-1)\,x\,(x-(-1))\cdot\ldots\cdot(x-(x+1))}{(k-1)!\,x\,(x-(-1))\cdot\ldots\cdot(x-(x+1))} =$$

$$= \frac{(-1)^{-x+k-1}(-x+k-1)!}{(k-1)!(-1)^{-x}(-x)!} = (-1)^{k-1}C^{k-1}_{-x+k-1}.$$

Очевидно, указанное число является целым. Аналогично

$$\frac{(x-(k+1))\cdot\ldots\cdot(x-n)}{(k-(k+1))\cdot\ldots\cdot(k-n)} = \frac{(-1)^{-x+n}(-x+n)!}{(-1)^{n-k}(n-k)!(-1)^{-x+k}(-x+k)!} = C^{n-k}_{-x+n}$$

также является целым числом.

Поэтому рассмотренное слагаемое равно

$$f(k)\cdot(-1)^{k-1}C^{k-1}_{-x+k-1}C^{n-k}_{-x+n}$$

и является целым, коль скоро $f(k)$ — целое число. Таким образом, все слагаемые в интерполяционной формуле Лагранжа при подстановке целого отрицательного значения x будут целыми. Аналогично (несколько проще) доказывается утверждение при $x > n$.

§ 20. Многочлены с целыми коэффициентами

Этот параграф состоит всего из одного пункта. Тем не менее его содержание стоит особняком от остального материала главы. Основным результатом параграфа является теорема, описывающая, какие рациональные числа могут быть корнями многочлена с целыми коэффициентами. В соответствующих примерах приведены способы применения этой теоремы. Наиболее часто употребимым способом применения будет, разумеется, подбор рациональных корней в рациональных уравнениях степени выше 2 (об этом также написано в главе XIII учебника 11 класса), аналогично тому, как это сделано в примере 25 учебника. При этом полезно обратить внимание учащихся на то, что этот способ зачастую сопряжён со значительными вычислительными трудностями (см., например, задания III.48, *г*, *д*, *е*).

Однако способ рассуждений, продемонстрированный в примере 26 учебника, является чрезвычайно мощным, позволяющим прийти к многим важным теоремам современной математики.

При наличии времени после изучения параграфа можно изложить также приведённый ниже материал, связанный с понятием неприводимости многочленов и разложением их на множители.

Неприводимые многочлены с целыми коэффициентами

По аналогии с понятием простого числа (т. е. натурального числа, большего 1 и не имеющего делителей, отличных от 1 и самого себя) рассматривается понятие **неприводимого многочлена**. Существенным различием является то, что неприводимость многочлена зависит от того, над множеством каких чисел его рассматривать.

Определение

Ненулевой многочлен $P(x)$ с коэффициентами из некоторого множества K называется **неприводимым** над множеством K, если в любом его разложении на два множителя с коэффициентами из множества K хотя бы один из этих множителей является константой.

Отметим, что можно было дать аналогичное определение простого числа: натуральное число, большее 1, называется простым, если в любом его разложении на два натуральных множителя один из этих множителей равен 1.

Обычно в качестве множества K рассматривают множества $\boldsymbol{Z}$ всех целых чисел, $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных чисел, $\boldsymbol{R}$ всех вещественных чисел, а также множество комплексных чисел, с которым мы пока не познакомились.

Пример. Рассмотрим многочлен $x^2 - 2$. Покажем, что этот многочлен неприводим над $\boldsymbol{Z}$ (т. е. не раскладывается в произведение множителей с целыми коэффициентами, каждый из которых не является константой).

Решение. Действительно, если этот многочлен раскладывается в произведение двух непостоянных множителей с целыми коэффициентами, то степень каждого из этих множителей должна быть равна 1. Тогда у каждого из этих **линейных** множителей **с целыми** коэффициентами есть корень, являющийся рациональным числом. То есть многочлен $x^2 - 2$ должен иметь рациональные корни. Однако в силу предложения о рациональных корнях многочлена на роль этих корней могут претендовать только числа ± 1, ± 2, которые не являются корнями данного многочлена. Полученное противоречие доказывает неприводимость этого многочлена над $\boldsymbol{Z}$ (попутно доказана иррациональность чисел $\pm\sqrt{2}$).

Однако равенство $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ показывает, что многочлен $x^2 - 2$ приводим над $\boldsymbol{R}$. Таким образом, понятие неприводимости существенно зависит от того, над каким множеством рассматривается многочлен. ■

С помощью основной теоремы алгебры можно показать, что неприводимыми над $\boldsymbol{R}$ многочленами являются лишь линейные многочлены и квадратичные с отрицательным дискриминантом. Это доказательство приведено в главе XI учебника 11 класса.

Имеет место теорема, аналогичная основной теореме арифметики:

ТЕОРЕМА

Любой многочлен с точностью до постоянных множителей и порядка сомножителей единственным образом представим в виде произведения неприводимых многочленов.

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству основной теоремы арифметики (именно здесь играет роль полное сходство теории, связанной с делением с остатком и алгоритмом Евклида, для целых чисел и многочленов).

Пример. Рассмотрим многочлен $P(x) = x^4 - 5x^2 + 6$.

Если этот многочлен рассматривать над $\boldsymbol{Z}$, то разложение на неприводимые множители будет таким:

$$P(x) = x^4 - 5x^2 + 6 = (x^2 - 2)(x^2 - 3).$$

Если же рассматривать $P(x)$ над $\boldsymbol{R}$, то разложение на неприводимые множители будет следующим:

$$x^4 - 5x^2 + 6 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}).$$ ■

В качестве примера доказательства неприводимости над $\boldsymbol{Z}$ приведём теорему.

ТЕОРЕМА (КРИТЕРИЙ ЭЙЗЕНШТЕЙНА)

Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Если существует такое простое число p, что все коэффициенты многочлена $P(x)$, кроме старшего, делятся на p, старший коэффициент не делится на p, а свободный член не делится на p^2, то $P(x)$ неприводим над $\boldsymbol{Z}$.

Доказательство. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$. Известно, что $a_n \not\vdots\, p$, $a_{n-1} \vdots\, p$, $a_{n-2} \vdots\, p$, ..., $a_1 \vdots\, p$, $a_0 \vdots\, p$ и $a_0 \not\vdots\, p^2$.

Пусть, вопреки утверждению теоремы,

$$P(x) = Q(x)\,R(x) \qquad (1)$$

(где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами и $Q(x) = b_kx^k + b_{k-1}x^{k-1} + \ldots + b_1x + b_0$, а тогда $R(x) = c_{n-k}x^{n-k} + c_{n-k-1}x^{n-k-1} + \ldots + c_1x + c_0$).

Запишем равенства коэффициентов, следующие из равенства (1):

1) $a_0 = b_0c_0$. Поскольку $a_0 \vdots p$, то одно из чисел b_0 и c_0 делится на p. Не умаляя общности, пусть $b_0 \vdots p$. Так как $a_0 \not\vdots\, p^2$, то $c_0 \not\vdots\, p$.

2) $a_1 = b_0c_1 + c_0b_1$. Так как $a_1 \vdots p$ и $b_0c_1 \vdots p$ (поскольку $b_0 \vdots p$), то $c_0b_1 \vdots p$. Поскольку $c_0 \not\vdots\, p$, то $b_1 \vdots p$.

3) $a_2 = b_0c_2 + b_1c_1 + b_2c_0$. Так как $b_0 \vdots p$ и $b_1 \vdots p$, то $b_0c_2 + b_1c_1 \vdots p$. Поскольку $a_2 \vdots p$, то $b_2c_0 \vdots p$, откуда $b_2 \vdots p$.

Продолжая выписывать равенства для a_3, a_4, ..., a_k, получаем $b_3 \vdots p$, $b_4 \vdots p$, ..., $b_k \vdots p$.

Итак, оказалось, что все коэффициенты многочлена $Q(x)$ кратны p. Тогда $a_n = b_kc_{n-k}$ также кратен p вопреки условию. Полученное противоречие доказывает утверждение теоремы. ■

Название «критерий Эйзенштейна» является исторически сложившимся, хотя критерием данная теорема не является, ибо в обратную сторону утверждение теоремы неверно. Например, многочлен $x^2 + 1$ неприводим над $\boldsymbol{Z}$, тем не менее не удовлетворяет условиям доказанной теоремы.

Пример. Докажем, что при простом p многочлен $f(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\boldsymbol{Z}$.

Решение. Заметим, что при $x \neq 1$ выполнено $f(x) = \dfrac{x^p - 1}{x - 1}$. Пусть $x = y + 1$, тогда

$$\frac{(y+1)^p - 1}{y} = y^{p-1} + py^{p-2} + \frac{p(p-1)}{2}y^{p-3} + \ldots + C_p^k y^{k-1} + \ldots + p.$$

Обозначим полученный многочлен $g(y)$. Этот многочлен при всех $y \neq 0$ совпадает с многочленом $f(y + 1)$. Значит, многочлены $f(y + 1)$ и $g(y)$ тождественно равны (поскольку совпадают в количестве точек, большем, чем их степень). Ясно, что многочлены $f(x)$ и $g(y)$ приводимы или неприводимы одновременно (поскольку из разложения на множители одного из них заменой переменной и раскрытием скобок получается разложение другого). Поэтому достаточно показать, что многочлен $g(y)$ неприводим, что следует из критерия Эйзенштейна, поскольку все коэффициенты, кроме старшего, кратны p, и свободный член не кратен p^2. ■

Пример. Докажем, что многочлен $P(x) = (x - a_1) \times (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) + 1$ (где a_1, ..., a_n — попарно различные целые числа) либо неприводим над $\boldsymbol{Z}$, либо является квадратом неприводимого над $\boldsymbol{Z}$ многочлена.

Р е ш е н и е. 1) Пусть $P(x) = Q(x)R(x)$, где $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Так как значения многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ в целых точках — целые числа, то $Q(a_1)$, ..., $Q(a_n)$, $R(a_1)$, ..., $R(a_n)$ — целые числа. Но $P(a_1) = P(a_2) = ... = P(a_n) = 1$, а поскольку $P(a_i) = Q(a_i)R(a_i)$, то все числа $Q(a_1)$, ..., $Q(a_n)$, $R(a_1)$, ..., $R(a_n)$ равны либо 1, либо –1, причём $Q(a_i) = R(a_i)$.

Итак, каждый из многочленов $Q(x)$ и $R(x)$ в n целых точках принимает значения 1 или –1. Если $\deg Q(x) \neq \deg R(x)$, то один из этих многочленов будет иметь степень строго меньше $\frac{n}{2}$. В то же время одно из значений 1 или –1 принимается этим многочленом не менее чем в $\frac{n}{2}$ точек (если каждое из значений принимается менее чем в $\frac{n}{2}$ точек, то всего значения 1 и –1 принимаются менее чем в n точках, что противоречит выведенному утверждению). Тогда этот многочлен принимает одно и то же значение в количестве точек большем, чем его степень, следовательно, это постоянный многочлен!

Таким образом, доказано, что многочлен $P(x)$ неприводим, если его степень нечётна (поскольку тогда у сомножителей не может быть равных степеней). Более того, если многочлен $P(x)$ и раскладывается в произведение многочленов с целыми коэффициентами меньшей степени, то степени этих многочленов должны быть одинаковы и равны половине степени многочлена $P(x)$.

2) Поскольку $Q(a_1) = R(a_1)$, $Q(a_2) = R(a_2)$, ..., $Q(a_n) = R(a_n)$, то многочлен $Q(x) - R(x)$ степени, меньшей n, имеет n различных корней — числа a_1, a_2, ..., a_n, а потому равен Θ, откуда $Q(x) = R(x)$. Итак, $P(x) = Q^2(x)$.

3) Осталось показать, почему многочлен $Q(x)$ неприводим. Пусть это не так, тогда $Q(x) = S(x)T(x)$, где степень каждого из многочленов $S(x)$ и $T(x)$ не меньше 1. Тогда можно записать $P(x) = S(x) \cdot (S(x)T^2(x))$, т. е. представить в виде произведения непостоянных многочленов **разной** степени, что противоречит доказанному в пункте 1.

Если бы в задаче требовалось доказать, что многочлен $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n) + 1$ либо неприводим, либо является квадратом многочлена, для доказательства достаточно было бы одного пункта 2. Пункты 1 и 3 были бы излишними.

Утверждение задачи можно ещё более усилить и описать все приводимые над $\boldsymbol{Z}$ многочлены вида $P(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdot ... \cdot (x - a_n) + 1$.

Уже доказано, что n чётно. Пусть $n = 2k$. Тогда если $P(x)$ приводим, то $P(x) = Q^2(x)$. В таком случае $\deg Q(x) = k$. Кроме того, так как старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен квадрату старшего коэффициента многочлена $Q(x)$, можно считать, что старший коэффициент многочлена $Q(x)$ равен 1 (иначе просто умножим $Q(x)$ на -1, отчего старший коэффициент полученного многочлена станет равным 1, а его квадрат всё равно будет равен $P(x)$).

Как уже доказано ранее, значения $Q(x)$ в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равны 1 или -1. При этом если какое-то из значений принимается более чем k раз, то многочлен $Q(x)$ будет константой. Следовательно, ровно в k точках принимается значение 1 и ровно в k точках — значение -1. Не умаляя общности, пусть $Q(a_1) = Q(a_2) = \ldots = Q(a_k) = 1$ и $Q(a_{k+1}) = Q(a_{k+2}) = \ldots = Q(a_{2k}) = -1$ (если это не так, перенумеруем точки).

Тогда многочлен $Q(x) - 1$ имеет старший коэффициент 1 и корни $a_1, a_2, \ldots, a_k$, т. е. $Q(x) - 1 = (x - a_1) \times (x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_k)$, а $Q(x) + 1 = (x - a_{k+1})(x - a_{k+2}) \cdot \ldots \times (x - a_{2k})$.

Тогда

$$(x - a_{k+1})(x - a_{k+2}) \cdot \ldots \cdot (x - a_{2k}) - (x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_k) = 2.$$

Подставим $x = a_1$ в последнее равенство. Получим

$$(a_1 - a_{k+1})(a_1 - a_{k+2}) \cdot \ldots \cdot (a_1 - a_{2k}) = 2,$$

т. е. число 2 представлено в виде произведения k **различных** целых чисел. Среди целых сомножителей, дающих в произведении 2, только одно число может быть по модулю равным 2, а остальные числа должны быть по модулю равны 1. Если этих остальных чисел хотя бы три, то два из них равны не только по модулю, но и по знаку, т. е. просто равны. Таким образом, количество различных сомножителей, дающих в произведении 2, не больше 3, т. е. $k \leqslant 3$.

Рассмотрим отдельно случаи:

1) $k = 3$. Тогда $(x - a_4)(x - a_5)(x - a_6) - (x - a_1)(x - a_2) \times (x - a_3) = 2$. Подставляя $x = a_1, a_2, a_3$, получаем каждый раз представления 2 в виде произведения трёх различных целых чисел. Однако такое представление единственно: $2 = -2 \cdot (-1) \cdot 1$. Пусть, не умаляя общности, $a_4 < a_5 < a_6$. Тогда $a_1 - a_4 > a_1 - a_5 > a_1 - a_6$, т. е. $a_1 - a_4 = 1$, $a_1 - a_5 = -1$, $a_1 - a_6 = -2$. Но те же равенства будут выполняться и при подстановке $x = a_2$. Это значит, что $a_1 = a_2$, хотя изначально числа были различны. Полученное противоречие показывает, что $k \neq 3$.

2) $k = 2$. Тогда $(x - a_3)(x - a_4) - (x - a_1)(x - a_2) = 2$. Подставим $x = a_1$ и $x = a_2$. Имеем $(a_1 - a_3)(a_1 - a_4) = 2$

и $(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) = 2$. Разложение 2 на два множителя возможно двумя способами: $2 = 1 \cdot 2 = (-1) \cdot (-2)$. Учитывая, что порядок чисел $a_1 - a_3$, $a_1 - a_4$ такой же, как порядок чисел $a_2 - a_3$, $a_2 - a_4$ (и противоположен порядку чисел a_3, a_4), получаем, не умаляя общности: $\begin{cases} a_1 - a_3 = 1, \\ a_1 - a_4 = 2, \\ a_2 - a_3 = -2, \\ a_2 - a_4 = -1, \end{cases}$ откуда следует, что числа a_2, a_4, a_3, a_1 именно в таком порядке являются четырьмя подряд идущими целыми числами. Тогда $P(x) = (x - a)(x - a + 1)(x - a + 2)(x - a + 3) + 1$ (здесь обозначено $a_1 = a$) и $Q(x) = (x - a)(x - a + 3) + 1$. Раскрывая скобки, убеждаемся, что $(x - a)(x - a + 1)(x - a + 2) \times (x - a + 3) + 1 = ((x - a)(x - a + 3) + 1)^2$.

3) $k = 1$. Тогда $x - a_2 - (x - a_1) = 2$, т. е. $a_1 - a_2 = 2$. Тогда многочлен $P(x)$ принимает вид $(x - a)(x - a + 2) + 1$, что, как нетрудно видеть, равно $(x - a + 1)^2$. ■

Последний пример показывает, что задачи на доказательство неприводимости являются достаточно сложными в силу того, что их решение требует привлечения широкого круга идей, методов и фактов как из теории многочленов, так и из теории чисел. Однако, в свою очередь, как показывает решение примера 26 учебника, теория многочленов может обогащать новыми фактами теорию чисел.

Разложение многочленов с целыми коэффициентами на множители с целыми коэффициентами

ТЕОРЕМА

Если многочлен с целыми коэффициентами раскладывается в произведение двух многочленов с рациональными коэффициентами, то он раскладывается в произведение многочленов с целыми коэффициентами.

Действительно, например

$$6x^2 - 5x + 1 = 6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right).$$

Оказывается, можно так «разбросать» множитель 6 по скобкам, чтобы сомножители стали иметь целые коэффициенты:

$$6\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (2x - 1)(3x - 1).$$

Данная ситуация, наверняка неоднократно встречавшаяся учащимися, носит общий характер, что и показывает сформулированная теорема.

Докажем сначала следующую лемму:

ЛЕММА ГАУССА

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, у каждого из которых коэффициенты взаимно просты в совокупности. Тогда у многочлена $R(x) = P(x) \cdot Q(x)$ коэффициенты также будут взаимно просты в совокупности.

Доказательство. Пусть коэффициенты многочлена $R(x)$ имеют общий простой делитель p. Рассмотрим самый первый справа коэффициент многочлена $P(x)$, не делящийся на p (он существует, иначе бы все коэффициенты $P(x)$ были бы кратны p, т. е. не были взаимно просты в совокупности). Пусть это коэффициент a_k при x^k. Аналогично рассмотрим самый первый справа коэффициент многочлена $Q(x)$, не делящийся на p. Пусть это коэффициент b_l при x^l.

Рассмотрим теперь коэффициент c_{k+l} многочлена $R(x)$ при x^{k+l}:

$$c_{k+l} = \underbrace{a_0 b_{k+l} + a_1 b_{k+l-1} + \ldots + a_{k-1} b_{l+1}}_{A} + a_k b_l +$$

$$+ \underbrace{a_{k+1} b_{l-1} + \ldots + a_{k+l-1} b_1 + a_{k+l} b_0}_{B}$$

(если степень какого-либо из многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ меньше $k + l$, полагаем соответствующие коэффициенты с индексами, большими степени многочлена, равными 0). Выражение A кратно p в силу того, что числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ кратны p в силу выбора a_k. Аналогично выражение B кратно p в силу выбора b_l. В то же время $a_k b_l \not\vdots\, p$, так как оба сомножителя не кратны p.

Таким образом, $c_{k+l} \not\vdots\, p$, что противоречит выбору p как общего простого делителя **всех** коэффициентов многочлена $R(x)$. ■

Докажем теперь утверждение теоремы.

Доказательство. Пусть $P(x) = Q(x)\,R(x)$, где $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $Q(x)$ и $R(x)$ — многочлены с рациональными коэффициентами. Приведём все коэффициенты многочлена $Q(x)$ к общему знаменателю q. Тогда $Q(x) = \dfrac{Q_1(x)}{q}$, где $Q_1(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Аналогично $R(x) = \dfrac{R_1(x)}{r}$, где $R_1(x)$ —

многочлен с целыми коэффициентами. Вынесем за скобки наибольший общий делитель коэффициентов многочлена $Q_1(x)$ (обозначим его за s) и $R_1(x)$ (обозначим его за t). Получим $P(x) = \frac{st}{qr} Q_2(x) R_2(x)$, где $Q_2(x)$ и $R_2(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами, коэффициенты каждого из которых взаимно просты в совокупности. Тогда по лемме Гаусса коэффициенты многочлена $Q_2(x) R_2(x)$ взаимно просты в совокупности. Если дробь $\frac{st}{qr}$ не является целым числом, то все коэффициенты многочлена $Q_2(x) R_2(x)$ обязаны поделиться на знаменатель этой дроби, оставшийся после сокращения (ведь коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа), что противоречит их взаимной простоте! ■

Приведём также примеры, призванные проиллюстрировать и закрепить сформулированные теоретические положения. Условно первые три примера можно отнести к группе А, остальные — к группе В.

Пример 1. Докажите, что над $\boldsymbol{Z}$ существуют неприводимые многочлены любой степени.

Решение. Примером таких многочленов являются многочлены вида $x^n - p$, где p — простое число. Они неприводимы по критерию Эйзенштейна. ■

Пример 2. Является ли неприводимым при каких-либо целых a_i многочлен $(x - a_1)^2 (x - a_2)^2 \cdot \ldots \cdot (x - a_n)^2 - 1$?

Решение. Нет, так как многочлен раскладывается на множители по формуле разности квадратов. ■

Пример 3. Докажите, что если многочлен третьей степени с целыми коэффициентами не имеет рационального корня, то он неприводим над $\boldsymbol{Z}$.

Решение. Действительно, если многочлен третьей степени приводим, то он раскладывается в произведение линейного и квадратичного множителей, а корень линейного множителя с целыми коэффициентами — рациональное число. ■

Пример 4. Пусть α — корень неприводимого над $\boldsymbol{Z}$ многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами. а) Докажите, что α не является корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами степени, меньшей $\deg P(x)$.

б) Пусть $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, имеющий α своим корнем. Докажите, что $Q(x) \vdots P(x)$.

Решение. а) В самом деле, если α является корнем другого многочлена $Q(x)$ с целыми коэффициентами, причём $\deg Q < \deg P$, то оба эти многочлена делятся на $x - \alpha$, а потому их наибольший общий делитель также имеет корень α, т. е. не является числом. Однако наибольший общий делитель двух многочленов с целыми коэффициентами может быть найден с помощью алгоритма Евклида, в результате применения которого получится многочлен с рациональными коэффициентами. Этот многочлен является делителем многочлена $P(x)$ и не совпадает с ним, поскольку является также делителем многочлена Q, имеющего меньшую степень. Значит, многочлен P приводим над Q. Но тогда многочлен P приводим и над $\boldsymbol{Z}$.

б) Если это не так, поделим Q на P с остатком. Получим, что число α должно быть корнем многочлена-остатка, имеющего степень, меньшую $\deg P$. ■

Пример 5. Докажите, что над $\boldsymbol{Z}$ неприводим многочлен:

а) $x^4 - 2x - 6$; б) $6x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 28x^2 + 7x - 35$.

Указание. а) Воспользоваться критерием Эйзенштейна для простого числа 2. б) Воспользоваться критерием Эйзенштейна для простого числа 7.

Пример 6. Докажите, что многочлен $(x - a_1)(x - a_2) \times \times \ldots \cdot (x - a_n) - 1$ ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — попарно различные целые числа) неприводим над $\boldsymbol{Z}$.

Решение. В самом деле, пусть $(x - a_1)(x - a_2) \times \times \ldots \cdot (x - a_n) - 1 = P(x) \cdot Q(x)$, где P и Q — многочлены с целыми коэффициентами. Тогда, подставив в это равенство вместо x числа a_1, a_2 и т. д., получим $-1 = P(a_k) \cdot Q(a_k)$, откуда ясно, что одно из целых чисел $P(a_k)$ и $Q(a_k)$ равно 1, а другое -1. Поэтому $P(a_k) + Q(a_k) = 0$ при всех k от 1 до n. Но многочлен $P(x) + Q(x)$ является суммой двух слагаемых, степень каждого из которых меньше n, поэтому он тоже имеет степень, меньшую n, обращаясь при этом в ноль в n точках. Значит, этот многочлен равен Θ, а тогда $P(x) = -Q(x)$, откуда $(x - a_1)(x - a_2) \cdot \ldots \cdot (x - a_n) - 1 = -(P(x))^2$, что невозможно, так как старший коэффициент многочлена $-(P(x))^2$ заведомо отрицателен. ■

Решения и указания к задачам

III.47—III.48. *Указание.* Задачи решаются аналогично примеру 25 учебника: подбирается рациональный корень (в уравнениях задачи III.47 этот корень обязан быть целым), понижается степень до квадратного уравнения.

III.47. а) $\{1; -2; 3\}$. б) $\{2\}$. в) $\left\{2; 3; \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

г) $\left\{2; 4; \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$. д) $\left\{2; \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$. е) $\left\{-2; \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

III.48. а) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}\right\}$. б) $\left\{-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}; \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$.

в) $\left\{\frac{1}{5}; -\frac{1}{2}\right\}$. г) $\left\{-\frac{1}{5}; \frac{1}{2}\right\}$. д) $\left\{\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

е) $\left\{-\frac{3}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$. *Указание.* Во втором издании приведено верное условие: $6x^4 - x^3 - 29x^2 - 9x + 18 = 0$.

III.49. *Указание.* Совпадает с заданием III.15, *а*, здесь фигурирует как подсказка к задаче III.50.

III.50. **Решение.** Пусть a — целый корень многочлена $P(x)$, а $x_1, \ldots, x_5$ — целые корни уравнения $P(x) = 5$. Тогда согласно утверждению предыдущей задачи число $(P(x_1) - P(a)) \vdots (x_1 - a)$, т. е. $5 \vdots (x_1 - a)$. Аналогично $5 \vdots (x_2 - a)$ и т. д. Таким образом, число 5 имеет 5 различных делителей, что неверно.

III.51. $b = 0$, $b = 1$, $b = -1$. **Решение.** Подставив b в уравнение, получим $b^5 - ab^2 + b = 0$. Отсюда или $b = 0$ (и исходное уравнение имеет корень 0 при любом целом a), или $b^4 - ab + 1 = 0$. Полученное уравнение относительно b является уравнением 4 степени с целыми коэффициентами. Значит, его целым корнем может быть лишь делитель свободного члена, т. е. $b = 1$ или $b = -1$.

Чтобы $b = 1$ было корнем уравнения $b^4 - ab + 1 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $a = 2$. Аналогично, чтобы $b = -1$ было корнем уравнения $b^4 - ab + 1 = 0$, необходимо и достаточно, чтобы $a = -2$.

Подстановка и нахождение a являлись необходимой частью решения. Ведь могло получиться, например, что $b = 1$ ни при каких a не являлось бы корнем уравнения (если бы уравнение выглядело, например, как $b^4 + 2a^2b + 1 = 0$).

III.52. *Замечание.* Во втором издании эта задача будет дана после задачи III.53.

Решение. Воспользуемся утверждением, доказанным в решении задачи III.53: если многочлен $P(x)$ имеет рациональный корень $x = \frac{p}{q}$, то $P(x) = (qx - p)\,Q(x)$, где $Q(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Из условия следует, что $(qx_1 - p)\,Q(x_1) = \pm 1$ и $(qx_2 - p)\,Q(x_2) = \pm 1$. Оба фигурирующих в этих произведениях множителя при целых x_1 и x_2 являются целыми числами, поэтому, не умаляя общности, можно считать

$$qx_1 - p = -1 \qquad (1)$$

и

$$qx_2 - p = 1 \qquad (2)$$

(значения линейной функции, не являющейся константой, не могут совпадать, поэтому функция $qx - p$ в точках x_1 и x_2 принимает различные значения, являющиеся делителями 1, т. е. один раз 1, а другой раз –1).

а) Вычитая из равенства (2) равенство (1), получим $q(x_2 - x_1) = 2$. В последнем равенстве оба множителя — целые ненулевые числа. Если один из множителей по модулю больше 2, равенство не будет выполняться.

б) Сложив равенства (1) и (2), получим $q(x_1 + x_2) - 2p = 0$, откуда $q \cdot \frac{x_1 + x_2}{2} - p = 0$, что и означает, что число $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ (и только оно!) является корнем уравнения $qx - p = 0$, а вместе с ним и уравнения $P(x) = 0$.

III.53. **Решение.** Докажем более сильное утверждение: если многочлен с целыми коэффициентами имеет рациональный корень $x = \frac{p}{q}$ (где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь), то при делении этого многочлена на $qx - p$ получится многочлен с целыми коэффициентами. Этот факт сразу следует из леммы Гаусса, но может быть доказан и без её применения индукцией по степени многочлена $P(x)$.

База индукции для линейного многочлена очевидна. В самом деле, в тексте параграфа доказано, что q является делителем старшего коэффициента, поэтому при делении в столбик старший коэффициент частного будет целым. Полученный после первого шага деления в столбик многочлен будет иметь степень меньше, чем степень исходного многочлена, целые коэффициенты, и также будет иметь корень $x = \frac{p}{q}$. Поэтому к нему применимо индукционное предположение, и тем самым оставшиеся коэффициенты частного также будут целыми.

III.54. *Указание.* Во всех пунктах полезно использовать утверждение предыдущей задачи (обозначив левую часть уравнения $f(x)$) для проверки того, что нецелые числа, числители которых — делители свободного члена, а знаменатели — делители старшего коэффициента, не являются корнями, беря в качестве m либо 1, либо –1. Например, в задании *а* число $x = \frac{5}{2}$ не является корнем, поскольку $f(1) = -1$ не делится на $5 - 1 \cdot 2$.

III.55. а) **Решение.** Способ 1. Записав интерполяционную формулу Лагранжа и мысленно (!) собирая коэффициенты, увидим, что все они делятся на p (ведь в формуле

Лагранжа перед дробями будут стоять кратные p множители, а знаменатели дробей представляют собой произведения множителей, каждый из которых меньше p, поэтому они не будут взаимно просты с p, а значит, множитель p перед коэффициентами не сократится).

Способ 2. Пусть $\deg P = n$. Рассмотрим многочлен

$$Q_1(x) = P(x+1) - P(x).$$

Прямой подстановкой и раскрытием скобок можно показать, что этот многочлен будет иметь степень $n-1$ и старший коэффициент na_n (где a_n — старший коэффициент многочлена P). Заметим, что по условию числа $Q_1(0)$, $Q_1(1)$, ..., $Q_1(p-2)$ кратны p.

Проделаем теперь ту же операцию с многочленом Q_1, т. е. рассмотрим многочлен

$$Q_2(x) = Q_1(x+1) - Q_1(x).$$

Его степень будет на 1 меньше степени многочлена Q_1, а его старший коэффициент равен $n(n-1)a_n$. При этом числа $Q_2(0)$, $Q_2(1)$, ..., $Q(p-3)$ кратны p.

Проделывая эту операцию до тех пор, пока переменная x не исчезнет, получим многочлен, равный константе $n!a_n$, который делится на p (ибо всякий раз значений многочлена, кратных p, больше, чем степень многочлена).

Так как по условию $n \leqslant p-1$, то числа $n!$ и p взаимно просты с p, поэтому $a_n \vdots p$. Рассмотрев многочлен $P(x) - a_n x^n$, получаем, что его значения в точках 0, 1, ..., $p-1$ делятся на p, а значит, аналогично можно показать, что его старший коэффициент (т. е. a_{n-1}) кратен p и т. д. (это же рассуждение можно доказать индукцией по степени многочлена P).

б) Неверно. Например, все значения многочлена $2x^2 + 2x$ кратны 4, но его коэффициенты не делятся на 4.

III.56. Неверно. Например, все значения многочлена $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$ целые, но его коэффициенты нецелые.

Замечание. Можно показать, что любой многочлен степени n единственным образом представим в виде

$$a_0 + a_1 x + a_2\frac{x(x-1)}{2} + a_3\frac{x(x-1)(x-2)}{6} + \ldots + \\ + a_n\frac{x(x-1)\ldots(x-(n-1))}{n!}.$$

При этом он будет принимать в целых точках целые значения тогда и только тогда, когда числа a_0, a_1, ..., a_n являются целыми.

Это утверждение даёт другой способ решения задачи III.46.

§ 21. Теорема Виета и симметрические многочлены

Содержание данного параграфа обобщает знания учащихся, полученные в основной школе, о теореме Виета для уравнений второй степени и симметрических многочленах от двух переменных.

На изучение теории достаточно одного урока. При изучении материала параграфа полезно подчеркнуть, что система уравнений, полученная в результате применения теоремы Виета для уравнения, «равносильна» этому уравнению, так как решения этой системы совпадают с корнями уравнения. Поэтому, решая эту систему уравнений методом исключения неизвестных, обязательно придём к исходному уравнению относительно оставшейся неизвестной. Тем самым употребление теоремы Виета разумно, если задано некоторое условие на корни многочлена.

Обратим также внимание на то, что решение задач, связанных с симметрическими многочленами, неизбежно требует техники осмысленных тождественных преобразований. Если нет уверенности в наличии такой техники у учащихся, лучше не давать соответствующие задачи, чтобы потом не «увязнуть» в их разборе. К числу таких заданий относятся III.57, *в*, III.59, *в*, III.61, *б*, *в*, *г*.

Результат задачи III.57 является существенным подспорьем в решении задач III.59, III.61, III.63, III.64. Это нужно учесть при планировании порядка разбора этих задач.

Решения и указания к задачам

III.57. а) $s_2(x_1; x_2; x_3) = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$. *Указание.* См. пример 7 учебника. б) $s_3(x_1; x_2; x_3) = \sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3$. в) $s_4(x_1; x_2; x_3) = s_2(x_1^2; x_2^2; x_3^2) = \sigma_1^2(x_1^2; x_2^2; x_3^2) - 2\sigma_2(x_1^2; x_2^2; x_3^2) = s_2^2(x_1; x_2; x_3) - 2s_2(x_1x_2; x_2x_3; x_1x_3) = (\sigma_1^2 - 2\sigma_2)^2 - 2(\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_3)$.

Замечание. Отметим, что основные симметрические многочлены (любого числа переменных) могут быть выражены через суммы степеней, т. е. функции s_k, что и требуется проделать в следующей задаче. Значит, и любые симметрические многочлены могут быть выражены как композиции многочлена и степенных сумм s_k.

III.58. Решение. Из предыдущей задачи получаем (с учётом того, что $s_1 = \sigma_1$) для трёх переменных

$$\sigma_2 = \frac{s_1^2 - s_2}{2}; \quad \sigma_3 = \frac{s_3 + 3\sigma_1\sigma_2 - \sigma_1^3}{2} = \frac{s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3}{6}.$$

III.59. а) **Решение.** Это будут коэффициенты исходного многочлена, записанные в обратном порядке, делённые на a_0, поскольку при подстановке в многочлен вместо x выражения $\frac{1}{x}$ с последующим умножением на x^n как раз получится многочлен, имеющий корни, обратные корням исходного многочлена.

б) **Решение.** Это будут коэффициенты исходного многочлена, знаки которых на чётных местах (считая слева направо) будут изменены, а на нечётных оставлены.

в) **Решение.** Если искомые коэффициенты обозначить $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$, то получаем систему равенств

$$\begin{cases} b_{n-1} = -(a_{n-1}^2 - 2a_{n-2}), \\ b_{n-2} = a_{n-2}^2 - 2a_{n-1}a_{n-3} + 2a_{n-4}, \\ b_{n-3} = -(a_{n-3}^2 - 2a_{n-2}a_{n-4} + 2a_{n-1}a_{n-5} - 2a_{n-6}), \\ \ldots, \\ b_1 = (-1)^{n-1}(a_1^2 - 2a_2a_0). \end{cases}$$

В этой системе равенств закономерность появления слагаемых такова: после квадрата коэффициента a, индекс которого такой же, как у искомого нами b, выписываются с чередующимися знаками удвоенные произведения, для которых сумма индексов равна удвоенному индексу соответствующего коэффициента b (при этом a_n полагаем равным 1 и не пишем). Например, в третьей строке индекс b равен $n - 3$, поэтому после квадрата коэффициента a_{n-3} выписаны все удвоенные произведения, сумма индексов которых равна $2n - 6$. При этом в последнем слагаемом выписан только один коэффициент, так как $a_n = 1$ не пишется. Соответствующие равенства проще всего доказывать индукцией по числу переменных.

III.60. –4. **Решение.** Свободный член равен произведению этих корней, взятому с обратным знаком, т. е. –4.

III.61. а) 3. **Решение.** Вынося общий множитель, получаем, что искомое выражение в стандартных обозначениях равно $\sigma_1 \cdot \sigma_3$. Из теоремы Виета узнаём $\sigma_1 = -\frac{1}{2}$; $\sigma_2 = \frac{7}{2}$; $\sigma_3 = 6$, откуда получаем ответ 3.

б) –20,625. **Решение.** Запишем равенство

$$x_1^3x_2 + x_1^3x_3 = x_1^3(x_2 + x_3) = x_1^3((x_1 + x_2 + x_3) - x_1) = x_1^3\sigma_1 - x_1^4.$$

Записав аналогичные равенства для остальных пар слагаемых, получаем, что искомое выражение равно (в принятых обозначениях) $\sigma_1 s_3 - s_4$. В задаче III.57 соответствующие суммы были выражены через основные симметрические функции. Подставив, получим искомое выражение равным

$$\sigma_1(\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) - ((\sigma_1^2 - 2\sigma_2))^2 + 2\sigma_2^2 - 4\sigma_1\sigma_3 = \\ = \sigma_1^2\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - 2\sigma_2^2.$$

Подставив найденные значения основных симметрических функций корней, получаем ответ –20,625.

в) $-\frac{79}{144}$. **Решение.** Как было отмечено в задании III.59, *а*, числа $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_3 = \frac{1}{x_3}$ являются корнями уравнения $-12y^3 + 7y^2 + y + 2 = 0$. В новых обозначениях нужно найти значение выражения

$$y_1y_2^2 + y_2^2y_3 + y_1y_3^2 + y_2y_3^2 + y_1^2y_2 + y_1^2y_3.$$

Аналогично решению предыдущего пункта рассмотрим равенство

$$y_1y_2^2 + y_2^2y_3 = y_2^2(y_1 + y_3) = y_2^2((y_1 + y_2 + y_3) - y_2) = y_2^2\sigma_1 - y_2^3$$

(здесь и далее в этом пункте основные симметрические функции берутся от y_1, y_2, y_3). Складывая три аналогичных равенства и используя формулы задачи III.57, получаем

$$y_1y_2^2 + y_2^2y_3 + y_1y_3^2 + y_2y_3^2 + y_1^2y_2 + y_1^2y_3 = \\ = s_2\sigma_1 - s_3 = \sigma_1^3 - 2\sigma_1\sigma_2 - (\sigma_1^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3) = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3.$$

Из теоремы Виета следует $\sigma_1 = \frac{7}{12}$; $\sigma_2 = -\frac{1}{12}$; $\sigma_3 = \frac{1}{6}$. Подставив эти значения, получим ответ $-\frac{79}{144}$.

г) $\frac{145}{16}$. *Указание.* Воспользоваться формулой из задания III.57, *в*.

III.62. $a = 5$, $b = -8$. **Решение.** Естественно можно подставить числа –1 и 2 в многочлен и получить систему двух линейных уравнений с неизвестными a и b. Но можно использовать теорему Виета. Зная, что произведение всех трёх корней равно 12, получим третий корень равным –6. Откуда найдём a как сумму корней с противоположным знаком, т. е. $a = 5$, а b найдём как сумму попарных произведений корней, т. е. $b = -8$.

III.63. $(a; 0; 0)$; $(0; a; 0)$; $(0; 0; a)$. **Решение.** Воспользуемся выражениями s_k через основные симметрические многочлены, полученные в задаче III.57. Имеем $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$. Принимая во внимание первое уравнение системы, получим $xy+yz+zx=0$. С учётом формулы задания III.57, *б* из третьего уравнения системы получаем $xyz=0$.

Таким образом, числа x, y, z являются корнями уравнения $t^3-at^2=0$.

III.64. *Указание.* Решения обеих систем этой задачи аналогичны решению предыдущей задачи. Из данных задачи выражаются основные симметрические многочлены от переменных системы, а затем составляется кубическое уравнение.

а) (3; 3; 3). б) Все перестановки чисел -1, $1+\sqrt{6}$ и $1-\sqrt{6}$.

III.65. $\{1; -3\}$. **Решение.** Пусть неравные корни равны z и t. Тогда из теоремы Виета получаем

$$\begin{cases} 2x+2y=-4, \\ x^2+y^2+4xy=-2. \end{cases}$$

Решив эту систему, получим $x=-3$, $y=1$ или наоборот. Таким образом, корнями уравнения будут числа 1 и -3.

III.66. Решение. Рассмотрим многочлен, корнями которого являются числа, противоположные первым n простым числам. Он имеет вид $(x+2)(x+3)\cdot\ldots\cdot(x+p_n)$. Коэффициенты этого многочлена представляют собой сумму всевозможных произведений определённого количества простых чисел. Тогда упомянутая в условии сумма всевозможных произведений нескольких простых чисел — это просто сумма коэффициентов этого многочлена. А сумма коэффициентов многочлена равна его значению при $x=1$.

а) Мы видим, что значение многочлена при $x=1$ представляет собой произведение n натуральных чисел, значит, и подавно n простых чисел.

б) Произведение $(1+2)(1+3)$ уже имеет не два, а три простых множителя в своём разложении. Значит, общее количество множителей будет $n+1$.

Замечание. В условии задачи имелось в виду, что в число рассматриваемых произведений входит и произведение нуля сомножителей, т. е. 1. Иначе утверждение задачи неверно. Например, для $n=2$ описанная сумма без учёта 1 равна $2+3+2\cdot 3=11$, что является простым числом.

III.67. а) **Решение.** Пусть сумма и произведение двух рациональных чисел — целые числа a и b. Тогда эти числа являются рациональными корнями уравнения $x^2-ax+b=0$. Но все рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами и старшим коэффициентом 1 — целые числа!

б) *Указание.* Решается аналогично заданию III.67, *а*.

Замечание. Интересно, что решить задание *а* без применения теоремы Виета можно (хотя и не просто), а вот решения задания *б* без применения теоремы Виета нам видеть не приходилось.

III.68. б) **Решение.** Пусть a, b, c — соответственно сумма, сумма попарных произведений и произведение данных чисел. Тогда эти числа являются корнями уравнения $x^3 - ax^2 + bx - c = 0$. Заметим, что при подстановке отрицательного значения x левая часть уравнения будет заведомо положительна при положительных a, b, c. Поэтому отрицательных корней такое уравнение не имеет.

III.69. Например, $(x - 2)(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - 5)$ или $(x^2 - 2)(x + 1)^2(x - 1)(x^2 - 5)$.

III.70. $a = -6$, корни уравнения $\{-1; -2; -3\}$. **Решение.** Пусть корни равны $b - d$, b, $b + d$. Тогда сумма этих корней равна $3b$, а по теореме Виета она равна -6. Отсюда $b = -2$.

Записав условие $P(-2) = 0$, получаем уравнение относительно переменной a, решив которое, найдём $a = -6$. По теореме Виета сумма оставшихся корней равна -4, а произведение равно 3. Значит, это числа -1 и -3.

III.72. Два положительных корня, один отрицательный корень. **Решение.** Из условия задачи следует, что сумма корней положительна, а их произведение отрицательно. Раз сумма корней положительна, значит, среди корней есть хотя бы один положительный корень. Коль скоро произведение корней отрицательно, то среди них либо один, либо три отрицательных корня. Так как есть один положительный корень, то отрицательный корень ровно один. Значит, положительных корней два.

Глава IV. Функция. Основные понятия

Эта глава занимает центральное место в учебнике как по положению в нём, так и по значимости, так как практически весь курс алгебры и начал анализа в настоящий момент (кроме, возможно, элементов комбинаторики и теории вероятностей) зиждется на понятии функции. Это понятие изучалось в курсе основной школы. Мы же в своём изложении исходили из необходимости и возможности на основе имеющихся у учащихся представлений дополнить, а главное, систематизировать знания учащихся о функциях и их свойствах, а также рассмотреть понятия и основные задачи, связанные с функциями.

При таком изложении материала неизбежно забегание вперёд (например, использование графических методов до того, как определено понятие графика функции), но это служит отличной пропедевтикой обсуждения соответствующих понятий, а также мотивирует изучение этих понятий на соответствующем уровне абстракции.

Задачи к главе IV построены таким образом, что требуют постоянного возвращения к уже изученному материалу, актуализации знаний из других глав (здесь и решение уравнений и неравенств, и активное использование модуля, и задачи с целыми числами, возникающие при изучении периодичности, и т. д.).

В связи с этим учитель может выбрать структуру изучения материала данной главы, отличную от предложенной в учебнике (сначала общее понятие функции, затем методы задания функций, потом основные свойства функций и напоследок композиция функций и понятие обратной функции). Например, материал § 27 и 28 можно использовать практически в любой момент изучения главы.

Приведём примерный план изучения главы IV:

Глава IV. Функция. Основные понятия	**14**	**20**
Понятие функции	4	4
Монотонность и экстремумы функции. Способы задания функции. График функции. Некоторые элементарные функции	4	4
Чётные и нечётные функции. Периодические функции	2	4

Продолжение

Элементарные преобразования графиков функций	2	4
Поведение функции вблизи точек разрыва и в бесконечности. Понятие об асимптотах		2
Контрольная работа № 7	2	2

§ 22. Понятие функции

Материал этого параграфа предназначен для расширения известного учащимся понятия функции и получения наиболее общего определения.

Особое внимание необходимо уделить условию равенства функций, а также добиться понимания того, что функции с разными областями определения различны!

В пункте 2 параграфа рассматриваются виды функций с точки зрения взаимной однозначности и совпадения множества значений с областью прибытия. Классификация, приведённая в схеме на с. 175 учебника, помогает уяснить в дальнейшем такие понятия, как геометрическое преобразование, обратимая функция и т. д.

К материалу параграфа достаточно трудно придумать задачи и упражнения. Можно лишь приводить различные примеры соответствий, задаваясь вопросом: являются ли эти соответствия функциями (отображениями)? Приведём некоторые примеры такого рода.

1. Является ли соответствие функцией:

а) положительному вещественному числу a ставится в соответствие геометрическая фигура — квадрат, радиус описанной окружности которого равен a;

б) в соответствие вещественному числу x ставится вещественное число y так, что выполнено равенство $x^2 - xy - y^2 - 1 = 0$. А если то же равенство определяет соответствие вещественному числу y положительного числа x?

2. Выясните, существует ли функция, графиком которой является множество точек плоскости, задаваемое условием:

а) $xy = 0$; б) $x^2 + y^2 = 1$; в) $xy = 1$; г) $|y + 1| = 2$; д) $x^2 + y^2 = 2y - 1$?

Решение небольшого количества таких примеров является хорошей связкой при переходе к материалу следующего параграфа.

§ 23. Способы задания функции. График функции. Некоторые элементарные функции

Материал этого параграфа призван систематизировать уже имеющиеся у учащихся знания и представления. Вместе с тем в параграфе имеется и новый материал (например, параметрическое задание функции). Отметим, что, несмотря на отсутствие задач, посвящённых параметрическому способу задания функции, упоминание его необходимо в связи с изучением физики (траектория материальной точки задаётся параметрически через описание координат точки как функций времени).

Традиционные затруднения, преодоление которых требует интенсивной и сосредоточенной работы, вызывает изучение кусочно-заданных функций, наиболее используемой из которых является модуль, поэтому рассмотрению таких функций уделено внимание в пункте 3. Формировать умение работать с кусочно-заданными функциями помогут задачи IV.1—IV.4, а также задачи IV.15, IV.16, IV.44.

Приведём ещё несколько задач, которые полезно решить для более полного усвоения материала § 23.

1. Задайте какую-либо функцию f формулой и постройте её график, если:
а) $D(f) = (0;\ 1)$, $E(f) = [0;\ 1]$;
б) $D(f) = \boldsymbol{R}\backslash\{1\}$, $E(f) = \boldsymbol{R}\backslash\{-3\}$;
в) $D(f) = (-\infty;\ 2) \cup [3;\ +\infty)$;
г) $D(f) = [-1;\ 1]$, $E(f) = \left[\sqrt{2};\ 2\right]$;
д) $D(f) = \boldsymbol{R}$, $E(f) = [0;\ 3)$.

2. Пусть $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{x^2 + m}$. Существует ли такое значение m, при котором любое число $a \neq 1$ входит в множество значений функции f?

3. Верно ли, что:
а) $\forall f\ \ \forall b \in \boldsymbol{R}\ \exists g\colon f(x) = b + g(x)$;
б) $\forall f\ \ f(x) > 0\ \exists g\colon \forall x \in D(f)\ \ -f(x) < g(x) < f(x)$;
в) $\forall f\ \ \forall b \in \boldsymbol{R}\ \exists! g\colon f(x) = b + g(x)$;
г) $\forall f\ \ f(x) > 0\ \exists! g\colon\ \ x \in D(f)\ \ -f(x) < g(x) < f(x)$;
д) $\exists g\colon \forall f\ \forall b \in \boldsymbol{R}\ \ f(x) = b + g(x)$;
е) $\exists! g\colon \forall f(x) > 0\ \forall x \in D(f)\ \ -f(x) < g(x) < f(x)$?

4. Нарисуйте график какой-либо функции f, такой, что $f(A) = B$:
а) $A = (0;\ 1)$, $B = \boldsymbol{R}$; б) $A = [0;\ +\infty]$, $B = (0;\ 1)$;
в) $A = \boldsymbol{R}$, $B = [0;\ 1)$;
г) $A = \boldsymbol{R}\backslash[-1;\ 1]$, $B = [0;\ 1] \cup [2;\ 3]$;
д) $A = (0;\ 1) \cup (2;\ 3)$, $B = [0;\ 1]$;
е) $A = \boldsymbol{R}\backslash\{1;\ 2\}$, $B = \{1;\ 2;\ 4\}$.

5. Известно, что график функции $y = f(x) + 2g(x)$ — прямая, проходящая через точки $A(-1;\ 3)$ и $B(1;\ 2)$, а график функции $y = 3f(x) - g(x)$ — прямая, симметричная AB относительно оси OY. Найдите функции f и g.

6. При каких значениях a существует отрезок ненулевой длины, образ которого при отображении f — множество, состоящее из одной точки, если $f(x) = |2x - 1| + ax$?

Решения и указания к задачам

IV.1. а) **Решение.** По определению $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее данное. Следовательно $[x] \leqslant x$. Следующее целое число превосходит x, т. е. $x < [x] + 1$.

б) **Решение.** $0 \leqslant \{x\} < 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant x - [x] < 1 \Leftrightarrow [x] \leqslant x < [x] + 1$, что верно в силу IV.1, *а*.

в) **Решение.** $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x. Тогда $[x] + 1 \leqslant x + 1$, причём $[x] + 1$ — наибольшее целое число, не превосходящее $x + 1$, т. е. $[x + 1]$. Итак, $[x + 1] = [x] + 1$.

г) **Решение.** $\{x + 1\} = \{x\} \Leftrightarrow x + 1 - [x + 1] = x - [x] \Leftrightarrow [x + 1] = [x] + 1$, что верно в силу задания IV.1, *в*.

IV.2. $x < 1$. **Решение.** Способ 1 (аналитический). Неравенство $2\{x\} \geqslant x$ равносильно неравенству $2\{x\} \geqslant [x] + \{x\}$, равносильному в свою очередь неравенству $\{x\} \geqslant [x]$. Так как $0 \leqslant \{x\} < 1$, то $0 \leqslant 2\{x\} < 2$, поэтому при $x \geqslant 2$ решений нет. Пусть $x < 2$. Тогда ясно, что неравенство $\{x\} \geqslant [x]$ выполняется при всех $x < 1$ и никаких иных решений у этого неравенства нет.

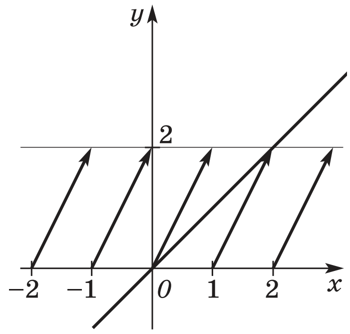


Рис. 4.1

Способ 2 (графический). См. рис. 4.1.

IV.4. $\max\{a;\ b\} = \dfrac{a + b + |a - b|}{2}$; $\min\{a;\ b\} = \dfrac{a + b - |a - b|}{2}$.

Замечание. Задачи IV.5—IV.6 включены для усвоения понятия естественной области определения, а также совершенствования навыков решения систем неравенств и напоминания об области определения функции $y = \sqrt{x}$ и дробно-рациональной функции.

IV.5. ж) $\boldsymbol{R}\backslash[0;\ 1)$. з) $\boldsymbol{R}\backslash\boldsymbol{Z}$. и) $\boldsymbol{R}\backslash\left\{\dfrac{k}{2}:\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$.

IV.6. в) $\left[-2\sqrt{2};\ -\sqrt{5}\right] \cup \left(\sqrt{5};\ 2\sqrt{2}\right]$. е) $\{-2;\ 2\}$. з) $\{2\}$. и) $\{5\}$.

§ 24. Некоторые свойства функций

В этом параграфе рассматриваются основные свойства функций: ограниченность, монотонность, чётность и периодичность. Знание соответствующего материала является необходимым условием изучения всего дальнейшего курса. Поэтому более половины всех задач к главе относятся к данному параграфу.

Особое внимание предлагается уделить работе с определениями. Так, например, при изучении свойства монотонности полезно рассмотреть монотонность суммы двух функций одинакового характера монотонности или монотонность функции $\frac{1}{f(x)}$, где функция $f(x)$ сохраняет знак и строго монотонна. При изучении чётных и нечётных функций так называемая «игра в определения» ведётся в задачах IV.30 и IV.32. Богатый задачный материал для отработки определения периодичности функции и понимания простейших свойств периодических функций содержится в задачах IV.48—IV.54.

Второй, хорошо просматриваемой линией в задачном материале, является «конструктивизм и деконструктивизм», т. е. рассматриваются задачи на построение конструкций (IV.16, IV.18—IV.21, IV.24, IV.27, IV.63, IV.71), вопросы существования (IV.25, IV.28, IV.35, IV.37, IV.62, IV.63) и построение контрпримеров (IV.56, IV.74—IV.76). Такого рода задачи позволяют гораздо глубже усвоить основные свойства, а возможность пофантазировать делает их ещё более привлекательными.

Ограниченность функций

Очень важным представляется упомянуть о наибольшем (наименьшем) значении функции и возможности его совпадения или несовпадения с максимумом (минимумом) и супремумом (инфинимумом). С этой целью можно провести следующий математический диктант «Наибольшее и наименьшее значения функции»:

1. Равносильны ли утверждения $a \leqslant f(x) \leqslant b$ и $E(f) = [a; b]$? Следует ли одно из них из другого?
2. Наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ равны соответственно a и b. Чему равны наименьшее и наибольшее значения функции $y = 2f(x) - 3$?
3. Пусть наименьшее и наибольшее значения функции $y = f(x)$ равны соответственно A и B. Что можно сказать о наименьшем и наибольшем значениях функции

$y = \dfrac{1}{f(x)}$, если функция f принимает только отрицательные значения?

4. Верно ли утверждение: «если наибольшее значение функции f равно A, то наибольшее значение её модуля $|f|$ равно $|A|$»?
5. Может ли функция, определённая на интервале $(a; b)$, иметь и наибольшее, и наименьшее значения?
6. Может ли функция, определённая на интервале $(a; b)$, иметь наибольшее, но не иметь наименьшего значения?
7. Может ли функция, определённая на интервале $(a; b)$, не иметь ни наибольшего, ни наименьшего значения?
8. Верно ли, что наибольшее значение суммы двух функций равно сумме их наибольших значений?
9. Известно, что функции f и g принимают свои наименьшие значения в точке c. Верно ли, что в точке c их произведение также принимает своё наименьшее значение?

10*. Найдите наименьшее значение выражения $|x-1| + |x-2| + |x-3| + |x-4| + |x-5|$.

Задачи на доказательство ограниченности функций или отсутствие таковой, приведённые в учебнике, можно дополнить следующими:

Пример. Докажем, что функция $y = \sqrt{16 - x^2}$ является ограниченной.

Решение. Докажем, что данная функция ограничена снизу числом 0, а сверху числом 4. Действительно, $0 \leqslant 16 - x^2 \leqslant 16$ и функция $y = \sqrt{t}$ строго возрастает на промежутке $[0; +\infty)$, следовательно, $0 \leqslant \sqrt{16 - x^2} \leqslant 4$. ■

Пример. Докажем, что функция $y = x^3$ не ограничена на $\boldsymbol{R}$.

Решение. Построим отрицание определения ограниченной функции: то, что функция f не ограничена на множестве X, означает, что $\forall c > 0\ \exists x_0 \in X$: $|f(x)| > c$.

Докажем, что функция $y = x^3$ не ограничена сверху (снизу аналогично), т. е. $\forall c > 0\ \exists x_0 \in X$: $f(x_0) > c$. Заметим, что $x_0^3 > c \Leftrightarrow x_0 > \sqrt[3]{c}$, следовательно, в качестве x_0 можно взять любой $x \in (\sqrt[3]{c}; +\infty)$. ■

Пример. Исследуем на ограниченность $y = |x+4| + |x-4|$

Решение. Так как $|a| + |b| \geqslant |a+b|$, то $|x+4| + |x-4| = |x+4| + |4-x| \geqslant |x+4+4-x| = 8$. Значит, функция $y = |x + 4| + |x - 4|$ ограничена снизу на $\boldsymbol{R}$ числом 8 (впрочем, можно сразу сказать, что $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $y \geqslant 0$ как сумма неотрицательных слагаемых, а потому в качестве нижней границы множества значений функции можно предложить и число 0).

Если $x \geqslant 4$, то $y = 2x$, а выражение $2x$ может принимать любые значения, в том числе и сколь угодно большие $2x > c \Leftrightarrow x > \frac{c}{2}$, т. е. $\forall c > 0 \quad \exists x_0 \in \left(\frac{c}{2}; +\infty\right)$: $2x_0 > c$. Следовательно, функция $y = |x + 4| + |x - 4|$ не ограничена сверху на $\boldsymbol{R}$.

Важно обратить внимание, что для доказательства неограниченности функции оказалось достаточно рассмотреть лишь один случай раскрытия модулей. ■

Пример. Докажем, что сумма ограниченных функций на множестве X является ограниченной функцией.

Решение. Пусть функция f ограничена на множестве X, т. е. $\exists c_1 \geqslant 0$: $\forall x \in X$ $|f(x)| \leqslant c_1$, и пусть функция g ограничена на множестве X, т. е. $\exists c_2 \geqslant 0$: $\forall x \in X$ $|g(x)| \leqslant c_2$.

Тогда $\forall x \in X$ $|f(x) + g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| = c_1 + c_2 = c$. Итак, предъявлено значение c, которое не превосходится никаким значением функции $f + g$. ■

Учащимся можно предложить следующие задачи для самостоятельного решения:

1. Исследуйте на ограниченность функцию:

   а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; б) $g(a) = a^3 - 1$ на $[-2; 1]$;

   в) $h(z) = \dfrac{z^2 + z + 1}{z^2 - z + 1}$; г) $y = \sqrt{x+3} + \sqrt{5-x}$;

   д) $y = \sqrt{x+3} - \sqrt{5-x}$; е) $g(x) = \dfrac{(x+3)^2}{x}$.

2. Исследуйте на ограниченность функцию $f(x) = x^2 + 2$ на множестве X, если:

   а) $X = \boldsymbol{R}$; б) $X = (-1; 2)$.

3. Функция F ограничена на $\boldsymbol{R}$. Обязательно ли ограничена на $\boldsymbol{R}$ функция H, задаваемая равенством $H(x) = aF^2(x)$, где $a \in \boldsymbol{R}$?

4. Функция F ограничена на $\boldsymbol{R}$. Функции G и H задаются равенствами $G(x) = -F(x)$, $H(x) = |F(x)|$. Обязательно ли ограничены функции G и H?

5. Функции g и f ограничены на $\boldsymbol{R}$. Обязательно ли ограничена на $\boldsymbol{R}$ функция h, задаваемая равенством $h(x) = (f(x) - g(x))^2 + 2$?

6. Приведите пример неограниченной функции f и ограниченной функции g, таких, что $D(f) = D(g)$ и функция h, задаваемая равенством $h(x) = f(x)\,g(x)$, ограничена.

7. Решите уравнение:

а) $-\dfrac{6}{x^2} = x^4 + x^2$;

б) $|x - 3| + |x + 4| + |x - 5| + |x + 2| = -x^2 - 2x + 15$;

в) $\dfrac{2x^2}{x^4 + 1} = (x - 1)^6 + 1$.

Задачи IV.8—IV.14 тесно связаны с понятием ограниченности. Необходимо отметить, что при решении этих задач полезно пользоваться простейшими свойствами непрерывности на наглядном уровне, иллюстрируя объяснение графическими примерами и простейшими функциями, заданными формулами. Полезно переходить к данным задачам, предварительно обсудив основные идеи и приёмы.

Основное соображение, связанное с существованием решений уравнения, простое: уравнение $f(x) = a$ разрешимо тогда и только тогда, когда число a входит в множество значений функции f. Таким образом, мы можем находить множества значений некоторых функций, используя известные условия разрешимости уравнений. С другой стороны, исследовав функцию, мы можем сделать вывод о существовании (числе, расположении) корней соответствующего уравнения.

Нахождение множества значений функции естественно связано с нахождением её наибольшего и наименьшего значений.

Один из уроков можно построить на выступлении учащихся с докладами о возможных способах нахождения множества значений, предварительно обсудив с ними технические трудности с помощью следующих примеров:

Пример. Найдём множество значений функции $f(x) = x - \sqrt{x+1}$.

Решение. Задача сводится к поиску множества значений квадратичной функции. Естественная область определения функции $D(f) = [-1; +\infty)$. Пусть $t = \sqrt{x+1}$, откуда $x = t^2 - 1$. Когда x принимает все значения из $D(f)$, t принимает все значения из промежутка $[0; +\infty)$. Тогда $E(f) = E(g)$, где $D(g) = [0; +\infty)$ и $g(t) = t^2 - t - 1$.

Далее задачу можно решать несколькими способами:

Способ 1 (графический, забегая немного вперёд, материал § 25). Построим график функции $g(f) = t^2 - t - 1$,

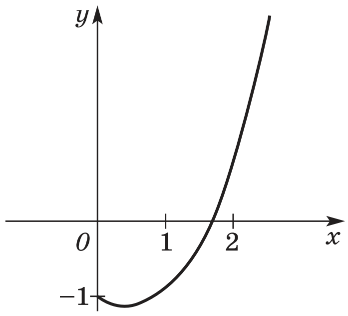


Рис. 4.2

определённой на промежутке $[0; +\infty)$ (рис. 4.2), и по графику найдём её множество значений: $E(g) = \left[-\frac{5}{4}; +\infty\right)$.

Способ 2 (аналитический). Найти множество значений функции g — это значит найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $g(t) = a$ имеет хотя бы один корень, лежащий в области определения функции g. В нашем случае необходимо найти все значения a, при каждом из которых уравнение $t^2 - t - 1 = a$ имеет хотя бы один неотрицательный корень.

Сумма корней квадратного уравнения $t^2 - t - 1 - a = 0$ (если они существуют) по теореме Виета равна 1, поэтому среди них обязательно будет неотрицательный корень. Поэтому осталось выяснить, при каких значениях a существуют корни данного уравнения. Дискриминант уравнения равен $5 + 4a$, поэтому оно имеет корни при $a \geqslant -\frac{5}{4}$. ■

Пример. Найдём множество значений функции

$$y = \frac{8}{x^2 - 6x + 13}.$$

Решение. Так как $x^2 - 6x + 13 = (x - 3)^2 + 4 \geqslant 4$, то $0 < \frac{8}{(x-3)^2 + 4} \leqslant 2$, причём $y = 2$ при $x = 3$. И при неограниченном возрастании значения x значение y сколь угодно близко приближается к 0. Тогда в силу непрерывности $E(y) = (0; 2]$. Здесь уместно остановиться на смысле слов «сколь угодно близко» и «при неограниченном возрастании», не давая тем не менее формальных определений. В дальнейшем разговор подобного рода может быть продолжен при изучении материала § 28. ■

Пример. Найдём множество значений функции

$$y = \frac{3x + 5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}}.$$

Решение. Заметим, что

$$y = \frac{3x + 5\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x}} = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 5.$$

Применим неравенство Коши $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$ (с. 37 учебника) $3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}} + 5 \geqslant 2\sqrt{3\sqrt{x}\,\frac{2}{\sqrt{x}}} + 5 = 2\sqrt{6} + 5$, причём $y = 2\sqrt{6} + 5$, когда $3\sqrt{x} = \frac{2}{\sqrt{x}}$, т. е. при $x = \frac{2}{3}$. В то же время вблизи 0 значения функции становятся сколь угодно большими. В силу непрерывности (интуитивно ясной) получим $E(y) = \left[2\sqrt{6}; +\infty\right)$. Конечно, можно сообщить и о том, что функция не ограничена сверху, но доказывать это вряд ли целесообразно (если $\forall M > 0\ \exists x_0 = M^2 : f(x_0) > M$). ■

Пример. Найдём множество значений функции

$$y = \sqrt{x+2} + \sqrt{6-x}.$$

Решение. Так как $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b} \leqslant \sqrt{2(a+b)}$, то $\sqrt{8} \leqslant \sqrt{x+2} + \sqrt{6-x} \leqslant 4$. Причём $y(-2) = \sqrt{8}$, $y(2) = 4$. В силу непрерывности $E(y) = \left[\sqrt{8}; 4\right]$. Важно указывать, когда достигаются границы множества значений функции. ■

Монотонность и экстремумы функции

Изучая свойства монотонности функции, необходимо рассмотреть следующие свойства монотонных функций:

1. Сумма двух возрастающих на множестве X функций есть возрастающая на X функция. Аналогичное утверждение верно и для убывающих функций.
   Полезно отметить, что для разности функций утверждение неверно.
2. Если неотрицательные на множестве X функции возрастают, то их произведение есть возрастающая на X функция.
   Полезно отметить, что отсутствие требования неотрицательности множителей делает утверждение неверным, как показывает пример умножения двух функций $y = x$, заданных на $\boldsymbol{R}$.
3. Если функция f монотонна на множестве X и сохраняет знак на этом множестве, то функция $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ имеет на множестве X противоположный характер монотонности.
   Легко привести контрпример к утверждению, если опустить в условии «сохраняет знак на этом множестве».
4. Если функция f строго монотонна на множестве X, то уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня.

Последнее свойство полезно также сформулировать иначе: строго монотонная функция каждое своё значение принимает только один раз.

Очень важно сопроводить эти свойства не только примерами и доказательствами, но и, что называется, «поиграть» с ними, т. е. незначительно изменяя формулировки теорем, учиться строить контрпримеры к неверным утверждениям.

Вместе с разобранным в учебнике (с. 184) примером функции $y = \frac{1}{x}$, которая, будучи монотонной на двух промежутках, не монотонна на их объединении, можно привести пример и противоположного характера: функция $y = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} + 2x$ возрастает на каждом из лучей $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$ и при этом возрастает на объединении этих лучей.

В качестве одного из применений свойства монотонности функции можно рассмотреть решение уравнений, где одна из частей уравнения является возрастающей функцией, а другая — убывающей.

В сильном классе уместно доказать и рассмотреть на конкретном примере следующую теорему:

ТЕОРЕМА

Пусть функция f строго возрастает на множестве X. Тогда уравнение $f(x) = x$ (1) равносильно уравнению $f(f(x)) = x$ (2).

Доказательство. То, что уравнение (2) является следствием уравнения (1), очевидно (любой корень (1) удовлетворяет (2), т. е. если $f(x_0) = x_0$, то $f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0$).

Докажем, что любой корень уравнения (2) удовлетворяет уравнению (1). Пусть x_0 такое, что $f(f(x_0)) = x_0$. Предположим, что $f(x_0) \neq x_0$. Для определённости пусть $f(x_0) > x_0$. Тогда $f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0$, что противоречит предположению $f(f(x_0)) = x_0$.

Можно задать учащимся вопрос: верна ли сформулированная теорема для монотонно убывающей функции? (Нет, например $f(x) = -x$.)

Приведём примеры использования этой теоремы.

Пример. Решим уравнение $\sqrt{1 + \sqrt{x}} = x - 1$.

Решение. Перепишем уравнение в виде $1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}} = x$. Рассмотрим функцию $f(x) = 1 + \sqrt{x}$. Эта функция монотонно возрастает. Тогда уравнение принимает вид $f(f(x)) = x$. По теореме заменяем его на эквивалентное уравнение $f(x) = x$ или $1 + \sqrt{x} = x \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 1 = 0$, откуда $x = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$. ■

Пример. Решим уравнение $x^3 + 1 = 2 \cdot \sqrt[3]{2x - 1}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение: $\dfrac{1 + \left(\dfrac{x^3 + 1}{2}\right)^3}{2} = x$. Это уравнение имеет вид $f(f(x)) = x$, где $f(x) = \dfrac{1 + x^3}{2}$ и f — строго возрастающая на $\boldsymbol{R}$ функция. Тогда согласно теореме уравнение равносильно $\dfrac{x^3+1}{2} = x \Leftrightarrow x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + x - 1) = 0$. Ответ: $\left\{1, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$. ■

Полезно обратить внимание учащихся на любопытный пример, показывающий, насколько аккуратно нужно применять такую теорему:

Пример. Для функции $f(x) = -\dfrac{1}{x}$ уравнение $f(f(x)) = x$ имеет своим решением всю область определения, в то время как уравнение $f(x) = x$ вообще не имеет решений. Ясно, что функция не возрастает на области определения. Некоторые учащиеся предлагают рассмотреть функцию на промежутке $(0; +\infty)$, где она возрастает (сузив тем самым область определения!). Однако при таком рассмотрении невозможно составить композицию $f(f(x))$, поскольку множество значений внутренней функции не содержится в области определения внешней.

По теме «Монотонность функции» можно предложить также дополнительные задачи (задачи 1—11 можно предложить в виде математического диктанта, задачи 12—19 требуют более серьёзных усилий для решения).

1. Является ли монотонной функция $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x-3}$?
2. Является ли монотонной функция $f(x) = x - \sqrt{x}$?
3. Является ли функция $f(x) = [2^{100}x]\left\{\dfrac{x}{2^{100}}\right\}$ возрастающей или убывающей?
4. Что можно сказать о функции $y = f(x)$, если выражение $\dfrac{f(a) - f(b)}{b - a}$ при любых a, $b \in D(f)$ имеет один и тот же знак?
5. Сколько раз график возрастающей функции может пересекать прямую $x = a$?
6. Сколько точек пересечения может иметь график убывающей функции с прямой $y = x$?

7. Верно ли, что если функция возрастает на интервале $(a; b)$, то она возрастает и на отрезке $[a; b]$?

8. Верно ли, что если функция возрастает на промежутке A и на промежутке B, то она возрастает и на объединении этих промежутков?

9. Верно ли, что если функция возрастает на отрезке A и на отрезке B и эти отрезки имеют хотя бы одну общую точку, то она возрастает и на объединении этих отрезков?

10. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $[a; c)$ и убывает на отрезке $[c; b]$. Обязательно ли значение $f(c)$ является наибольшим значением функции на отрезке $[a; b]$?

11. Может ли быть монотонной сумма двух функций, каждая из которых не является монотонной?

12. Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

а) $g(x) = \dfrac{1}{|x|}$; б) $g(x) = \dfrac{1}{(x+3)^2}$;

в) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$; г) $y = \left(\sqrt{x}+1\right)^2$;

д) $y = (x-3)^4$, $x \leqslant 3$.

13. Известно, что функция f возрастает на $\boldsymbol{R}$. Решите неравенство $f(x^2 - 3x) > f(-4)$.

14. Решите уравнение:

а) $\sqrt{x-9} + \sqrt{x+6} = 5$;

б) $\dfrac{1}{x-3} = \sqrt{x-4} + 1$;

в) $\sqrt{\sqrt{x+1}+1} = x$.

15. Функция f удовлетворяет одному из условий:

а) $\forall x_1 \in \boldsymbol{R}\ \exists x_2 \in \boldsymbol{R}$: $x_1 < x_2 \wedge f(x_1) < f(x_2)$;

б) $\forall x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}\ \ x_1 < x_2\ \ \exists x_3 \in (x_1; x_2)$: $f(x_1) < f(x_3) < f(x_2)$;

в) $\exists x_0 \in \boldsymbol{R}$: $\forall x_1 < x_0\ \ \forall x_2 > x_0\ \ f(x_1) < f(x_2)$.

Следует ли отсюда, что функция f возрастает на $\boldsymbol{R}$?

16. Пусть f возрастающая на $\boldsymbol{R}$ функция. Решите систему

$$\begin{cases} xy = 1, \\ f(x) = f(y). \end{cases}$$

17. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{3x^2+5} - \sqrt{3x^2}$$

на отрезке $[0; 3]$.

18. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^3 + 2x = 8y^3 + 4y, \\ x + 2y = 3. \end{cases}$

19. Решите систему неравенств $\begin{cases} 3x^3 + x < 3y^3 + 3, \\ 5x^5 + 3x^3 \geqslant 5y^5 + 3y^3. \end{cases}$

Чётные и нечётные функции

Ответом на вопрос о целесообразности рассмотрения понятий чётности и нечётности функций, если «большинство» функций не являются ни чётными, ни нечётными, могут служить два примера.

Физический пример. Если физическая система обладает какой-нибудь симметрией, то и связанные с ней функции часто имеют те или иные свойства симметрии. В простейших случаях возникают как раз чётные и нечётные функции.

На горизонтальный стержень — ось OX надета однородная пружина, концы которой закреплены в симметричных точках $x = -d$ и $x = d$, а к середине пружины — в точке $x = 0$ прикреплена шайба, свободно (без трения) перемещающаяся вдоль стержня (рис. 4.3).

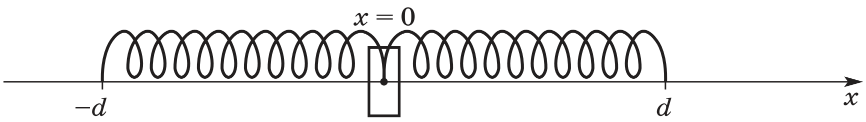


Рис. 4.3

Из соображений симметрии получаем:

1. Функция $F(x)$, выражающая зависимость силы F от смещения x, является нечётной.
2. Функция $U(x)$, выражающая зависимость потенциальной энергии от смещения, является чётной.

Математический пример. Произвольный многочлен $p(x)$, вообще говоря, не будет ни чётной, ни нечётной функцией. Однако его можно представить в виде суммы двух многочленов $p_+(x)$ и $p_-(x)$, являющихся соответственно чётной и нечётной функциями.

Например, $p(x) = x^7 + 2x^6 - x^5 - 3x^4 - 13x^2 + x + 17$, $p_+(x) = 2x^6 - 3x^4 - 13x^2 + 17$, $p_-(x) = x^7 - x^5 + x$.

В параграфе упоминается свойство о том, что любую функцию с симметричной областью определения можно представить в виде суммы чётной и нечётной функций. Это простейший пример разложения на составляющие функции в математике. Вообще говоря, разложение на составляющие, обладающие теми или иными свойствами, является в математике объектом пристального изучения и находит широкое применение, например, в вопросах распознавания речи.

Необходимо подробно разобрать случай, когда исследуемая функция оказывается функцией общего вида. Это полезно рассмотреть на конкретном примере задачи IV.29, *в*.

К задаче IV.30 разумно приступить сразу после изучения материала параграфа. В ней отрабатываются навыки доказательств свойств, непосредственно следующих из определения.

Перед задачей IV.36 полезно предложить учащимся достроить графики функций, изображённых на рисунке 4.4, до графиков всюду определённых на $\boldsymbol{R}$: а) чётных функций; б) нечётных функций.

Задачи IV.39—IV.43 относятся к геометрии графиков функций и тесно связаны с чётностью и нечётностью, так как совершенно очевидно, что если «сдвинуть» график, имеющий центр или вертикальную ось симметрии, с помощью параллельного переноса так, чтобы центр симметрии совпал с точкой (0; 0), а ось симметрии совпала с осью OY, то ясно, что функция будет нечётной в первом или чётной во втором случае.

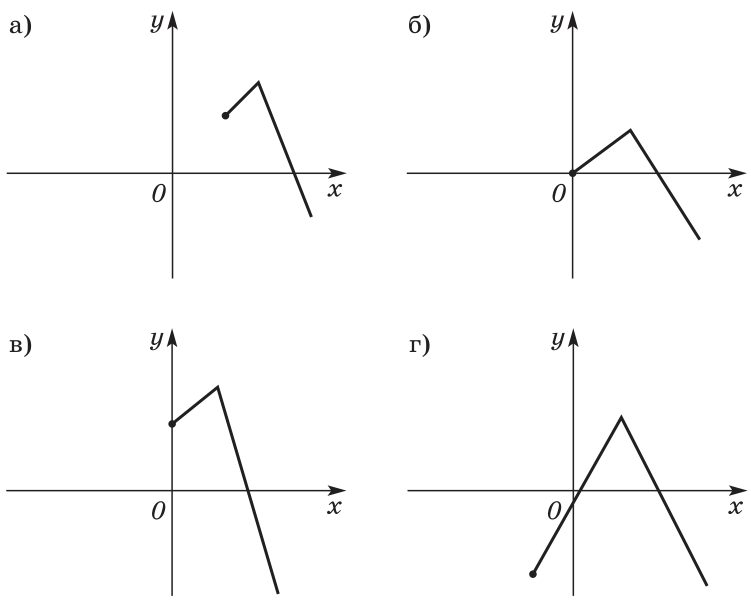


Рис. 4.4

Полезно привести примеры графиков, имеющих бесконечное число (счётное или несчётное) вертикальных осей и центров симметрии. Например, $y = x$ имеет несчётное множество центров симметрии.

Также можно рассмотреть вопросы:

1. Всегда ли центр симметрии принадлежит графику функции?

Решение. Если функция определена в точке, являющейся абсциссой центра симметрии графика, то центр симметрии принадлежит графику, иначе на графике функции окажутся две точки с одинаковой абсциссой.

2. Может ли график функции иметь ровно: а) две вертикальные оси симметрии; б) два центра симметрии?

Решение. а) Нет, хотя если не упоминать о том, что ось симметрии вертикальна, то ответ «да», например для случая $y = \dfrac{1}{x}$ (рис. 4.5).

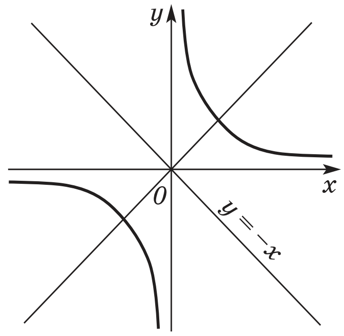


Рис. 4.5

Предлагаем ещё ряд задач, которые дополняют и существенно развивают теоретическую и практическую части учебника (задачи 1—10 можно предложить в качестве математического диктанта).

1. Приведите пример функции, которая не может быть представлена в виде суммы чётной и нечётной функций.

2. Какой многочлен задаёт чётную функцию?

3. Известно, что функция f нечётная и $f(a) = -f(b)$. Следует ли отсюда, что $a = -b$?

4. Известно, что f — чётная функция, возрастающая на $(0; a)$. Докажите, что функция f убывает на $(-a; 0)$.

5. Известно, что g — нечётная функция, убывающая на $(0; a)$. Докажите, что функция g убывает также на $(-a; 0)$.

6. Известно, что уравнение $f(x) = 21$, где f — чётная функция, имеет 5 корней. Докажите, что среди корней есть число 0.

7. Имеет ли график функции $y = \{x\}$ хотя бы одну вертикальную ось симметрии?

8. Может ли график функции иметь горизонтальную ось симметрии?

9. График функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось и центр симметрии. Что можно сказать о графике функции $y = f(-x)$?
10. График функции $y = f(x)$ имеет вертикальную ось и центр симметрии. Что можно сказать о графике функции $y = |f(x)|$?
11. Является ли прямая $y = x$ осью симметрии графика функции $y = \dfrac{x-1}{x+1}$?
12. Существует ли функция f, определённая на $[0; +\infty)$ и удовлетворяющая условию $f(|x|) = x^2 - x$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$?
13. Представьте функцию $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^3 - x}$ в виде суммы чётной и нечётной функций.
14. Исследуйте функцию на чётность:

а) $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{(x+1)^2}$;

б) $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{1 - x - x^2}$.
15. Существует ли чётная функция f, такая, что $\forall x \neq 0$ выполнено $f(x) + f(-x) = x$?
16. Может ли уравнение $|x| = (x^2 + 1)^5 - 1$ иметь 10 корней?
17. Решите уравнение $(2x-1)^5\sqrt{(2x-1)^2 + 5} + x^5\sqrt{x^2 + 5} = 0$.
18. При каких значениях a функция $f(x) = (2a - 6)x^6 + (a + 4)x + 3 - a$ является: а) нечётной; б) чётной?

Периодические функции

Изучая свойство периодичности, полезно иметь в виду, что его основные применения будут в тригонометрии. Тем не менее свойство дидактически полезно само по себе.

Так же, как в случае изучения свойства чётности (где область определения чётной или нечётной функции должна быть симметрична относительно нуля), полезно обратить внимание учащихся на то, что область определения периодической функции должна переходить в себя при параллельном переносе вдоль оси абсцисс на период. Поэтому, например, функция, область определения которой представляет собой ось с выколотым непустым конечным множеством точек, не может быть периодической!

Отметим, что бо́льшая часть задач о периодических функциях требует значительных усилий от учащихся. Глубину изучения вопроса о периодичности на основе матери-

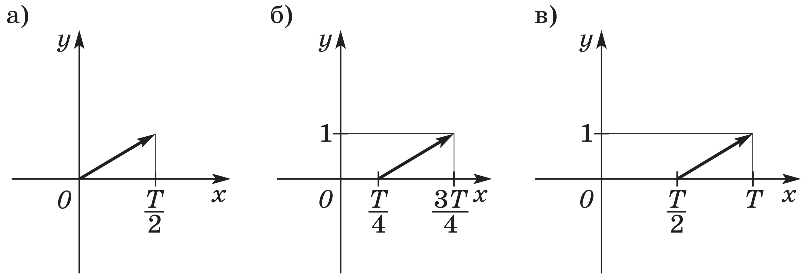


Рис. 4.6

ала учебника можно варьировать в зависимости от уровня класса.

После решения задачи IV.45 уместно разобрать следующую: дополните графики, изображённые на рисунке 4.6, до графиков периодических функций с наименьшим положительным периодом T, являющихся при этом: 1) чётными; 2) нечётными.

Р е ш е н и е. а) См. рисунок 4.7.

б) Нельзя в обоих случаях. Докажем для случая чётной функции. Пусть это возможно, тогда в силу чётности $f\left(-\frac{T}{4}\right) = f\left(\frac{T}{4}\right) = 0$. Но $f\left(-\frac{T}{4}\right) = f\left(T - \frac{T}{4}\right) = f\left(\frac{3T}{4}\right) = 1$ (в силу периодичности). Получили противоречие. ■

Невозможность построения нечётной функции доказывается аналогично.

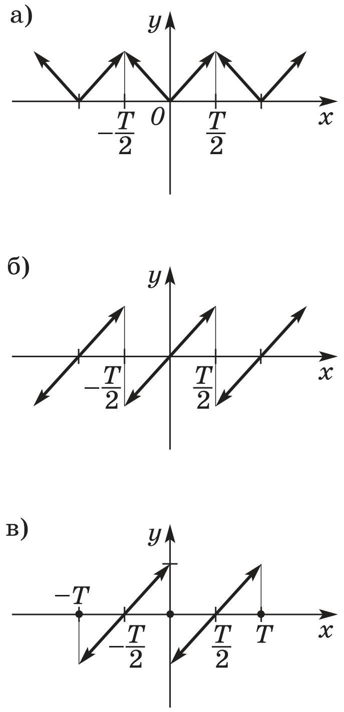


Рис. 4.7

Решения и указания к задачам

IV.7. а) *Замечание.* В задаче, по сути, даётся ещё одно определение ограниченности, эквивалентное данному в параграфе. Полезно обратить внимание на то, что $C = \max\{|A|; |B|\}$. Уместно также доказать, что из определения задачи IV.7, *а* следует определение, данное в § 24.

б) *Указание.* Задача требует умения построить отрицание к высказыванию. Докажем, что функция $y = \frac{1}{x^2}$ не ограничена сверху на любом интервале $(0; c)$, где $c > 0$, т. е. $\forall c > 0 \ \exists x_0 \in (0; c)$: $\frac{1}{x_0^2} > c$. С учётом положительности x_0 получим $\frac{1}{x_0^2} > c \Leftrightarrow 0 < x_0 < \frac{1}{\sqrt{c}}$, поэтому в качестве x_0 можно взять любое число из интервала $\left(0; \frac{1}{\sqrt{c}}\right)$.

IV.8. *Указание.* Задача сводится к поиску множества значений функции через решение уравнения с параметром. На примере задачи IV.8, *и* имеет смысл отработать три основных метода нахождения $E(f)$.

и) $E(f) = \left[-\frac{1}{9}; 1\right)$. **Решение.** Способ 1. Уравнение $a = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 9}$ сводится к уравнению $x^2 = \frac{9a + 1}{1 - a}$ (при $a = 1$ решений нет), которое разрешимо тогда и только тогда, когда $\frac{9a + 1}{1 - a} \geqslant 0$.

Способ 2. Сведём задачу к нахождению множества значений известной функции.

Преобразуем выражение $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 9} = 1 - \frac{10}{x^2 + 9}$. Пусть $t = x^2$, $t \geqslant 0$. Тогда $E(y) = E(g)$, где $g(t) = 1 - \frac{10}{t + 9}$, $t \geqslant 0$. Ответ можно «считать» по графику функции g.

Способ 3 (метод оценки). Преобразуем выражение $\frac{x^2 - 1}{x^2 + 9} = 1 - \frac{10}{x^2 + 9}$.

$$x^2 + 9 \geqslant 9 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{x^2 + 9} \leqslant \frac{1}{9} \Leftrightarrow 0 < \frac{10}{x^2 + 9} \leqslant \frac{10}{9} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{10}{9} \leqslant -\frac{1}{x^2 + 9} < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{9} \leqslant 1 - \frac{10}{x^2 + 9} < 1,$$

причём $y = -\frac{1}{9}$ при $x = 0$.

При решении таким способом необходимо отмечать, что все промежуточные значения выражений достигаются.

IV.9. д) $[0; 2{,}5]$. *Указание.* Кроме стандартного подхода, полезно вспомнить уравнение окружности. Ведь $y = \sqrt{4 + 3x - x^2} \Leftrightarrow (x - 1{,}5)^2 + y^2 = 2{,}5^2$, $y \geqslant 0$. Таким образом, уравнение задаёт верхнюю полуокружность с центром в точке (1,5; 0) и радиусом 2,5.

е) $\left[2-\sqrt{10};\ 2\right]$. **Решение.** Функция преобразуется к виду $y = 2-\sqrt{10-\left|\sqrt{2}x+5\right|}$. Учитывая, что $10 \geqslant \left|\sqrt{2}x+5\right|$ при $x \in \left[-\frac{15}{\sqrt{2}};\ \frac{5}{\sqrt{2}}\right]$, получим $E(y) = \left[2-\sqrt{10};\ 2\right]$.

IV.10. а) $f_{\min} = -1$; $f_{\max} = \frac{1}{3}$. **Решение.** Найдём множество значений функции $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$.

Число a входит в множество значений функции f, если уравнение $f(x) = a$ имеет хотя бы одно решение, т. е. если разрешимо уравнение

$$\frac{x}{x^2+x+1} = a \Leftrightarrow ax^2 + (a-1)x + a = 0.$$

При $a = 0$ уравнение линейное, имеющее корень $x = 0$; при $a \neq 0$ уравнение квадратное с дискриминантом $D = -3a^2 - 2a + 1$. Условием наличия у этого уравнения вещественных корней является выполнение неравенства $D \geqslant 0$, откуда с учётом того, что при $a = 0$ уравнение имеет корень, уравнение имеет вещественный корень при $-1 \leqslant a \leqslant \frac{1}{3}$. Таким образом, $E(f) = \left[-1;\ \frac{1}{3}\right]$.

б) $f_{\min} = -\frac{1}{7}$; $f_{\max}$ не существует (точная верхняя граница не достигается).

IV.11. а) $f_{\max} = -5$; $f_{\min}$ не существует. **Решение.** После упрощения получим $y = 2x - |x-2| - |2x+5|$. Построив график функции, легко увидеть, что наибольшее значение равно -5, а наименьшего не существует по причине неограниченности функции снизу.

в) $f_{\max} = 1$; $f_{\min}$ не существует. **Решение.** После упрощения получим $y = 3x - |(x+2)(3x-1)|$. Рассмотрим функцию y на промежутках:

1) при $x \leqslant -2$ и $x \geqslant \frac{1}{3}$ функция примет вид $y = -3x^2 - 2x + 2$. Точка максимума $x_0 = -\frac{1}{3}$ квадратичной функции лежит вне лучей $(-\infty; -2]$ и $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Тогда по свойству квад-

ратичной функции f возрастает на $(-\infty;\ -2]$ и неограниченно убывает на $\left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$. Тогда наименьшего значения не существует и $\forall x \in (-\infty;\ -2) \cup \left[\frac{1}{3};\ +\infty\right)$ $f(x) \leqslant \max\left\{f(-2);\ f\left(\frac{1}{3}\right)\right\}$;

2) при $x \in \left[-2;\ \frac{1}{3}\right]$ функция примет вид $y = 3x^2 + 8x - 2$. Точка минимума $x_0 = -\frac{4}{3}$ квадратичной функции лежит на данном отрезке. Тогда по свойству квадратичной функции $\forall x \in \left[-2;\ \frac{1}{3}\right]$ $f(x) \leqslant \max\left\{f(-2);\ f\left(\frac{1}{3}\right)\right\} = 1$. Тогда $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $f(x) \leqslant 1$, причём $y\left(\frac{1}{3}\right) = 1$. Получили, что 1 наибольшее значение, а наименьшего не существует.

IV.12. а) 4. **Решение.** $y = (x-3) + \frac{1}{x-3} + 2 \geqslant 2 + 2 = 4$, так как $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$ при $a > 0$. Наименьшее значение равно 4 и достигается при $x = 4$.

б) $\frac{19}{20}$. **Решение.** $y = \frac{x^4 + x^2 + 5}{(x^2+1)^2} = \frac{(x^2+1)^2 - (x^2+1) + 5}{(x^2+1)^2} = \frac{5}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{x^2+1} + 1$. Рассмотрим функцию $g(t) = 5t^2 - t + 1$, где $t \in (0;\ 1]$ (выражение $\frac{1}{x^2+1}$, принимающее все значения из промежутка $(0;\ 1]$, обозначено за t). Тогда минимальное значение равно $\frac{19}{20}$ и достигается при $x = \pm 3$.

IV.13. *Замечание.* Требуется найти не наибольшее, а наименьшее значение функции.

Решение. Условие можно переписать в виде

$$f(x;\ y) = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + \frac{2}{x^2y^2} + 2x^2y^2;$$

$$f(x;\ y) = (x^2 - y^2)^2 + 2\left(\frac{1}{x^2y^2} + x^2y^2\right) \geqslant 4,$$

так как $(x^2 - y^2)^2 \geqslant 0$, а $\frac{1}{x^2y^2} + x^2y^2 \geqslant 2$. Иначе

$$f(x;\ y) = x^4 + y^4 + \frac{1}{x^2y^2} + \frac{1}{x^2y^2} \geqslant 4 \cdot \sqrt[4]{x^4y^4\ \frac{1}{x^2y^2}\ \frac{1}{x^2y^2}} = 4$$

по неравенству Коши. Значение $f(x;\ y) = 4$ достигается при $x = y = 1$.

IV.14. $E(f) = \left[\frac{1}{8};\ +\infty\right)$. *Замечание.* Задача представляет интерес не столько технической стороной решения, сколько идеей симметризации, которая встретится далее (например, в задачах IV.42 и IV.43). Разберём два способа её решения.

Решение. Способ 1. Преобразуем выражение:

$$\begin{aligned} x^4 + (1-x)^4 &= x^4 + (1-x)^4 + 2x^2(1-x)^2 - 2x^2(1-x)^2 = \\ &= (x^2 + (1-x)^2)^2 - 2(x^2 - x)^2 = (2(x^2 - x) + 1)^2 - 2(x^2 - x)^2 = \\ &= 2(x^2 - x)^2 + 4(x^2 - x) + 1 = \\ &= 2(x^2 - x + 1)^2 - 1. \end{aligned}$$

Ясно, что минимум исходного выражения достигается при достижении минимального значения положительного выражения $g(x) = x^2 - x + 1$, т. е. при $x = \frac{1}{2}$, $y_{\min} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$.

Способ 2. Воспользуемся симметрической заменой. Пусть $t = x - 0{,}5$, $y = (t + 0{,}5)^4 + (0{,}5 - t)^4$. Тогда $y = (t + 0{,}5)^4 + (t - 0{,}5)^4$ или $y = 2t^4 + 3t^2 + \frac{1}{8}$. Снова сделаем замену $b = t^2 \geqslant 0$ и рассмотрим функцию $y = 2b^2 + 3b + \frac{1}{8}$ при $b \geqslant 0$. Ясно, что $y \geqslant \frac{1}{8}$. Можно заметить, что при такой замене функция стала чётной, т. е. параллельный перенос вдоль оси абсцисс обнаружил наличие вертикальной оси симметрии графика функции.

IV.15. а), ж), з) *Указание.* Доказать по определению, что функции возрастают на $\boldsymbol{R}$.

б), в), и), м) *Указание.* Рассмотреть функции на промежутках монотонности.

д), к) *Указание.* Использовать свойства монотонных функций.

н) *Замечание.* Задача иллюстрирует тот факт, что сумма не являющихся строго монотонными на $\boldsymbol{R}$ функций может являться строго монотонной.

IV.16. б) $y = \left|\{x\} - \frac{1}{2}\right|$. в) $y = \{x\}$ или $y = (\{x\})^2$.

г) $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \in \boldsymbol{Z}, \\ -2^x, & x \notin \boldsymbol{Z}. \end{cases}$

IV.17. а) Можно. б) Можно. **Решение.** Если $x_1 < x_2$ и x_1 принадлежит первому промежутку, а x_2 не принадлежит первому, но принадлежит второму, то $f(x_1) < f(2) < f(x_2)$.

в) Нельзя. *Замечание.* Во втором издании будут исправлены промежутки в задании [0; 2] и [2; 3]. г) Нельзя. **Решение.** В качестве примера можно взять функцию $f(x) = x$ на первом из промежутков и функцию $f(x) = x - 10$ на втором промежутке.

IV.18. а) $f(x) = 1{,}5x$, $g(x) = x$. б) $f(x) = x$, $g(x) = 1{,}5x$. в) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = 2x - |x|$. г) $f(x) = 2x - |x|$, $g(x) = 2x + |x|$.

IV.19. $y = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ или $y = \left\{\dfrac{1}{x}\right\}$.

IV.20. Примером может служить функция Дирихле.

IV.21. в) *Указание.* См. задачу IV.19.

IV.23. *Указание.* В этих задачах необходимо провести исследование на монотонность, экстремумы и выяснить множество значений функции, причём можно сообщить учащимся о наличии асимптот у графиков данных функций, не дожидаясь специального разговора о них в учебнике.

а) **Решение.** Рассмотрим $g(x) = x^2 + 1$. Ясно, что при $x \geqslant 0$ функция g возрастает и положительна. Тогда $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$, т. е. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ убывает на неотрицательной полуоси.

Проведя аналогичные рассуждения на отрицательной полуоси, получим, что f возрастает на $(-\infty; 0]$ и, следовательно, $x = 0$ — точка максимума.

Так как $x^2 + 1 \geqslant 1 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{x^2 + 1} \leqslant 1$ и при неограниченном возрастании x значения $f(x)$ становятся сколь угодно малыми, кроме того, $f(0) = 1$. В итоге $E(f) = (0; 1]$. Тогда $y = 0$ — горизонтальная асимптота (рис. 4.8).

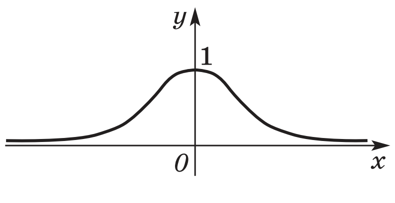


Рис. 4.8

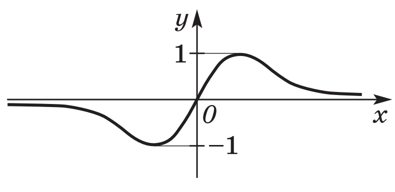


Рис. 4.9

Замечание. Эта кривая носит имя «кривая Аньези» по имени итальянской женщины-математика Марии Аньези (1718—1799), а площадь подграфика функции равна π.

б) **Решение**. Пусть $0 \leqslant x_1 < x_2$. Рассмотрим разность

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2x_1}{x_1^2 + 1} - \frac{2x_2}{x_2^2 + 1} =$$

$$= \frac{2(x_1x_2^2 + x_1 - x_2x_1^2 - x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = \frac{2(x_1x_2 - 1)(x_2 - x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}.$$

Ясно, что если $0 \leqslant x_1 < x_2 < 1$, то $f(x_1) - f(x_2) < 0$, а если $1 \leqslant x_1 < x_2$, то $f(x_1) - f(x_2) > 0$. Поэтому на множестве $[0; 1]$ функция возрастает, а на множестве $[1; +\infty)$ убывает. Значит, $x = 1$ — точка максимума. Аналогичные рассуждения проводятся на промежутке $(-\infty; 0]$.

При неограниченном возрастании x значение функции $f(x)$ становится сколь угодно малым, т. е. $y = 0$ — горизонтальная асимптота. Множество значений можно определить из схематически построенного графика (рис. 4.9) на промежутке $[-1; 1]$. Но можно поступить и так. Заметим, что при $x \geqslant 0$ выполняется $2x \leqslant x^2 + 1$ (неравенство Коши), т. е. $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$. Такие же рассуждения можно провести и для $x \leqslant 0$.

в) **Решение**. При неограниченном возрастании x значение функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ неограниченно возрастает и стремится к x, так как слагаемое $\dfrac{1}{x}$ становится сколь угодно малым, а при сколь угодно малых значениях аргумента сумма $x + \dfrac{1}{x}$ становится сколь угодно большой. Отсюда следует, что $y = x$ — это наклонная асимптота, а $x = 0$ — вертикальная. Также известно, что $\left| x + \dfrac{1}{x} \right| \geqslant 2$ и минимальное значение достигается при $x = 1$. Теперь можно «прикинуть» график на положительной полуоси.

Кроме того, можно заметить, что это нечётная функция. Поэтому график симметричен относительно начала координат (рис. 4.10). Конечно, исследовать на монотонность можно как в задаче IV.23, *б*, но целесообразнее ограничиться наглядными соображениями.

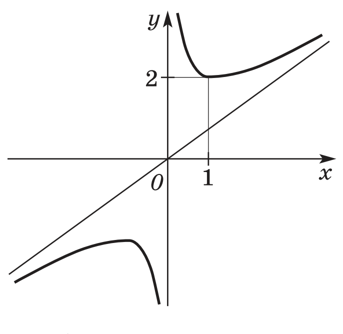


Рис. 4.10

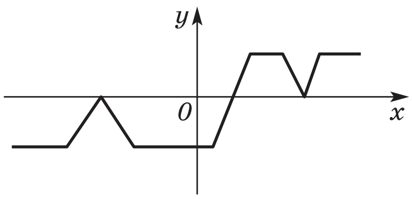


Рис. 4.11

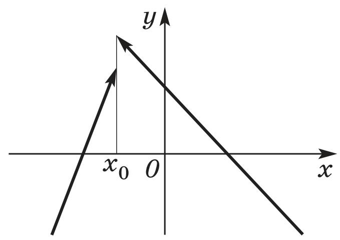


Рис. 4.12

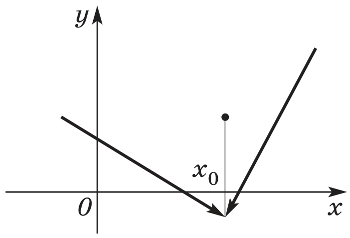


Рис. 4.13

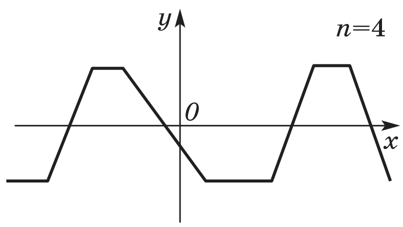


Рис. 4.14

IV.24. а) $f(x) = D(x) - \frac{1}{2}$, где $D(x)$ — функция Дирихле. б) $f(x) = x(1 - D(x))$.

IV.25. Да. См. рисунок 4.11.

IV.26. а) **Решение.** Возьмём любое $\delta > 0$, такое, что $\delta < a$, $\delta < b$. Тогда для любого $x \neq x_0$, $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ либо $x \in (x_0 - a;\ x_0)$, либо $x \in (x_0;\ x_0 + b)$. В первом случае $f(x) < f(x_0)$, так как функция f возрастает на промежутке $(x_0 - a;\ x_0)$, во втором случае $f(x) < f(x_0)$, так как функция f убывает на промежутке $[x_0;\ x_0 + b)$. Таким образом, для любого $x \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$.

б) Нет. *Указание.* См. рисунок 4.12.

IV.27. а) $y = 0$ при $x \neq x_0$ и $y = 1$ при $x = x_0$.

б) Привести пример нельзя. **Решение.** В этом случае функция возрастала бы на промежутках $(x_0 - a;\ x_0)$ и убывала бы на промежутке $[x_0;\ x_0 + b)$, и в силу задачи IV.26 имела бы в этой точке минимум (рис. 4.13).

IV.28. Да. **Решение.** Пусть график функции f (рис. 4.14) состоит из чередующихся горизонтальных и наклонных отрезков, причём число наклонных отрезков равно n и каждый из них пересекает ось OX. Тогда каждый из n корней уравнения $f(x) = 0$ будет точкой минимума функции $f^2(x)$.

IV.29. г) **Решение.** Функция f определена всюду, и поэтому условие симметричности $D(f)$ для неё выполнено. Однако $f(1) = 3$ и $f(-1) = 1$, т. е. $f(1) \neq f(-1)$ и $f(1) \neq -f(-1)$.

Замечание. Ссылка на то, что выражения для $f(x)$ и $f(-x)$ «разные», поэтому «$f(-x) \neq f(x)$», ничего не доказывает. Во-первых, совсем разные по своему внешнему виду выражения могут задавать одну и ту же функцию (например, $\sqrt{x^2} = |x|$); во-вторых, предложение «$f(x) \neq f(-x)$» является предикатом с переменной x, и его истинность или ложность зависит от значения x (например, при $x = 0$ $f(x) = f(-x)$). Утверждение о том, что условие чётности не выполняется, заключается в истинности высказывания, являющегося отрицанием предыдущего: $\exists x \in D(f)$: $f(-x) \neq$ $\neq f(x)$. Таким образом, чтобы опровергнуть условие чётности или нечётности, нужно доказать существование соответствующего значения x (например, указать конкретное такое значение).

IV.30. в) **Решение**. Пусть f — чётная, g — нечётная функции и пусть $D(f) \cap D(g) \neq \varnothing$. Рассмотрим функцию $h(x) = f(x)\,g(x)$. Ясно, что $D(h)$ симметрична относительно нуля. Тогда $\forall x \in D(h)$ $h(-x) = f(-x)\,g(-x) = -f(x)\,g(x)$ в силу нечётности g. Тогда h — нечётная функция. Сумма и разность функций f и g, вообще говоря, являются функциями общего вида, но могут и быть чётными только в том случае, когда заданная в условии нечётная функция одновременно является чётной (см. задачу IV.34).

IV.31. Решение. Ясно, что если $x \in Q$, то $-x \in Q$ и если $x \notin Q$, то и $-x \notin Q$. Тогда $D(-x) = \begin{cases} 1, & -x \in Q, \\ 0, & -x \notin Q, \end{cases}$ т. е. функция Дирихле чётная.

IV.32. а), б), в), е) Чётная. *Указание.* Проверяется непосредственно (см. IV.30). г) Нечётная. д) **Решение**. Можно воспользоваться уже доказанными свойствами: $xf(x)$ — нечётная функция, так же как и $x^2g(x)$ (произведение нечётной на чётную). Значит, их сумма — нечётная функция.

IV.33. а) $f(x) = b$ — чётная, $f(x) = kx$ — нечётная. **Решение**. Пусть f — чётная функция. Тогда $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $f(-x) =$ $= f(x)$ ($D(f) = \boldsymbol{R}$ — симметрична относительно 0), т. е. $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $-kx + b = kx + b$. Значит, $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $2kx = 0$, тогда $k = 0$, $b \in \boldsymbol{R}$.

Для нечётности необходимо и достаточно $b = 0$, $k \in \boldsymbol{R}$, так как $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $kx + b = kx - b$, т. е. $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $0x = -2b$.

б) **Решение**. Пусть f — нечётная функция. Тогда $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $-f(x) = f(-x)$ ($D(f) = \boldsymbol{R}$ симметрична относительно 0), т. е. $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $ax^2 + bx + c = -ax^2 + bx - c$. Значит, $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $ax^2 + c = 0$. Пусть $x = 0$. Тогда $c = 0$ и $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $ax^2 = 0$. Отсюда следует, что $a = 0$. Заметим, что функция f оказалась линейной функцией вида $y = bx$, а этот случай рассмотрен в задаче IV.33, *а*. Следовательно, квадратичная функция при любых $a \neq 0$, $b \in \boldsymbol{R}$, $c \in \boldsymbol{R}$ не является нечётной. Исследование на чётность проводится аналогично. Получим $a \neq 0$, $b = 0$, $c \in \boldsymbol{R}$. Квадратичную функцию можно представить в виде суммы соответственно чётной и нечётной функций $y = ax^2 + c$ и $y = bx$.

IV.34. Решение. Ясно, что должно быть выполнено условие симметричности области определения относительно точки 0. Кроме того, должны быть выполнены одновременно равенства $f(x) = -f(-x)$ и $f(x) = f(-x)$ для любого x из области определения. Откуда следует, что $f(x) = 0$. Итак, одновременно чётными и нечётными являются функции, область определения которых — любое симметричное относительно точки 0 множество и которые тождественно обращаются в 0 на этом множестве.

IV.35. а) Нет. **Решение.** Рассмотрим а) Пусть f — чётная функция, возрастающая на $\boldsymbol{R}$. Рассмотрим $x_0 > 0$, тогда $-x_0 < 0$. Так как f возрастает на $\boldsymbol{R}$, то $f(-x_0) < f(x_0)$ в силу того, что $-x_0 < x_0$. Но f — чётная функция, и, следовательно, $f(-x_0) = f(x_0)$. Получили противоречие. б) Да. Например, $y = -x^3$. в) Нет. *Указание.* Решение аналогично решению задачи IV.35, *а*.

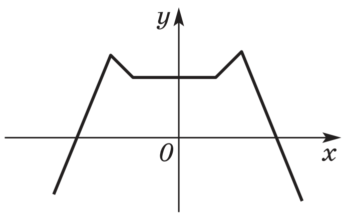


Рис. 4.15

IV.36. 0. **Решение.** Понятно, что $f(0) = 0$, так как $f(-0) = -f(0)$. Но $f(-0) = f(0)$ в силу того, что $-0 = 0$.

IV.37. а) Да, например $y = x^2$. б) *Указание.* См. рисунок 4.11. в) Да, например $y = ||x| - 1|$ (рис. 4.15).

IV.38. а) $f(x) = x^2 - 4|x|$. б) $f(x) = x(|x| - 4)$. **Решение.** Пусть $x \geqslant 0$. Так как f — нечётная функция, то $f(-x) = -f(x)$, т. е. $f(x) = x^2 + 4x$, $x < 0$.

IV.39. Решение. Точки оси абсцисс, симметричные относительно точки a, имеют координаты $a + x$ и $a - x$, и график симметричен относительно прямой $x = a$, если в этих точках функция принимает одинаковые значения, т. е. выполняется равенство $f(a + x) = f(a - x)$. Заменив в этом равенстве x на $x - a$, получим $f(x) = f(2a - x)$. Таким образом, данное условие можно переформулировать: прямая $x = a$ является осью симметрии графика функции f в том и только в том случае, когда для любого x из её области определения выполняется равенство $f(2a - x) = f(x)$ (рис. 4.16).

IV.40. Решение. График функции f симметричен относительно точки плоскости $Z(a; b)$, если точки, симметричные относительно этой точки (рис. 4.17), обе принадлежат или не принадлежат графику, т. е. $y = f(x) \Leftrightarrow t = f(z)$.

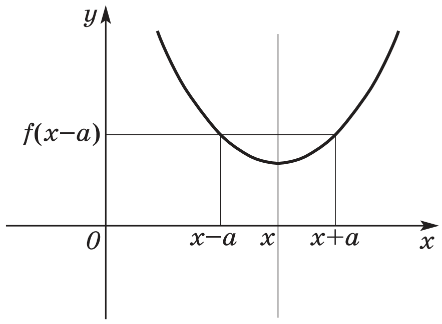


Рис. 4.16

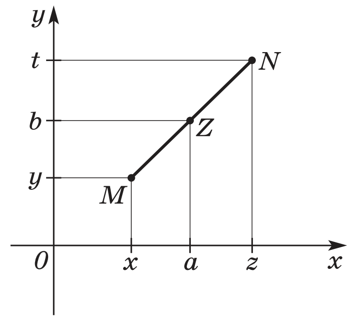


Рис. 4.17

Прежде всего следует выяснить связи между координатами точек $M(x;\ y)$ и $N(z;\ t)$, симметричными относительно точки z. На рисунке 4.17 видно, что точка a — середина отрезка оси абсцисс между точками x и z, а точка b — середина отрезка оси ординат между точками y и t. Значит, $a = \dfrac{x+z}{2}$ и $b = \dfrac{y+t}{2}$. Откуда $z = 2a - x$ и $t = 2b - y$. Тогда $t = f(z) \Leftrightarrow 2b - y = f(2a - x) \Leftrightarrow y = 2b - f(2a - x)$, а равенства $y = 2b - f(2a - x)$ и $y = f(x)$ равносильны, если выполняется (естественно, в области определения функции f) тождество $f(x) = 2b - f(2a - x)$. Откуда, заменив x на $x + a$, получим требуемое.

IV.41. а) $x = 2$.

б) $x = 3$. **Решение.** Пусть $f(x) = (x - 3)^4 + 2(x - 3)^2 + 5$. Тогда $f(x + 3) = x^4 + 2x^2 + 5$ — чётная функция, имеющая вертикальную ось симметрии — ось OY. Ясно, что параллельный перенос на вектор $\vec{s}(3;\ 0)$ сохранит свойство графика функции f обладать вертикальной осью симметрии.

г) $x = \dfrac{b-a}{2}$. **Решение.** Так как $D(y) = [-a;\ b]$, то из соображений симметрии уравнение оси симметрии может иметь вид $x = \dfrac{b-a}{2}$. Проверим условие: $\forall x \in [-a;\ b]$ выполняется $f(x) = f\left(2\dfrac{b-a}{2} - x\right)$, т. е.

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{2\frac{b-a}{2} - x + a} + \sqrt{b - (b - a - x)},$$

откуда

$$\sqrt{a+x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{b-x} + \sqrt{a+x},$$

что верно.

д) Ось OY (в силу чётности).

IV.42. а) (1; –2). **Решение.** Сразу догадаться «сдвинуть» график не просто. Будем находить точку $(a; b)$ — центр симметрии исходя из условия: $\forall x \in \boldsymbol{R}\ f(2a - x) + f(x) = 2b$, т. е. $\forall x \in \boldsymbol{R}\ (2a - x)^3 - 3(2a - x)^2 + x^3 - 3x^2 = 2b$. Значит, $\forall x \in \boldsymbol{R}\ (6a - 6)x^2 + (12a - 12a^2)x + 8a^3 - 12a^2 = 2b$, что будет выполнено при $a = 1$ и $b = -2$. А тогда точка (1; –2) будет центром симметрии. Это приводит к мысли о том, что если рассмотреть функцию $g(x) = f(x + 1) + 2$, где $f(x) = x^3 - 3x^2$, то получим, что функция $g(x) = x^3 - 3x$ нечётная и, следовательно, точка (0; 0) — центр симметрии её графика.

Замечание. На это рассуждение полезно обратить внимание, так как задачи *б* и *г* решаются «сдвигом до нечётности».

б) *Указание.* $g(x) = f(x + 3) + 6$; $g(x) = x^3 + 3x$ — нечётная функция.

в) (–1; 0). *Указание.* Так как $D(f) = \boldsymbol{R}\backslash\{0; -2\}$, то, если существует центр симметрии, значит он должен совпадать с серединой отрезка [0; –2] в силу симметрии. Тогда «подозреваемая точка» (–1; 0). Легко проверить, что $g(x) = f(x + 1)$, где $y = f(x)$, — нечётная функция. $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

г) *Указание.* $g(x) = f(x - 2) + 2$. Тогда $g(x) = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt[3]{x + 1}$ и легко проверяется, что g — нечётная функция.

д) *Указание.* Решение аналогично решению задачи IV.42, *в*, но «подозреваемый» центр симметрии при проверке не подходит.

IV.43. Решение. Рассмотрим многочлен третьей степени

$$ax^3 + bx^2 + cx + d =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)x + d - \frac{b^3}{27a^2} =$$
$$= a\left(x + \frac{b}{3a}\right)^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)\left(x + \frac{b}{3a}\right) + \frac{b^3 - 3abc}{9a^2} + d,$$

и если осуществить параллельный перенос на вектор $s\left(-\dfrac{b}{3a}; \dfrac{3abc - b^3}{9a^2} - d\right)$, то получим функцию $g(x) = ax^3 + \left(c - \dfrac{b^2}{3a}\right)x$, являющуюся нечётной, а значит, имеющую центр симметрии.

IV.44. а) Да. **Решение.** $\{x + 1\} = x + 1 - [x + 1]$. В задаче IV.1, *в* было доказано, что $[x + 1] = [x] + 1$. Можно по индукции доказать, что $[x + n] = [x] + n$, $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда

$\forall x \in \boldsymbol{R}$ $\{x+1\}+\{5(x+1)\} = x+1-[x+1]+5x+5-[5x+5] = x+1-[x]-1+5x+5-[5x]-5 = x-[x]+5x-[5x] = \{x\}+\{5x\}$. Функция периодическая.

б) *Указание.* Из задачи IV.44, *а* следует, что

$$\frac{\{x+1\}}{2+\{x+1\}^2} = \frac{\{x\}}{2+\{x\}^2}.$$

в) *Указание.* Так как $\left\{\frac{x}{2}+1\right\} = \left\{\frac{x}{2}\right\}+1$, то можно сделать замену $\frac{x}{2} = t$, тогда $\{t+1\} = \{t\}+1$. Далее как в задаче IV.44, *а*.

IV.45. а) $f(2) = f(1) = 0$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$, $f\left(-15\frac{1}{3}\right) = f\left(-16+\frac{2}{3}\right) = f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{9}$.

б) *Указание.* До функции с периодом 1 достроить невозможно, так как значения функции, например на [0; 1], не совпадают со значениями на [1; 2].

IV.46. а) **Решение.** $f(x+2T) = \dfrac{1}{f(x+T)} = f(x)$. Для построения примера функцию f зададим на промежутке $[0;\ T)$ произвольно с условием $f(x) \neq 0$. Тогда на промежутках вида $[2nT;\ (2n+1)\ T)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ положить $f(x) = f(x-2nT)$, а на промежутках вида $[(2n-1)\ T;\ 2nT)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ положить $f(x) = \dfrac{1}{f(x-(2n-1)T)}$.

б) *Указание.* $f(2x+T) = \dfrac{f(x+T)+a}{bf(x+T)-1} = \dfrac{\dfrac{f(x)+a}{bf(x)-1}+a}{b\dfrac{f(x)+a}{bf(x)-1}-1} = \dfrac{f(x)+abf(x)}{1+ab} = f(x)$. Пример строится как в задании *а*.

в) *Указание.* $f(x+3T) = \dfrac{1}{1-f(x+2T)} = \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-f(x+T)}} = \dfrac{1-f(x+T)}{-f(x+T)} = 1-\dfrac{1}{\dfrac{1}{1-f(x)}} = f(x)$. Функцию f на промежутке $[0;\ T)$ можно задать произвольно с условием $f(x) \neq 1$, $f(x) \neq 0$. Далее на промежутках вида $[3nT;\ (3n+1)\,T)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ положить $f(x) = f(x-3nT)$, на промежутках вида $[(3n+1)\,T;$

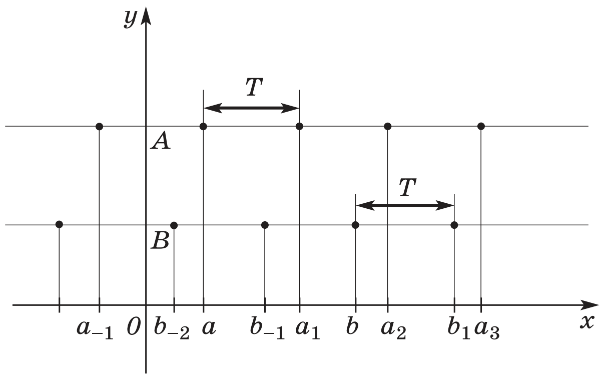


Рис. 4.18

$(3n+2)T)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ положить $f(x) = \dfrac{1}{1 - f(x-(3n+1)T)}$, и на промежутках вида $[(3n-1)T;\ 3nT)$, $n \in \boldsymbol{Z}$ положить $f(x) = 1 - \dfrac{1}{f(x-(3n-1)T)}$.

г) *Указание.* Проверим, что $T = 2a$ — период функции f. Положим $g(x) = f(x) - \dfrac{1}{2}$. Тогда $g(x+a) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - g^2(x)}$; $g(x+2a) = \sqrt{\dfrac{1}{4} - g^2(x+a)} = \sqrt{g^2(x)} = g(x)$ (так как $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $g(x) \geqslant 0$).

IV.47. Решение. Пусть $T > 0$. Рассмотрим числа $a_m = a + mT$ и $b_n = b + nT$, где m, $n \in \boldsymbol{Z}$. Положим $f(a_m) = f(a) = A$ и $f(b_n) = f(b) = B$ при любых целых m и n (рис. 4.18).

Если эти соотношения задают функцию, т. е. не может случиться так, что $x = a_m = b_n$ и $f(x) = A \neq f(x) = B$, то эта функция будет периодической с наименьшим периодом T. Если же для некоторых m и n всё-таки $a_m = b_n$, то исходную функцию (заданную в двух точках) нельзя продолжить до периодической с периодом T. Соотношение $a_m = b_n$ означает, что $a + mT = b + nT$, т. е. $(m-n)T = b - a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow T = \dfrac{b-a}{k}$, $k = m - n$, $k \in \boldsymbol{N}$. Итак, функцию можно продолжить до периодической с наименьшим положительным периодом T при любом $T > 0$, кроме $T = \dfrac{b-a}{k}$, $k \in \boldsymbol{N}$.

IV.48. Решение. Произвольное значение $A \in E(f)$ периодической функции f принимается ею бесконечное множество раз, поэтому уравнение $f(x) = A$ должно иметь бесконечно много корней. С другой стороны, для строго монотонной функции f уравнение $f(x) = a$ имеет не более одного корня. Получили противоречие.

Аналогичные рассуждения показывают, что, например, $f(x) = \frac{10x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1}$ не является периодической, так как, в частности, уравнение $\frac{10x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1$ имеет только два корня.

IV.49. Решение. Пусть функция f имеет разрывы в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Тогда в силу периодичности она имеет разрыв и в точках вида $x_1 + mT,\ x_2 + mT,\ \ldots,\ x_n + mT$, где $m \in \boldsymbol{Z}$. А это противоречит предположению о количестве точек разрыва (например, функция $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)(x+2)}$ не является периодической, так как имеет только две точки разрыва).

Замечание. Обратим внимание, что для решения этой задачи необязательно знать строгое определение точки разрыва, а достаточно понимать, что разрыв функции определяется её поведением на малом промежутке области определения, а потому, коль скоро значения функции повторяются через период, должны повторяться и разрывы.

IV.50. Решение. Пусть T_1 — период функции f, т. е. $\forall x \in D(f)\ \ f(x + T_1) = f(x)$. По индукции можно доказать, что $\forall x \in D(f)\ \ f(x + mT_1) = f(x)$ при $m \in \boldsymbol{Z}$. Аналогично если T_2 — период функции f, то $\forall x \in D(f)\ \ f(x + nT_2) = f(x)$ при $n \in \boldsymbol{Z}$. Теперь $\forall x \in D(f)\ \ f(x + (mT_1 + nT_2)) = f((x + mT_1) + nT_2) = f(x + mT_1) = f(x)$. Осталось заметить, что при $m, n \in \boldsymbol{Z}$ $x + mT_1 \in D(f)$, $x + nT_2 \in D(f)$.

IV.51. *Указание.* Проверяется непосредственно по определению.

Замечание. В решении есть тонкость. $D = D(f(x) + g(x)) = D(f) \cap D(g)$. Может случиться так, что $D = \varnothing$. Тем самым приходим к тому, что нигде не определённую функцию удобно считать периодической, причём её периодом является любое число.

б) $f(x) = \{x\}$, $g(x) = \{2x\} - \{x\}$. Общий период f и g равен 1, а период $f(x) + g(x) = \{2x\}$ равен $\frac{1}{2}$.

IV.52. Решение. Пусть $T_1 > 0$ — период функции f, $T_2 > 0$ — период функции g и $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p}{q}$, где $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда число $qT_1 = pT_2$ — общий период функций f и g.

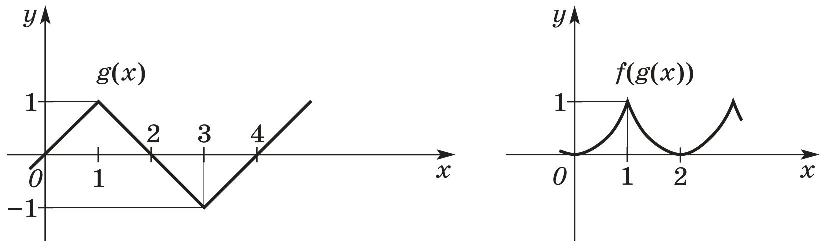


Рис. 4.19

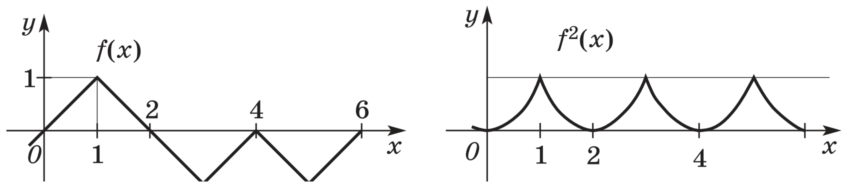


Рис. 4.20

IV.53. *Указание.* Следует из задачи IV.52.

IV.54. а) **Решение.** Пусть $x \in D(f(g))$. Тогда $x \in D(g)$ и, так как g — периодическая функция с периодом T, получаем $x \pm T \in D(g)$ и $g(x - T) = g(x + T) = g(x) \in D(f)$. Тем самым $x \pm T \in D(f(g))$. Кроме того, $\forall x \in D(f(g))$ выполнено $f(g(x + T)) = f(g(x))$.

б) Да. **Решение.** Например, функция с периодом $T = 4$ задана так: $g(x) = \begin{cases} x,\ x \in [0;\ 1] \\ -x + 2,\ x \in [1;\ 3], \\ x - 4,\ x \in [3;\ 4] \end{cases}$ $f(x) = x^2$. Тогда $f(g(x))$ имеет период $T = 2$ (рис. 4.19).

IV.55. а) *Указание.* См. задачу IV.54, *б*.

б) *Указание.* См. рисунок 4.20.

в), г) и д) *Указание.* Решение аналогично решению задачи IV.55, *б*.

IV.56. Нет, неверно. *Указание.* См. рисунок 4.21. Для $x = \dfrac{1}{2}$ такого x_0 не найдётся (отрезки несоизмеримы).

IV.57. **Решение.** Если T период данной функции, то

$$\left\{\frac{0 + T}{a}\right\} = \left\{\frac{T}{a}\right\} = 0,$$

т. е. $T = an$, $n \in \boldsymbol{N}$. Так как $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $\left\{\dfrac{x + |a|}{a}\right\} = \left\{\dfrac{x}{a}\right\}$, то $|a|$ — главный период.

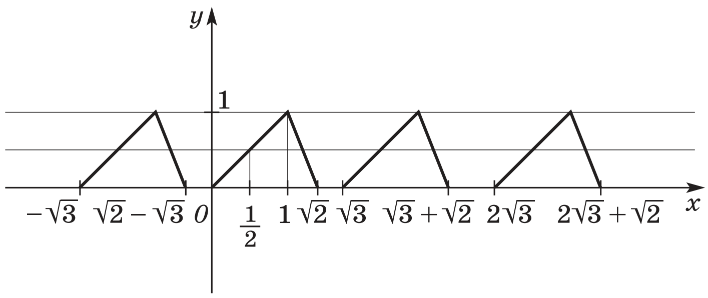


Рис. 4.21

IV.58. а) $\frac{1}{2}$. **Решение.** $3\{2x + 1\} = 3\{2(x + 1)\}$. Так как главный период $y = \{2x\}$ равен $\frac{1}{2}$, то $T = \frac{1}{2}$. б) $T = \frac{3}{2}$.

в), г), д) и е) *Указание.* Задачи опираются на следующее утверждение: если наименьшие положительные периоды периодических функций f и g соизмеримы (т. е. $\frac{T_2}{T_1} \in \boldsymbol{Q}$), то сумма этих функций $f(x) + g(x)$ периодична (см. задачу IV.52.)

Доказательство. $\frac{T_2}{T_1} = \frac{m}{n}$, где m, $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда $mT_1 = nT_2 = T$ — общий период. Заметим, что из утверждения не следует, что он наименьший (см. задачу IV.51). Поэтому это необходимо обосновывать. ■

в) $T = 1$. г) $T = 2$. д) $T = 12$. **Решение.** Докажем, что $T = 12$ главный период. Пусть $\exists T_0$: $0 < T_0 < T$, где T_0 — период данной функции. Тогда

$$\forall x \in \boldsymbol{R} \;\; 4\left\{\frac{x + T_0}{3}\right\} + 3\left\{\frac{x + T_0}{4}\right\} = 4\left\{\frac{x}{3}\right\} + 3\left\{\frac{x}{4}\right\}.$$

Пусть $x = 0$, тогда $4\left\{\frac{T_0}{3}\right\} + 3\left\{\frac{T_0}{4}\right\} = 0$. Так как $\left\{\frac{T_0}{3}\right\}$ и $\left\{\frac{T_0}{4}\right\}$ — неотрицательные числа, то $\left\{\frac{T_0}{3}\right\}$ и $\left\{\frac{T_0}{4}\right\}$ одновременно равны нулю. Значит $\frac{T_0}{3} = m$, $\frac{T_0}{4} = n$, где m, $n \in \boldsymbol{N}$. Тогда $3m = 4n$, что возможно, если $m = 4p$ и $n = 3k$ (3 и 4 взаимно просты). Откуда получим, что T_0 кратно 12, т. е. $T_0 = 12k$, $k \in \boldsymbol{N}$, т. е. $T_0 \geqslant T$. Получили противоречие.

е) $T = 6$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи IV.58, *д*.

ж) **Решение**. Из задачи IV.54 следует $T = 1$. Далее докажем, что $T = 1$ является главным (так же как и в задаче IV.58, *д*). $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $\{x + T_0\}^2 = \{x\}^2$, $0 < T_0 < T = 1$. При $x = 0$ $\{T_0\}^2 = 0$, т. е. $\mathrm{T}_0 \in \boldsymbol{N}$ и $T_0 \geqslant T$. Получили противоречие.

з) $T = 1$. и) $T = 3$.

IV.60. а)—в) *Указание.* Достаточно показать, что уравнение $f(x) = 1$ имеет лишь конечное число решений. г) **Решение**. Если рассмотреть точки разрыва функции: ± 1; $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$; ± 2; $\pm\sqrt{5}$, ..., то можно заметить, что они повторяются не периодически. Это даёт повод «отказать функции» в получении свойства «быть периодической».

д) **Решение**. Пусть $y = \left\{\sqrt{x}\right\}$ — периодическая функция с периодом $T > 0$. Тогда $\forall x \in D(y) = [0; +\infty)$ $x \pm T \in \in D(y)$. Ясно, что $\exists x_0$: $0 < x_0 < T$. Тогда $x_0 - T \notin D(y)$, так как $x_0 - T < 0$.

е) **Решение**. $2\{x\} - x = 2\{x\} - [x] - \{x\} = \{x\} - [x]$. Пусть функция $h(x) = \{x\} - [x]$ периодическая с периодом $T > 0$. Заметим, что $h(0) = 0$. Но тогда и $h(T) = 0$ в силу периодичности, т. е. $\{T\} = [T]$. А это возможно только при $T = 0$. Получили противоречие.

ж) *Указание.* Разобрано в учебнике, см. пример 17.

з) *Указание.* Можно выработать ещё один критерий «отказа в периодичности». Здесь это конечное количество экстремумов.

IV.61. **Решение**. Ясно, что при $a = 1$ функция является периодической, так как $x - [x] = \{x\}$. Покажем, что других a нет. Пусть $a > 1$. Тогда $a = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$ и $(1 + \alpha)x - [x] = x - [x] + \alpha x = \{x\} + \alpha x$. Если предположить, что эта функция периодическая с периодом $T > 0$, то на промежутке $[0; T]$ функции $\{x\}$ и αx ограниченные, т. е. функция $\{x\} + \alpha x$ ограниченная. А значит, $\exists c > 0$: $\forall x_0 \in [x;\ x + T]$ $\left|\{x\} + \alpha x\right| \leqslant c$. Но при росте x выражение αx неограниченно растёт, что приводит к выводу о непериодичности исходной функции. При $a < 1$ выполняется $a = 1 - \alpha$, $\alpha > 0$, и далее рассуждаем аналогично.

IV.62. а) $f(x) = \{x\} - x$ и $g(x) = \{x\} + x$.

б) $f(x) = \dfrac{\{x\}}{1 + x^2}$ и $g(x) = 1 + x^2$.

в) $f(x) = \begin{cases} \{x\},\ x \neq \dfrac{1}{2}, \\ -\dfrac{1}{2},\ x = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

IV.63. а) $f(x) = -\{x\}$ и $g(x) = \{x\} + \{\sqrt{2}x\}$.

б) $f(x) = \dfrac{1}{\{x\}}$ и $g(x) = \{x\}\{\sqrt{2}x\}$.

IV.64. *Указание.* Провести доказательство от противного.

IV.65. а) Да, например, $y = 1 - |x - 1|$, $x \in [0; 2]$ и $T = 4$.

б) Да, например, $y = \dfrac{1}{\{x\}}$.

в) Нет. **Решение.** Пусть для определённости f строго возрастает на $D(f)$. Тогда для $x < x + T$ ($T > 0$, T — период) $f(x) < f(x + T)$. Но в силу периодичности $f(x) = f(x + T)$.

Другое решение связано с тем, что уравнение $f(x) = f(x_0)$ имеет для монотонной функции ровно одно решение, а для периодической — бесконечно много.

г) Нет. **Решение.** Если f обратима, то из того, что $x \neq x + T$, следует $f(x) \neq f(x + T)$, где T — период. Но в силу периодичности $f(x) = f(x + T)$.

IV.66. *Указание.* Достаточно построить указанные графики на множестве X и достроить до периодических, учитывая чётность.

IV.68. Решение. Из условия симметрии графика функции $y = f(x)$ относительно прямых $x = a$ и $x = b$ при каждом x и каждом t из области определения функции имеем $f(a + x) = f(a - x)$, $f(b + t) = f(b - t)$. Положим $b - a = d > 0$; $x = d + t$. Получим $f(a - d - t) = f(a + d + t) = f(a + b - a + t) = f(b + t) = f(b - t)$. Если $t = a - d - z$, $z \in D(f)$, то $f(z) = f(a - d - t) = f(b - t) = f(b - a + d + z) = f(b - a + b - a + z) = f(2(b - a) + z) = f(z + 2d)$. То есть $\forall z \in D(f)$ $f(z) = f(z + 2d)$. Значит, f — периодическая функция с периодом $T = 2(b - a)$.

Замечание. Эти жутковатые формулы выражают известный геометрический факт: композиция осевых симметрий с параллельными осями есть параллельный перенос на вектор, перпендикулярный осям, длина которого равна удвоенному расстоянию между осями. Если график функции имеет две вертикальных оси симметрии, т. е. переходит в себя при симметрии относительно этих осей, то он переходит в себя и при композиции этих симметрий, т. е. при параллельном переносе вдоль оси абсцисс. А периодичность и есть с геометрической точки зрения свойство графика переходить в себя при переносе на ненулевой вектор, параллельный оси абсцисс.

IV.69. Решение. По условию для любого x выполнено $f(a - x) = f(a + x)$ и $f(x_0 + x) + f(x_0 - x) = 2f(x_0)$, где $((x_0; f(x_0))$ — координаты точки, относительно которой симметричен график f). Тогда $f(x + 2(a - x_0)) = f(a - x + 2x_0 - a) = f(x_0 + (x_0 - a)) = 2f(x_0) - f(x_0 + x - x_0) = 2f(x_0) - f(x)$ и $f(x + 4(a - x_0)) = 2f(x_0) - f(x + 2(a - x_0)) = f(x)$, т. е. $4(a - x_0)$ — период функции f.

IV.70. а) Чётная, ограниченная, периодическая функция $y = 1 - |x - 1|$, $0 \leqslant x \leqslant 2$ ($T = 4$). Чётная, неограниченная, периодическая функция $y = \dfrac{1}{1 - x^2}$, $x \in [0; 1)$ ($T = 2$). Нечётная, ограниченная, периодическая функция $y = x$, $x \in [0; 1)$, ($T = 2$).

б) Отрицательной (положительной), ограниченной, периодической функции не существует, так как нечётная функция не может принимать только отрицательные значения ($\forall x \in D(f)$ $f(x) = -f(-x)$).

IV.71. **Решение**. Невозможно, так как если 0 принадлежит области определения нечётной функции f, то $f(0) = 0$.

IV.72. **Решение**. Кроме константы, не имеющей главного периода, ярким примером отсутствия главного периода выступает функция Дирихле. Действительно, сумма двух любых рациональных чисел есть рациональное число, а сумма любого рационального и любого иррационального чисел есть иррациональное число. Поэтому для каждого иррационального числа α, например, при $x = 1$ имеем $D(1 + \alpha) = 0 \neq 1 = D(1)$. Следовательно, среди всех иррациональных чисел нет ни одного, которое было бы периодом функции Дирихле.

При любом x и каждом рациональном числе T справедливо равенство $D(x + T) = D(x)$. Следовательно, любое рациональное, не равное нулю число является периодом функции Дирихле. Но среди всех положительных рациональных чисел нет наименьшего положительного числа; поэтому главного периода функция не имеет.

IV.73. а) *Указание*. Результат был получен в задаче IV.72.

б) Такой функции не существует. **Решение**. Действительно, предположив противное, среди периодов такой функции f мы имели бы иррациональные числа $T_1 = \sqrt{2}$ и $T_2 = 2 - \sqrt{2}$. Но тогда согласно задаче IV.50 их сумма $T_1 + T_2$, т. е. рациональное число 2, являлось бы периодом f, что противоречит условию.

IV.74. Неверно. **Решение**. Контрпримером служит функция $y = [x]$. Пусть $x \in [n; n + 1)$, $n \in \boldsymbol{Z}$. Тогда подходит T: $T \in (n - x; n + 1 - x)$.

IV.75. а) Да, $f(x) = \text{const}$. б) Да, $f(x) = \{x\}$.

§ 26. Композиция функций. Обратная функция

При изучении теоретической части параграфа полезно сопровождать определение композиции поясняющими рисунками. Ведущая роль в параграфе отведена вопросам монотонности композиции и множеству значений композиции функций. Этому посвящены задачи IV.85—IV.92.

Прежде чем перейти к простейшим функциональным уравнениям (задачи IV.93—IV.95), необходимо рассказать учащимся о функциональных уравнениях, т. е. уравнениях, решениями которых является функция. Можно предложить вначале несколько простейших упражнений по этой теме:

1. Пусть $f(2x - 3) = 7x - 2$. Найдите $f(x)$.

2. Пусть $f(x - 2) + 2f(5 - x) = 14 - x$. Найдите $f(x)$.

3. Найдите $f(1)$, если $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $f(x-2) + 2f\left(\frac{x}{3}\right) + f(4 - x) = 2x + 3$.

4. Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, такую что:

а) $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$;

б) $f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ для всех $x \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$;

в) $f\left(\frac{1}{x}\right) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ для всех $x > 0$.

5. Существует ли функция, не равная постоянной, для которой на множестве $\boldsymbol{R}$ выполняется тождество $f\left(\sqrt{2}x\right) = f(x)$? Ответ: да, например, $f(0) = 1$, $f(x) = 0$, при $x \neq 0$.

6. Найдите все функции f с областью определения $\boldsymbol{N}$, для которых $f(2) = 6$ и выполняется тождество $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Ответ: $f(x) = 3x$.

Учащимся необходимо рассказать о нескольких функциональных уравнениях, решениями которых служат известные элементарные функции. Например, решением функционального уравнения $f(x + y) = f(x) + f(y)$ является функция $f(x) = ax$, а решением уравнения $f(xy) = f(x)f(y)$ — функция $f(x) = x^a$.

В качестве проверки освоения понятия композиции функций можно провести следующую самостоятельную работу:

Вариант 1

1. Дана функция $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

а) Найдите множество значений функции $f(-x^2 - 4x - 8)$.

б) Решите неравенство $f(f(x)) < 5$.
в) Найдите промежутки монотонности функции $f(2x^2 + 3x - 1)$.

2. Дана функция $g(x) = \dfrac{2 - 2x}{5x + 3}$.

а) Найдите $h(x) = g(g(x))$.
б) Исследуйте функцию $h(x)$ на чётность.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x) = x^2 + 2x + 8$.

а) Найдите множество значений функции $f(2x^2 - 4x + 5)$.
б) Решите неравенство $f(f(x)) > -7$.
в) Найдите промежутки монотонности функции $f(2x^2 - x - 2)$.

2. Дана функция $g(x) = \dfrac{2x + 3}{5x - 2}$.

а) Найдите $h(x) = g(g(x))$.
б) Исследуйте функцию $h(x)$ на чётность.

При изучении свойств обратной функции главные акценты необходимо сделать на условиях существования обратного отображения, на алгоритме нахождения обратной функции (IV.96—IV.97), а также на взаимном расположении графиков взаимно обратных функций.

Например, если уравнение $f(x) = f^{-1}(x)$ имеет корни, то обязательно хотя бы один из них является абсциссой точки пересечения графиков функций $f(x)$ и $f^{-1}(x)$ с прямой $y = x$.

Предлагаем набор задач, дополняющих материал учебника по теме «Обратная функция».

1. Рассмотрите отображение множества действительных чисел в себя, определяемое следующим образом: $f(x) = \dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$, и $f(0) = 0$. Существует ли у этого отображения обратное?

2. Укажите отрезки действительной прямой, на которых функция $f(x) = x^3 - x^2$ имеет обратную.

3. Рассмотрите функцию $f(x) = x + [x]$. Имеет ли она обратную на интервале (100; 101)?

4. Существует ли отрезок, на котором функция Дирихле имеет обратную?

5. Пусть функции f и g отображают множество действительных чисел на себя и имеют обратные. Верно ли, что и их сумма также имеет обратную?

6. Докажите, что функция, обратная к обратимой нечётной функции, также является нечётной. Может ли чётная функция быть обратимой?

7. Пусть чётная функция f на $\boldsymbol{R}$ обратима на промежутках $[0; +\infty)$, $(-\infty; 0]$ и g_1 и g_2 — соответствующие обратные функции. Докажите, что $D(g_1) = D(g_2)$ и $g_1(x) + g_2(x) = 0$ для всех $x \in D(g_1)$.

8. Существует ли обратимая функция f, удовлетворяющая условию $f(x^2) - f^2(x) \geqslant \frac{1}{4}$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$?

9. Продолжите на $\boldsymbol{R}$ функцию $y = 1 - \frac{x}{2}$, определённую на промежутке $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$, так, чтобы полученная функция совпадала со своей обратной.

10. Существует ли обратная для функции $y = \frac{2x}{1 - x^2}$ при $x \in (1; +\infty)$?

11. Функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы на $\boldsymbol{R}$ и взаимно обратны. Будут ли взаимно обратными функции $f(-x)$ и $g(-x)$?

Решения и указания к задачам

IV.77. б) $\varphi(x) = \frac{|x(x-1)|}{2x^2 - 2x + 1}$, $x \neq 1$.

IV.78. б) $\varphi(x) = f(g(h(x)))$. в) $\varphi(x) = h(f(g(h(x))))$.

IV.79. а) $f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$.

IV.81. а) $x - n$. б) x при чётном n; $1 - x$ при нечётном n. в) $2^n x$. г) x^{2^n}. д) $\sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \ldots + \sqrt{1 + x}}}}$ (n знаков радикала). е) $\frac{1}{x}$ при нечётном n; x, $x \neq 0$ при чётных n. ж) $f(f(x)) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{1 - x}} = \dfrac{x - 1}{x}$, $x \neq 1$; $f(f(f(x))) = \dfrac{1}{1 - \dfrac{x-1}{x}} = x$, $x \neq 0$, $x \neq 1$; $f(f(f(f(x)))) = \frac{1}{1 - x} = f(x)$ и т. д. Таким образом, n-кратная композиция f с собой равна $\frac{1}{1 - x}$, $x \neq 0$ при $n = 3k + 1$; $\frac{x - 1}{x}$, $x \neq 1$ при $n = 3k + 2$; x, $x \neq 0$, $x \neq 1$ при $n = 3k$. з) $f(f(x)) = \dfrac{1}{1 + \dfrac{1}{1 + x}} = \dfrac{x + 1}{x + 2}$, $x \neq -1$; $f(f(f(x))) =$ $= \dfrac{1}{1 + \dfrac{x + 1}{x + 2}} = \dfrac{x + 2}{(x + 2) + (x + 1)} = \dfrac{x + 2}{2x + 3}$, $x \neq -1$; $x \neq -2$; $f(f(f(f(x)))) =$

$= \frac{2x+3}{(2x+3)+(x+2)} = \frac{2x+3}{3x+5}$. **Решение.** Обозначим n-кратную композицию f с собой через $f_n(x)$. Докажем, что $f_n(x)$ имеет вид $f_n(x) = \frac{a_n x + a_{n+1}}{a_{n+1}x + a_{n+2}}$, и найдём формулу, по которой можно вычислять a_n. Известно, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, далее $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1+f_n(x)} = \frac{1}{1+\frac{a_n x + a_{n+1}}{a_{n+1}x + a_{n+2}}} = \frac{a_{n+1}x + a_{n+2}}{(a_{n+1}x + a_{n+2}) + (a_n x + a_{n+1})} =$

$= \frac{a_{n+1}x + a_{n+2}}{(a_n + a_{n+1})x + (a_{n+1} + a_{n+2})} = \frac{a_{n+1}x + a_{n+2}}{a_{n+2}x + a_{n+3}}$. Таким образом, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ при $n \geqslant 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, т. е. последовательность представляет собой последовательность Фибоначчи. Итак, $f_n(x) = \frac{a_n x + a_{n+1}}{a_{n+1}x + a_{n+2}}$, где a_k — k-й член последовательности Фибоначчи.

IV.82. а) **Решение.** По условию $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $f(f(x)) = f(x)$, с другой стороны, $f(f(x)) = k(kx+b) + b = k^2x + kb + b$. Это возможно, если $\begin{cases} k^2 = k, \\ kb + b = b, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} k = 0, \\ kb + b = b \end{cases}$ или $\begin{cases} k = 1, \\ kb + b = b. \end{cases}$ Таким образом, либо $f(x) = b$, $b \in \boldsymbol{R}$, либо $f(x) = x$.

б) **Решение.** По условию $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $f(f(x)) = x$, с другой стороны, $f(f(x)) = k(kx+b) + b = k^2x + kb + b$. Это возможно, если $\begin{cases} k^2 = 1, \\ kb + b = 0. \end{cases}$ Тогда либо $f(x) = x$, либо $f(x) = b - x$, $b \in \boldsymbol{R}$.

IV.83. а) $x \geqslant -1$. б) **Решение.** Область определения исходной функции $D(f) = [1; +\infty)$. Найдём $D(f_2)$:

$$\sqrt{x-1} - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 2.$$

Пусть теперь известно, что область определения функции $f_n(x)$ — промежуток $[a_n; +\infty)$. Так как $f_{n+1}(x) = f_n\left(\sqrt{x-1}\right)$, то область определения $f_{n+1}(x)$ можно найти из условия $\sqrt{x-1} \geqslant a_n$, откуда $x - 1 \geqslant a_n^2$ и $x \geqslant a_{n+1} = a_n^2 + 1$. Таким образом, $D(f_n) = [a_n; +\infty)$, где последовательность $\{a_n\}$ задана рекуррентно: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ при $n \geqslant 1$.

д) $D(f_n) = \{x\colon x \in \boldsymbol{R},\ x \notin B_n\}$, где $B_n = \left\{-1;\ -2;\ -\frac{3}{2};\ -\frac{5}{3};\right.$ $\left.-\frac{8}{5};\ \ldots;\ b_n\right\}$ — множество чисел вида $b_n = -\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}$, где $\{a_n\}$ — последовательность Фибоначчи.

IV.84. Необходимое и достаточное условие: $E(f) \subseteq D(g)$. Достаточное (но не необходимое) условие совпадения $E(g)$ и $E(g(f(x)))$: $D(g) \subseteq E(f)$. *Замечание.* Можно отметить, что множества значений функций $g(x)$ и $g(f(x))$ не всегда совпадают $\left(\text{например, } g(x) = x,\ f(x) = \sqrt{x}\right)$.

IV.85. а), б) 1) **Решение.** Пусть $x_1 < x_2$. Тогда по условию $0 < f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow f^2(x_1) < f^2(x_2)$ (по свойствам неравенств). Следовательно, функция f^2 возрастает на $\boldsymbol{R}$. Если изъять требование «положительности», то для контрпримера подходит $y = x$. 2), 3) *Указание.* Решение аналогично решению 1.

в) Пусть функция f строго возрастает и отрицательна на $\boldsymbol{R}$. Тогда функция f^2 строго убывает на $\boldsymbol{R}$.

IV.86. а) Возрастает. б) Убывает. в) Не является строго монотонной. г) Убывает.

IV.87. а) **Решение.** Представим исходную функцию как композицию функций $f(x) = x^2 + 2x$ и $g(x) = x^2 - 6x + 1$, получим $\varphi(x) = g(f(x))$. Функция f возрастает на $[-1; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; -1]$ и $E(f) = [-1; +\infty)$, а функция g возрастает на $[3; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; 3]$. Выясним, когда выполнено неравенство $x^2 + 2x \geqslant 3$. Решив неравенство, получим $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant -3. \end{array}\right.$ По теореме о монотонности композиции получим (рис. 4.22), что φ возрастает на промежутках $(-\infty; -3]$ и $[1; +\infty)$ и убывает на отрезке $[-3; 1]$.

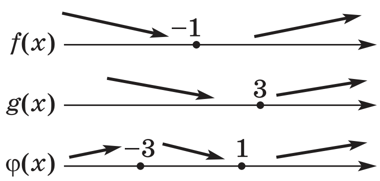


Рис. 4.22

б) **Решение.** Функция преобразуется к виду $\varphi(x) = (x + 1)^4$, откуда ясно, что φ возрастает на $[-1; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; -1]$.

в) Убывает на промежутках $\left(-\infty; -3-\sqrt{5}\right]$ и $\left[-3; -3+\sqrt{5}\right]$; возрастает на промежутках $\left[-3-\sqrt{5}; -3\right]$ и $\left[-3+\sqrt{5}; +\infty\right)$. *Указание.* Задача решается аналогично задаче III.87, *а*, если привести функцию к виду $x(x + 2)(x + 4)(x + 6) = (x^2 + 6x)(x^2 + 6x + 8) = (x^2 + 6x)^2 + 8(x^2 + 6x)$.

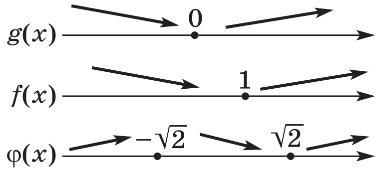


Рис. 4.23

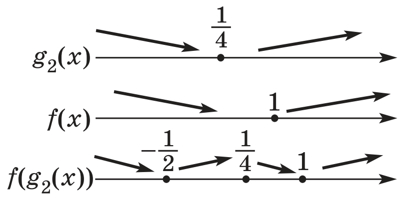


Рис. 4.24

IV.88. а) $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = 0$; $x_3 = 1$. б) $x_1 = 1$; $x_2 = 0$; $x_3 = -2$. в) $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_3 = 2$. г) $x_1 = 0$; $x_2 = -\sqrt{2}$; $x_3 = \sqrt{2}$. д) $x_1 = 2$; $x_2 = 1{,}5$; $x_3 = 0{,}5$.

IV.89. Решение. Пусть $g(x) = x^2 - 1$, тогда g убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; +\infty)$ и $E(g) = [-1; +\infty)$. Решим неравенство $x^2 - 1 \geqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant \sqrt{2}, \\ x \leqslant -\sqrt{2} \end{array}\right.$ (рис. 4.23). Тогда по теореме о монотонности композиции φ возрастает на $\left[\sqrt{2}; +\infty\right)$ и на $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right]$ и убывает на $\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

IV.90. а) **Решение.** Рассмотрим функцию $f(g_1(x)) = 4x^2 + 8x + 3$. Она является квадратичной функцией, возрастающей на $[-1; +\infty)$ и убывающей на $(-\infty; -1]$. Точка $x = -1$ — точка минимума и $E(f(g_1(x))) = [-1; +\infty)$.

По условию $f(g_2(x)) = (2x^2 - x)^2 - 2(2x^2 - x)$. Рассмотрим функцию $g_2(x) = 2x^2 - x$, она возрастает на $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$ и убывает на $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right]$, причём $E(g_2) = \left[-\frac{1}{8}; +\infty\right)$. Функция $f(x) = x^2 - 2x$ возрастает на $[1; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; 1]$. Заметим далее, что $2x^2 - x \geqslant 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geqslant 1, \\ x \leqslant -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ (рис. 4.24).

Рассмотрим множество A тех значений x, на котором функция g возрастает и при этом на множестве $g(A)$ возрастает функция f. По теореме о монотонности композиции функция $f(g_2(x))$ будет возрастать на множестве A. Таким множеством является луч $[1; +\infty)$.

Кроме того, функция $f(g_2)$ возрастает на таком множестве B, на котором функция g убывает и функция f убывает на множестве $g(B)$. Таким множеством является отрезок $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$.

Аналогично функция $f(g_2)$ убывает на луче $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right]$ и на отрезке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$. Точки $x = -\frac{1}{2}$ и $x = 1$ — точки минимума функции, точка $x = \frac{1}{4}$ — точка максимума функции. Для отыскания нижней границы множества значений достаточно сравнить значения $f\left(g_2\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = -1$ и $f(g_2(1)) = -1$.

Верхней же границы не существует, так как внешняя функция квадратичная и неограниченно растёт при неограниченном росте аргумента. Тогда $E(f(g_2(x)) = [-1; +\infty)$.

Замечание. Можно заметить, что если осуществить параллельный перенос графика на вектор $\vec{s}\left(-\frac{1}{4}; 0\right)$, то функция станет чётной. Поэтому неудивительно, что значения $f\left(g_2\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ и $f(g_2(1))$ совпали.

Исследуем функцию

$$f(g_3(x)) = \left(\frac{1}{x^2 + 2x + 4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{x^2 + 2x + 4}\right).$$

Для этого установим промежутки монотонности функции $g_3(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 4}$. Так как $x^2 + 2x + 4 = (x + 1)^2 + 3 \geqslant 3$ и $y = x^2 + 2x + 4$ возрастает на $[-1; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; -1]$, то g_3 убывает на $[-1; +\infty)$ и возрастает на $(-\infty; -1]$, а $E(g_3(x)) = \left(0; \frac{1}{3}\right]$. Так как f убывает на $(-\infty; 1] \supset \left(0; \frac{1}{3}\right]$, то по теореме о монотонности композиции $f(g_3(x))$ убывает на $(-\infty; -1]$ и возрастает на $[-1; +\infty)$, и, следовательно, $x = -1$ — точка минимума. Для нахождения множества значений функции достаточно рассмотреть квадратичную функцию $y = t^2 - 2t$, $t \in \left(0; \frac{1}{3}\right]$. Ясно, что множество значений этой функции на $\left(0; \frac{1}{3}\right]$ совпадает с исходной. Тогда $E(f(g_3(x))) = \left[-\frac{5}{9}; 0\right)$. Как и в предыдущем случае, если

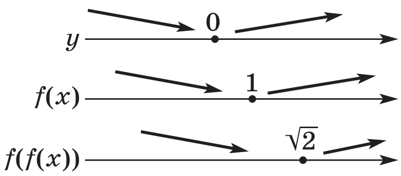


Рис. 4.25

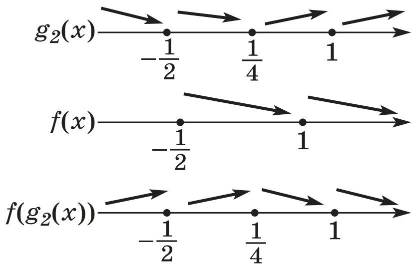


Рис. 4.26

осуществить параллельный перенос графика функции на вектор $\vec{s}(-1;\ 0)$, то получим чётную функцию

$$y = \left(\frac{1}{x^2 + 3}\right)^2 - \frac{2}{x^2 + 3}.$$

Установим теперь $f(f(x)) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)$. Пусть $h(x) = ((x - 1)^2 - 1)^2 - 2((x - 1)^2 - 1)$. Тогда $h(x + 1) = (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1)$ — чётная функция, и следовательно, можно рассмотреть только $x \geqslant 0$. Функция $y = x^2 - 1$ возрастает на этом множестве и принимает значения $E(y) = [-1;\ +\infty)$. Функция $f(x) = x^2 - 2x$ возрастает на $[1;\ +\infty)$ и убывает на $(-\infty;\ 1]$. Решим неравенство при $x \geqslant 0$: $x^2 - 1 \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant \sqrt{2}$. По теореме о монотонности композиции (рис. 4.25) функция $y = h(x + 1)$ убывает на $\left[0;\ \sqrt{2}\right]$ и возрастает на $\left[\sqrt{2};\ +\infty\right)$ и $x = \sqrt{2}$ — точка минимума, а в силу чётности функция $y = h(x + 1)$ возрастает на $\left[-\sqrt{2};\ 0\right]$ и убывает на $\left(-\infty;\ -\sqrt{2}\right]$, и $x = -\sqrt{2}$ — точка минимума. $E(h(x + 1)) = E(h(x)) = \left[h\left(\sqrt{2}\right);\ +\infty\right) = [-1;\ +\infty)$ в силу неограниченности сверху. Таким образом, функция $f(f(x))$ возрастает на $\left[-1 - \sqrt{2};\ -1\right]$ и на $\left[-1 + \sqrt{2};\ +\infty\right]$ и убывает на $\left(-\infty;\ -1 - \sqrt{2}\right]$ и на $\left[-1;\ -1 + \sqrt{2}\right]$, $x = -1 \pm \sqrt{2}$ — точки минимума и $E(f(f(x))) = [-1;\ +\infty)$.

б) *Указание.* Решается аналогично задаче IV.90, *а*.

в) **Решение.** Преобразуем функцию f к виду $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x - 1}$, а тогда $f(g_1(x)) = 1 + \dfrac{1}{x + 1}$, $x \neq 1$. Тогда функция $f(g_1(x))$ убывает на $(-\infty;\ -1)$ и на $(-1;\ +\infty)$, а $E(f(g_1)) = (-\infty;\ 1) \cup (1;\ +\infty)$. Экстремумов нет.

Обратим внимание, что $f(g_2(x)) = 1 + \dfrac{2}{(2x^2 - x) - 1}$, $D(f(g_2(x))) = \boldsymbol{R} \backslash \left\{1;\ -\dfrac{1}{2}\right\}$. Функция $f(g_2)$ возрастает на

$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ и на $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right]$, а убывает на $\left[\frac{1}{4}; 1\right)$ и на $(1; +\infty)$ (рис. 4.26), при этом $E(g_2(x)) = \left[-\frac{1}{8}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. Точка $x = \frac{1}{4}$ — точка максимума.

Для того чтобы найти множество значений способом, отличным от решения задачи IV.90, *а*, решим уравнение с параметром:

$$a = 1 + \frac{2}{2x^2 - x - 1} \Leftrightarrow a - 1 = \frac{2}{2x^2 - x - 1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a-1)x^2 - (a-1)x - a - 1 = 0.$$

Очевидно, что $x = 1$ и $x = -\frac{1}{2}$ не являются корнями ни при каких значениях a.

Если $a = 1$, то $0x = 2 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. Если $a \neq 1$, то квадратное уравнение имеет корни, если

$$D = (a-1)^2 + 8(a+1)(a-1) =$$
$$= (a-1)(9a+7) \geqslant 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a \geqslant 1, \\ a \leqslant -\frac{7}{9}, \end{array}\right.$$

т. е. $E(f(g_3(x))) = \left(-\infty; -\frac{7}{9}\right] \cup (1; +\infty)$.

Теперь рассмотрим $f(f(x)) = 1 + \dfrac{2}{\frac{x+1}{x-1} - 1} = x, \quad x \neq 1.$

Ясно, что композиция возрастает на $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, экстремумы отсутствуют и множество значений $\boldsymbol{R}\backslash\{1\}$. Отметим, что точка $x = 1$ выкалывается, поскольку не принадлежит области задания внутренней функции, несмотря на то, что получившееся для $f(f(x))$ выражение «не запрещает» для x значение 1.

IV.91. б) **Решение**. Рассмотрим функции $g(x) = -x^2 + 3x + 3$ и $f(x) = x^2 + 2x$. Тогда $y = f(g(x))$. Рассуждая аналогично задаче IV.90, получим, что функция возрастает на $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ и на $[4; +\infty)$ и убывает на $(-\infty; -1]$ и на $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$. Точки $x = -1$, $x = 4$ — точки минимума, точка $x = \frac{3}{2}$ — точка максимума, множество значений функции $E(y) = [-1; +\infty)$.

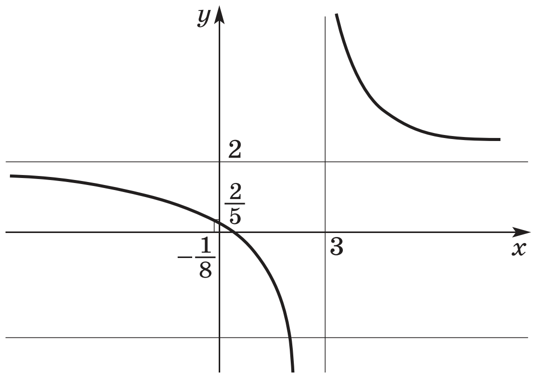


Рис. 4.27

в) Возрастает на $\left[-2-\frac{\sqrt{17}}{2};\ -2\right]$ и на $\left[-2+\frac{\sqrt{17}}{2};\ +\infty\right)$ и убывает на $\left(-\infty;\ -2-\frac{\sqrt{17}}{2}\right]$ и на $\left[-2;\ -2+\frac{\sqrt{17}}{2}\right]$, $x = -2 \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$ — точки минимума, $x = -2$ — точка максимума. $E(y) = \left[-\frac{9}{8};\ +\infty\right)$.

г) **Решение**. Рассмотрим $g(x) = 2x^2 - x$ и $f(x) = 2 + \frac{5}{x-3}$. Тогда $y = f(g(x))$. Ясно, что g возрастает на $\left[\frac{1}{4};\ +\infty\right)$ и убывает на $\left(-\infty;\ \frac{1}{4}\right]$, а f убывает на $(-\infty;\ 3)$ и на $(3;\ +\infty)$. Кроме того, $2x^2 - x > 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{3}{2}, \\ x < -1. \end{array}\right.$ Значит, по теореме о монотонности композиции функция $y = f(g(x))$ возрастает на $(-\infty;\ -1)$ и на $\left(-1;\ \frac{1}{4}\right]$ и убывает на $\left[\frac{1}{4};\ \frac{3}{2}\right)$ и на $\left(\frac{3}{2};\ +\infty\right)$; $x = \frac{1}{4}$ — точка максимума. $E(g) = \left[-\frac{1}{8};\ +\infty\right)$. Тогда рассмотрим $\varphi(t) = 2 + \frac{5}{t-3}$, $t \geqslant -\frac{1}{8}$ (рис. 4.27). Ясно, что $E(y) = E(\varphi) = \left(-\infty;\ \frac{2}{5}\right] \cup (2;\ +\infty)$, $t \geqslant -\frac{1}{8}$.

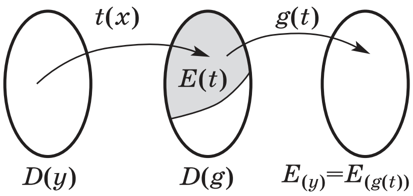


Рис. 4.28

IV.92. *Замечание.* Перед решением задачи полезно прояснить, используя рисунок 4.28, алгоритм нахождения множества значений композиции функций.

а) **Решение.** Пусть $(2x-1)^2=t$ и $t \geqslant 0$. Рассмотрим функцию $g(t)=t^2-t-12$, $t \geqslant 0$. Значит,

$$E(y)=\left[g\left(\frac{1}{2}\right);\ +\infty\right)=\left[-12\frac{1}{4};\ +\infty\right).$$

б) **Решение.** Преобразуем исходное выражение:

$$(x-1)^4-x^2+2x-7=(x-1)^4-(x-1)^2-6.$$

Тогда, как и в задаче IV.92, *а*, $E(y)=\left[-6\frac{1}{4};\ +\infty\right)$.

в) **Решение.** Преобразуем исходное выражение:

$$(x^2-x-3)^2-2(x^2-x)+1=(x^2-x-3)^2-2(x^2-x-3)-5.$$

Заменяя $x^2-x-3=t$, $t \geqslant -\frac{13}{4}$ и рассматривая $g(t)=t^2-2t-5$, $t \geqslant -\frac{13}{4}$, где $t_{\min}=1 \in \left[-\frac{13}{4};\ +\infty\right)$, получим $E(y)=[-6;\ +\infty)$.

г) **Решение.** Преобразовав исходное выражение $(x+1)^2(x^2+2x)=(x+1)^2((x+1)^2-1)=(x+1)^4-(x+1)^2$, мы снова приходим к задаче IV.92, *а*. $E(y)=\left[-\frac{1}{4};\ +\infty\right)$.

д) **Решение.** Преобразовав

$$(x+4)^2(x+10)(x-2)=(x+4)^2(x^2+8x-20)=$$
$$=(x+4)^2(x^2+8x+16-36)=(x+4)^4-36(x+4)^2,$$

получим $E(y)=[-324;\ +\infty)$.

е) **Решение.** Вновь преобразуем исходное выражение:

$$x(x+4)(x+5)(x+9)=(x^2+9x)(x^2+9x+20)=$$
$$=(x^2+9x)^2+20(x^2+9x)=(x^2+9x)^2+20(x^2+9x)+100-100=$$
$$=(x^2+9x+10)^2-100 \geqslant -100,$$

причём $y=-100$ принимается, так как уравнение $x^2+9x+10=0$ имеет корни. $E(y)=[-100;\ +\infty)$.

ж) **Решение.** Аналогично, «правильно перемножив», получим $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = (x^2-5x+4)(x^2-5x+6) = (x^2-5x+4)^2 + 2(x^2-5x+4) + 1 - 1 = (x^2-5x+5)^2 - 1 \geqslant -1$ и $E(y) = [-1, +\infty)$ по тем же причинам, что и в задаче IV.92, *е*.

з) **Решение.** Так как $\forall x \in \boldsymbol{R}\backslash\{0\}$ $\left|x + \dfrac{1}{x}\right| \geqslant 2$, необходимо рассмотреть функцию $g(t) = 2(t^2-2) - t - 2$ при $|t| \geqslant 2$, откуда $E(f) = [0; +\infty)$.

и) *Указание.* Задача сводится к задаче IV.92, *з*, если заметить, что $\dfrac{2x^4 + x^3 - 11x^2 + x + 2}{x^2} = 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x + \dfrac{1}{x}\right) - 11$. $E(y) = [-9; +\infty)$.

IV.93. *Замечание.* Задачу рекомендуется предложить учащимся в качестве домашнего задания, которое можно сделать, используя предварительно разобранный пример в учебнике.

а) $f(x) = \dfrac{x+4}{3x-2}$ при $x \notin \left\{\dfrac{2}{3}; 3\right\}$. б) $f(x) = \dfrac{2x - x^2}{(x-1)^2}$, $x \neq 1$.

IV.94. а) **Решение.** Вычитая из первого равенства второе, получим

$$3g(x-1) = x - 2x^2 \Leftrightarrow g(x-1) = \frac{-2x^2 + x}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow g(x-1) = -\frac{2(x-1)^2 + 3(x-1) + 1}{3}. \qquad (*)$$

Последнее равенство выполняется для любого действительного x. Тогда $g(x) = -\dfrac{2x^2 + 3x + 1}{3}$. Подставив (*) в первое уравнение системы, получим $f(2x+1) = \dfrac{2x^2 + 2x}{3}$. Пусть $t = 2x + 1$. Тогда $x = \dfrac{t-1}{2}$, откуда $f(t) = \dfrac{t^2-1}{6}$, и, поскольку задание функции не зависит от того, какой буквой обозначена переменная, получаем $f(x) = \dfrac{x^2-1}{6}$.

б) **Решение.** Заметим, что $x \neq 1$. Сделаем замену $\dfrac{x}{x-1} = t$. Тогда $x = \dfrac{t}{t-1}$ однозначно выражается через t. Перепишем второе уравнение системы:

$$f(t) + g(t) = \frac{t}{t-1},$$

и, так как функция не зависит от того, какой буквой обозначена переменная, получаем $f(x) + g(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Аналогично поступая с первым уравнением, получим $f(x) + 2g(x) = x - 1$. Теперь, вычитая из первого уравнения второе, получим $g(x) = x - 1 - \dfrac{x}{x-1}$. В итоге $g(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 1}{x-1}$, $x \neq 1$. А если обе части второго уравнения умножить на 2 и вычесть первое, то $f(x) = \dfrac{2x}{x-1} - (x-1)$. В итоге $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{1-x}$, $x \neq 1$.

в) **Решение**. Делая замену в первом уравнении $2x + 2 = t \Leftrightarrow x = \dfrac{t-2}{2}$, а во втором $x - 1 = t \Leftrightarrow x = t + 1$. Рассуждая аналогично, как в задачах IV.94, *а* и *б*, получим $\forall x \in \boldsymbol{R}$ $\begin{cases} f(x) + 2g(2x+3) = \dfrac{x-4}{2}, \\ f(x) + g(2x+3) = 2x + 2. \end{cases}$ В итоге $\begin{cases} f(x) = \dfrac{7x+12}{2}, \\ g(x) = -\dfrac{3x+7}{4}. \end{cases}$

г) **Решение**. Проводим вначале действия такие же, как и в задаче IV.94, *в*. Имеем $\begin{cases} f(x) + \dfrac{x-3}{4} g\left(\dfrac{3x-1}{2}\right) = 2, \\ f(x) + g\left(\dfrac{3x-1}{2}\right) = \dfrac{x+1}{2}. \end{cases}$ (*)

Вычитая из первого уравнения системы второе, получаем

$$\frac{x-7}{4} g\left(\frac{3x-1}{2}\right) = 2 - \frac{x+1}{2},$$

откуда

$$g\left(\frac{3x-1}{2}\right) = \frac{2(3-x)}{x-7}.$$

В итоге $g(x) = \dfrac{8-2x}{x-10}$, $x \neq 10$, а $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 19}{2(x-7)}$, $x \neq 7$ можно найти таким же способом. Для этого надо умножить второе уравнение на $\dfrac{x-3}{4}$ и вычесть из полученного уравнения первое.

IV.95. а) $f(x) = \dfrac{2 - x^2}{3x}$, $x \neq 0$. б) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$, $x \neq 0;\ 1$.
в) $f(x) = \dfrac{4x - 2}{x - 1}$ при $x \notin \left\{\dfrac{1}{2};\ 1\right\}$. г) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ при $x \notin \left\{-2;\ 0;\ \dfrac{1}{3}\right\}$.

IV.96. *Замечание.* В задаче полезно заранее обсудить основные шаги в процессе нахождения обратной функции:

1) выяснить, обратима ли функция на данном множестве;

2) выразить x через y, учитывая при этом условие на x и как следствие этого условие на y;

3) записать полученную формулу, заменяя формально x на y.

б) **Решение.** Функция $y = \dfrac{3x + 1}{4}$ строго возрастает на своей области определения, поэтому существует обратная к ней функция, областью определения которой является множество значений исходной функции.

$$\begin{cases} y = \dfrac{3x + 1}{4}, \\ -1 \leqslant x \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4y - 1}{3}, \\ -1 \leqslant x \leqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Для нахождения множества значений исходной функции можно либо использовать следующую цепочку равносильных неравенств:

$$-1 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow -3 \leqslant 3x \leqslant 6 \Leftrightarrow -2 \leqslant 3x + 1 \leqslant 7 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leqslant \frac{3x + 1}{4} \leqslant \frac{7}{4},$$

либо решить неравенство относительно переменной y, полученное из системы (1). Итак, $f^{-1}(x) = \dfrac{4x - 1}{3}$, $D(f) = \left[-\dfrac{1}{2};\ \dfrac{7}{4}\right]$.

е) **Решение.** Обратной функции нет, так как $f(-1) = f(1) = 0$, т. е. функция не является взаимно-однозначной.

ж) **Решение.** На $[0;\ 1]$ функция строго монотонна, значит, она обратима:

$$\begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2}, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{1 - x^2}, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{1 - y^2}, \\ 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Тогда $f^{-1}(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

з) **Решение.** Так как на $(-2;\ -\infty)$ функция строго монотонна, то существует обратная функция:

$$\begin{cases} y = -(x+2)^2 + 3, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2 = \pm\sqrt{3-y}, \\ y < 3, \\ x > -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{3-y}, \\ y < 3, \\ x > -2, \end{cases}$$

откуда $f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{3-x}$, $x < 3$. и) $f^{-1}(x) = -1 + \sqrt{x-4}$, $x > 4$. *Указание.* Решение аналогично задаче IV.96, *з*.

к) **Решение.** Заметим, что $y = \begin{cases} x^2, \ x \geqslant 0, \\ -x^2, \ x < 0, \end{cases}$ т. е. функция строго возрастает на $\boldsymbol{R}$. Тогда найдём обратную функцию

$$y^{-1} = \begin{cases} \sqrt{x}, \ x \geqslant 0, \\ -\sqrt{-x}, \ x < 0. \end{cases}$$

Замечание. В этом примере для построения графика нет необходимости в «приобретении формулы» для функции f^{-1}. Достаточно воспользоваться симметрией графиков функций f и f^{-1} относительно прямой $y = x$ и элементарными преобразованиями графиков.

л) $f^{-1}(x) = \begin{cases} -1 + \sqrt{x+1}, \ x \geqslant 0, \\ 1 - \sqrt{1-x}, \ x < 0. \end{cases}$ *Указание.* Так как $y = \begin{cases} x^2 + 2x, \ x \geqslant 0, \\ -x^2 + 2x, \ x < 0; \end{cases}$ $y = \begin{cases} (x+1)^2 - 1, \ x \geqslant 0, \\ -(x-1)^2 + 1, \ x < 0 \end{cases}$ и далее, как в задачах IV.96, *з* и *и*.

м) **Решение.** На луче $(0; +\infty)$ функция обратима, так как строго монотонна. Заметим, что $y = \frac{1}{x} - 1 > -1$ при $x > 0$

$$\begin{cases} y = \frac{1-x}{x}, \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx = 1 - x, \\ x > 0, \\ y > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{y+1}, \\ x > 0, \\ y > -1. \end{cases}$$

Таким образом, $f^{-1}(x) = \frac{1}{x+1}$, $x > -1$.

Обратимы на естественной области определения функции в заданиях *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *к*, *л*, так как они строго монотонны.

Функции из пунктов *е*, *ж*, *з*, *и*, *м*, *н*, *о* не являются обратимыми по причине того, что нарушено условие взаимной однозначности, т. е. $\exists x_1, x_2 \in D(y)$: $(x_1 \neq x_2) \wedge (f(x_1) = f(x_2))$.

IV.97. а) **Решение.** Можно поступить так. Сначала, изучив свойства функции $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$, построить её график. Затем отобразить часть графика при $x \leqslant 0$ относительно прямой $y = x$, а потом получить формулу для $f^{-1}(x)$ (см. рис. 4.29). Функция $y = 1 + x^2 \geqslant 1$ и убывает на $(-\infty; 0]$, и является чётной. Тогда $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$ возрастает на $(-\infty; 0]$ и $0 < y \leqslant 1$, так как при $x \to +\infty$ $y \to 0$ (эта функция уже встречалась в задаче IV.23).

$$f^{-1}(x) = -\sqrt{\frac{1}{x} - 1},\ 0 < x \leqslant 1.$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{1 + x^2}, \\ x \leqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + yx^2 = 1, \\ x \leqslant 0, \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{1 - y}{y}, \\ x \leqslant 0, \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{y} - 1}, \\ x \leqslant 0, \\ 0 < y \leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\dfrac{1}{y} - 1}, \\ 0 < y \leqslant 1. \end{cases}$$

б) **Решение.** Рассмотрим $x_1 < x_2 < -1$ и вычислим $f(x_1) - f(x_2)$:

$$\frac{2x_1}{1 - x_1^2} - \frac{2x_2}{1 - x_2^2} = \frac{2(x_1 - x_2) + 2x_1x_2(x_1 - x_2)}{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)} = \frac{2(x_1 - x_2)(1 + x_1x_2)}{(1 - x_1^2)(1 - x_2^2)} < 0,$$

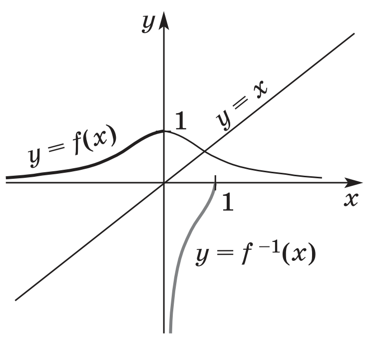


Рис. 4.29

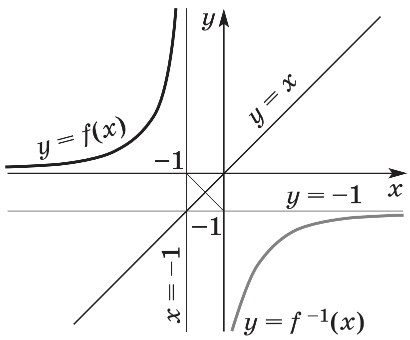


Рис. 4.30

т. е. функция $y = \dfrac{2x}{1 - x^2}$ возрастает на $(-\infty; -1)$ (и, вообще говоря, является нечётной на $D(y)$). Если записать $\dfrac{2x}{1 - x^2} = \dfrac{2}{\dfrac{1}{x} - x}$, то становится видно, что прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота, а при $x \to -1$ (слева) имеем $y \to +\infty$, т. е. прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота. Заметим, что прямая $x = -1$ при симметрии относительно прямой $y = x$ переходит в прямую $y = -1$, а прямая $y = 0$ — в прямую $x = 0$ (рис. 4.30).

Полезно подсчитать значения в паре точек и отобразить их симметрично относительно прямой $y = x$.

Зададим обратную функцию формулой:

$$\begin{cases} y = \dfrac{2x}{1 - x^2}, \\ x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} yx^2 + 2x - y = 0, \\ x < -1, \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + y^2}}{y}, \\ x < -1, \\ y > 0, \end{cases}$$

т. е. $f^{-1}(x) = \dfrac{-1 - \sqrt{1 + x^2}}{x}$, $x > 0$.

Замечание. Целесообразнее в задачах IV.97, *а* и *б* построить график исходной функции, а потом отображать его относительно прямой $y = x$, так как построение графика обратной функции оказывается более трудным. Кроме того, такой подход развивает и геометрическое воображение.

в), г), д) *Указание.* Разобраны в задаче IV.23, *б*. Поэтому по полученным результатам можно изобразить график (с точностью до выпуклости) и для разных участков применить симметрию относительно прямой $y = x$ (рис. 4.31).

в) *Указание.* На $[1; +\infty)$ функция обратима в силу строгой монотонности $f^{-1}(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$, $0 < x \leqslant 1$ (рис. 4.32).

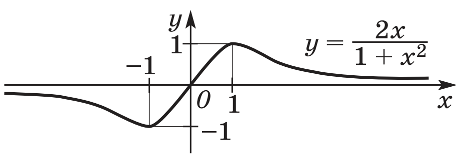


Рис. 4.31

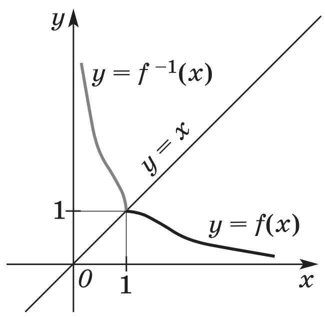


Рис. 4.32

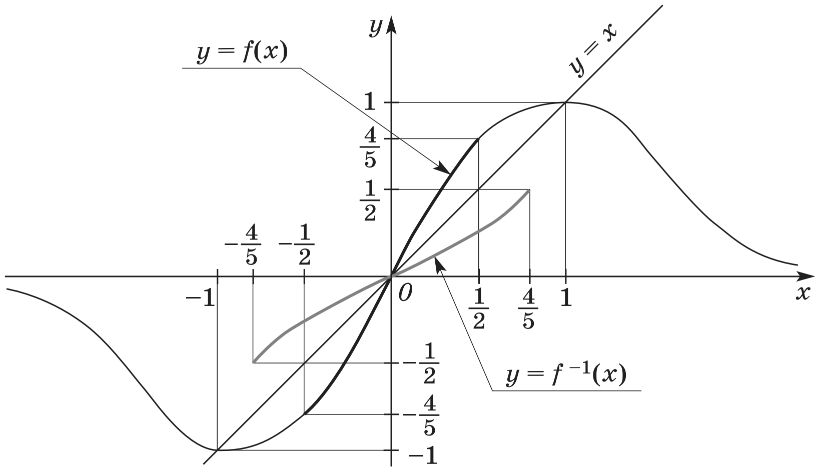


Рис. 4.33

г) **Решение.** На отрезке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ функция обратима и нечётна. Ясно, что обратная функция будет нечётной, хотя это и требует обоснований. Так как этот вопрос «созрел» здесь, то предварительно можно и доказать этот факт, а можно предложить это в качестве отдельной задачи (см. дополнительные задачи). Пусть f — нечётная функция, g — функция, обратная к функции f и $y \in E(f)$. Тогда $g(y) = x$, где $f(x) = y$. Так как $f(-x) = -y$, то по определению обратной функции $g(-y) = -x$. Воспользуемся этим и рассмотрим $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$.

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = -y\left(-\frac{1}{2}\right) \text{ (рис. 4.33).}$$

д) *Указание.* Невозможно, так как не выполнено условие обратимости т. е. $\exists x_1, x_2 \in \boldsymbol{R}: x_1 \neq x_2 \wedge f(x_1) = f(x_2)$.

е) **Решение.** Функция $y = x - \sqrt{x^2 - 1}$ возрастает на $(-\infty; -1]$, так как функция $y = x^2 - 1$ убывает на $(-\infty; -1]$, $y = \sqrt{x}$ возрастает на $[0; +\infty)$ и по теореме о монотонности композиции функция $y = -\sqrt{x^2 - 1}$ возрастает на $(-\infty; -1]$, а сумма двух возрастающих функций на $(-\infty; -1]$ есть возрастающая на этом множестве функция и при $x = -1$ она принимает своё наибольшее значение, равное -1. Тогда существует обратная функция.

Зададим обратную функцию:

$$\begin{cases} y = x - \sqrt{x^2 - 1}, \\ x \leqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \sqrt{x^2 - 1}, \\ x \leqslant -1, \\ y \leqslant -1. \end{cases}$$

Сделаем замену $t = -x$. Тогда $-t - y \geqslant 0$. Значит,

$$-t - y = \sqrt{t^2 - 1} \Leftrightarrow t^2 + 2ty + y^2 = t^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2ty = -y^2 - 1 \Leftrightarrow t = \frac{-y^2 - 1}{2y},$$

т. е. $x = \dfrac{y^2 + 1}{2y}$, откуда $f^{-1}(x) = \dfrac{x^2 + 1}{2x}$ при $x \leqslant -1$. График $f^{-1}(x)$ можно получить из известного уже графика $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$. В самом деле, зная характер монотонности функции f, можно говорить о характере монотонности функции $\dfrac{1}{f}$, если функция f не обращается в ноль. Получим с точностью до выпуклости искомый график (рис. 4.34). Осталось заметить, что $\dfrac{x^2 + 1}{2x} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2x} \to \dfrac{x}{2}$ при $x \to -\infty$ и прямая $y = \dfrac{x}{2}$ является наклонной асимптотой.

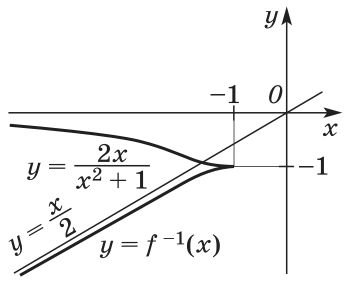


Рис. 4.34

§ 25. Графическое решение уравнений и неравенств. Количество корней уравнения $f(x) = a$

§ 27. Элементарные преобразования графиков функций

Начиная со второго издания параграф, посвящённый графическому решению уравнений и неравенств, располагается после параграфа, посвящённого элементарным преобразованиям графиков функций. Это связано с тем, что изучение этих параграфов удобно объединить.

В задачах IV.100—IV.105 полезно не только строить графики с помощью элементарных преобразований, но и попутно в качестве дополнительного решать вопрос о количестве корней уравнения $f(x) = a$, а также решать с помощью графиков различные неравенства. Учитель на своё усмотрение может дозировать и усложнять те или иные задачи из этого пункта. Отметим, что в учебнике по этой тематике набор задач весьма велик.

Решения и указания к задачам

IV.99. а) $y = 2(x-1)^2 - 1$. б) $y = 2(x-1)^3 - 1$. в) $y = \dfrac{2}{x-1} - 1$.

IV.100. п) **Решение.** Запишем функцию в виде $y = f\left(2\left|x+\dfrac{1}{2}\right|\right)$ и будем действовать по схеме: $\Gamma_{f(x)} \to \Gamma_{f(|x|)} \to \Gamma_{f(2x)} \to \Gamma_{f\left(x+\frac{1}{2}\right)}$ (рис. 4.35).

IV.102. б) *Указание.* Заметим, что $\dfrac{x}{x-1} = 1 + \dfrac{1}{x-1}$. Схема $\Gamma_{f(x)} \to \Gamma_{|f(x)|}$.

г) *Указание.* $\Gamma_{f(x)} \to \Gamma_{f(|x|)} \to \Gamma_{f(x+1)}$. е) *Указание.* $\dfrac{2x-1}{x+2} = 2 - \dfrac{3}{x+2}$.

ж) *Указание.* $\dfrac{x+2}{2x-1} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{x+2}{x-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{\frac{5}{2}}{x-\frac{1}{2}}\right)$.

и) **Решение.** Заметим, что $\left|\dfrac{|x|-1}{2-|x|}\right| = \left|\dfrac{|x|-1}{|x|-2}\right|$. Так как $\dfrac{x-1}{x-2} = 1 + \dfrac{1}{x-2}$, то рассмотрим $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-2}$ и проделаем следующую цепочку преобразований: $\Gamma_{f(x)} \to \Gamma_{|f(x)|} \to \Gamma_{f(|x|)}$ (рис. 4.36).

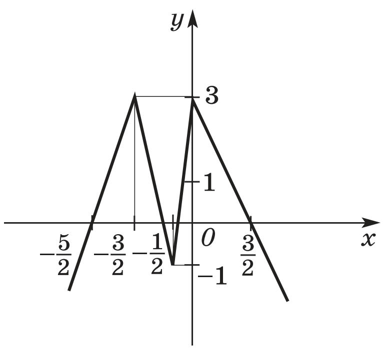


Рис. 4.35

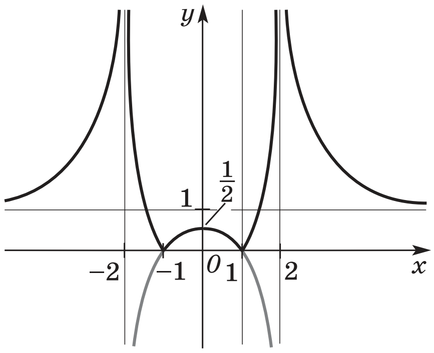


Рис. 4.36

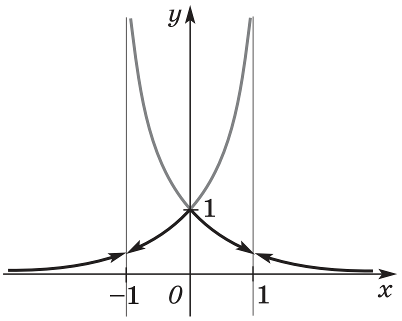


Рис. 4.37

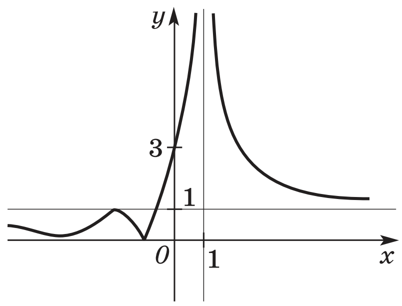


Рис. 4.38

к) **Решение.** При $x \geqslant 0$ имеем $y = \dfrac{1}{x+1}$, $x \neq 1$, а при $x < 0$ получаем $y = -\dfrac{1}{x-1}$, $x \neq -1$ (рис. 4.37).

л) *Указание.* Будем строить график функции $y = \big|2|f(x)| - 1\big|$, где $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ $\left(\text{т. е. } f(x) = 1 + \dfrac{3}{x-1}\right)$ (рис. 4.38).

IV.103. г) **Решение.** Сначала строим график $f(x) = x^2 - 2x$. Далее так как функция f убывает на $(-\infty;\ 0)$ и положительна, то, следовательно, функция $\dfrac{1}{f}$ возрастает и положительна. Видно, что $x = 0$ — вертикальная асимптота. На $(0;\ 1]$ функция f убывает и отрицательна и $f(1) = -1$. Тогда функция $\dfrac{1}{f(x)}$ возрастает и отрицательна, причём $\dfrac{1}{f(1)} = -1$. На промежутке $[1;\ +\infty)$ проводим аналогичные рассуждения (рис. 4.39).

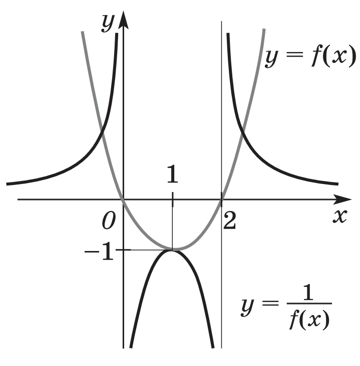


Рис. 4.39

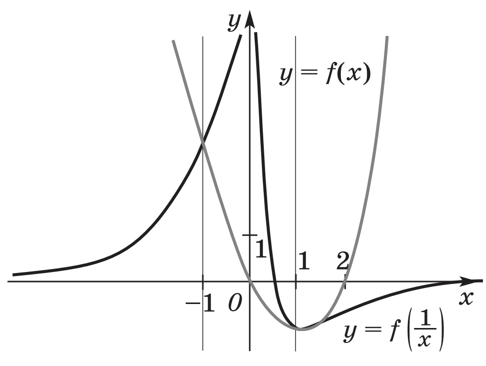


Рис. 4.40

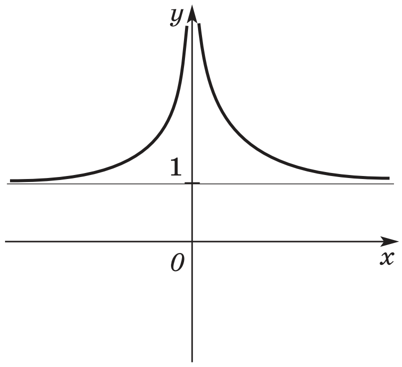


Рис. 4.41

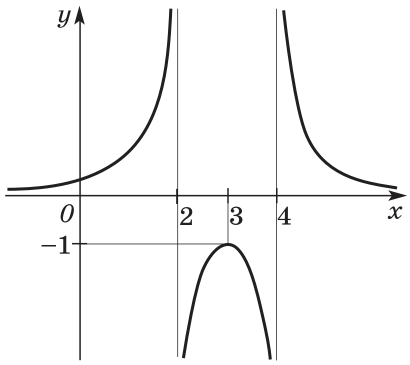


Рис. 4.42

д) **Р е ш е н и е**. Условие можно записать так: $f(x) = x^2 - 2x$. Тогда исходная функция $y = g(x)$, где $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$. Применив соответствующее преобразование, получим искомый график (рис. 4.40).

е) *Указание.* $\frac{1+x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} + 1$. Можно действовать по схеме:

$$\Gamma_{f(x)} \to \Gamma_{\frac{1}{f(x)}} \to \Gamma_{f(x)+1} \text{ (рис. 4.41).}$$

ж) *Указание.* $\frac{1-2x+2x^2}{x^2} = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} + 2$. График исходной функции может быть получен из графика задачи IV.103, *д* сдвигом вниз на 2 вдоль оси ординат.

к) *Указание.* См. рис. 4.42.

л) *Указание.* Так же, как и в задаче IV.103, *д* для $f(x) = x^2 - 6x + 8$ (рис. 4.43).

м) *Указание.* Используя график из задачи IV.103, *к* и действуя по схеме $\Gamma_{f(x)} \to \Gamma_{f(|x|)} \to \Gamma_{f(x)-1} \to \Gamma_{|f(x)|}$, получим требуемое (рис. 4.44).

о) *Указание.* Функция приводится к виду

$$y = \left| \frac{1}{\left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)^2} - 1 \right|.$$

Пусть $f(x) = \left(\frac{1}{2}|x| - 1\right)^2$. Тогда, совершив цепочку преобразований $\Gamma_{f(x)} \to \Gamma_{\frac{1}{f(x)}} \to \Gamma_{f(x)-1} \to \Gamma_{|f(x)|}$, получим требуемое (рис. 4.45).

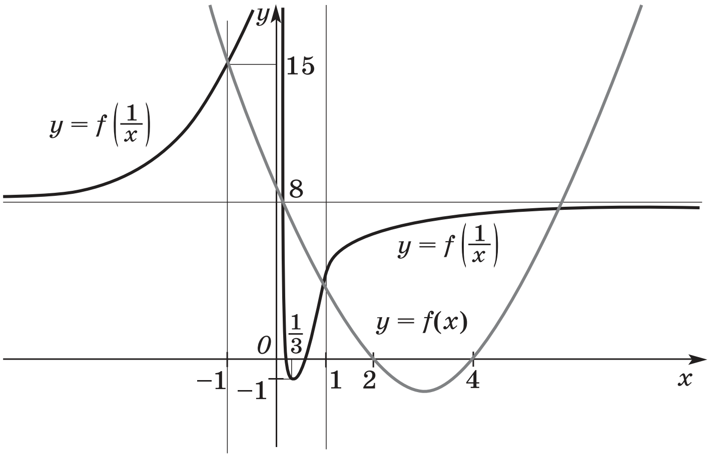


Рис. 4.43

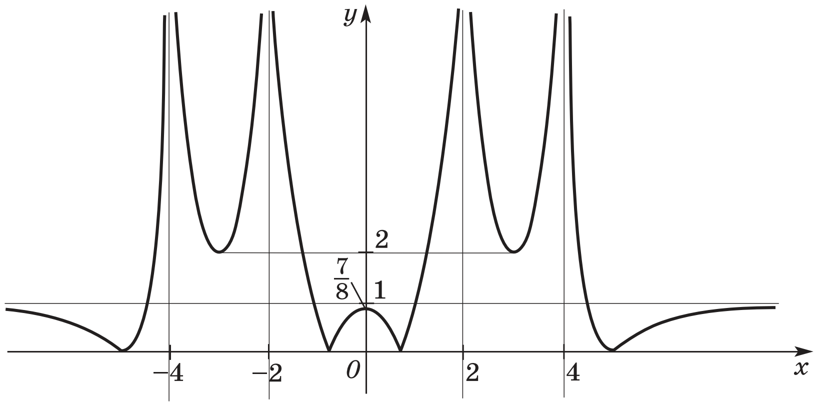


Рис. 4.44

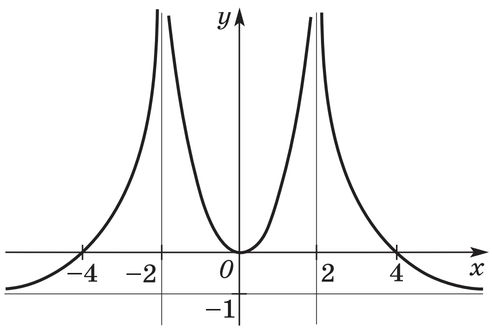


Рис. 4.45

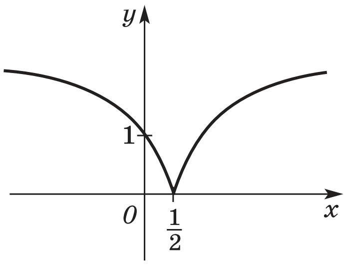


Рис. 4.46

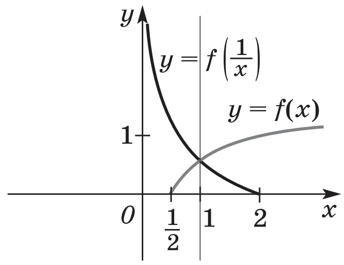


Рис. 4.47

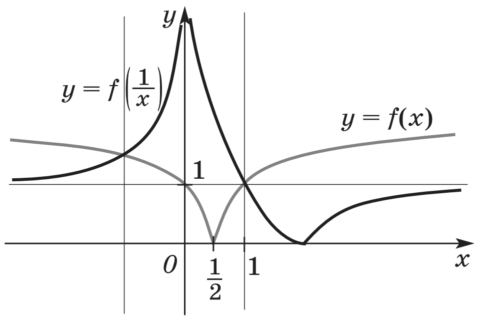


Рис. 4.48

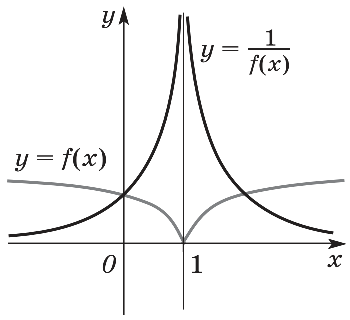


Рис. 4.49

IV.104. м) *Указание.* Заметим, что

$$\sqrt{|2x-1|} = \sqrt{2\left|x-\frac{1}{2}\right|}.$$

Пусть $f(x) = \sqrt{2x}$. Тогда действуем по схеме $\Gamma_{f(x)} \to \Gamma_{f(|x|)} \to$ $\to \Gamma_{f\left(x-\frac{1}{2}\right)}$, получим искомый график (рис. 4.46).

н) *Указание.* Применить преобразование $f\left(\frac{1}{x}\right)$ к функции $f(x) = \sqrt{2x-1}$, учитывая, что $\sqrt{2x-1} = \sqrt{2\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ (рис. 4.47).

о) *Указание.* Преобразование $f\left(\frac{1}{x}\right)$, где функция $y = \sqrt{|2x-1|}$ из задачи IV.104, *м* (рис. 4.48).

п) *Указание.* Преобразование $\frac{1}{f(x)}$ к графику из задачи IV.104, *м* и сдвиг на 1 вниз (рис. 4.49).

IV.105. д) См. рисунок 4.50.

е) *Указание.* Пусть $f(x) = (2x-1)^3 + 1$. Тогда исходная функция $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ (рис. 4.51).

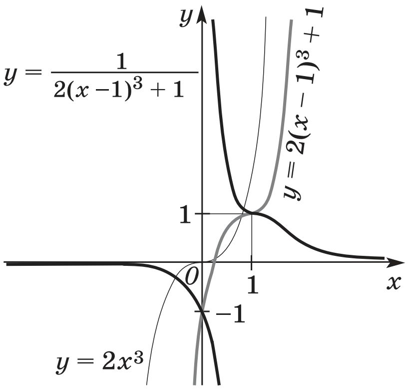


Рис. 4.50

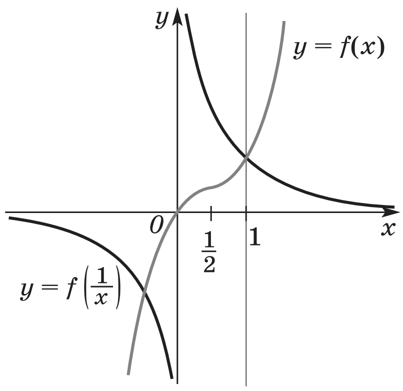


Рис. 4.51

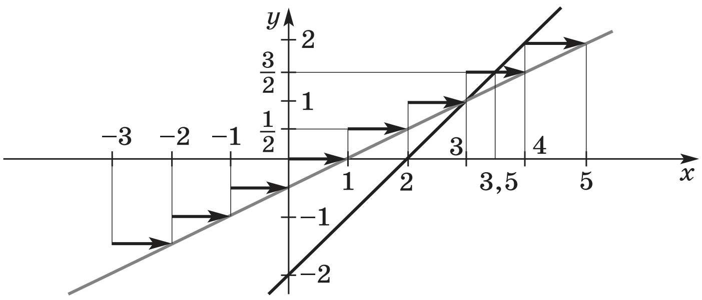


Рис. 4.52

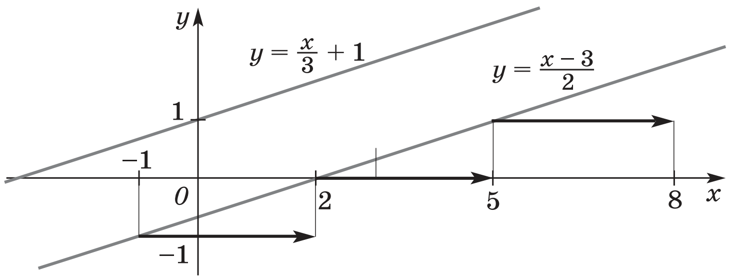


Рис. 4.53

IV.106. а) $x = 3$; $x = 3{,}5$; $x = 4$ (рис. 4.52).

б) *Указание.* Ясно, что пересечений нет, так как «пограничная прямая» для $y = \left[\dfrac{x-2}{3}\right]$ — это $y = \dfrac{x-2}{3}$, которая параллельна прямой $y = \dfrac{x}{3}$ (рис. 4.53).

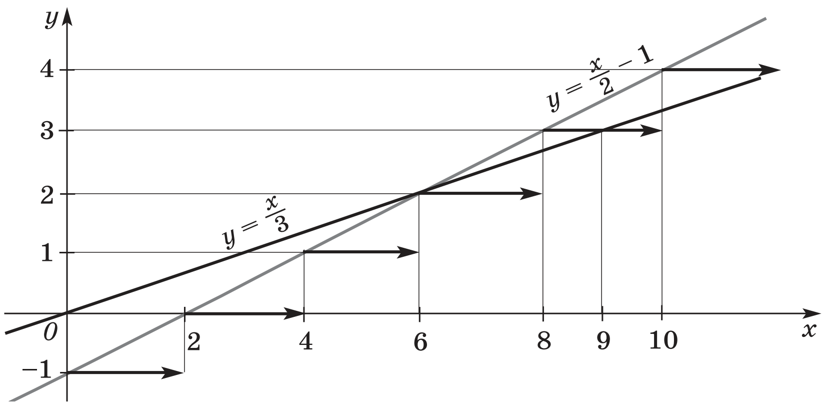


Рис. 4.54

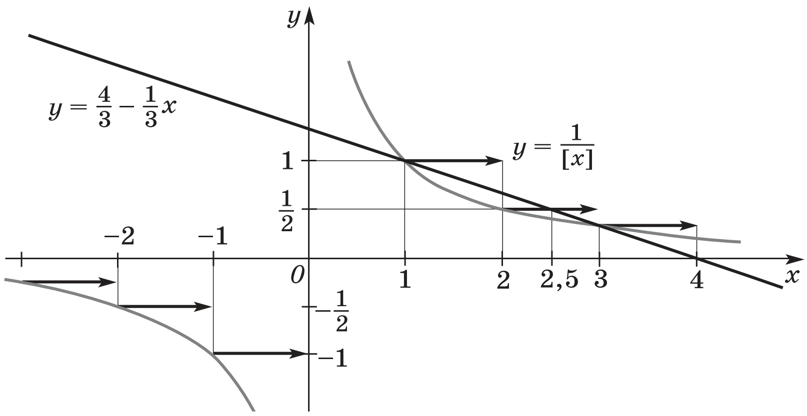


Рис. 4.55

в) $x \in [8;\ 9) \cup [10;\ +\infty)$ (рис. 4.54).

г) $x = 1$; $x = 2{,}5$; $x = 3$ (рис. 4.55). *Указание.* Корень $x = 2{,}5$, вообще говоря, уточняется из уравнения $\frac{4}{3} - \frac{x}{3} = \frac{1}{2}$.

д) *Указание.* $y = \begin{cases} x,\ 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{x}{2},\ 2 \leqslant x < 3, \\ \frac{x}{3},\ 3 \leqslant x < 4, \\ \ldots, \\ \frac{x}{k},\ k \leqslant x < k+1 \end{cases}$ (рис. 4.56),

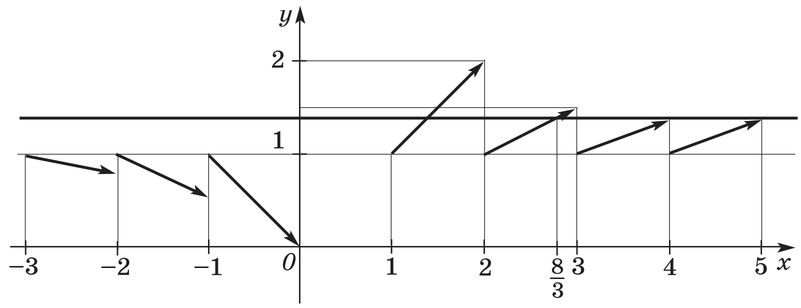


Рис. 4.56

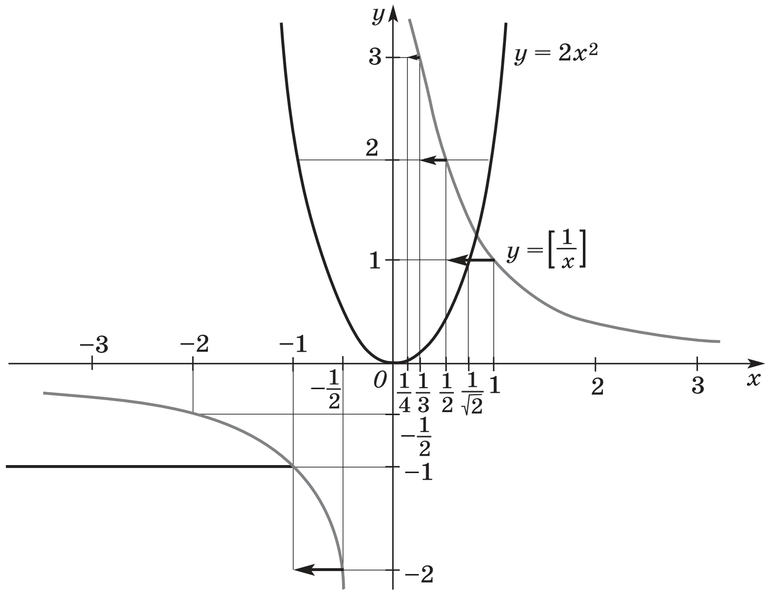


Рис. 4.57

при $0 \leqslant x < 1$ функция не существует. $x \in \left[\dfrac{8}{3}; 3\right)$ (корень $\dfrac{8}{3}$ уточняется как в задаче IV.106, *г*).

е) $x \in \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$. **Решение.** Решив уравнение $2x^2 = 1 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, получим решение $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ уравнения $2x^2 = \left[\dfrac{1}{x}\right]$ (по графику видно, что $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ не подходит) (рис. 4.57). Итак, $x \in \left(0; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$.

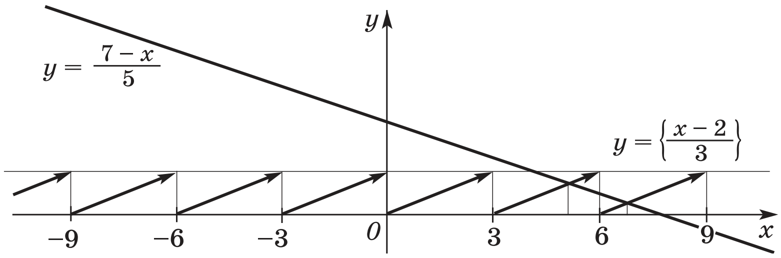


Рис. 4.58

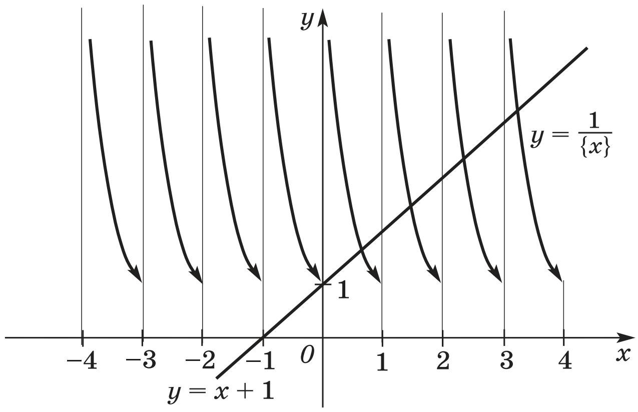


Рис. 4.59

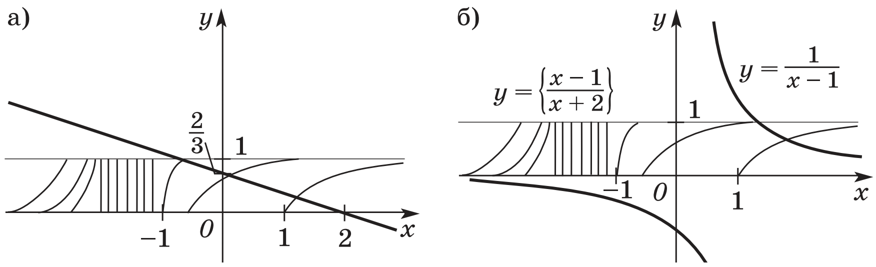


Рис. 4.60

ж) *Указание*. Чтобы «поймать» точки пересечения, необходимо решить уравнения: $\left[\begin{aligned} &\frac{7-x}{5} = \frac{1}{3}x - 1, \\ &\frac{7-x}{5} = \frac{1}{3}x - 2 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &x = \frac{9}{2}, \\ &x = \frac{51}{8}. \end{aligned}\right.$

Теперь легко с помощью графика получить ответ неравенства: $x \in \left[\frac{9}{2};\ 6\right) \cup \left[\frac{51}{8};\ +\infty\right)$ (рис. 4.58).

з) См. рисунок 4.59. и) См. рисунок 4.60.

§ 28. Поведение функции вблизи точек разрыва и в бесконечности. Понятие об асимптотах

Материал этого параграфа является хорошей пропедевтической работой для построения графиков с помощью производной. Требования к глубокому освоению теоретического материала учащимися здесь вряд ли представляются возможными. Необходимо лишь дать основные понятия и отработать их в задачах. Рекомендуем ограничиться двумя задачами из каждого номера. А лучше провести уроки по этой теме, либо работая в группах, либо в виде практических занятий с индивидуальными заданиями. Однако при нехватке времени можно опустить материал данного параграфа.

Решения и указания к задачам

IV.107. а) $y = (1 - x)(x + 1)^2(x - 2)^2$.
б) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2(x+1)^2}$. в) $y = \dfrac{1}{x(x-1)(x+1)^2}$.

IV.108. А — 6. Б — 4. В — 8. Г — 10. Д — 22. Е — 2. Ж — 11. З — 14.

Замечание. Во время беседы с учащимися при выполнении этой задачи рекомендуется поговорить и о том, чем, например, отличается график 14 от графика 15. Можно обсудить с учащимися вопрос о наличии криволинейной асимптоты (по аналогии с прямолинейной асимптотой): для графика 15 это $y = x^2 - 1$, а для графика 14 горизонтальная прямая $y = 1$ является асимптотой. Так же можно обсудить пары графиков: 11 и 12 (один получен из другого преобразованием $f(-x)$); 21 и 22 (график 21 не проходит из соображений знакопостоянства); 6 и 7 (различные промежутки монотонности); 8 и 9 (кратность корня). Конечно метод работы с этой задачей определяет сам учитель (это зависит от уровня класса, наличия времени и т. д.), но можно попробовать предложить, например, к графику З вариант графика 15, а тогда ученики окажутся в роли оппонентов и в ходе обсуждения придут к выводу, что подходит только график 14.

IV.109. а) *Указание.* Ясно, что прямые $x = 1$ и $x = -1$ — вертикальные асимптоты, а прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

б) $x = 0$, $x = -1$, $x = -2$ — вертикальные асимптоты, $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

в) $x = \pm\sqrt{2}$, $x = \pm 2$ — вертикальные асимптоты, $y = 0$ — горизонтальная асимптота. **Решение.** Найдём корни знаменателя и убедимся, что при приближении к ним функция стремится к бесконечности: $6x^2 - 8 - x^4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm\sqrt{2}, \\ x = \pm 2 \end{array}\right.$ — вертикальные асимптоты, $y = 0$ — горизонтальная асимптота.

г) $y = x$ — наклонная асимптота, $x = 0$ — вертикальная.

д) *Указание.* Преобразуем выражение:

$$x + \frac{x^2}{x^2 + 1} = x + 1 - \frac{1}{x^2 + 1}.$$

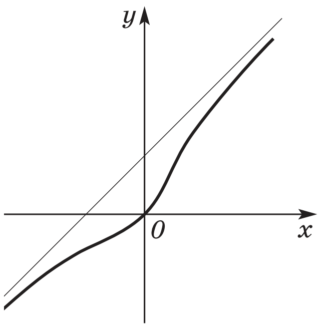


Рис. 4.61

Тогда $y = x + 1$ — наклонная асимптота; вертикальных асимптот нет ($\forall x \in \boldsymbol{R}\ x^2 + 1 \neq 0$) (рис. 4.61).

е) *Указание.* Преобразовав выражение, получим

$$\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} = x - 4 + \frac{11}{x + 2}.$$

Ясно, что $y = x - 4$ — наклонная асимптота, $x = -2$ — вертикальная асимптота.

ж) *Указание.* Из равенства $\frac{2x^4 + x^3 + 1}{x^3} = 2x + 1 + \frac{1}{x^3}$ видно, что прямая $y = 2x + 1$ — наклонная асимптота графика, а прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота графика.

з) *Указание.* Очевидно, что прямая $x = -1$ — вертикальная асимптота. Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \frac{3x + 2}{x^2 + 2x + 1}.$$

Значит, прямая $y = x - 2$ — наклонная асимптота.

и) $y = x$ — наклонная асимптота, вертикальных асимптот нет.

IV.110. а) **Решение.** Преобразуем выражение:

$$\frac{x^3 + 1}{x^2} = x + \frac{1}{x^2}.$$

Понятно, что $y = x$ — наклонная асимптота. При этом график лежит выше прямой $y = x$, так как второе слагаемое положительная величина.

б) **Решение.** Преобразуем выражение:

$$\frac{(x + 1)^3}{(x + 2)^2} = x - 1 + \frac{3x + 5}{(x + 2)^2}.$$

Откуда следует, что $y = x - 1$ — наклонная асимптота. При $x \to +\infty$ график функции лежит выше прямой $y = x - 1$, так как второе слагаемое положительное, а при $x \to -\infty$ — ниже прямой, так как второе слагаемое отрицательное ($3x + 5 < 0$, $(x + 2)^2 > 0$).

в) **Решение**. При $x > -1$ выполнено $y = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$ и поэтому $y = x - 1$ — наклонная асимптота и график к ней приближается сверху при $x \to +\infty$, так как $\dfrac{1}{x+1} > 0$. При $x < -1$ выполнено $y = -x + 1 - \dfrac{1}{x+1}$ и поэтому $y = -x + 1$ — наклонная асимптота, график к ней приближается сверху, так же как при $x < -1$.

IV.111. а) См. рис. 4.62. б) См. рис. 4.63. в) См. рис. 4.64. г) См. рис. 4.65. д) См. рис. 4.66. е) См. рис. 4.67. ж) См. рис. 4.68.

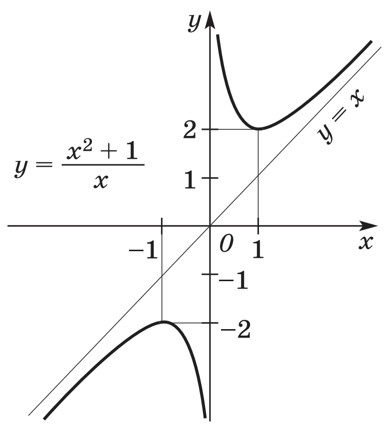


Рис. 4.62

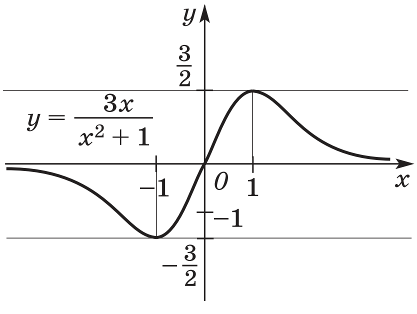


Рис. 4.63

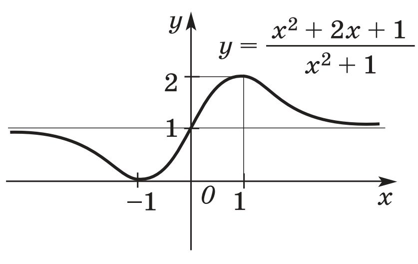


Рис. 4.64

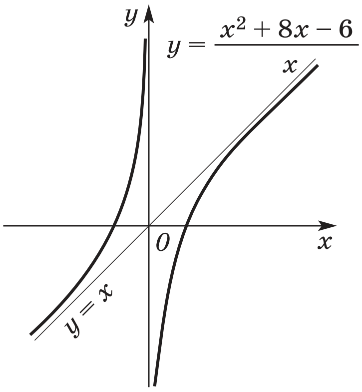


Рис. 4.65

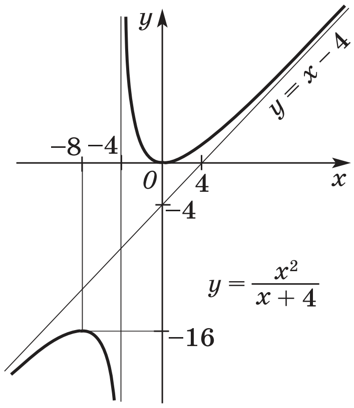


Рис. 4.66

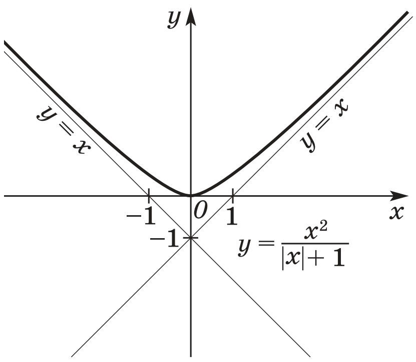


Рис. 4.67

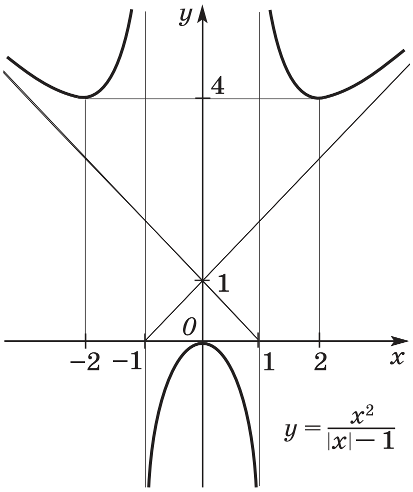


Рис. 4.68

з) **Р е ш е н и е.** Осуществим преобразование:

$$\frac{2 - 4x^2}{1 - 4x^2} = 1 + \frac{1}{1 - 4x^2}.$$

Теперь построим график с помощью преобразования $\dfrac{1}{f(x)}$, где $f(x) = 1 - 4x^2$ (рис. 4.69). и) См. рис. 4.70. к) См. рис. 4.71. л) См. рис. 4.72. м) См. рис. 4.73. н) См. рис. 4.74. о) См. рис. 4.75. п) См. рис. 4.76. р) См. рис. 4.77. с) См. рис. 4.78.

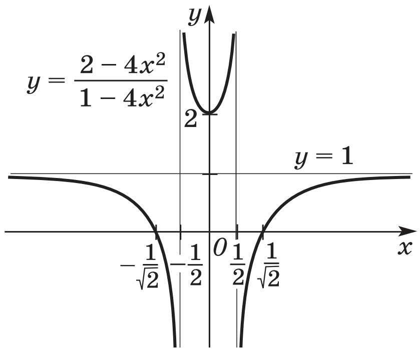


Рис. 4.69

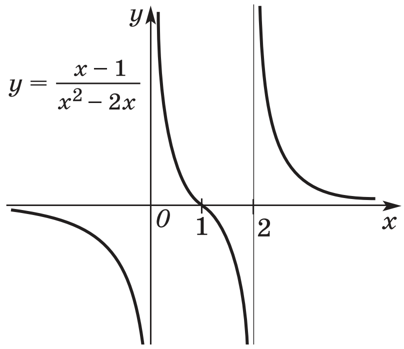


Рис. 4.70

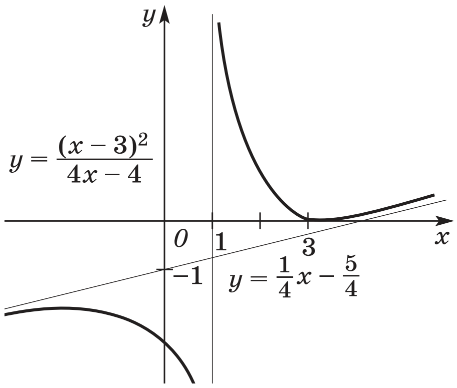


Рис. 4.71

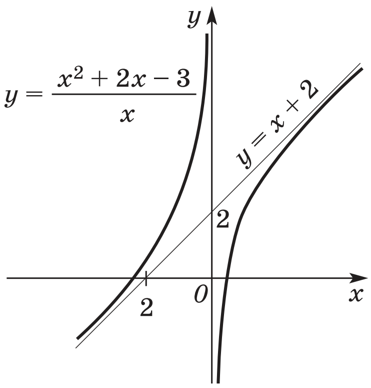


Рис. 4.72

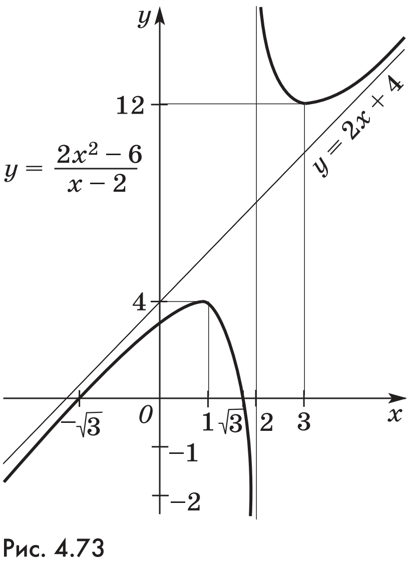


Рис. 4.73

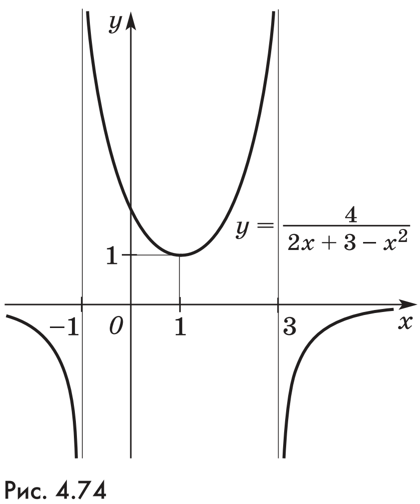


Рис. 4.74

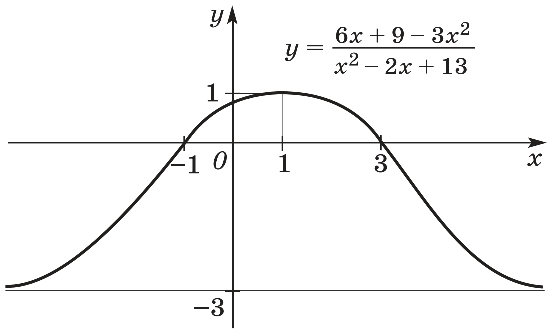


Рис. 4.75

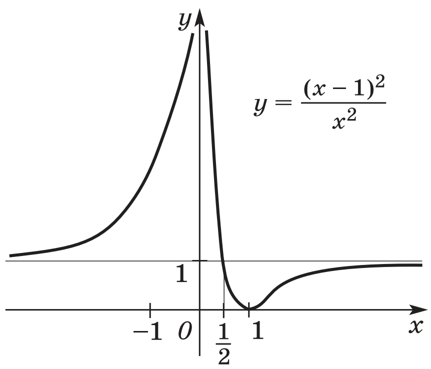


Рис. 4.76

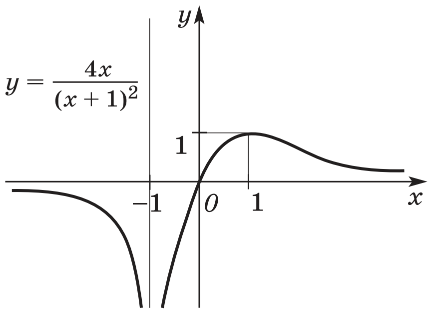


Рис. 4.78

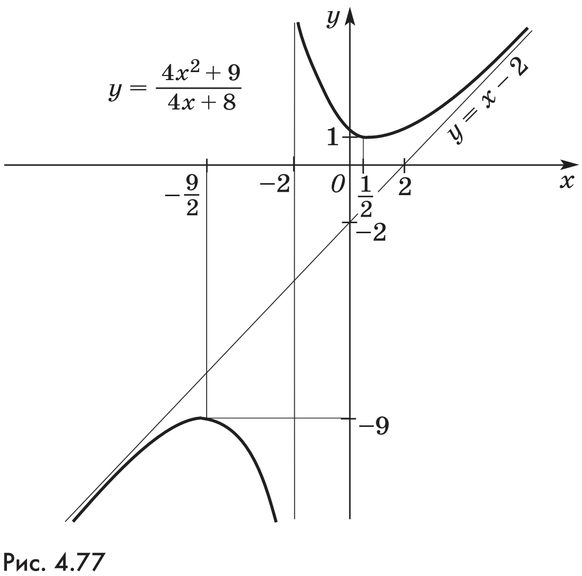


Рис. 4.77

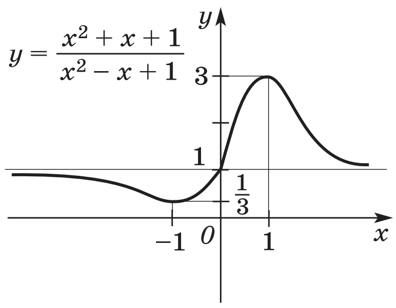


Рис. 4.79

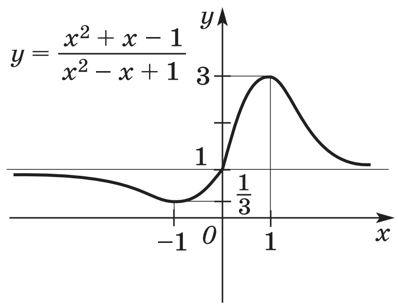


Рис. 4.80

т) *Указание.*

$$y = \begin{cases} 1 + \dfrac{2x}{x^2 - x + 1} = 1 + \dfrac{2}{x + \dfrac{1}{x} - 1}, \ x \neq 0, \\ 1, \ x = 0. \end{cases}$$

С помощью элементарных преобразований функции $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ из задачи IV.111, *а* легко построить искомый график (рис. 4.79).

у) См. рис. 4.80.

IV.112. а) См. рис. 4.81. б) **Решение.** Преобразование $\dfrac{x^2 + 1}{x + 1} = x - 1 + \dfrac{2}{x + 1}$ убеждает нас, что прямая $y = x - 1$ — наклонная асимптота, $x = -1$ — вертикальная

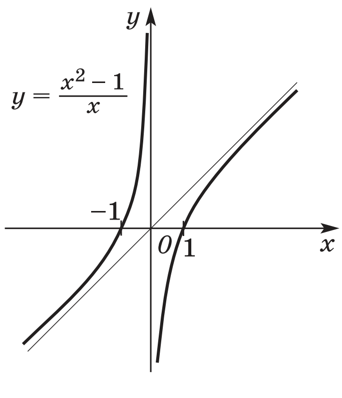


Рис. 4.81

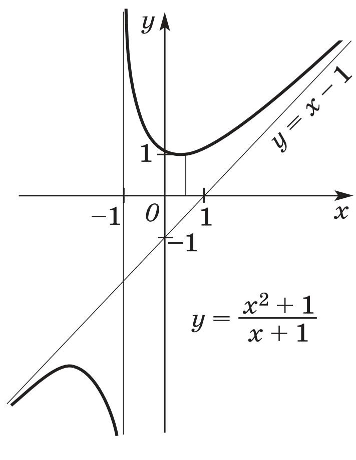


Рис. 4.82

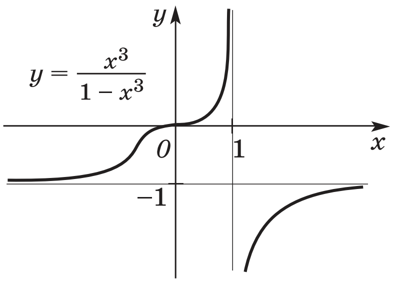


Рис. 4.83

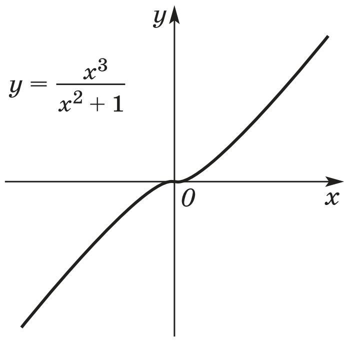


Рис. 4.84

асимптота. При этом при $x \to +\infty$ график функции лежит выше прямой $y = x - 1$, а при $x \to -\infty$ ниже (рис. 4.82).

д) **Решение.** Осуществим преобразование:

$$\frac{x^3}{1 - x^3} = -1 + \frac{1}{1 - x^3}.$$

Ясно, что $x = 1$ — вертикальная, а $y = -1$ — горизонтальная асимптоты ($y \to -\infty$ при $x \to 1+$; $y \to +\infty$ при $x \to 1-$). Кроме того, на $(-\infty; 1)$ и на $(1; +\infty)$ функция $y = 1 - x^3$ убывает и сохраняет знак. Значит, исходная функция возрастает на этих промежутках (рис. 4.83).

е) **Решение.** Заметим, что функция нечётная. Кроме того, при $x > 0$ выполняется

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = \frac{1}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}},$$

а $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^3}$ убывают и положительны. Тогда $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ возрастает, причём неограниченно. Более того, равенство

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}$$

показывает, что прямая $y = x$ является наклонной асимптотой, к которой график при $x \to +\infty$ подходит снизу (рис. 4.84).

ж) См. рис. 4.85. и) См. рис. 4.86.

IV.113. 1) **Решение.** Преобразуем исходную функцию к виду $x^4 - 2x^2 = (x^2 - 1)^2 - 1$. Можно рассмотреть композицию $y = f(f(x))$, где $f(x) = x^2 - 1$. При этом можно ограничиться рассмотрением функции на луче $[0; +\infty)$, так как функция $y = x^4 - 2x^2$ чётная. Функция $y = x^4 - 2x^2$ воз-

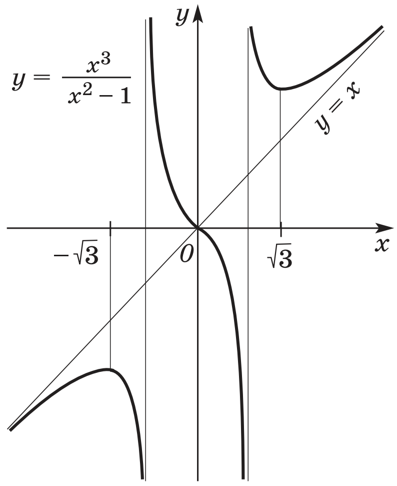


Рис. 4.85

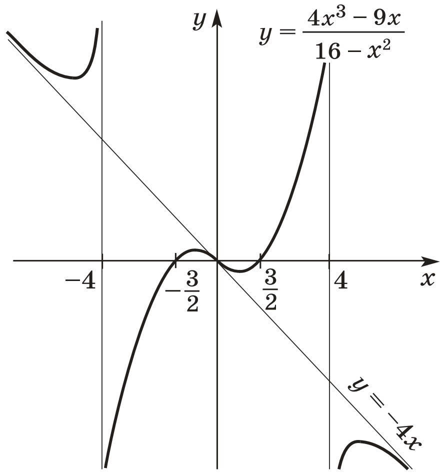


Рис. 4.86

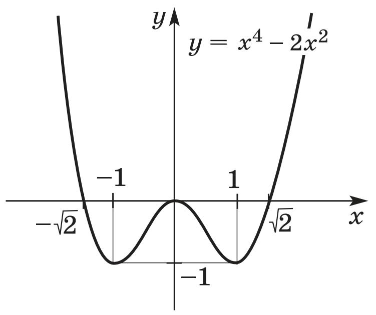


Рис. 4.87

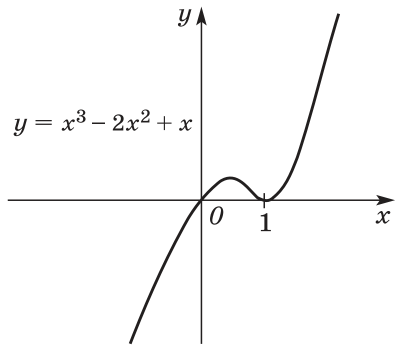


Рис. 4.88

растает на $[1; +\infty)$ и убывает на $[0; 1]$. $x = 1$ — точка минимума, $y \to +\infty$ при $x \to +\infty$ (рис. 4.87).

2) *Указание*. Преобразовать функцию к виду $x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$. Построить график, используя соображения кратности корней и промежутков знакопостоянства (рис. 4.88).

3) *Указание*. Аналогично задаче IV.113, *г* преобразуем функцию к виду $-x^5 + 2x^3 - x = -x(x-1)^2 \times (x+1)^2$; функция нечётная. См. рисунок 4.89.

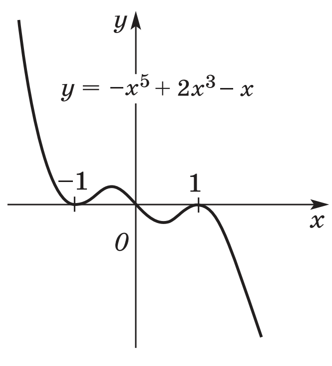


Рис. 4.89

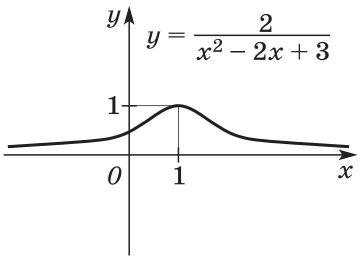


Рис. 4.90

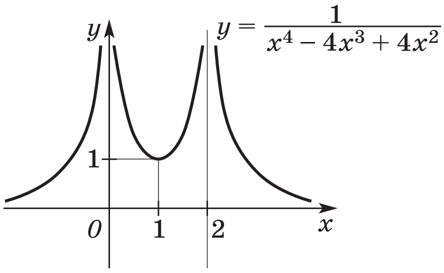


Рис. 4.91

4) *Указание.* Применить преобразование $\dfrac{1}{f(x)}$ (рис. 4.90).

5) *Указание.* Преобразуем функцию к виду

$$\frac{1}{x^4 - 4x^3 + 4x^2} = \frac{1}{x^2(x-2)^2}.$$

Построить сначала график функции $y = x^2(x - 2)^2$ по кратным корням. Затем выполнить преобразование $\dfrac{1}{f(x)}$ (рис. 4.91).

6) *Указание.* Преобразуем функцию к виду

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}.$$

Функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ убывает на $[0; +\infty)$, так как функция $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ возрастает и сохраняет знак (рис. 4.92).

7) *Указание.* При $x \geqslant 0$ см. задачу IV.113, *е*. При $x \in [-1; 0]$ функция $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{-x}$ возрастает как сумма возрастающих функций (рис. 4.93).

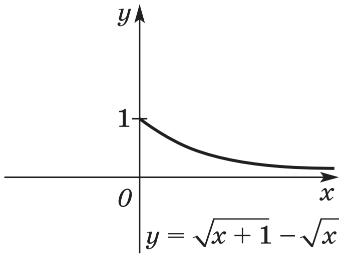


Рис. 4.92

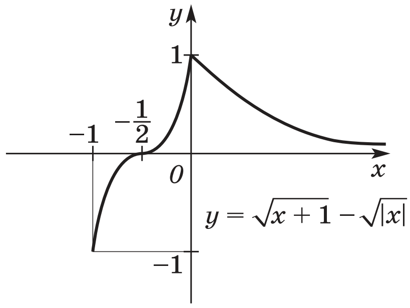


Рис. 4.93

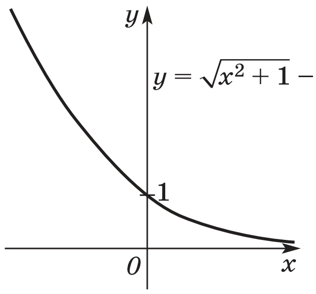


Рис. 4.94

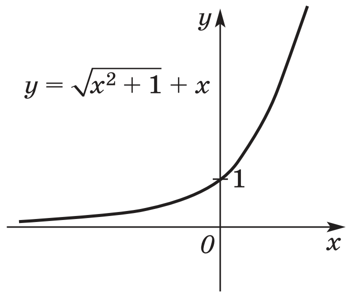


Рис. 4.95

8) *Указание.* $\sqrt{x^2+1}-x=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Ясно, что на $[0;\ +\infty)$ функция $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$ убывает (функция $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x$ возрастает и сохраняет знак). При $x<0$ функции $y=\sqrt{x^2+1}$ и $y=-x$ убывают. Значит, их сумма убывает. $y=0$ — горизонтальная асимптота при $x\to+\infty$. В то же время асимптот на $x\to-\infty$ нет (рис. 4.94).

9) *Указание.* Преобразование $\dfrac{1}{f(x)}$ к функции из задания *з* (рис. 4.95).

10) См. рис. 4.96.

11) См. рис. 4.97.

12) См. рис. 4.98.

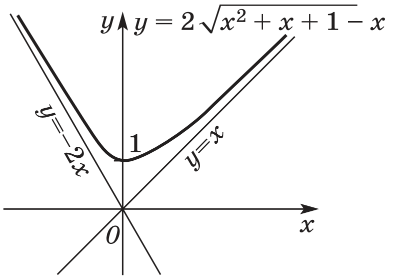
13) См. рис. 4.99.

18) *Указание.* Исходная функция записывается в виде

$$y=\begin{cases}1-\dfrac{2}{x+1},\ x<-3,\\ -\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{2},\ -3\leqslant x<-1,\\ 1,\ -1\leqslant x<1,\\ \dfrac{2}{x+1},\ 1\leqslant x<3,\\ 1-\dfrac{2}{x+1},\ x\geqslant 3\end{cases}\qquad\text{(рис. 4.100).}$$

19) *Указание.* Исходная функция записывается в виде

$$y=\begin{cases}-3x,\ x<-1,\\ -x,\ -1<x<0,\\ x-2,\ 0<x<1,\\ 3x,\ x>1\end{cases}\ \text{(рис. 4.101).}$$



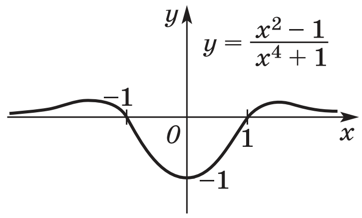
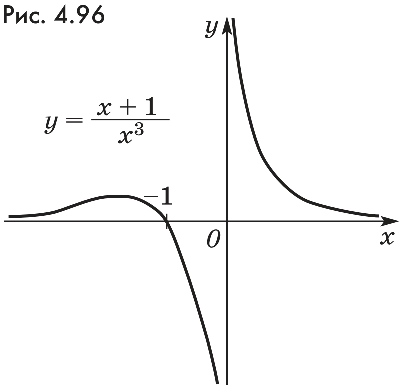


Рис. 4.97

Рис. 4.96



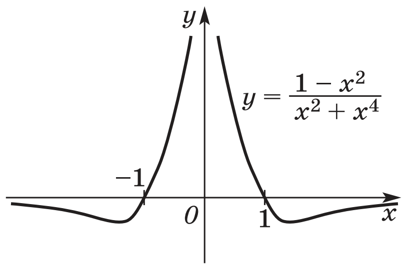


Рис. 4.98

Рис. 4.99

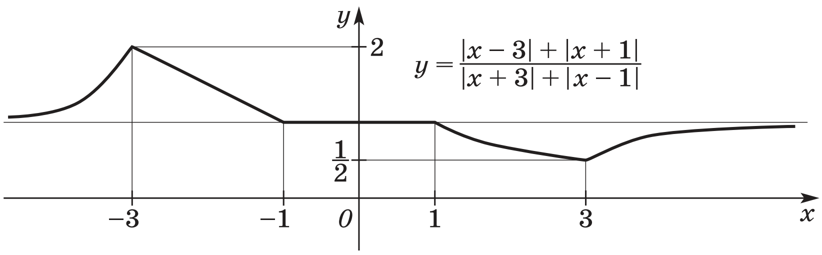


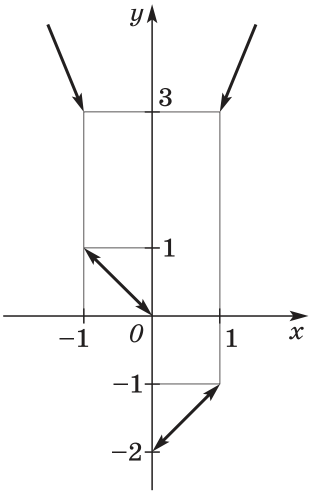
Рис. 4.100

20) *Указание*. Исходная функция записывается в виде

$$y = \begin{cases} (x-1)^2 - 2, \ x < -1, \\ x^2 + 1, \ -1 < x < 0, \\ (x+1)^2, \ x > 0 \end{cases} \quad (\text{рис. } 4.102).$$

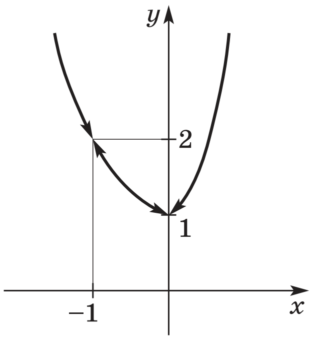
21) *Указание*. Исходная функция записывается в виде

$$y = \begin{cases} -2x^2 + 2x - 1, \ x < 0, \\ 2x - 1, \ 0 < x < 1, \\ 2x^2 - 2x + 1, \ x > 1 \end{cases} \quad (\text{рис. } 4.103).$$



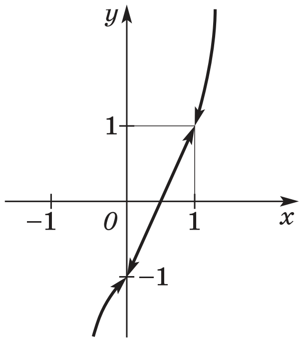
$$y = \frac{x^2 - x}{|x|} + \frac{x^2 + x}{|x+1|} + \frac{x^2 - 1}{|x-1|}$$

Рис. 4.101



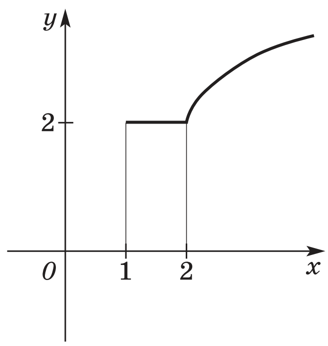
$$y = x^2 + \frac{x^2}{|x|} + \frac{(x+1)^2}{|x+1|}$$

Рис. 4.102



$$y = \frac{(x-1)^3}{|x-1|} + \frac{|x^3|}{x}$$

Рис. 4.103



$$y = \sqrt{x + 2\sqrt{x+1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x} - 1}$$

Рис. 4.104

22) *Указание.* $y = |\sqrt{x-1} + 1| + |\sqrt{x-1} - 1|$,
$y = \begin{cases} 2, \ 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ 2\sqrt{x-1}, \ x \geqslant 2 \end{cases}$ (рис. 4.104).

23) *Указание.* Исходную функцию преобразовать к виду $y = \dfrac{4|x|}{(x+1)(x-2)}$. Если $x \to -1-$, то $y \to +\infty$, если

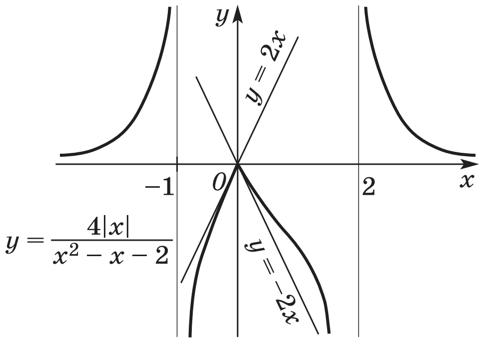


Рис. 4.105

$x \to -1+$, то $y \to -\infty$; если $x \to 2-$, то $y \to -\infty$, если $x \to 2+$, то $y \to +\infty$. Таким образом, $x = -1$, $x = 2$ — вертикальные асимптоты. $y(0) = 0$, $f(x) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 2$ и $f(x) > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2, \\ x < -1 \end{array}\right.$ (рис. 4.105).

24) **Решение**. Функция нечётная, поэтому можно построить её график при $x \geqslant 0$. Тогда $y = x^4 - x^2$. При $x > 1$ имеем $y > 0$, а при $x \in (0; 1)$ получаем $y < 0$. Пусть $x^4 - x^2 = a$; $x = \sqrt{\frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}}$. Отсюда видно, что корни будут кратными при $a = -\frac{1}{4}$, $a = 0$. Если $a = -\frac{1}{4}$, то $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; если $a = 0$, то $x = 0$. Но $x \neq 0$. В окрестности точки $\frac{\sqrt{2}}{2}$ значения функции больше, чем $-\frac{1}{4}$. Значит, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — точка мини-

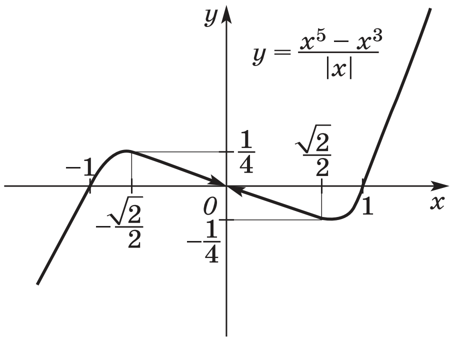
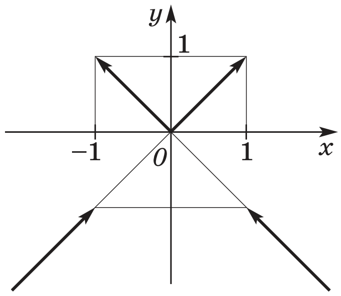


Рис. 4.106



$y = |x| \operatorname{sign}(1 - x^2)$

Рис. 4.107

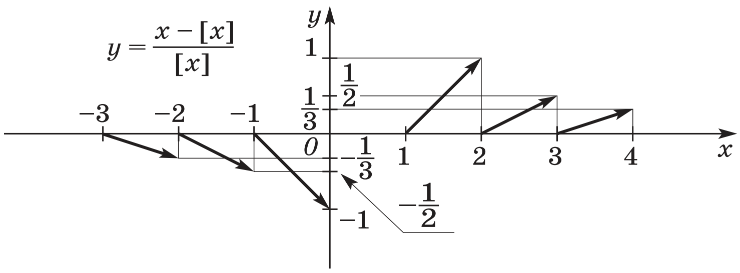


Рис. 4.108

мума и $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{1}{4}$. Впрочем, можно провести исследование и так: имеем $y = x^4 - x^2 = \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$. Откуда видно, что при $x > 0$ функция достигает минимума, когда $x^2 - \frac{1}{2} = 0$, т. е. при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. При $x \to +\infty$ имеем $y \to +\infty$ (рис. 4.106).

25) **Решение.** $D(y) = \boldsymbol{R}$. Если $1 - x^2 < 0$, то $\operatorname{sign}(1 - x^2) = -1$. Итак, при $|x| > 1$ имеем $y = -|x|$. Если $1 - x^2 = 0$, то $\operatorname{sign}(1 - x^2) = 0$. То есть при $x = \pm 1$, $y = 0$. И наконец, при $|x| < 1$ получаем $y = |x|$ (рис. 4.107).

26) *Указание.* $\frac{x - [x]}{[x]} = \frac{x}{[x]} - 1$. Далее воспользоваться результатом задачи IV.106, ∂ (рис. 4.108).

Глава V. Корень, степень, логарифм

Материал данной главы стандартен для школьного курса. В связи с наличием в федеральном компоненте государственного стандарта по математике профильного уровня материала, посвящённого обобщению понятия степени, логично было объединить всё, что относится к степеням и действиям с ними, в одну главу, что и было сделано. Мы исходили при этом из убеждения о том, что логарифм и корень — суть операции для нахождения неизвестного операнда при возведении в степень: в случае логарифма — неизвестного показателя, в случае корня — неизвестного основания.

В силу этого в главах V и VI проводится один и тот же принцип: значение новой функции, обратной к уже существующей, является **обозначением решения соответствующего уравнения!**

Например, логарифм — это обозначение решения уравнения $a^x = b$, корень — обозначение одного из решений уравнения $x^n = b$, арксинус — обозначение одного из решений уравнения $\sin x = a$ и т. д.

В главе рассмотрены в основном тождественные преобразования степеней, корней и логарифмов, а также простейшие уравнения и неравенства, решение которых вытекает прямо из определения соответствующих функций. Подробнее уравнения и неравенства рассмотрены в главе XIII учебника 11 класса.

Основное внимание при изучении материала данной главы должно быть уделено усвоению правил действий со степенями и логарифмами с тем, чтобы впоследствии учащиеся не придумывали формул логарифма суммы и не пытались складывать степени с одинаковым основанием путём сложения их показателей.

Приведём примерный план изучения главы:

Глава V. Корень, степень, логарифм	**18**	**18**
Корень натуральной степени. Обобщение понятия степени	6	6
Логарифм	6	6
Логарифмическая функция и её монотонность	4	4
Контрольная работа № 8	2	2

§ 29. Корень натуральной степени

В этом параграфе вводится понятие корня натуральной степени. Особое внимание следует уделить понятию арифметического корня, а именно пониманию учащимися того, что символ $\sqrt[n]{a}$ означает арифметический корень лишь при чётных значениях n.

В пункте «Свойства корней, вытекающие из определения» важным и трудно усваиваемым является свойство 2. Поэтому в задачах приведён ряд упражнений, в том числе и уравнений, в которых требуется его применить.

В пункте 3 существенной является формулировка теоремы о свойствах корней чётной степени. В повседневной практике можно использовать следующий приём: учащимся говорится о том, что при использовании свойств следует следить за областью определения левой и правой частей. Обычно этого хватает для того, чтобы указанные свойства применялись правильно.

В пункте 4 приведены примеры использования свойств корней при проведении преобразований, а также при решении уравнений и неравенств, и показаны нестандартные случаи с «подводными камнями» (примеры 5, 6, 9 учебника), любимыми некоторыми составителями экзаменационных задач.

Обращаем внимание на применение приёма избавления от иррациональности высокой степени в решении задачи V.3, а также на решение уравнений задач V.7 и V.9 посредством именно определения корня без теорем о равносильности соответствующих уравнений.

В тексте параграфа не приведены решения примеров на преобразование иррациональных выражений, связанных с тем, что один из корней является натуральной степенью другого (например, задачи V.19, V.20, V.22). Этот приём описан при рассмотрении степеней с рациональным показателем. Однако его применение при решении задачи V.19 служит хорошей пропедевтикой.

Можно использовать как задачи к данному параграфу также задачи V.43—V.49.

Решения и указания к задачам

V.3. а) **Решение.** Пусть $f(x)=\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{x+1}$. Тогда в задаче требуется сравнить числа $f(7)$ и $f(26)$.

Умножив и поделив $f(x)$ на

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x+1}+\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2,$$

получим

$$f(x) = \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{x+1})^3}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2} =$$

$$= -\frac{1}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2}.$$

Поскольку функция $(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2$ в силу свойства 3 (с. 234 учебника) возрастает на множестве положительных чисел, то функция f возрастает как композиция возрастающей функции $-\frac{1}{y}$ и возрастающей функции $(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{x+1} + (\sqrt[3]{x+1})^2$. Поэтому $f(7) < f(26)$.

б), в) *Указание*. Решаются аналогично заданию *а*.

V.8. а) $\sqrt[4]{223} - 3$. **Решение.** $\{\sqrt[4]{223}\} = \sqrt[4]{223} - [\sqrt[4]{223}]$. Поскольку $\sqrt[4]{81} < \sqrt[4]{223} < \sqrt[4]{256}$, получаем $[\sqrt[4]{223}] = 3$, откуда $\{\sqrt[4]{223}\} = \sqrt[4]{223} - 3$.

б)—г) *Указание*. Решаются аналогично задаче V.8, *а*.

V.9. б) $\varnothing$. **Решение.** По определению корня чётной степени $\sqrt[4]{x^4 - x - 1} = a$ означает, что $a^4 = x^4 - x - 1$ и $a \geqslant 0$. В нашем случае получаем $\begin{cases} x^4 = x^4 - x - 1, \\ x \geqslant 0. \end{cases}$ Эта система решений не имеет.

V.18. а) -1. **Решение.** Способ 1. Заметим, что

$$17 + 12\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = (\sqrt{2} + 1)^4,$$

откуда можно получить равенство

$$(1 - \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) = -1.$$

Способ 2. Внесём под знак радикала множитель $1 - \sqrt{2}$. При этом нужно учесть, что этот множитель отрицателен, поэтому

$$(1 - \sqrt{2}) \cdot \sqrt[4]{17 + 12\sqrt{2}} = -\sqrt[4]{(1 - \sqrt{2})^4 (17 + 12\sqrt{2})} =$$

$$= -\sqrt[4]{(17 - 12\sqrt{2})(17 + 12\sqrt{2})} = -1.$$

б)—г). *Указание*. Можно так же, как и в задаче V.18, *а*, либо извлекать корень, либо вносить под корень, оставляя за корнем знак.

V.19. а) -1. б) $\sqrt[9]{a} + 1$. в) $\sqrt[6]{a^5}$. г) $\sqrt[6]{a^7}$. д) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$. е) 2.

V.20. а) $x = 8$. **Решение.** После упрощения получаем уравнение $\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} - 2 = 0$, являющееся квадратным относительно $\sqrt[3]{x}$. Значение $\sqrt[3]{x} = -1$ даёт посторонний корень, поскольку обращает в 0 знаменатели обеих дробей исходного уравнения.

б) $x = 32$; $x = 243$.

V.21. а) 1. **Решение.** $\{\sqrt[3]{17}\} = \sqrt[3]{17} - 2$, $\{\sqrt[3]{14}\} = \sqrt[3]{14} - 2$. Поэтому исходное выражение равно 1.

б) $\sqrt[3]{3}$. **Решение.** Заметим, что $\{\sqrt[3]{33}\} = \sqrt[3]{33} - 3$. Отсюда

$$\frac{\{\sqrt[3]{33}\}}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{33}-3}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{33}-(\sqrt[3]{3})^3}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{9}} = \frac{\sqrt[3]{3}\,(\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{9})}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{9}} = \sqrt[3]{3}.$$

в) $-\sqrt[4]{6}$.

V.22. а) 3. б) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. в) $\sqrt[3]{5}$. г) $\sqrt[3]{4} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$.

V.26. а), в) При условии, что одно из чисел равно 0.

б) При условии, что одно из чисел равно 0 или числа являются противоположными. *Указание.* Утверждения доказываются возведением обеих частей равенства в одну и ту же соответствующую степень.

V.27. 0. **Решение.** Поскольку $\left(2\sqrt{6}+1\right)^2 = 25 + 4\sqrt{6}$, то $\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}} = \sqrt[3]{2\sqrt{6}+1}$.

V.28. Решение. Заметим, что $x^4 - 18x^2 + 81 = (x^2 - 9)^2$. Поскольку в условии фигурирует выражение $\sqrt{x^2 - 9}$, то $x^2 - 9 \geqslant 0$, а потому $\sqrt[4]{(x^2-9)^2} = \sqrt{x^2-9}$. Для существования данного в условии выражения необходимо, чтобы $x^2 \geqslant 9$, откуда $\left[\begin{array}{l} x \geqslant 3, \\ x \leqslant -3. \end{array}\right.$

Рассмотрим случаи:

1) $x \geqslant 3$. Тогда

$$\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}} = \frac{(x-1)(x+3)+(x+1)\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}}{(x+1)(x-3)+(x-1)\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{x+3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{x+3}\left((x-1)\sqrt{x+3}+(x+1)\sqrt{x-3}\right)}{\sqrt{x-3}\left((x+1)\sqrt{x-3}+(x-1)\sqrt{x+3}\right)} = \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-3}}.$$

2) $x \leqslant -3$. Тогда

$$\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}} = \frac{(x-1)(x+3)+(x+1)\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{-x-3}}{(x+1)(x-3)+(x-1)\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{-x-3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{-x-3}\left((1-x)\sqrt{-x-3}+(x+1)\sqrt{3-x}\right)}{\sqrt{3-x}\left(-(x+1)\sqrt{3-x}+(x-1)\sqrt{-x-3}\right)} = -\frac{\sqrt{-3-x}}{\sqrt{3-x}}.$$

V.29. а) *Указание.* Равенство доказывается возведением обеих частей в куб с использованием формулы $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$ аналогично решению примера 9 учебника (способ 2).

Решение. Пусть $x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}}} - \sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}}}$. Тогда $x^3 = \frac{4}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt[3]{5}}x$. Остаётся проверить, что $x = \frac{1}{\sqrt[6]{5}}$ удовлетворяет этому уравнению. Других корней это уравнение не имеет, поскольку функция $x^3 + \frac{3}{\sqrt[3]{5}}x$ является возрастающей, а значит, значение, равное $\frac{4}{\sqrt{5}}$, принимает ровно 1 раз.

б) *Указание.* Равенство доказывается возведением обеих частей в квадрат.

V.30. $\frac{1}{\sqrt[3]{y}}$. *Указание.* Заметить, что

$$8x - y - 6\left(2\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}\right) = \left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}\right)^3.$$

V.31. а) Рис. 5.1. б) Рис. 5.2.

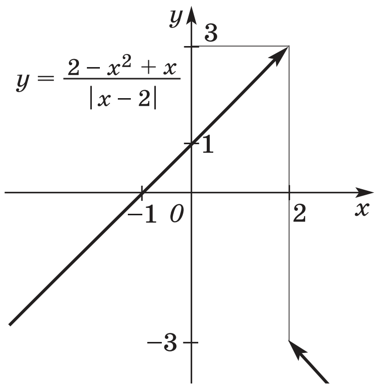


Рис. 5.1

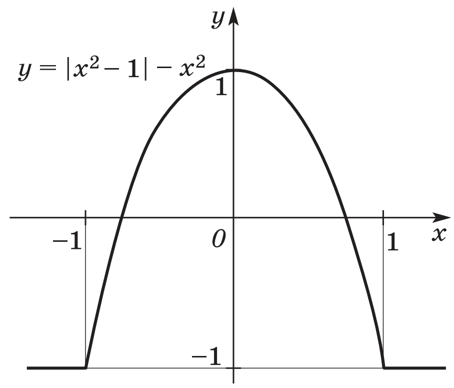


Рис. 5.2

V.32. а) $x = \frac{1-\sqrt{29}}{2}$. **Решение.** Заметим, что уравнение не имеет корней, удовлетворяющих неравенству $x > -2$. Поэтому вносим под корень $x + 2$, оставляя знак. Получим $\sqrt[4]{(x+2)(x-3)} = 1$, откуда $\left[\begin{array}{l} x = \frac{1+\sqrt{29}}{2}, \\ x = \frac{1-\sqrt{29}}{2}. \end{array}\right.$

Первый корень не подходит, поскольку тогда $x < -2$.

Замечание. Важно обратить внимание, что при $x < -2$ подкоренное выражение заведомо будет положительным. Проверять область определения здесь не надо.

б) $x = -\sqrt{65}$.

V.33. а) $a = 1 + \sqrt[3]{2}$. **Решение**. Сформулируем и докажем лемму.

ЛЕММА

Число $\sqrt[3]{2}$ не может являться корнем многочлена с рациональными коэффициентами степени, меньшей 3.

Действительно, число $\sqrt[3]{2}$, будучи корнем многочлена $x^3 - 2$, является иррациональным, поскольку рациональные корни этого многочлена согласно утверждению § 20 (с. 157 учебника) следует искать среди чисел 1, –1, 2, –2, ни одно из которых корнем этого многочлена не является. Значит, число $\sqrt[3]{2}$ не может быть корнем многочлена первой степени с рациональными коэффициентами.

Пусть $\sqrt[3]{2}$ является корнем многочлена второй степени с рациональными коэффициентами. Согласно утверждению примера 4, *б* (с. 86) получаем, что $x^3 - 2$ будет кратен этому многочлену. В результате деления в частном получится многочлен первой степени с рациональными коэффициентами, который, очевидно, имеет рациональный корень. Но многочлен $x^3 - 2$ рациональных корней не имеет (рассуждение повторяет приведённое в примере 3 на с. 86). ■

Приступим теперь к решению задачи. Пусть $a - \sqrt[3]{2} = k$ ($k \in \boldsymbol{Z}$). Тогда $a = k + \sqrt[3]{2}$. Подставив значение a во второе выражение и приведя к общему знаменателю, получим, что число

$$\frac{(1-k)\sqrt[3]{4} + k\sqrt[3]{2} + 1}{k + \sqrt[3]{2}}$$

должно быть целым. Умножим числитель и знаменатель дроби на $k^2 - k\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}$ и получим (после упрощения), что число

$$\frac{(1 - k^3)\sqrt[3]{4} + (k^3 - 3k + 2)\sqrt[3]{2} + 3k^2}{k^3 + 2}$$

должно быть целым. Обозначим это целое число буквой b. Но тогда число $\sqrt[3]{2}$ является корнем квадратного уравнения

$$\frac{1 - k^3}{k^3 + 2}x^2 + \frac{k^3 - 3k + 2}{k^3 + 2}x + \frac{3k^2}{k^3 + 2} - b = 0,$$

коэффициенты которого рациональны, что невозможно, если все коэффициенты этого уравнения не равны 0. Значит, $k = 1$, при этом второе число равно 1.

б) $a = 2 - \sqrt[3]{9}$. *Указание.* Решение аналогично задаче V.33, а с той разницей, что утверждение леммы доказывается про число $\sqrt[3]{3}$.

V.34. Решение. Заметим, что

$$\frac{9 - 5\sqrt{3}}{9 + 5\sqrt{3}} = \frac{(9 - 5\sqrt{3})^2}{(9 + 5\sqrt{3})(9 - 5\sqrt{3})} = \frac{156 - 90\sqrt{3}}{6} =$$
$$= 26 - 15\sqrt{3} = \left(2 - \sqrt{3}\right)^3.$$

Поэтому искомое число равно 2.

V.35. $a = 8$, $f(4) = 0$. **Решение.** Естественная область определения функции определяется системой неравенств $\begin{cases} -x^2 + 2x + a \geqslant 0, \\ x \geqslant 4. \end{cases}$ Решением первого неравенства является промежуток между корнями соответствующего квадратного уравнения. Для того чтобы система имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы 4 являлось большим корнем этого квадратного уравнения (рис. 5.3). Подставив 4 в уравнение, получим $a = 8$. При этом второй корень уравнения равен -2, поэтому область определения будет состоять из единственной точки $x = 4$, причём $f(4) = 0$.

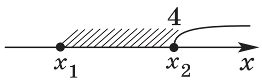


Рис. 5.3

V.36. x. **Решение.** Обозначим данное в условии выражение y и возведём в куб, пользуясь формулой $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$. Получим $y^3 = x^3 - 3x + 3y$. Перенеся всё в одну часть и раскладывая на множители, получим $(y - x)(y^2 + xy + x^2 - 3) = 0$, откуда либо $y = x$, либо $y^2 + xy + x^2 - 3 = 0$. Будем воспринимать второе равенство как квадратное уравнение относительно y. Это равенство может иметь место только при условии неотрицательности дискриминанта, который равен $12 - 3x^2$, т. е. при условии $x^2 \leqslant 4$. Однако при $x^2 < 4$ выражение $\sqrt{x^2 - 4}$, упомянутое в условии задачи, не существует. А при $x = 2$ или $x = -2$ можно прямой подстановкой убедиться, что искомое выражение равно 2 или -2 соответственно.

V.37. а) Умножив обе части уравнения на общий знаменатель, получим

$$(x + 5)\sqrt[3]{x + 5} = 625x\sqrt[3]{x},$$

откуда $\left(\sqrt[3]{x+5}\right)^4 = \left(5\sqrt[3]{x}\right)^4$. Это уравнение равносильно уравнению $\left|\sqrt[3]{x+5}\right| = \left|5\sqrt[3]{x}\right|$, которое, в свою очередь, равносильно совокупности $\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{x+5} = 5\sqrt[3]{x},\\ \sqrt[3]{x+5} = -5\sqrt[3]{x}.\end{array}\right.$ Из этих уравнений возведением в куб получаем $\left[\begin{array}{l}x = \dfrac{5}{124},\\ x = -\dfrac{5}{126}.\end{array}\right.$

б) $\left[\begin{array}{l}x = 1,\\ x = -\dfrac{1}{3}.\end{array}\right.$ *Указание.* Решение аналогично решению задания a.

V.38. а) $\left\{-\sqrt{2};\ \sqrt{17}\right\}$. б) $\left\{\dfrac{1+\sqrt{333}}{2};\ \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$. *Указание.* Решение аналогично разобранному в примере 6 на с. 240 учебника.

V.39. а) $x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$. **Решение.** Многочлен $Q(x) = x^6 - 6x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 36x + 1$ можно найти аналогично тому, как это сделано в решении примера 26 § 20 учебника. А именно, пусть $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Тогда $\left(x - \sqrt{2}\right)^3 = 3$, откуда $x^3 + 6x - 3 = \sqrt{2}\,(3x^2 + 2)$. Возведя обе части равенства в квадрат и перенеся в одну часть, получаем требуемый многочлен. То, что этот многочлен будет наименьшей степени, следует из того, что он неприводим (см. методические рекомендации к главе III, § 20).

б) $-\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. **Решение.** Среди вещественных корней есть ещё только $x = -\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$. Это следует из разложения $Q(x)$ на множители:

$$Q(x) = \left(\left(x - \sqrt{2}\right)^3 - 3\right)\left(\left(x + \sqrt{2}\right)^3 - 3\right).$$

в) $-41\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right) + 12$. **Решение.** $P(x) = Q(x) - 41x + 12$. Подставив в это равенство $x = \sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$, получим

$$P\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right) = -41\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right) + 12.$$

V.43. а) $\{0\} \cup [64;\ +\infty)$. б) **Решение.** $99 - 70\sqrt{2} = \left(\sqrt{2} - 1\right)^6$, поэтому

$$f\left(99 - 70\sqrt{2}\right) = \sqrt[4]{3 - 2\sqrt{2} - 2\left(\sqrt{2} - 1\right) + a} = \sqrt[4]{5 + a - 4\sqrt{2}}.$$

Решив неравенство и не забыв учесть область определения, получаем $4\sqrt{2} - 5 \leqslant a < 4\sqrt{2} - 4$.

в) Таких a не существует. **Решение.** Вопрос задачи можно переформулировать так: при каких значениях a решением неравенства $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} + a \geqslant 0$ является луч $[1; +\infty)$?

Если обозначить $t = \sqrt[6]{x}$, получим такую задачу: при каких значениях a неравенство $t^2 - 2t + a \geqslant 0$ имеет своими неотрицательными решениями только луч $[1; +\infty)$? Полученное квадратное неравенство имеет своими решениями всю ось, кроме интервала между корнями (если корни есть). Чтобы множеством неотрицательных решений этого неравенства был луч $[1; +\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы $t = 1$ было корнем соответствующего уравнения, а второй корень был бы отрицательным. Видно, что первое условие выполнено лишь при $a = 1$, при котором второе условие не выполняется.

V.48. а) **Решение.** Уравнение можно записать в виде

$$2\sqrt[6]{|3x - 1|} + \sqrt[3]{3x - 1} = 8.$$

Если $3x - 1 \geqslant 0$, то можно сделать замену $t = \sqrt[6]{3x - 1} \geqslant 0$ и получить уравнение $t^2 + 2t - 8 = 0$, откуда $t = 2$, а значит, $x = \dfrac{65}{3}$. Если $3x - 1 < 0$, то можно сделать замену $t = \sqrt[6]{1 - 3x}$ и получить уравнение $-t^2 + 2t - 8 = 0$, которое не имеет решений. б) $x = \dfrac{1}{2}$.

V.49. а) $(-1; -16)$. б) $\left\{(9; \sqrt{17}); (9; -\sqrt{17})\right\}$. *Указание.* При решении систем нужно соблюдать аккуратность при внесении под знак радикала.

§ 30. Обобщение понятия степени

В данном параграфе вводится понятие степени с рациональным показателем, даётся представление о степени с вещественным показателем.

В пункте «Определение степени с рациональным показателем», помимо определения и теоремы корректности, важно добиться понимания того, что в степень с рациональным нецелым показателем возводятся лишь неотрицательные числа!

В пункте «Свойства степени с рациональным показателем», по нашему мнению, можно просто сформулировать свойства степеней, связанные с арифметическими действиями. Теорему о сравнении степеней можно привести сразу в виде монотонности соответствующих показательных и степенных функций. В таком виде она легче запоминается и проще применяется. В то же время её появление именно в этом пункте согласуется с общим стилем изложения, где вначале изучается действие, а затем функция, возникающая в результате этого действия.

При изучении степени с вещественным показателем важно не заострять внимание учащихся на том, что такое степень с вещественным показателем, так как это неизбежно повлечёт за собой вопросы о том, что есть вещественное число. Ответ на такой вопрос весьма сложен и абсолютно не прибавляет ничего к умению решать задачи. Достаточно сформулированного «вычислительного» представления о степени с вещественным показателем. Как правило, подобный подход не вызывает возражений у учащихся.

Важным в этом пункте мы считаем разъяснение, посвящённое области определения выражения вида $f(x)^{g(x)}$. Полагаем, что самый строгий экзаменатор будет полностью удовлетворён, если в работе перед решением соответствующего уравнения или неравенства будет написано: «Полагаем, что выражение вида $f(x)^{g(x)}$ определено лишь при $f(x) > 0$».

Задачи V.50—V.59 предназначены для отработки навыков работы со степенями. Последующие задачи предназначены для усвоения свойств степенной и показательной функций.

Решения и указания к задачам

V.51. ж) a^{-1}. и) $a^{-\frac{1}{2}}$.

V.55. а) **Решение.** Способ 1. Предположим, что число $2^{\frac{2}{3}}$ рационально, тогда $2^{\frac{2}{3}} = \dfrac{p}{q}$, где p и q взаимно просты. Откуда $4 = \dfrac{p^3}{q^3}$, и следовательно, $p^3 = 4q^3$. Тогда $p^3 \,\vdots\, 4$, откуда $p \,\vdots\, 2$, т. е. $p = 2p_1$, тем самым $q^3 = 2p_1^3$, значит, $q \,\vdots\, 2$, что противоречит взаимной простоте p и q.

Способ 2. Пусть $x = 2^{\frac{2}{3}}$ является корнем уравнения $x^3 - 4 = 0$. Рациональные корни этого уравнения следует искать среди чисел 1; −1; 2; −2; 4; −4, ни одно из которых корнем не является. Значит, корень этого уравнения — число иррациональное.

V.56. а) 5. **Решение.** Нужно найти, между какими двумя целыми числами лежит $2^{\sqrt{6}}$. Заметим, что

$2{,}4 < \sqrt{6} < 2{,}5$. Тогда $2^{2,4} < 2^{\sqrt{6}} < 2^{2,5}$. Заметим теперь, что $2^{2,4} = \sqrt[5]{2^{12}} = \sqrt[5]{4096} > \sqrt[5]{3125} = 5$, в то время как $2^{2,5} = \sqrt{2^5} = \sqrt{32} < \sqrt{36} = 6$. Таким образом, $5 < 2^{\sqrt{6}} < 6$, поэтому $\left[2^{\sqrt{6}}\right] = 5$.

б) 1. **Решение.** Так как $\sqrt{3} - \sqrt{2} > 0$, то $3^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > 1$. Поскольку $\sqrt{3} + \sqrt{2} > 2$, то имеет место неравенство $2^{\sqrt{3}+\sqrt{2}} > 4$, возведя обе части которого в степень $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, получим $2 > 4^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} > 3^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$. Таким образом, $1 < 3^{\sqrt{3}-\sqrt{2}} < 2$, а потому $\left[3^{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right] = 1$. в) -29.

V.57. а) $-\sqrt{ab}$. б) 1. в) $a - b$. г) $2\left(\sqrt{p} - q^{\frac{2}{3}}\right)$.

V.58. а) $\dfrac{1}{2-x}$. б) 0. в) $9a$. г) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

V.59. а) $3a$. б) $\sqrt{t-y}$. в) a. г) $\dfrac{5}{a-9b}$.

V.65. б) $x = 2$ и $x = -5$. *Указание.* Уравнение сводится к уравнению $|x-2|^{\frac{2}{5}} = (x^2 + 2x - 8)^{\frac{2}{5}}$, равносильному уравнению $|x-2| = x^2 + 2x - 8$, которое имеет корни $x = 2$ и $x = -5$.

Замечание. Обратите внимание, что при $x = 2$ оба основания степени обращаются в 0, но поскольку показатель степени положителен, то обе части уравнения имеют смысл и равны 0.

V.67. а) $x = 2$. **Решение.** Область определения неравенства содержит одну точку $x = 2$, в которой неравенство верно. б) $x = 1$.

V.68. а) $\sqrt[6]{14} < x < \sqrt[3]{4}$.

V.70. а) $\left[\dfrac{2}{3}; 1\right]$. *Указание.* Слева стоит возрастающая функция, а справа — убывающая. Корень $x = 1$ находится подбором. б) $\varnothing$. *Указание.* Слева стоит возрастающая функция, а справа — убывающая. Область определения неравенства — промежуток $\left[-1; -\dfrac{1}{2}\right]$. В обоих концах промежутка неравенство не выполнено, значит, в силу монотонности функций, неравенство нигде не будет выполнено.

V.75. а) Ни при каких a. б) При $a = 3$.

V.76. б) Первое выражение больше. **Решение.** Рассмотрим функцию

$$f(x) = \frac{x-1}{x+3} = 1 - \frac{4}{x+3}.$$

Понятно, что она возрастает при $x > 0$. Поскольку $(2{,}1)^{\sqrt{5}} > (2{,}1)^{\sqrt{3}}$, то и $f\left((2{,}1)^{\sqrt{5}}\right) > f\left((2{,}1)^{\sqrt{3}}\right)$.

в) **Решение.** Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2x$. Эта функция возрастает при $x \geqslant 1$. Так как

$$\sqrt{3} - \sqrt{5} = -\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} < -\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \sqrt{5} - \sqrt{7},$$

причём $0{,}1 < 1$, то $0{,}1^{\sqrt{3}-\sqrt{5}} > 0{,}1^{\sqrt{5}-\sqrt{7}} > 1$, поэтому

$$f\left(0{,}1^{\sqrt{3}-\sqrt{5}}\right) > f\left(0{,}1^{\sqrt{5}-\sqrt{7}}\right).$$

г) **Решение.** Заметим, что $\sqrt{5} + \sqrt{3} - 3 < 1$. Сравним числа $\sqrt[3]{2} - 2$ и $2 - \sqrt{6}$, которые находятся между собой в том же соотношении, что и числа $\sqrt[3]{2} + \sqrt{6}$ и 4. Поскольку $\sqrt{6} < 2{,}5$, а $\sqrt[3]{2} < \sqrt{2} < 1{,}5$, то $\sqrt[3]{2} + \sqrt{6} < 4$, а значит, $\sqrt[3]{2} - 2 < 2 - \sqrt{6}$, следовательно,

$$\left(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 3\right)^{\sqrt[3]{2}-2} > \left(\sqrt{5} + \sqrt{3} - 3\right)^{2-\sqrt{6}}.$$

V.79. б) $[-2; -1) \cup [1; +\infty)$. **Решение.** Неравенство можно записать в виде

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \geqslant \left(\sqrt{5}+2\right)^{-\frac{x-1}{x+1}},$$

которое равносильно неравенству $x - 1 \geqslant -\dfrac{x-1}{x+1}$. Решая неравенство методом интервалов, получаем $[-2; -1) \cup [1; +\infty)$.

V.80. а) *Указание.* Свести неравенство к $2^x > 1$, откуда $x > 0$.

б) **Решение.** Используя результат задачи V.80, *а* для раскрытия модуля, получаем

$$y = \begin{cases} 5^x, & x > 0, \\ -5^x, & x < 0. \end{cases}$$

График представлен на рисунке 5.4.

в) **Решение.** Используя построенный график (см. рис. 5.4), легко записать ответ: при $a > 1$ — один корень, при $-1 \leqslant a \leqslant 1$ — нет корней, при $a < -1$ — один корень.

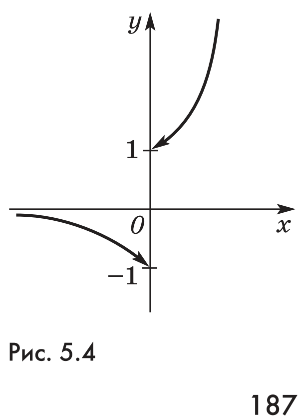


Рис. 5.4

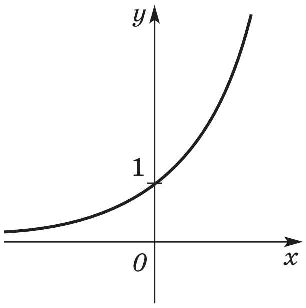


Рис. 5.5

V.81. а) См. рис. 5.5. *Указание.* Функция преобразуется к виду $y = |3^x - 2^x| + 2^x$, т. е.

$$y = \begin{cases} 3^x, \ x \geqslant 0, \\ 2 \cdot 2^x - 3^x, \ x < 0. \end{cases}$$

При построении графика можно принять во внимание монотонность функций и найти горизонтальную асимптоту.

б) $x \geqslant 0$. *Указание.* Ответ можно считать по графику, изображённому на рисунке 5.5.

в) $a \leqslant 0$. *Указание.* Ответ можно считать по графику.

V.84. а) **Решение.** Пусть $5^a = c$, $c > 0$. Тогда левая часть неравенства имеет вид $\frac{5c}{c^2 + 25} \leqslant \frac{1}{2}$, в то время как правая часть, будучи квадратным трёхчленом относительно b с положительным старшим коэффициентом, принимает своё наименьшее значение в вершине (при $b = 5$), равное $\frac{1}{2}$. Тем самым неравенство доказано, а равенство наступает при $b = 5$ и $c = 5$, а тогда $a = 1$.

V.85. а) Например, $A(-1; -1)$.

б) **Решение.** Если какая либо из координат неотрицательна, то 2 в соответствующей степени будет не меньше 1, а второе слагаемое положительно. Значит, обе координаты отрицательны.

в) **Решение.** При перестановке x и y множество M переходит в себя. Такой перестановке соответствует симметрия относительно оси, задаваемой уравнением $y = x$.

г) $\varnothing$. *Указание.* Чтобы найти абсциссы точек, нужно решить уравнение $2^x + 2^{-1-x} = 1$. Нетрудно видеть, что это уравнение корней не имеет.

д) -2. **Решение.** Мы знаем, что $2^x + 2^y \geqslant 2\sqrt{2^x \cdot 2^y}$, причём равенство достигается при $2^x = 2^y$. Коль скоро $2^x + 2^y = 1$, то $\sqrt{2^{x+y}} \leqslant \frac{1}{2}$, откуда $x + y \leqslant -2$, причём равенство достигается при $x = y = -1$.

Замечание. Отметим, что результат задачи V.85, *д* даёт другое решение задачи V.85, *г*. Действительно, коль скоро $x + y \leqslant -2$ для точек множества M, для этих точек не может выполняться $x + y = -1$.

§ 31. Логарифм

В этом параграфе изложен необходимый минимум сведений о логарифме числа и логарифмической функции. Практически в школьном курсе тематика логарифмов представлена двумя большими разделами: преобразования выражений, содержащих логарифмы, и логарифмические уравнения и неравенства.

Мы считаем важным и существенным показать мотивы появления логарифмов и их историческое значение. Возможно, осознание того факта, что логарифм — это просто показатель степени, поможет в усвоении свойств логарифмов и действий с ними.

Следует обратить внимание на то, что решение уравнений и неравенств в этом параграфе носит пропедевтический характер, поскольку в учебнике 11 класса имеется большой раздел, посвящённый общим методам решения уравнений и неравенств. Поэтому при изучении материала основное внимание следует уделить формированию устойчивого навыка тождественных преобразований соответствующих выражений.

Кроме этого, по нашему убеждению, не следует педалировать знание формулировок соответствующих свойств, а также строгих формулировок и теорем. Соответствующее знание должно быть «операциональным», т. е. вполне достаточно, если ученик правильно преобразует выражение, следя за областью определения, не умея при этом формулировать и доказывать соответствующую теорему.

Обращаем внимание на то, что существование логарифма положительного числа по любому положительному основанию, не равному единице, не доказывается. Это соответствует общему уровню строгости, принятому в курсе, и позволяет, активно пользуясь благами, доставляемыми понятием логарифма для решения задач, не рассматривать тонкие вопросы определения вещественных чисел.

При изучении материала параграфа можно идти двумя путями:

1. Последовательно изучить свойства логарифма числа, а затем изучить логарифмическую функцию. В этом случае при решении задач в начале изучения параграфа можно пропустить задачи V.94 и V.95, вернувшись к ним после изучения формулы перехода к другому основанию.
2. Сразу после понятия логарифма определить логарифмическую функцию, построить по точкам её график, а затем решать задачи V.86—V.108. После этого изучить свойства логарифмов, связанные с арифметическими действиями, а затем монотонность логарифмической функции.

Основным применением в школьном курсе свойства монотонности логарифмической функции является решение логарифмических неравенств. Поэтому, несмотря на то что соответствующая теория будет изложена в главе XIII учебника 11 класса, уже в задачах к § 31 учащимся предлагается решить простейшие логарифмические неравенства. Из нашего опыта известно, что при таком построении курса учащиеся впоследствии не испытывают затруднений с решением логарифмических неравенств.

Задачи V.86—V.87 стоит рассмотреть сразу после определения логарифма. Их можно решить, просто дословно применяя определение. Например: «В какую степень нужно возвести 3, чтобы получить $\sqrt{3}$? В степень $\frac{1}{2}$. Значит, $\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$».

В задачах V.88—V.89 к знанию определения логарифма добавляется использование простейших правил действий со степенями. Например: $3^{1+\log_3 6} = 3^1 \cdot 3^{\log_3 6} = 3 \cdot 6 = 18$. Или: $4^{\log_2 7 + 1} = 4^{\log_2 7} \cdot 4^1 = (2^2)^{\log_2 7} \cdot 4 = 4 \cdot 2^{2\log_2 7} = 4 \cdot (2^{\log_2 7})^2 = 196$.

В задачах V.90—V.91 формулы, которыми заданы функции, преобразуются к известным стандартным функциям, которые нужно построить с учётом области определения. Например: $x^{\log_{x^2} 2} = (x^2)^{\frac{1}{2}\log_{x^2} 2} = \left((x^2)^{\log_{x^2} 2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}}$. Однако исходное выражение определено при $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. График представлен на рисунке 5.6.

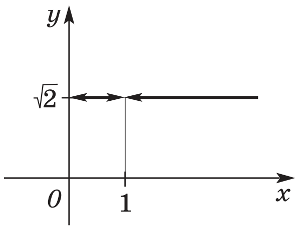


Рис. 5.6

Задача V.93 является пропедевтической для дальнейшего изучения логарифмической функции и её монотонности.

В задачах V.96, V.99—V.103 ответы не всегда «хорошие», чтобы приучить учеников руководствоваться при решении задачи математическими соображениями, а не тем, что ответ получился «некруглый».

В задаче V.105 важно, чтобы ученики «не испугались» внешнего вида, а решали это уравнение в соответствии с определением логарифма.

Решение задач V.131 и V.133 использует формулу замены основания на аргумент с последующей заменой переменной. При этом полезно заострить внимание учащихся на рациональности приведения исходного уравнения к уравнению относительно логарифма с постоянным основанием. Например, в задании V.131, *а* лучше свести исходное уравнение к уравнению относительно $\log_3 x$, чем относительно $\log_x 3$.

V.93. а) $\log_2 7 = \log_4 80$. **Решение.** Пусть $\log_2 7 = a$. Тогда $2^a = 7$. Так как $2^3 = 8$ и функция 2^x возрастает, то $a < 3$. С другой стороны, пусть $\log_4 80 = b$. Тогда $4^b = 80$. Поскольку $4^3 = 64$ и функция 4^x возрастает, то $b > 3$. Таким образом, $a < b$.

б) $\log_{0,1} 6 > \log_{0,1}(4\pi^2 + 1)$. **Решение.** Пусть $\log_{0,1} 6 = a$. Тогда $0{,}1^a = 6$, откуда $0{,}1^{2a} = 36$, т. е. $0{,}01^a = 36$. Если $\log_{0,01}(4\pi^2 + 1) = b$, то $0{,}01^b = 4\pi^2 + 1 > 36$. Поскольку $0{,}1^x$ — убывающая функция, то $b < a$.

в) $\log_2 5 > \log_3 5$. **Решение.** Ясно, что показатель степени, в которую нужно возвести 2, чтобы получить 5, больше, чем показатель степени, в которую нужно возвести 3, чтобы получить 5.

г) *Указание.* Решение аналогично предыдущему пункту.

V.96. в), г) *Указание.* Не нужно «стесняться» громоздких ответов в этих уравнениях.

V.97. *Замечание.* Полезно ещё раз обратить внимание учащихся, что проверку области определения при решении этих примеров проводить не надо (аналогично примеру 23 учебника).

V.98. а) $\left(\frac{2}{3}; 1\right) \cup (1; +\infty)$. б) $(-\infty; 2) \cup (2; 5) \cup (5; 6)$. в) $(0; 1) \cup (1; 2)$. г) $(1; +\infty)$. д) $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$.

V.99. а) $x = \log_3 2$. б) $x = \log_5 3$. *Указание.* При решении задачи следует обратить внимание на то, что поиск ООУ не требуется. Если обозначить $t = 5^x$, то уравнение будет равносильно системе $\begin{cases} 2t^2 - t + 1 = (2t - 2)^2, \\ t \geqslant 1, \end{cases}$ полученной возведением обеих частей уравнения в четвёртую степень.

V.100. а) $\{2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\}$. **Решение.**

$$\log_x(x^2 - 3x + 2) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ x = x^2 - 3x + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{2}, \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2}, \\ x = 2 + \sqrt{2}. \end{cases}$$

Указание. Рассуждения аналогичны решению примера 24 учебника. Обратим внимание, что при решении уравнения не требовалось находить ООУ, поскольку условие $x > 0$ обеспечивает выполнение условия $x^2 - 3x + 2 > 0$ для корней уравнения $x = x^2 - 3x + 2$.

б) $\left\{\frac{5-\sqrt{17}}{2}; \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right\}$. в) $x = \frac{1}{3}$. г) $x = \sqrt{2} - 1$. д) Нет решений.

V.101. а) $x = \sqrt{2} - 2$. б) $x = \frac{7+\sqrt{45}}{2}$.

V.102. а) $x = \log_3 \frac{6}{5}$. *Замечание.* Обратим внимание, что при решении этого примера вообще нет нужды «заботиться» об ООУ, поскольку при подстановке корней уравнения $2 \cdot 3^x - 2 = 3^{x-1}$ в исходное уравнение выражение $2 \cdot 3^x - 2$ будет положительным.

б) $x = \log_2 6$.

V.103. а) **Решение.** $\log_9(2 + 3^x) = x \Leftrightarrow 2 + 3^x = 9^x \Leftrightarrow \Leftrightarrow 3^x = 2 \Leftrightarrow x = \log_3 2$. В этом решении также не требуется «заботиться» об ООУ.

б) $x = \log_7 8$. в) $x = 1$.

V.104. а) $\{1; 3\}$. б) $x = 3$.

V.105. а) $x = 27$. б) $x = 2^{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}$.

V.106. а), б) *Указание.* Решение аналогично решению примера 27 учебника. в), г) *Указание.* Несколько сложнее, поскольку основание и аргумент логарифма содержат одни и те же простые множители.

в) **Решение.** Предположим, что $\log_{24} 12$ — рациональное число, тогда $\log_{24} 12 = \frac{p}{q}$, где p — целое число, а q — натуральное число. Следовательно, $24^{\frac{p}{q}} = 12$, откуда $24^p = 12^q$. Аналогично решению примера 27 учебника получаем, что p — натуральное число. Разложив на простые множители числа 12 и 24, получаем равенство $2^{3p} \cdot 3^p = 2^{2q} \cdot 3^q$. Согласно основной теореме арифметики одно и то же натуральное число имеет единственное разложение на простые множители. Поэтому должно выполняться условие равенства показателей при одинаковых простых множителях в левой и правой частях равенства, т. е. $\begin{cases} 3p = 2q, \\ p = q, \end{cases}$ откуда $p = q = 0$, что невозможно. Значит, наше предположение неверно.

г) *Указание.* Решение аналогично решению задачи V.106, *в*.

Замечание. Аналогично решению задачи V.106, *в* можно доказать следующий критерий рациональности числа $\log_a b$, где a и b — натуральные числа, не равные 1.

Критерий. Число $\log_a b$ — рациональное тогда и только тогда, когда наборы простых делителей натуральных не равных единице чисел a и b одинаковы, а показатели простых делителей в каноническом разложении этих чисел пропорциональны.

V.107. а) Уравнение решений не имеет. **Решение**. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x+1>0, \\ x+1\neq 1, \\ x+1=2x-x^2. \end{cases}$$

Последнее уравнение не имеет решений.

б), в) $a \leqslant 0$. Требуется найти все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x+a>0, & (1) \\ x+a\neq 1, & (2) \\ 2ax-x^2>0 & (3) \end{cases}$$

не имеет решений. При $a=0$ неравенство (3), а значит, и вся система решений не имеет. При $a\neq 0$ множеством решений неравенства (3) является интервал с концами 0 и $2a$. Если система, состоящая из неравенств (1) и (3), имеет решение, то этим решением является интервал, состоящий более чем из одной точки, поэтому условие (2) «выколет» из этого интервала не более одной точки, а значит, множество решений всей системы будет непустым и, более того, будет состоять из двух интервалов.

Поэтому, чтобы система не имела решений, необходимо и достаточно, чтобы система, состоящая из неравенств (1) и (3), не имела решений. Множеством решений неравенства (3) является промежуток, а множеством решений неравенства (1) — открытый луч $(-a, +\infty)$. Чтобы эти два множества не имели общих точек, необходимо и достаточно, чтобы левый конец луча был правее правого конца промежутка или равен ему (рис. 5.7).

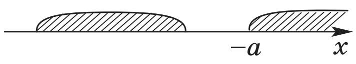


Рис. 5.7

Таким образом, требуется выполнение системы $\begin{cases} -a\geqslant 0, \\ -a\geqslant 2a \end{cases}$ (вместо того, чтобы сначала сравнить между собой числа 0 и $2a$, а затем наибольшее сравнить с числом $-a$, мы требуем, чтобы $-a$ было не меньше любого из двух чисел, что эквивалентно тому, что $-a$ будет не меньше большего из этих двух чисел). Из системы получим $a \leqslant 0$ (при этом случай $a = 0$ был рассмотрен ранее).

г) $\left(\frac{1}{4};\ 4-\sqrt{12}\right) \cup \left(4+\sqrt{12};\ +\infty\right)$. **Решение.** Можно рассматривать только $a > 0$, поскольку при $a \leqslant 0$ функция не определена. Уравнение $f(x) = 1$ равносильно системе

$$\begin{cases} a + x = 2ax - x^2, & (1)\\ a + x > 0, & (2)\\ a + x \neq 1. & (3)\end{cases}$$

Пусть один из корней уравнения (1) при некотором значении a удовлетворяет условию $a + x = 1$. Откуда $a = 1 - x$ и, подставив это выражение в (1), получим уравнение $1 = 2(1 - x)x - x^2$, которое не имеет решений. Тем самым при всех значениях a для корней уравнения (1) выполнено условие (3), поэтому в дальнейших рассмотрениях про условие (3) можно забыть.

Выясним, при каких значениях a система

$$\begin{cases} a + x = 2ax - x^2, & (5)\\ a + x > 0 & (6)\end{cases}$$

имеет непустое множество решений, т. е. при каких значениях a уравнение (5) имеет хотя бы один корень, больший $-a$.

Уравнение (5) можно привести к виду $x^2 + (1 - 2a)x + a = 0$. Чтобы система имела решения, необходимо, чтобы уравнение (5) имело решение, т. е. чтобы его дискриминант был неотрицателен. Решая неравенство $(1 - 2a)^2 - 4a \geqslant 0$, получаем $a \in \left(-\infty;\ 4-\sqrt{12}\right) \cup \left(4+\sqrt{12};\ +\infty\right)$.

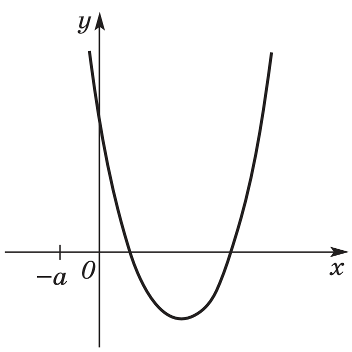


Рис. 5.8

Пусть $g(x) = x^2 + (1 - 2a)x + a$. Так как $g(-a) = 3a^2 > 0$, то точка $-a$ лежит вне промежутка между корнями уравнения (5). Значит, чтобы последняя система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы оба корня были больше, чем $-a$, т. е. чтобы абсцисса вершины параболы $y = g(x)$ была бы больше, чем $-a$ (рис. 5.8). Решая неравенство $\frac{2a-1}{2} > -a$, получаем $a > \frac{1}{4}$.

Учитывая условие существования корней, получаем $a \in \left(\frac{1}{4};\ 4-\sqrt{12}\right) \cup (4+\sqrt{12};\ +\infty)$.

V.108. **Решение.** Пусть количество знаков натурального числа n равно k. Это значит, что $10^{k-1} \leqslant n < 10^k$, откуда $k-1 \leqslant \lg n < k$. Таким образом, $k = [\lg n] + 1$.

Замечание. С задачей V.108 тесно связаны задачи V.149 и V.150.

V.110. а) $\sqrt{5}$. б) 25.

V.111. При решении заданий *а—в* полезно сравнить затраченное время с временем, затраченным на решение аналогичных задач V.87. д) $\frac{1}{20}$.

V.112. а) $\left\{1;\ \frac{5}{2}\right\}$. б) $x = 16$. **Решение.** Поскольку в уравнении фигурирует $\log_2 x$, то $x > 0$, а тогда $\log_4 x^2 = \log_2 x$. Таким образом, уравнение сводится к уравнению $\log_2 x = 4$.

в) $x = 1$. **Решение.** Необходимо учесть замечание на с. 259 учебника. Действительно, уравнение сводится к виду $\log_3 x + \log_3(x+2) = 1$. Область определения этого уравнения: $x > 0$. Применив формулу логарифма произведения «справа налево», получим $\log_3(x(x+2)) = 1$, откуда $x(x+2) = 3$, т. е. $x = 1$ или $x = -3$. Но $x = -3$ не входит в область определения исходного уравнения.

г) 3^{12}. **Решение.** Применив свойство 4 действий с логарифмами (с. 259 учебника) к двум последним слагаемым, получим

$$\log_3 x + \frac{1}{2}\log_3 x + \frac{1}{3}\log_3 x = 22,$$

откуда $\frac{11}{6}\log_3 x = 22$, т. е. $\log_3 x = 12$, а тогда $x = 3^{12}$.

V.113. а) $\varnothing$. **Решение.** ООУ: $x > 5$. При $x > 5$ получим

$$\log_4(x^2 - 4x + 4) = \log_2(x-2),$$

откуда исходное уравнение приводится к виду $\log_2 \frac{x-5}{x-2} = 2$, а тогда $\frac{x-5}{x-2} = 4$. Значит, $x = 1$. Но $x = 1$ является посторонним корнем (не входит в ООУ).

б) $x = -\frac{2}{3}$. **Решение.** В силу замечания § 31 (с. 259) получим $\log_{\frac{1}{9}}(9x^2 + 6x + 1) = \log_{\frac{1}{3}}|3x+1|$. При этом в отличие от условия задачи V.113, *а* на ООУ модуль может раскрываться обоими способами. Уравнение сводится к виду $\log_3 \frac{x+1}{|3x+1|} = -1$.

Раскроем модуль. При $-1 < x < -\frac{1}{3}$ выполняется

$$\log_3 \frac{x+1}{-3x-1} = -1 \Rightarrow \frac{x+1}{-3x-1} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \text{ —}$$

является корнем уравнения; при $x > \frac{1}{3}$ выполняется

$$\log_3 \frac{x+1}{3x+1} = -1 \Rightarrow \frac{x+1}{3x+1} = \frac{1}{3},$$

и значит, корней нет.

Замечание. Важно обратить внимание на то, что при типичной ошибке, связанной с неверным применением свойств логарифма без учёта упомянутого замечания, получается неверный ответ!

V.114. а) $\left\{2; \frac{\sqrt{5}-2}{2}\right\}$. **Решение.** Преобразуем левую и правую части, учитывая ООУ: $x > \frac{2}{9}$. Получим

$$\lg \frac{9x-2}{x+2} = \lg x^2.$$

«Снимем логарифмы», и уравнение примет вид

$$\frac{9x-2}{x+2} = x^2 \qquad (1),$$

откуда

$$x^3 + 2x^2 - 9x + 2 = 0.$$

Подбором находим корень $x = 2$ и, разделив на $x - 2$ многочлен в левой части уравнения, приходим к уравнению $x^2 + 4x - 1 = 0$. Корень $x = \frac{-2-\sqrt{5}}{2}$ не входит в ООУ, а корень $x = \frac{-2+\sqrt{5}}{2}$ входит в ООУ.

Замечание. Отметим, что не слишком приятно сравнивать число $\frac{\sqrt{5}-2}{2}$ с числом $\frac{2}{9}$. Проанализировав уравнение (1), можно понять, что его корни будут либо больше $\frac{2}{9}$, либо меньше -2 (поскольку левая часть этого уравнения при подстановке корня этого уравнения получается равной неотрицательному числу). Поскольку $\frac{\sqrt{5}-2}{2} > -2$, то $\frac{\sqrt{5}-2}{2} > \frac{2}{9}$. б) $x = 9$.

V.115. а) $\{1; -1\}$. б) $\{-7; 9\}$.

V.116. $x = \pm\dfrac{1+\sqrt{37}}{6}$.

V.118. *Замечание.* Полезно обратить внимание, как «работает» формула замены аргумента на основание.

V.119. *Замечание.* Полезно заострить внимание учащихся на любопытном равенстве $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, которое проще всего доказать, логарифмируя обе части по основанию b.

V.120. *Указание.* Перейдя к основанию 3, получим

$$\log_{45}15 = \frac{\log_3 45}{\log_3 15} = \frac{\log_3 9 + \log_3 5}{\log_3 5 + \log_3 3} = \frac{2+a}{1+a}.$$

V.121. $\dfrac{2}{3b} - \dfrac{2}{3}$. **Решение.** В этом примере по сравнению с предыдущим следует сделать лишний шаг, записав условие $\log_{12} 2 = b$ как $\log_2 12 = \dfrac{1}{b}$, откуда $\log_2 3 = \dfrac{1}{b} - 2$. Теперь, перейдя к логарифмам по основанию 2, получим

$$\log_8 36 = \frac{1}{3}\log_2 36 = \frac{1}{3}(2 + 2\log_2 3) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(2 + 2\left(\frac{1}{b} - 2\right)\right) = \frac{2}{3b} - \frac{2}{3}.$$

V.122. $\dfrac{ab+2b}{2ab+1}$. **Решение.** Запишем условие $\log_5 3 = b$ в виде $\log_3 5 = \dfrac{1}{b}$. Теперь ясно, что следует перейти к основанию 3:

$$\log_{20}18 = \frac{\log_3 18}{\log_3 20} = \frac{2 + \log_3 2}{2\log_3 2 + \log_3 5} = \frac{2+a}{2a + \frac{1}{b}} = \frac{ab+2b}{2ab+1}.$$

V.123. $\dfrac{ab+b+1}{ab+2b}$. **Решение.** Запишем условие $\log_5 2 = b$ как $\log_2 5 = \dfrac{1}{b}$. Теперь ясно, что нужно перейти к основанию 2:

$$\log_{12} 30 = \frac{\log_2 30}{\log_2 12} = \frac{\log_2 3 + \log_2 5 + 1}{\log_2 3 + 2} = \frac{a + \frac{1}{b} + 1}{a+2} = \frac{ab+b+1}{ab+2b}.$$

V.124. $\dfrac{a+2b-2}{1-a}$. **Решение.** Перейдём к основанию 10:

$$\log_5 3{,}38 = \frac{\lg 3{,}38}{\lg 5} = \frac{\lg 2 + \lg 1{,}69}{\lg 5} = \frac{\lg 2 + \lg\left(\frac{13}{10}\right)^2}{\lg 5} = \frac{a+2b-2}{\lg 5}.$$

Нужно выразить $\lg 5$. Заметим, что $5 = 10 : 2$, откуда $\lg 5 = \lg 10 - \lg 2$, т. е. $\lg 5 = 1 - a$. Итак, $\log_5 3{,}38 = \dfrac{a + 2b - 2}{1 - a}$.

V.126. $\dfrac{12\sqrt{3} + 4}{24\sqrt{3} + 3}$. **Решение.** Способ 1. Перейдём к основанию n:

$$\log_{m^2\sqrt[4]{n}}(m\sqrt[3]{n}) = \frac{\log_n m + \log_n \sqrt[3]{n}}{\log_n m^2 + \log_n \sqrt[4]{n}} = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{3}}{2\sqrt{3} + \frac{1}{4}} = \frac{12\sqrt{3} + 4}{24\sqrt{3} + 3}.$$

Способ 2. Из условия следует, что $m = n^{\sqrt{3}}$, откуда

$$\log_{m^2\sqrt[4]{n}}(m\sqrt[3]{n}) = \log_{n^{2\sqrt{3} + \frac{1}{4}}}\left(n^{\sqrt{3} + \frac{1}{3}}\right) = \frac{\sqrt{3} + \frac{1}{3}}{2\sqrt{3} + \frac{1}{4}}.$$

V.127. $-\dfrac{7}{15}$.

V.128. $\dfrac{18 + 3\log_2 3}{3 - 2\log_2 3}$. **Решение.** Рассмотрим условие $\log_a 2 = \log_b 3$. Используя формулу замены аргумента на основание, получим $\log_2 a = \log_3 b$. Возведя теперь 3 в обе части этого равенства, получим $b = 3^{\log_2 a}$, откуда $b = a^{\log_2 3}$ (см. замечание к задаче V.119). Теперь подставим в исходное выражение $b = a^{\log_2 3}$ и получим

$$\log_{\frac{\sqrt{a}}{b^{\frac{1}{3}}}}\left(a^3\sqrt{b}\right) = \log_{a^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\log_2 3}}\left(a^{3 + \frac{1}{2}\log_2 3}\right) = \frac{3 + \frac{1}{2}\log_2 3}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\log_2 3}.$$

V.129. $\dfrac{2 + \log_5 3}{\frac{1}{2}\log_5 3 + \frac{1}{3}}$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи V.128.

V.130. а) **Решение.** Поскольку $c \neq 1$, из формулы замены основания на аргумент получаем, что $\log_c a = \log_c b$, откуда $a = b$.

б) Свойство верно, если $c \neq 1$.

V.131. а) $\{\sqrt{3};\ 9\}$. б) $\left\{5^{\frac{3 + \sqrt{17}}{2}};\ 5^{\frac{3 - \sqrt{17}}{2}}\right\}$.

V.132. а) $x = 3$. *Указание.* Решение аналогично приведённому в примере 36 учебника.

б) $x = 3$. *Указание.* Уравнение полезно решить с помощью замены $y = x^2 - x$.

V.133. а) $\left\{8;\ \frac{1}{\sqrt{3}}-1\right\}$; б) $\left\{\frac{1}{9};\ 3\right\}$.

V.134. а) **Решение.** Заметим, что $\log_4 81=\log_2 9$. По свойству возрастания логарифмической функции, основание которой больше 1, получаем $\log_2 7<\log_2 9$.

б) **Решение.** $\log_{0,01}(4\pi^2)=\log_{0,1}(2\pi)<\log_{0,1}6$, поскольку $2\pi>6$, а функция $y=\log_{0,1}x$ убывает.

V.136. а) **Решение.** Заметим, что $8^{1,5}=\sqrt{512}<<\sqrt{529}=23$, поэтому $\log_8 8^{1,5}<\log_8 23$.

б) **Решение.** Заметим, что $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2,5}=\sqrt{\frac{3^5}{2^5}}=\sqrt{\frac{243}{32}}<7$, поэтому $\log_{\frac{2}{3}}\left(\frac{2}{3}\right)^{-2,5}>\log_{\frac{2}{3}}7$.

V.137. а) **Решение.** Рассмотрим логарифмы обоих чисел по основанию 7. Ясно, что в силу возрастания функции $\log_7 x$ сами числа соотносятся по величине так же, как эти их логарифмы. Таким образом, нужно сравнить числа $\log_3 5$ и $\log_3 0,5\cdot\log_7 0,49$. Преобразуем второе число:

$$\log_3 0,5\cdot\log_7 0,49=-\log_3 2\cdot 2\log_7\frac{7}{10}=$$
$$=-2\log_3 2+2\log_3 2\cdot\log_7 10.$$

Сравнение чисел $\log_3 5$ и $-2\log_3 2+2\log_3 2\cdot\log_7 10$ эквивалентно сравнению чисел $\log_3 5+2\log_3 2$ и $2\log_3 2\cdot\log_7 10$, которое, в свою очередь, эквивалентно сравнению чисел $\log_3 20$ и $2\log_3 2\cdot\log_7 10$. Теперь, поделив обе части предполагаемого неравенства на $\log_3 2$, получим эквивалентное неравенство между числами $\frac{\log_3 20}{\log_3 2}$ и $\log_7 100$, т. е. между числами $\log_2 20$ и $\log_7 100$. Очевидно, что $\log_2 20>\log_2 16=4$, в то время как $\log_7 100<\log_7 2401=4$. Таким образом, первое число больше.

Замечание. Решая этот пример, полезно чётко зафиксировать фрагменты решения, использующие монотонность логарифмической функции.

б) **Решение.** Поскольку $\sqrt{5}-2=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$, взяв от обоих чисел логарифм по основанию $\sqrt{5}+2>1$, приходим к задаче сравнения чисел $\log_{0,5}7$ и $-\log_2 6$, эквивалентной исходной задаче. Получаем

$$\log_{0,5}7=-\log_2 7<-\log_2 6.$$

Итак, первое число меньше.

V.138. а) **Решение.** $2\log_7 3 = \log_7 9$, а $\log_{0,1} 0,2 = \log_{10} 5$. Аналогично задаче V.135, *а* получаем $\log_{10} 5 < \log_7 5 < \log_7 9$.

б) **Решение.** Аналогично заданию *а* имеем

$$\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(\sqrt{5}-2) = \log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(\sqrt{5}+2),$$

а $\log_{\sqrt{5}} 2 = \log_5 4$. Поскольку $\sqrt{3}+\sqrt{2} < 5$, а $\sqrt{5}+2 > 4$, получаем

$$\log_{\sqrt{3}+\sqrt{2}}(\sqrt{5}+2) > \log_5 4.$$

V.139. а) **Решение.** Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 - 2x$. Эта функция убывает на луче $(-\infty; 1]$. На этом луче лежат числа $\log_8 5$ и $\log_4 3$. Поэтому достаточно сравнить эти числа, чтобы сделать вывод о соотношении (с противоположным знаком неравенства) исходных чисел, равных $f(\log_8 5)$ и $f(\log_4 3)$.

Заметим, что $\log_8 5 = \frac{1}{3}\log_2 5$, а $\log_4 3 = \frac{1}{2}\log_2 3$. Поэтому сравнение чисел $\log_8 5$ и $\log_4 3$ сводится к сравнению чисел $2\log_2 5$ и $3\log_2 3$, равных соответственно $\log_2 25$ и $\log_2 27$. Таким образом, $\log_8 5 < \log_4 3$, а тогда $f(\log_8 5) > f(\log_4 3)$.

б)—г) *Указание.* Решения аналогичны решению задачи V.139, *а*.

б) Первое число больше. в) Первое число меньше. г) Первое число меньше.

V.140. а) **Решение.** Так как $\log_2 5 - \log_2 7 = \log_2\left(\frac{5}{7}\right)$ и $1 - \log_2 5 = \log_2\left(\frac{2}{5}\right)$, то поскольку $\frac{5}{7} > \frac{2}{5}$, то и

$$\log_2\left(\frac{5}{7}\right) > \log_2\left(\frac{2}{5}\right).$$

б)—г) *Указание.* Решаются аналогично задаче V.140, *а*.

V.141. а) Заметим, что $\log_{24} 72 = 1 + \log_{24} 3$, а $\log_{12} 18 = 1 + \log_{12} 1,5$. Поэтому достаточно сравнить $\log_{24} 3$ и $\log_{12} 1,5$. Для этого сравним обратные числа, т. е. $\log_3 24$ и $\log_{1,5} 12$. Заметим, что $\log_3 24 < \log_3 27 = 3$, в то время как

$$\log_{1,5} 12 > \log_{1,5} 4,5 > \log_{1,5}(2,25 \cdot 2) > \\ > \log_{1,5}(1,5^3) = 3.$$

Таким образом, $\log_3 24 < \log_{1,5} 12$, откуда $\log_{24} 3 > \log_{12} 1,5$, а значит, $\log_{24} 72 > \log_{12} 18$.

б) Первое число меньше. *Указание.* Решение аналогично решению задаче V.141, *а*. в) Первое число больше. г) Первое число меньше.

V.142. *Указание.* Решение аналогично решению примера 38 учебника.

V.143—V.145. *Замечание.* Задачи можно давать на устную работу или самостоятельную работу в течение 10—15 минут.

Считаем необходимым проговаривать с учениками возможность обойтись без поиска ООН в каждом конкретном случае.

V.143. а) *Указание.* Область определения неравенства искать не нужно, ибо после применения свойства монотонности логарифмической функции неравенство сводится к неравенству $3x - 1 > 4$, решения которого содержат решения неравенства $3x - 1 > 0$.

V.143. б) *Указание.* После избавления от логарифма получаем неравенство $4x + 3 < 4$, следствием которого неравенство $4x + 3 > 0$, задающее область определения исходного неравенства, не является. Поэтому требуется найти ООН и решить неравенство $4x + 3 < 4$ на ООН.

Глава VI. Тригонометрия

В данной главе школьники знакомятся с тригонометрическими функциями. Основные объекты изучения главы — синус, косинус, тангенс и котангенс уже встречались школьникам в геометрии. Здесь тригонометрические функции определяются с помощью нового объекта — тригонометрической окружности, и авторы считают, что не стоит жалеть времени и добиваться от школьников прочных навыков и умения работать с этим объектом (изображать числа на окружности, вычислять их координаты, решать простейшие тригонометрические уравнения и т. п.).

Во многих задачах (например, на сравнение значений тригонометрических функций и решение простейших уравнений) полезно и удобно изображать числа на окружности. Решение при этом часто становится наглядным, даже если формально не требуется обращения к тригонометрической окружности.

В этой главе изучаются основные свойства тригонометрических функций. Фактически на этом этапе школьники познакомились со всеми элементарными функциями (степенной, логарифмической, показательной, тригонометрическими и т. д.), а в 11 классе будет расширен аппарат исследования свойств этих функций (и их композиций) и будут подробно изучены такие свойства, как непрерывность, дифференцируемость и т. п.

Также в этой главе школьники знакомятся с основными методами решения тригонометрических уравнений.

Приведём примерное планирование изучения главы VI.

Глава VI. Тригонометрия	**27**	**34**
Обобщённый угол. Измерение углов в радианах и градусах. Единичная (тригонометрическая) окружность	2	2
Синус, косинус, арксинус, арккосинус. Тангенс, котангенс, арктангенс, арккотангенс	3	5
Тригонометрические формулы. Метод вспомогательного аргумента	6	8
Контрольная работа № 9	2	2

Продолжение

Тригонометрические функции и их свойства. Обратные тригонометрические функции	3	5
Контрольная работа № 10	1	2
Тригонометрические уравнения	8	8
Контрольная работа № 11	2	2

§ 32. Обобщённый угол. Измерение углов в радианах и градусах. Единичная (тригонометрическая) окружность

Материал этого параграфа прост, однако ему следует уделить достаточно внимания. В параграфе вводится понятие тригонометрической окружности, с помощью которой в дальнейшем определяются синус и косинус числа. Если не отработать навыки работы с тригонометрической окружностью, то у школьников могут возникнуть проблемы с пониманием определения тригонометрических функций.

Важно обратить внимание, что раньше у нас была одна модель для изображения вещественных чисел — координатная прямая, а сейчас появилась вторая — тригонометрическая окружность. При этом каждому вещественному числу соответствует единственная точка на окружности, однако в отличие от координатной прямой каждой точке на окружности соответствует бесконечное количество чисел.

Отдельно отметим, что стоит добиться от школьников понимания записей вида $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. (Что означают эти записи? Какие числа удовлетворяют этому равенству или принадлежат данному объединению промежутков?) Этому могут помочь задачи VI.14—VI.18.

Решения и указания к задачам

VI.1. а) **Решение.** $40^\circ = 40 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{9}$. б) $\frac{3\pi}{4}$. в) $\frac{5\pi}{2}$. г) **Решение.** $\pi^\circ = \pi \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi^2}{180}$.

Замечание. В соответствии с договорённостями, описанными в учебнике, говоря про обобщённые углы, мы опускаем слово «радиан» (т. е. в задаче VI.1, *а* ответ $\frac{2\pi}{9}$ радиан).

VI.2. а) **Решение.** $\frac{11\pi}{4} = \frac{11\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 495^\circ$. б) 140°. в) 3330°. г) **Решение.** $3{,}14 = 3{,}14 \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = \frac{565{,}2^\circ}{\pi}$. д) $\frac{-1800^\circ}{\pi}$.

VI.3. Решение. Сумма всех углов шестиугольника равна 720°, таким образом, мера одного угла равна 120° или $\frac{2\pi}{3}$ радиан.

VI.4. а) **Решение.** $\frac{22}{7} > 3{,}142 > \pi$ (получить первое неравенство можно, просто начав делить 22 на 7 в столбик, получится $\frac{22}{7} = 3{,}1428\ldots$).

б) **Решение.** Поскольку $\frac{36}{11} = 3{,}2\ldots > \pi$, то и $6 > \frac{11\pi}{6}$.

в) **Решение.** $\frac{100}{32} = 3{,}125 < \pi$, а значит, $100 < 32\pi$.

VI.6. *Замечание.* В этой задаче, а также в задачах VI.7 и VI.8, конечно, невозможно «точно» изобразить точку на окружности. Обычно достаточно определить четверть, в которой расположена точка, а также ближайшую к ней точку на окружности из «стандартных» — кратных $\frac{\pi}{6}$ или $\frac{\pi}{4}$. Для этого можно вычитанием (прибавлением) числа, кратного 2π, «привести» данное число к промежутку $[0; 2\pi)$ (или $[-\pi; \pi)$) и определить ближайшие (наибольшее и наименьшее) числа из «стандартных».

а) $\frac{5\pi}{4} < 4 < \frac{4\pi}{3}$ (рис. 6.1). б) $11 > \frac{7\pi}{2}$ $\left(\frac{7\pi}{2} = 10{,}99\ldots\right)$. Мы не видим ничего предосудительного, если в этой задаче (впрочем, как и во многих других) ученик воспользуется калькулятором для вычисления числа $\frac{7\pi}{2}$, а потом на основании этих вычислений сделает вывод о расположении числа 11 на окружности (рис. 6.1).

в) $0 < 2\pi - 6 < \frac{\pi}{6}$ (см. рис. 6.1). г) $100 - 32\pi \approx -\frac{\pi}{6}$ $\left(100 - 32\pi = -0{,}53\ldots,\ -\frac{\pi}{6} = -0{,}52\ldots\right)$ (см. рис. 6.1).

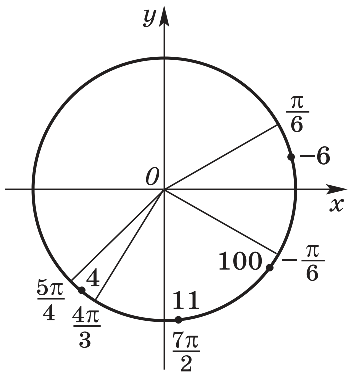


Рис. 6.1

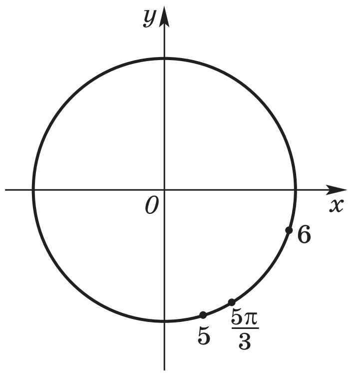


Рис. 6.2

VI.7. а) Наибольшая абсцисса у точки, соответствующей числу 6 (рис. 6.2). б) **Решение.** Числу $\frac{301\pi}{3}$ соответствует та же точка, что и числу $\frac{\pi}{3}$, числу 20 — та же, что и числу $20 - 6\pi$, причём $1 < \frac{\pi}{3} < 20 - 6\pi < \frac{\pi}{2}$. Наибольшая абсцисса у точки, соответствующей числу 1 (рис. 6.3).

VI.8. Решение. Наибольшую ординату имеет точка, соответствующая числу –5, так как $\frac{\pi}{2} - (2\pi - 5) < 2 - \frac{\pi}{2}$ (рис. 6.4).

VI.9. а) (0; 1). б) (1; 0). в) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. г) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$.

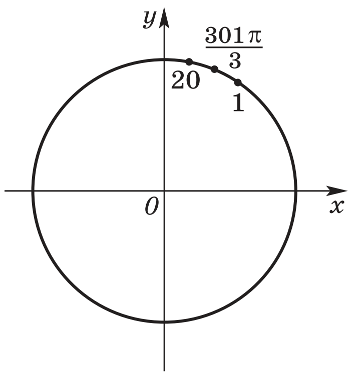


Рис. 6.3

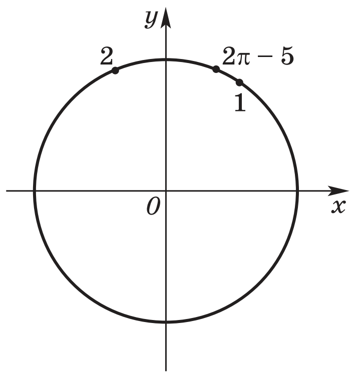


Рис. 6.4

VI.10. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. б) $\pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. в) $\frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.11. *Замечание.* Задача подготавливает учеников к решению простейших тригонометрических уравнений. Фактически в этой задаче нужно решить уравнение вида $\sin x = a$.

а) $\pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$. б) $-\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z};\ \ -\frac{3\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in \boldsymbol{Z}$. в) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. г) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi l,\ l \in \boldsymbol{Z}$.

VI.12. а) Симметричны относительно оси Ox. б) Симметричны относительно начала координат. в) Симметричны относительно начала координат. г) Симметричны относительно оси Oy. д) Симметричны относительно оси Oy.

VI.13. а) $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. б) $\pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. в) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.16. а) $\frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$. б) $\frac{\pi k}{3},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.17. *Указание.* Числам, отличающимся на $2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, соответствует одна и та же точка на окружности. а) $(2\pi k;\ \ \pi + 2\pi k),\ \ k \in \boldsymbol{Z}$. б) $\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right),\ \ k \in \boldsymbol{Z}$. в) $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{4} + 2\pi k\right),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.18. а) $A \notin M$. **Решение.** Основная идея решения примера заключается в том, что $x \in M \Leftrightarrow (x - 2\pi) \in M$, т. е., «вычитая по 2π», мы можем привести число к промежутку $[0;\ 2\pi)$, в котором множеству M принадлежат только числа из промежутка $\left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$. $\frac{119\pi}{24} = \frac{23}{24}\pi + 4\pi$, $\frac{23}{24}\pi \notin \left(\frac{\pi}{6};\ \frac{5\pi}{6}\right)$, т. е. $\frac{119}{24}\pi \notin M$.

б) $A \in M$. **Решение.** Аналогично предыдущему пункту, число приводим к промежутку $[0;\ \pi)$, в котором множеству M принадлежат числа из объединения промежутков $\left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{6};\ \pi\right)$. $-\frac{110\pi}{7} = -16\pi + \frac{2\pi}{7}$, при этом $\frac{2\pi}{7} \in \left[0;\ \frac{2\pi}{3}\right)$, т. е. $-\frac{110\pi}{7} \in M$.

в) $A \in M$. **Решение.** Число 100 приводим к промежутку $[0; \pi)$, в котором множеству M принадлежат числа из объединения промежутков $\left[0; \frac{2\pi}{7}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{7}; \pi\right)$. $100 = 31\pi + (100 - 31\pi)$, при этом $\frac{5\pi}{7} < 100 - 31\pi < \pi$, т. е. $100 \in M$.

§ 33. Синус, косинус, арксинус, арккосинус

Особенностью параграфа является почти одновременное введение прямых и обратных тригонометрических функций.

Если школьники усвоили материал § 32, то у них не возникнет проблем с определением синуса и косинуса произвольного числа: произвольному вещественному числу соответствует точка на окружности. Её абсцисса — косинус этого числа, а ордината — синус. Полезно обратить внимание, что данное определение синуса и косинуса совпадает с определением, данным ранее для углов от 0 до 180°.

Решения и указания к задачам

VI.22. а) $138° < \alpha < 180°$. б) $111° < \alpha < 180°$. в) $\frac{2\pi}{3} < \alpha < \pi$. г) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$. д) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. е) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$.

VI.24. а) Меньше 0. б) Больше 0. в) Больше 0. *Указание.* $529° = 360° + 169°$. г) Меньше 0. *Указание.* $-1261° = (-4) \cdot 360° + 179°$. д) Больше 0. *Указание.* $\frac{113\pi}{11} = 10\pi + \frac{3\pi}{11}$. е) Меньше 0. *Указание.* $11 = 2\pi + (11 - 2\pi)$, при этом $\pi < 11 - 2\pi < 2\pi$. ж) Меньше 0. *Указание.* $9 = 2\pi + (9 - 2\pi)$, при этом $\frac{\pi}{2} < 9 - 2\pi < \pi$.

VI.25. а) **Решение.** $\sin 420° = \sin(420° - 360°) = \sin 60°$.

б) **Решение.** $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$.

в) **Решение.** $2\sin 29° < 2\sin 30° = 2 \cdot 0{,}5 = 1$.

г) **Решение.** $2\cos 61° < 2\cos 60° = 1$.

д) **Решение.** $\sin\frac{5\pi}{11} > \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} > \cos\frac{5\pi}{11}$.

е) **Решение.** $\sin 2 > 0 > \cos 2$.

ж) **Решение.** $\sin 4 < \sin\frac{5\pi}{4} = \cos\frac{5\pi}{4} < \cos 4$.

VI.26. а) Первое меньше. *Указание.* $\sin\frac{13\pi}{9} - \sin\frac{13\pi}{9} \times$ $\times \cos\frac{11\pi}{4} = \sin\frac{13\pi}{9}\left(1 - \cos\frac{11\pi}{4}\right) < 0.$ б) Первое меньше. в) Первое меньше. **Решение.** $\sin 1 \cos 2 < 0 < \sin 2 \cos 1.$

VI.27. а) **Решение.** $\frac{3\pi}{2} < 5 < 6 < 2\pi$, поэтому $\sin 6 >$ $> \sin 5$. б) **Решение.** $\cos 3 = \cos(2\pi - 3)$. $\pi < 2\pi - 3 < 4 < \frac{3\pi}{2}$, поэтому $\cos 3 = \cos(2\pi - 3) < \cos 4$. в) **Решение.** $\sin 20 =$ $= \sin(20 - 6\pi)$, при этом $0 < 1 < 20 - 6\pi < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\sin 20 >$ $> \sin 1$. г) **Решение.** $0{,}5 = \sin\frac{5\pi}{6} > \sin 3$.

VI.28. а) Да. б) Да. *Указание.* $0 < \sin 25° < \sin 30° =$ $= 0{,}5$. в) Нет. г) Нет.

VI.29. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.30. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.32. а) $x = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x =$ $= \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.33. а) $t = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. **Решение.**

$$\cos x \cdot \cos 2x = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \cos t = 1, \\ \cos 2t = 1; \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} \cos t = -1, \\ \cos 2t = -1. \end{cases} & (2) \end{array}\right.$$

Рассмотрим сначала систему (2). Имеем

$$\begin{cases} \cos t = -1, \\ \cos 2t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \pi + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ \cos 2t = -1. \end{cases}$$

Заметим, что $\cos 2 \cdot (\pi + 2\pi k) = \cos(2\pi + 4\pi k) = 1$, поэтому система решений не имеет.

Рассмотрим систему (1). Имеем

$$\begin{cases} \cos t = 1, \\ \cos 2t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ 2t = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$$

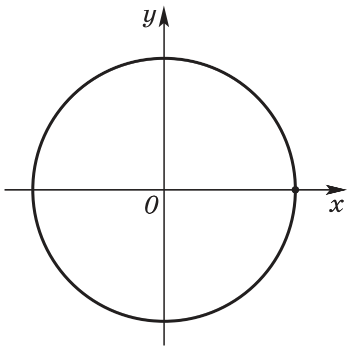


Рис. 6.5

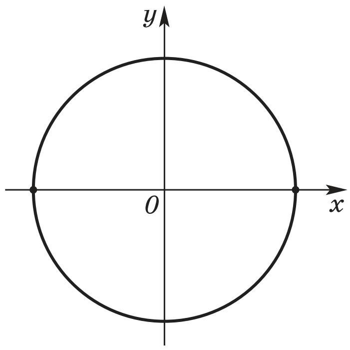


Рис. 6.6

Замечание. В последней системе формально можно было бы использовать только букву k (а не использовать букву n), т. е. записывать систему в виде

$$\begin{cases} t = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, & (1) \\ 2t = 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}. & (2) \end{cases}$$

Действительно, ведь (1) означает, что $t \in \{2\pi k\colon k \in \boldsymbol{Z}\}$, т. е. $t \in \{\ldots, -2\pi, 0, 2\pi, 4\pi, \ldots\}$, параметр k служит только для описания этого множества и «использование буквы k заканчивается в конце строки». Однако первая запись нам представляется более наглядной и удобной.

Разберём более подробно решение системы, так как оно часто вызывает трудности у школьников. Итак, для того чтобы t было бы решением системы, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись два условия: $t \in \{2\pi k\colon k \in \boldsymbol{Z}\}$ и $t \in \{\pi n\colon n \in \boldsymbol{Z}\}$ (во втором равенстве мы поделили обе части на 2). Такого рода условия часто возникают в задачах, связанных с тригонометрическими системами или сводящихся к ним. Обычно самое простое в этих случаях изобразить оба (или больше) множества, которым должно принадлежать t на окружности, и затем взять в качестве ответа пересечение этих множеств. На рисунках 6.5 и 6.6 изображены множества $\{2\pi k\colon k \in \boldsymbol{Z}\}$ и $\{\pi n\colon n \in \boldsymbol{Z}\}$. Пересечение в данном случае совпадает с первым множеством.

б) $\varnothing$. **Решение**. Для того чтобы произведение синуса и косинуса равнялось 1, они должны либо оба быть равны 1, либо оба быть равны –1. Разберём, например, первый случай: $\begin{cases} \sin t = 1, \\ \cos t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}, \\ t = 2\pi n,\ n \in \boldsymbol{Z}. \end{cases}$ Изобразив два соответствующих множества на окружности, увидим, что их пересечение пусто. Аналогично и во втором случае.

VI.34. *Замечание.* Задачу удобно решать, изобразив соответствующие множества на окружности. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $t \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x \in \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; -\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. д) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. е) $x \in \varnothing$. ж) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. з) $t \in \left[-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k; \frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.35. а) $[-1; 3]$. б) $[1; 5]$. в) $[-6; 0]$. г) $\left[\frac{5}{3}; 5\right]$.

VI.36. а) 0. б) $1 + \sin\alpha$. в) **Решение.** $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - \cos^6\alpha - \sin^6\alpha = \sin^4\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \cos^4\alpha(1 - \cos^2\alpha) = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$. г) 0. д) 1. е) -1. ж) **Решение.** $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1$.

VI.37. а) **Решение.**

$$\frac{\cos^4\beta - \sin^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta}{\sin^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\beta} =$$

$$= \frac{\cos^2\beta(\cos^2\beta + \sin^2\beta) - \sin^2\alpha(\sin^2\beta + \cos^2\beta)}{\sin^2\beta(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) - \cos^2\alpha(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} = -1.$$

б) **Решение.** Заметим, что $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x\cos^2 x$, а $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x\cos^2 x + \cos^4 x) = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x\cos^2 x$. Таким образом,

$$\frac{1 - \sin^6 x - \cos^6 x}{1 - \sin^4 x - \cos^4 x} = \frac{3\sin^2 x\cos^2 x}{2\sin^2 x\cos^2 x} = \frac{3}{2}.$$

VI.38. а) **Решение.**

$$\left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}\right)\cos\alpha = \left(\frac{\sqrt{1+\sin\alpha}}{\sqrt{1-\sin\alpha}} + \frac{\sqrt{1-\sin\alpha}}{\sqrt{1+\sin\alpha}}\right)\cos\alpha =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{1+\sin\alpha}\right)^2 + \left(\sqrt{1-\sin\alpha}\right)^2}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}}\cos\alpha =$$

$$= \frac{1 + \sin\alpha + 1 - \sin\alpha}{|\cos\alpha|}\cos\alpha = \frac{2\cos\alpha}{-\cos\alpha} = -2.$$

б) 2, если $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; -2, если $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; не определено, если $\alpha = \pi$.

VI.39. **Решение.**

$$\cos\alpha\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=$$

$$=\cos\alpha\sqrt{\frac{(1+\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}}+\sin\alpha\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)^2}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}}=$$

$$=\cos\alpha\,\frac{1+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}+\sin\alpha\,\frac{1-\cos\alpha}{|\sin\alpha|}=-2-\sin\alpha+\cos\alpha=-2{,}5.$$

VI.40. **Решение.** $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=$ $=\sqrt{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{1{,}2}$. Первое равенство верно для углов первой четверти. В общем случае $\sin\alpha+\cos\alpha=\pm\sqrt{1{,}2}$.

VI.41. *Указание.* Из условия получаем, что $(\sin\alpha+$ $+\cos\alpha)^2=a^2$, откуда $2\sin\alpha\cos\alpha=a^2-1$. Далее воспользоваться равенствами из задачи VI.37, *б* для выражений $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$ и $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$. а) $\frac{-a^4+2a^2+1}{2}$. б) $\frac{-3a^4+6a^2+1}{4}$.

VI.42. **Решение.** $\sin^2 x-\sin^4 x=\sin^2 x\cos^2 x=$ $=\frac{1-(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha)}{2}=\frac{1-a}{2}$.

VI.43. $\frac{1+2a}{3}$. *Указание.* Воспользоваться результатом задачи VI.37, *б*.

VI.44. а) **Решение.** $3\sin^2 x+5\cos^2 x-4=3+2\cos^2 x-$ $-4=2\cos^2 x-1$, наименьшее значение выражения равно -1, наибольшее равно 1.

б) Наибольшее значение выражения $a\sin^2 x+b\cos^2 x$ равно $\max\{a, b\}$, наименьшее — $\min\{a, b\}$.

VI.46. а) 0. б) $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. в) $\pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

VI.47. *Указание.* Значения для синуса и косинуса получаются из основного тригонометрического тождества. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. б) $-\frac{5}{13}$. в) $\frac{3}{5}$.

г) **Решение.** $a^2+2a+2=(a+1)^2+1\geqslant 1$, поэтому $\sin\alpha=1$, отсюда $\cos\alpha=0$.

VI.48. а) $x\in\boldsymbol{R}$.

б) **Решение.** $\sin^4 x+\cos^4 x\leqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

в) **Решение.** Для углов первой четверти $\sin x+\cos x>$ $>\sin^2 x+\cos^2 x=1$.

г) $x=\pi k$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $k, n\in\boldsymbol{Z}$. **Решение.** Заметим, что $\sin^5 x+\cos^4 x\leqslant\sin^2 x+\cos^2 x=1$, при этом равенство достигается, только если одновременно выполняются два равенства: $\sin^5 x = \sin^2 x$ и $\cos^4 x = \cos^2 x$. Из первого равенства получаем, что $\sin x = 0$ или $\sin x = 1$. Учитывая второе равенство, получаем $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

д) **Решение.** $\sin^5 x + \cos^7 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x \leqslant 1$, в то время как $2 - \sin^4 x \geqslant 1$. Отсюда аналогично заданию *г* получаем $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

е) Наименьшее значение -1, наибольшее значение 1. **Решение.** $-1 = -\sin^2 x - \cos^2 x \leqslant \sin^3 x + \cos^3 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Нетрудно привести примеры, когда выражение $\sin^3 x + \cos^3 x$ принимает значения -1 и 1.

VI.49. **Решение.** Для углов первой четверти

$$\sqrt{\sin\alpha} + \sqrt[3]{\cos\alpha} > \sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

VI.50. а) **Решение.**

$$|\sin\alpha\cos\alpha| \leqslant 0{,}5 \Leftrightarrow 1 - 2|\sin\alpha\cos\alpha| \geqslant 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin^2\alpha - 2|\sin\alpha\cos\alpha| + \cos^2\alpha \geqslant 0 \Leftrightarrow (|\sin\alpha| - |\cos\alpha|)^2 \geqslant 0.$$

Замечание. Неравенство легко доказать с помощью формулы синуса двойного угла, но к данному моменту школьники её ещё не знают.

б) *Указание.* Из задачи VI.37, *б* мы знаем, что $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$, дальнейшее получается из задачи VI.50, *а*. в) *Указание.* Следует из задачи VI.50, *а* и задачи VI.37, *б*.

г) **Решение.**

$$\sin^8\alpha + \cos^8\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha =$$
$$= (1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2 - 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha =$$
$$= 1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 2\sin^4\alpha\cos^4\alpha = 2(1 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha)^2 - 1.$$

Учитывая, что (см. задачу VI.37, *а*) $0 \leqslant \sin^2\alpha\cos^2\alpha \leqslant 0{,}25$, получаем требуемое неравенство.

VI.51. а) *Указание.* Воспользоваться неравенством Коши, по которому $\sin x + \frac{1}{\sin x} \geqslant 2$ и $\cos x + \frac{1}{\cos x} \geqslant 2$.

б) *Указание.* Для углов первой четверти $\operatorname{tg} x > \sin x$ и $\operatorname{ctg} x > \cos x$, откуда и получаем нужное неравенство.

VI.52. а) **Решение.** $\cos x \in [-1; 1]$, при этом $-\frac{\pi}{2} < -1 < 1 < \frac{\pi}{2}$. Отсюда получаем, что $\cos(\cos x) > 0$.

б) **Решение.** $\sin x \in [-1; 1]$, при этом $-\frac{\pi}{3} < -1 < 1 < \frac{\pi}{3}$, следовательно, $0{,}5 < \cos(\sin x) \leqslant 1$. *Указание.* Удобно изобразить точки $-\frac{\pi}{3}$, -1, 1, $\frac{\pi}{3}$ на окружности — данные неравенства становятся очевидными.

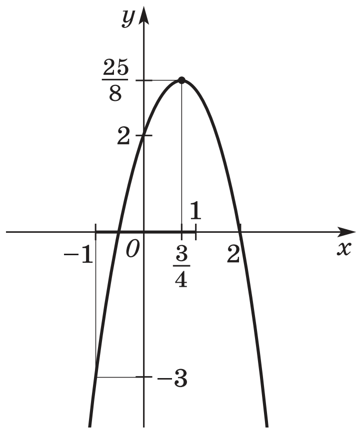


Рис. 6.7

VI.53. $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. *Замечание.* Типичная задача на нахождение множества значений выражения, которое сводится к квадратному относительно какой-либо тригонометрической переменной.

Указание. Свести данное выражение к квадратному относительно синуса: $2\cos^2\alpha + 3\sin\alpha = -2\sin^2\alpha + 3\sin\alpha + 2$. Таким образом, задача сводится к отысканию множества значений выражения $-2t^2 + 3t + 2$, учитывая, что $t = \sin\alpha \in [-1; 1]$. Ответ легко считать с рисунка 6.7. Искомое множество значений выражения равно $\left[-3; \frac{25}{8}\right]$.

VI.54. *Замечание.* Идеологически во всех пунктах решение такое же, как в задаче VI.53. Данное выражение нужно свести к квадратному относительно некоторой переменной, потом посмотреть, какие значения может принимать эта переменная и, наконец, какие значения принимает данное выражение при этих значениях переменной.

а) $[-3; 9]$. *Указание.* $2\cos^2 x + 6\sin x + 3 = -2\sin^2 x + 6\sin x + 5$, $t = \sin x \in [-1; 1]$. б) $\left[-3; \frac{25}{8}\right]$. *Указание.* $2\sin^2\alpha - 3\cos\alpha = -2\cos^2\alpha - 3\cos\alpha + 2$, $t = \cos x \in [-1; 1]$. в) $[0; 3]$. *Указание.* $4\cos^4\alpha - \cos^8\alpha = 4t - t^2$; $t = \cos^4\alpha \in [0, 1]$. г) $\left[0; \frac{16}{5}\right]$. *Указание.* $3 + 2\sqrt{\sin^2\alpha} - 5\sin^2\alpha = 3 + 2|\sin\alpha| - 5\sin^2\alpha$. $t = |\sin\alpha| \in [0; 1]$.

VI.55. а) 0. б) 0. в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. г) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. д) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. е) 1. ж) 1. з) $\frac{1}{2}$.

VI.56. *Указание.* Для того чтобы определить знак синуса или косинуса данного числа, можно отметить его на окружности. При этом предварительно удобно привести данное число вычитанием (прибавлением) чисел, кратных 2π (360°) в промежуток $[0; 2\pi)$ (синус и косинус при этом не изменятся). а) Меньше 0. б) Меньше 0. *Указание.* $\sin 511° = \sin 151° > 0$, $\cos(-192°) < 0$. в) Меньше 0. *Указание.* $\sin 3 > 0$, $\cos 4 < 0$. г) Меньше 0.

VI.57. а) **Решение.** $\frac{3\pi}{2} < 5 < 6 < 2\pi$. Следовательно, $\cos 5 < \cos 6$.

б) **Решение.** $\sin 3 = \sin(\pi - 3)$, $3° = \frac{3\pi}{180} = \frac{\pi}{60}$. $0 < \frac{\pi}{60} < \pi - 3 < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\sin 3° < \sin 3$.

в) **Решение.** $\cos 2 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\right)$, $\sin 6 = \sin(6 - 2\pi)$ (мы «приводим данные числа в одну четверть») $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2} - 2 < 6 - 2\pi < 0$. Следовательно, $\cos 2 < \sin 6$.

VI.58. а) 0. б) 0. в) 0.

VI.59. а) **Решение.** $\frac{3\pi}{2} < 4{,}9 < 5 < 2\pi$. Следовательно, $\cos 4{,}9 < \cos 5$. б) **Решение.** $\cos 40° = \sin(90° - 40°) = \sin 50°$. Следовательно, $\cos 40° > \sin 40°$. в) $\cos 80° < \sin 20°$. г) $\sin 3{,}14 > 0 > \sin 3{,}15$. д) $\sin 0{,}8\pi > \sin 0{,}81\pi$.

VI.60. *Указание.* Для того чтобы удобно было сравнивать синусы и косинусы, можно привести аргументы в первую четверть, пользуясь формулами приведения.

а) $\cos 2 < 0 < \cos 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) < \sin 1 < \sin 2 = \sin(\pi - 2)$.

б) $\sin 6 < 0 < \sin 1 < \sin 2 = \sin(\pi - 2) < \cos 6 = \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + 6\right)$.

VI.61. -1.

VI.62. а) 0. **Решение.** Среди сомножителей есть $\cos 90° = 0$. б) 0. *Указание.* $\cos 1° = -\cos 179°$, $\cos 2° = -\cos 178°$ и т. д.

VI.63. а) $\sin\alpha$. б) $-\cos\alpha$. в) $-\sin\alpha$. г) $\cos\alpha$. д) $\sin\alpha$. е) $-\cos\alpha$.

VI.64. а) 0. б) 0. в) 1. г) 0.

VI.66. *Указание.* Удобно сначала «загнать» аргумент в первую четверть (при этом часто помогает изображение аргумента на окружности), а потом при необходимости применение формул $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$ и $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$.

а) $\cos 311° = \cos 49° = \sin 41°$. б) $\sin 1{,}8\pi = -\sin 0{,}2\pi$. в) $\sin 2 = \sin(\pi - 2)$. г) $\cos 6 = \cos(2\pi - 6)$.

VI.67. а) Равны. б) Равны. *Указание.* $\sin\alpha = \sin(\pi - \alpha)$.

VI.68. *Указание.* В каждом пункте сначала изобразить решения каждого из неравенств на окружности, а потом взять их пересечение.

а) $x \in \left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right] \cup \left[\frac{7\pi}{6} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

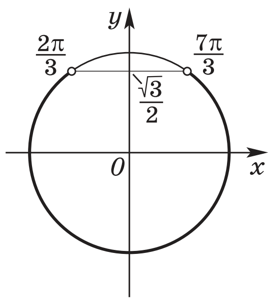


Рис. 6.8

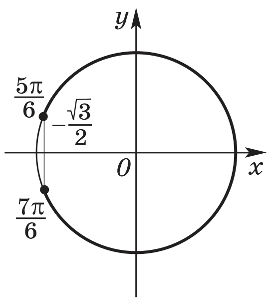


Рис. 6.9

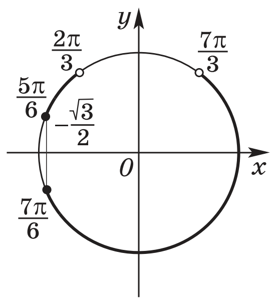


Рис. 6.10

Указание. На рисунках 6.8 и 6.9 изображены решения первого и второго неравенств, на рисунке 6.10 изображено их пересечение. *Замечание.* Обратите внимание, что ошибкой было бы вторую серию промежутков записать в виде $\left[\frac{7\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$ (в этом случае правый конец получился бы меньше левого!). б) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{4\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $\left(\frac{5\pi}{6}+2\pi k;\ \frac{5\pi}{3}+2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{4}+2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.71. а) $x = \frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{7\pi}{6}+2\pi k,\ \ k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x = \arcsin\frac{1}{3}+2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$. г) Решений нет.

VI.73. а) $\frac{\pi}{3}$. *Указание.* Равенство $\arcsin\sin x = x$ верно для $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, нужно привести аргумент, пользуясь формулами приведения, к этому промежутку. б) $-0{,}2$.

в) $\arcsin\sin\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \arcsin\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

г) $\arcsin\sin 4 = \arcsin\sin(\pi-4) = \pi-4$.

д) $\arcsin\sin\left(-\frac{5\pi}{7}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{2\pi}{7}\right)\right) = -\frac{2\pi}{7}$.

е) $\arcsin\sin 7 = \arcsin\sin(7-2\pi) = 7-2\pi$.

VI.74. а) $\frac{\pi}{3}$. *Указание.* Равенство $\arccos\cos x = x$ верно для $x \in [0;\ \pi]$, поэтому нужно привести аргумент, пользуясь формулами приведения, к этому промежутку.

б) $\arccos\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$. в) $\arccos\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) =$ $= \arccos\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$. г) $\arccos\cos 6 = \arccos\cos(2\pi - 6) =$ $= 2\pi - 6$. д) $\arccos\cos\left(-\frac{11\pi}{2}\right) = \arccos 0 = \frac{\pi}{2}$. е) $\arccos\cos 9 =$ $= \arccos\cos(9 - 2\pi) = 9 - 2\pi$.

VI.75. а) 0. б) 0,6. в) $\frac{\pi}{6}$. г) Выражение не определено.

VI.76. $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2}$ при любом $a \in [-1; 1]$. *Указание*. Доказательство приведено в примере 44 учебника.

VI.77. *Указание*. Неравенства сразу же следуют из множества значений арксинуса и арккосинуса.

§ 34. Тангенс, котангенс, арктангенс, арккотангенс

Материал параграфа стандартен. Обратим внимание на цикл задач VI.102—VI.109, в которых используются формулы нахождения остальных тригонометрических функций при одной известной.

Решения и указания к задачам

VI.83. *Указание*. Привести аргументы тангенса и котангенса к промежутку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Это сделать даже проще, чем для синуса и косинуса — ведь тангенс и котангенс не меняются при прибавлении к аргументу чисел вида πk, $k \in \boldsymbol{Z}$.

а) $\operatorname{tg}\left(-\frac{31\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. б) $\operatorname{ctg}\left(\frac{35\pi}{3}\right) = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
в) $\operatorname{tg}\left(-\frac{263\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$. г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{173\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

VI.84. а) Больше 0. б) Больше 0. в) Меньше 0. г) Больше 0. **Решение.** $\operatorname{tg} 6 = \operatorname{tg}(6 - 2\pi) = -\operatorname{tg}(2\pi - 6)$, $0 < 2\pi - 6 < 1 < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\operatorname{tg} 6 + \operatorname{tg} 1 = \operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg}(2\pi - 6) > 0$.

VI.85. а) $\operatorname{tg} 11° < \operatorname{tg} 19°$.
б) $\operatorname{ctg} 15° > \operatorname{ctg} 79°$.
в) **Решение.** $1 = \operatorname{ctg} 45° > \operatorname{ctg} 50°$.

г) **Р е ш е н и е.** $\frac{\pi}{2} < \frac{9\pi}{10} < \frac{10\pi}{11} < \pi$. Следовательно, $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{10} < \operatorname{tg}\frac{10\pi}{11}$.

VI.86. $\cos 111° < \sin 0° < \cos 65° < \sin 31° < \cos 0° < \operatorname{tg} 46°$.

VI.90. а) $x \in \left[\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left[\frac{7\pi}{4} + 2\pi k;\ \frac{7\pi}{3} + 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) Решений нет. в) $x \in \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k;\ 2\pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x \in \left[\frac{\pi}{3} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.91. Р е ш е н и е. Выберем x так, чтобы x, $2x$, $3x$ находились в первой четверти, а $4x$ уже во второй. Тогда первые три сомножителя будут положительными, а четвёртый будет отрицательным. В качестве такого x подходит, например, $\frac{5\pi}{32}$.

VI.92. Наибольшее значение суммы равно $\frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{7\pi}{6} = \frac{19\pi}{6}$, наименьшее значение равно $\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$.

VI.93. а) 7. **Р е ш е н и е.** $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - 2 = 7$.

б) 18. **Решение.** $\operatorname{tg}^3\alpha + \operatorname{ctg}^3\alpha = (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha)(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) - (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = 18$.

в) $\frac{1}{3}$. **Р е ш е н и е.** $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$. Отсюда получаем, что $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{3}$.

г) $\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. **Решение.** $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{5}{3}$. Следовательно, $\cos\alpha + \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Заметим, что однозначно сумму синуса и косинуса определить нельзя. Возможны оба варианта.

VI.94. а) **Р е ш е н и е.** $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

б) **Р е ш е н и е.** $\sin\alpha\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

в) **Р е ш е н и е.** $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{-2\sin\alpha\cos\alpha}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)} = \frac{-2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} = -2\operatorname{ctg}\alpha$.

г) **Решение.** $\dfrac{\sin^6\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{\cos^6\alpha}{1-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{\sin^6\alpha\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}+$
$+\dfrac{\cos^6\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha\sin^2\alpha(\sin^4\alpha-\cos^4\alpha)}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=-\cos^2\alpha\sin^2\alpha.$

VI.95. 7. **Решение.**

$$\left(\sin\alpha+\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\cos\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2-(\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha)=$$
$$=5+\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}-\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1+\frac{1}{\sin^2\alpha}-1\right)=7.$$

VI.96. Решение.

$$\sqrt{\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{\operatorname{tg}x+\sin x}}-\frac{1}{\sin x}=\sqrt{\frac{\sin x-\sin x\cos x}{\sin x+\sin x\cos x}}-\frac{1}{\sin x}=$$
$$=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\frac{1}{\sin x}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{\sin^2 x}}-\frac{1}{\sin x}=\frac{-\cos x}{\sin x}=-\operatorname{ctg}x.$$

VI.98. а) $-\operatorname{ctg}^2\alpha$. б) $-2\sin\alpha$. в) $-\cos\alpha$. г) $\sin\alpha$.

VI.99. а) 1. **Решение.** $\operatorname{tg}1^\circ\cdot\operatorname{tg}89^\circ=\operatorname{tg}2^\circ\cdot\operatorname{tg}88^\circ=$ $=\ldots=\operatorname{tg}44^\circ\cdot\operatorname{tg}46^\circ=\operatorname{tg}45^\circ=1$.

б) 0. **Решение.** $\operatorname{ctg}1^\circ+\operatorname{ctg}179^\circ=\operatorname{ctg}2^\circ+\operatorname{ctg}178^\circ=$ $=\ldots=\operatorname{ctg}89^\circ+\operatorname{ctg}91^\circ=\operatorname{ctg}90^\circ=0$.

VI.100. а) $\operatorname{tg}1>\sin 1$. б) **Решение.** $\operatorname{ctg}0{,}5>\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}=$ $=1>\cos 0{,}1$. в) **Решение.** $\operatorname{tg}1>\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}=1>\sin 1{,}5$. г) **Решение.** $\operatorname{tg}1=\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)<\operatorname{ctg}0{,}5$.

VI.101. а) **Решение.** $\operatorname{tg}\dfrac{19\pi}{5}=\operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)=-\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{5}$. б) **Решение.** $\operatorname{ctg}\left(-\dfrac{18\pi}{11}\right)=\operatorname{ctg}\dfrac{4\pi}{11}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4\pi}{11}\right)=\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{22}$. в) **Решение.** $\operatorname{ctg}333^\circ=\operatorname{ctg}(-27^\circ)=-\operatorname{ctg}27^\circ$. г) **Решение.** $\operatorname{tg}2460^\circ=-\operatorname{tg}60^\circ=-\operatorname{ctg}30^\circ$.

VI.102. а) $\cos x=-\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg}x=-\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}x=-\dfrac{3}{4}$. б) $\sin x=$ $=-\dfrac{\sqrt5}{3}$, $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sqrt5}{2}$, $\operatorname{ctg}x=\dfrac{2}{\sqrt5}$. в) $\cos x=\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{tg}x=-\dfrac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}x=-\dfrac{5}{12}$. ж) $\sin x=-\dfrac{1}{\sqrt5}$, $\cos x=-\dfrac{2}{\sqrt5}$, $\operatorname{tg}x=\dfrac{1}{2}$.

VI.103. а) $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\dfrac{4}{5}$. б) $\sin\alpha=-\dfrac{7}{25}$, $\cos\alpha=\dfrac{24}{25}$.

VI.104. а) Нет. б) Нет. в) Нет. г) Да.

VI.105. *Указание.* Получить из данного выражения $4\sin\alpha = 8\cos\alpha$, откуда $\operatorname{ctg}\alpha = 0{,}5$.

VI.106. *Указание.* Получить из условия $\sin\alpha = -2\cos\alpha$. Заменить во всех выражениях $\sin\alpha$ на $-2\cos\alpha$, после чего, сокращая дробь, получить ответ. а) 1. б) –2. в) $-\frac{30}{7}$. *Указание.* $4 = 4\sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha$.

VI.107. **Решение.** Из условия следует, что $\sin\alpha = 2\cos\alpha$. Тогда $\sin^2\alpha - 3\sin\alpha\cos\alpha = -2\cos^2\alpha = \frac{-2}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -\frac{2}{5}$.

VI.108. Да, оно равно 0.

VI.109. **Решение.** $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha = \cos^2\alpha\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2} = \frac{1}{4+a^2}$.

VI.110. а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}$. б) $x = \pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}$. в) $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. г) $x = \frac{5\pi}{6} + \pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. д) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. е) $x = \operatorname{arctg}\frac{12}{13} + \pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. ж) $x = \operatorname{arcctg}\sqrt{2} + \pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. з) Решений нет.

VI.111. а) Меньше 0. б) Больше 0. в) Больше 0. г) Не определён. д) Больше 0. е) Больше 0.

VI.113. *Указание.* Полезно помнить, что $\operatorname{tg}\operatorname{arctg}x = x$ и $\operatorname{ctg}\operatorname{arcctg}x = x$ при любых $x\in\boldsymbol{R}$, равенство $\operatorname{arctg}\operatorname{tg}x = x$ выполняется при $x\in\left(-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right)$, а равенство $\operatorname{arcctg}\operatorname{ctg}x = x$ выполняется при $x\in(0;\ \pi)$. а) $\frac{3\pi}{13}$. б) –3. в) $-\frac{\pi}{7}$. г) **Решение.** $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{\pi}{7}\right)\right) = \frac{6\pi}{7}$. д) 8. е) $\frac{\pi}{11}$. ж) **Решение.** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(6-2\pi)) = 6-2\pi$. з) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}11) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(11-3\pi)) = 11-3\pi$.

VI.114. а) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}$. б) Нет решений. в) $x = \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. г) $x = \pi - \arcsin\frac{1}{3} + 2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. *Замечание.* Другая возможная форма записи ответа $\operatorname{arcctg}\left(-2\sqrt{2}\right) + 2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$.

VI.115. а) $x\in[-1;\ 0]$. б) $x\in[0;\ 1]$. в) $x\in\boldsymbol{R}$. г) $x\leqslant 0$.

VI.116. $\operatorname{arctg}a + \operatorname{arcctg}a = \frac{\pi}{2}$ при любом $a\in\boldsymbol{R}$. *Указание.* Решение аналогично решению задачи VI.76.

§ 35. Тригонометрические формулы. Метод вспомогательного аргумента

В этом параграфе отрабатываются основные навыки работы с тригонометрическими выражениями и формулами. Многие из этих навыков будут в дальнейшем полезны при работе с тригонометрическими функциями и с комплексными числами.

Среди задач учебника есть много красивых, но в то же время достаточно сложных задач на тригонометрические преобразования. Учитель может выбирать задачи, исходя из уровня подготовки класса.

Решения и указания к задачам

VI.117. а) **Решение.** $\sin 23^\circ \cos 22^\circ + \sin 22^\circ \cos 23^\circ = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$. б) **Решение.** $\sin\alpha\cos(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta) \times \cos\alpha = \sin(\alpha - (\alpha+\beta)) = -\sin\beta$. в) **Решение.** $\sin 25^\circ \sin 5^\circ - \cos 25^\circ \cos 5^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. г) **Решение.** $\frac{\operatorname{tg} 11^\circ + \operatorname{tg} 34^\circ}{1 - \operatorname{tg} 11^\circ \cdot \operatorname{tg} 34^\circ} = \operatorname{tg}(11^\circ + 34^\circ) = 1$.

VI.118. а) **Решение.** $\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$. б) **Решение.** $\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

VI.119. а) **Решение.** $$\frac{\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12} + \sin\frac{13\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{12}}{\sin\frac{13\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15} + \sin\frac{7\pi}{15}\cos\frac{28\pi}{15}} =$$

$$= \frac{\cos\frac{\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12} - \sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{11\pi}{12}}{\sin\frac{13\pi}{15}\cos\frac{8\pi}{15} - \sin\frac{8\pi}{15}\cos\frac{13\pi}{15}} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{12} + \frac{11\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{13\pi}{15} - \frac{8\pi}{15}\right)} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

б) **Решение.** $$\frac{\cos 18^\circ \cos 28^\circ + \cos 108^\circ \sin 208^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ} =$$

$$= \frac{\sin 72^\circ \cos 28^\circ + \cos 72^\circ \sin 28^\circ}{\sin 23^\circ \sin 83^\circ + \cos 23^\circ \cos 83^\circ} = \frac{\sin 100^\circ}{\cos 60^\circ} = 2\sin 100^\circ.$$

в) **Решение.** $\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{15} + \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{15}}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{15} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{4\pi}{15}} = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{15} + \dfrac{4\pi}{15}\right) = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{3}.$

г) **Решение.** $\dfrac{\operatorname{tg} 11^\circ - \operatorname{tg} 131^\circ}{1 - \operatorname{tg} 191^\circ \cdot \operatorname{tg} 49^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg} 11^\circ + \operatorname{tg} 49^\circ}{1 - \operatorname{tg} 11^\circ \cdot \operatorname{tg} 49^\circ} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$

д) **Решение.** $\dfrac{\operatorname{tg}^2 35^\circ - \operatorname{tg}^2 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 35^\circ \cdot \operatorname{tg}^2 10^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg} 35^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ}{1 + \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} \times$

$\times \dfrac{\operatorname{tg} 35^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 35^\circ \cdot \operatorname{tg} 10^\circ} = \operatorname{tg} 25^\circ \cdot \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{tg} 25^\circ.$

е) **Решение.** $\dfrac{\operatorname{ctg} 40^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg} 50^\circ - \operatorname{tg} 20^\circ}{1 + \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 20^\circ} = \operatorname{tg} 30^\circ = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

VI.120. а) **Решение.** $\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}+1}{2} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. б) **Решение.** $\cos 105^\circ = \cos(60^\circ + 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$. в) **Решение.** $\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg}(60^\circ - 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}}$. г) **Решение.** $\sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

VI.121. а) **Решение.** $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha < \cos\alpha + \cos\beta$. б) **Решение.** Заметим, что при данных углах $0 < \operatorname{tg}\alpha < 1$ и $0 < \operatorname{ctg}\alpha < 1$, поэтому $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

VI.122. а) **Решение.** С учётом ограничений на данный угол $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = -\dfrac{4}{5}$, поэтому $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\alpha\cos\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{4 - 3\sqrt{3}}{10}$. б) $\dfrac{8\sqrt{3} + 15}{34}$. в) 2. г) **Решение.** Так как $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{5}$, то с учётом ограничений на α получаем, что $\cos\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и $\sin\alpha = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. Таким образом, $\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\dfrac{\pi}{4}\cos\alpha - \sin\dfrac{\pi}{4}\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$. д) $\sin(\alpha - \beta) = 0{,}28$.

VI.123. а) **Р е ш е н и е.** Заметим, что $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{1}{3}$. Тогда $\cos\alpha = \cos\left(\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\cos\frac{\pi}{6} + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2\sqrt{2} - \sqrt{3}}{6}$. б) **Р е ш е н и е.** $\cos\alpha = \cos\left(\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cos\frac{\pi}{3} + \sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) \times \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{6} - \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6}$. в) **Р е ш е н и е.** $\cos(73° - \alpha) = \cos(13° - \alpha + 60°) = \cos(13° - \alpha)\cos 60° - \sin(13° - \alpha)\sin 60° = \frac{2}{\sqrt{7}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2\sqrt{7}}$. г) **Р е ш е н и е.** $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha + \beta - \alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha + \beta) - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}(\alpha + \beta)\operatorname{tg}\alpha} = \frac{-1 - 2}{1 - 2} = 3$.

VI.124. Р е ш е н и е. Из условия получаем, что $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = 1$. Учитывая ограничения на α и β, получаем, что $\pi < \alpha + \beta < 2\pi$, а значит, $\alpha + \beta$ может принимать только значение $\frac{5\pi}{4}$.

VI.125. а) **Р е ш е н и е.** $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = (\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha)(\sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha) = \sin^2\alpha(1 - \sin^2\beta) - \sin^2\beta(1 - \sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$. Проще доказать это тождество можно, применив к левой части формулу преобразования произведения синусов в сумму.

б) **Р е ш е н и е.** $\frac{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)} = \frac{2\sin\alpha\cos\beta}{2\cos\alpha\cos\beta} = \operatorname{tg}\alpha$.

VI.126. а) **Р е ш е н и е.**

$$\frac{\sin\alpha + 2\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)}{2\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) - \sqrt{3}\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \sqrt{3}\cos\alpha - \sin\alpha}{\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha} = \sqrt{3}\operatorname{ctg}\alpha.$$

б) **Р е ш е н и е.**

$$\frac{\sqrt{2}\cos\alpha - 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sqrt{2}\sin\alpha} = \frac{\sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{2}\sin\alpha}{\sqrt{2}\sin\alpha + \sqrt{2}\cos\alpha - \sqrt{2}\sin\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

VI.127. Решение. $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x - \frac{\pi}{3}\right) =$

$$= \cos^2 x + \left(\frac{\cos x}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin x}{2}\right)^2 + \left(\frac{\cos x}{2} + \frac{\sqrt{3}\sin x}{2}\right)^2 = \cos^2 x +$$

$$+ \frac{\cos^2 x}{2} + \frac{3\sin^2 x}{2} = \frac{3}{2}.$$

VI.128. а) **Решение.** $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta +$

$$+ \operatorname{tg}(\pi - \alpha - \beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta - \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$$

$$= -\frac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

б) *Указание.* Пусть $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$ для некоторых углов α, β, γ (такие углы существуют, так как множество значений тангенса — все вещественные числа). Тогда равенство, которое нужно доказать, примет вид

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} + \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma}{1 + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta} + \frac{\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma} =$$

$$= \frac{(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma)(\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha)}{(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)(1 + \operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\beta)(1 + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma)},$$

или, что то же самое,

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) =$$
$$= \operatorname{tg}(\alpha - \beta)\operatorname{tg}(\beta - \gamma)\operatorname{tg}(\gamma - \alpha),$$

а это равенство легко доказывается аналогично задаче VI.128, *а*, стоит только заменить

$$\operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = -\operatorname{tg}((\alpha - \beta) + (\beta - \gamma)) = -\frac{\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma)}{1 - \operatorname{tg}(\alpha - \beta)\operatorname{tg}(\beta - \gamma)}.$$

VI.129. Решение. Заметим, что существуют такие числа α и β, что $a = \sin\alpha$, $b = \cos\alpha$ и $c = \sin\beta$, $d = \cos\beta$. Тогда $|ac - bd| = |\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta| = |\cos(\alpha + \beta)| \leqslant 1$, что и требовалось доказать.

VI.131. а) **Решение.**

$$\left(\sqrt{1 - \cos^2 193^\circ} + \sqrt{\operatorname{ctg}^2 167^\circ - \cos^2 167^\circ}\right)\cos 77^\circ =$$

$$= \left(|\sin 193^\circ| + \sqrt{\frac{\cos^2 167^\circ(1 - \sin^2 167^\circ)}{\sin^2 167^\circ}}\right)\cos 77^\circ =$$

$$= \left(-\sin 193^\circ + \frac{\cos^2 167^\circ}{\sin 167^\circ}\right)\sin 13^\circ = \left(\sin 13^\circ + \frac{\cos^2 167^\circ}{\sin 13^\circ}\right)\sin 13^\circ =$$

$$= \sin^2 13^\circ + \cos^2 13^\circ = 1.$$

б) **Р е ш е н и е.**

$$\left(\sqrt{1-\sin^2 153^\circ}+\sqrt{\operatorname{tg}^2 207^\circ-\sin^2 207^\circ}\right)\cos 27^\circ=$$

$$=\left(-\cos 153^\circ+\sqrt{\frac{\sin^2 207^\circ\,(1-\cos^2 207^\circ)}{\cos^2 207^\circ}}\right)\cos 27^\circ=$$

$$=\left(-\cos 153^\circ+\frac{\sin^2 207^\circ}{-\cos 207^\circ}\right)\cos 27^\circ=$$

$$=\left(\cos 27^\circ+\frac{\sin^2 27^\circ}{\cos 27^\circ}\right)\cos 27^\circ=1.$$

VI.132. Р е ш е н и е. С помощью формул приведения нетрудно получить, что

$$\sin^2(\alpha+90^\circ)=\cos^2\alpha,$$
$$\sin^2(\alpha+91^\circ)=\cos^2(\alpha+1^\circ),$$
$$\ldots,$$
$$\sin^2(\alpha+179^\circ)=\cos^2(\alpha+89^\circ).$$

Поэтому

$$\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+1^\circ)+\sin^2(\alpha+2^\circ)+\ldots+\sin^2(\alpha+179^\circ)=$$
$$=\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+1^\circ)+\sin^2(\alpha+2^\circ)+\ldots+\sin^2(\alpha+89^\circ)+$$
$$+\cos^2\alpha+\cos^2(\alpha+1^\circ)+\cos^2(\alpha+2^\circ)+\ldots+\cos^2(\alpha+89^\circ)=90.$$

VI.133. а) **Р е ш е н и е.**

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)=-\cos\left(\pi-\left(\frac{5\pi}{12}-\alpha\right)\right)=-\cos\left(\alpha+\frac{7\pi}{12}\right)=-\frac{3}{5}.$$

б) *Замечание.* Начиная со второго издания формулировка изменена. Дано $\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)=-\frac{13}{14}$. **Р е ш е н и е.**

$$\sin\left(\frac{8\pi}{5}-\alpha\right)=\sin\left(3\pi-\left(\frac{8\pi}{5}-\alpha\right)\right)=\sin\left(\frac{7\pi}{5}+\alpha\right)=-\frac{13}{14}.$$

VI.134. –1.

VI.135. Р е ш е н и е.

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)\sin(3\pi+\alpha)}{(\cos(3{,}5\pi-\alpha)+\sin(1{,}5\pi+\alpha))^2-1}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha\sin\alpha}{(-\sin\alpha-\cos\alpha)^2-1}=$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha-\cos\alpha\sin^2\alpha}{\sin\alpha}}{2\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha\,(1-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha\,2\cos\alpha\sin\alpha}=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{2}.$$

VI.136. Решение.

$$\frac{\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}-\cos(\pi-\alpha)}+\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin\pi+\sin(\pi-\alpha)}=$$

$$=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot(-\operatorname{ctg}\alpha)+\cos\alpha}{\sin\alpha}=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+(1+\cos\alpha)(-1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)\sin\alpha}=0.$$

VI.137. Решение.

$$\left(\frac{\cos(2{,}5\pi+\alpha)}{\operatorname{ctg}(3\pi+\alpha)}-\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\alpha\right)\right)^2+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=$$

$$=\left(\frac{-\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\right)^2+\frac{\operatorname{tg}\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha}=\left(\cos\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha}\right)^2-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1.$$

VI.138. а) $\sin 2\alpha=\frac{4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2\alpha=-\frac{7}{9}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{2}$. *Замечание.* Знаки синуса и тангенса половинного аргумента определяются из условия — угол $\frac{\alpha}{2}$ лежит во второй четверти.

б) $\sin 2\alpha=-\frac{24}{25}$, $\cos 2\alpha=-\frac{7}{25}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2$.

VI.139. а) **Решение.** $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+2\sin\alpha\cos\alpha=a^2$, откуда $\sin 2\alpha=a^2-1$. б) $\sin\alpha+\cos\alpha$. в) **Решение.** $\sqrt{1+\sin 2\alpha}+\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}+\sqrt{(\sin\alpha-\cos\alpha)^2}=(\sin\alpha+\cos\alpha)+(\cos\alpha-\sin\alpha)=2\cos\alpha$.

VI.140. а) **Решение.** $\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos 2\alpha}}=\sqrt{0{,}5+0{,}5\sqrt{\cos^2\alpha}}=\sqrt{0{,}5+0{,}5\cos\alpha}=\cos\frac{\alpha}{2}$. б) **Решение.** $\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos 2\alpha}}=\sqrt{2+2\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}}=\sqrt{2+2\cos\alpha}=2\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}=2\cos\frac{\alpha}{2}$, если $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

VI.141. Решение. Из условия получаем, что $\cos\alpha=-4\sin\alpha$. Таким образом, $\operatorname{ctg}\alpha=-4$. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sin\alpha(-4\sin\alpha)=-8\sin^2\alpha=\frac{-8}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}=-\frac{8}{17}$.

VI.142. Р е ш е н и е. $\dfrac{\cos 4\alpha + 3\cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha + 2} =$

$= \dfrac{2\cos^2 2\alpha - 1 + 3\cos 2\alpha - 1}{\cos 2\alpha + 2} = \dfrac{(\cos 2\alpha + 2)(2\cos 2\alpha - 1)}{\cos 2\alpha + 2} =$

$= 2\cos 2\alpha - 1 = 4\cos^2\alpha - 3 = \dfrac{4}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} - 3 = -\dfrac{13}{5}.$

VI.143. Р е ш е н и е. $\dfrac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha} = \dfrac{\sin 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1} =$

$= \dfrac{\sin 2\alpha\,(1 + 2\cos 2\alpha)}{(1 + 2\cos 2\alpha)(-\cos 2\alpha + 1)} = \dfrac{\sin 2\alpha}{-\cos 2\alpha + 1} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin^2\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha = q.$

Отсюда $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin\alpha(q\sin\alpha) = 2q\sin^2\alpha =$
$= \dfrac{2q}{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha} = \dfrac{2q}{1 + q^2}.$

VI.144. а) **Р е ш е н и е.**

$\sin 10° \sin 30° \sin 50° \sin 70° = \cos 80° \cos 60° \cos 40° \cos 20° =$

$= \dfrac{1}{2}\cos 20° \cos 40° \cos 80° = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{8\sin 20° \cos 20° \cos 40° \cos 80°}{8\sin 20°} =$

$= \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4\sin 40° \cos 40° \cos 80°}{8\sin 20°} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sin 80° \cos 80°}{8\sin 20°} = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sin 160°}{8\sin 20°} = \dfrac{1}{16}.$

б) **Р е ш е н и е.** $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{4\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \dfrac{\sin\frac{4\pi}{5}}{4\sin\frac{\pi}{5}} = \dfrac{1}{4}.$

в) **Р е ш е н и е.** $\sin\dfrac{\pi}{18}\sin\dfrac{5\pi}{18}\sin\dfrac{7\pi}{18} = \cos\dfrac{8\pi}{18}\cos\dfrac{4\pi}{18}\cos\dfrac{2\pi}{18} =$

$= \dfrac{8\sin\frac{2\pi}{18}\cos\frac{2\pi}{18}\cos\frac{4\pi}{18}\cos\frac{8\pi}{18}}{8\sin\frac{2\pi}{18}} = \dfrac{\sin\frac{16\pi}{18}}{8\sin\frac{2\pi}{18}} = \dfrac{1}{8}.$

VI.145. а) Наименьшее значение 2, наибольшее значение 3. *Указание.* Заметить, что $\sin^2 x + \cos 2x + 2 = 3 - \sin^2 x$. б) Наименьшее значение 2, наибольшее значение $\dfrac{25}{8}$. **Р е ш е н и е.** Заметим, что $2 + \cos 2x + \sqrt{\sin^2 x} = 3 - 2\sin^2 x + |\sin x|$. Пусть $t = |\sin x|$, таким образом, требуется найти наименьшее и наибольшее значения выражения $-2t^2 + t + 3$, если $t \in [0;\ 1]$.

VI.146. Р е ш е н и е. Заметим, что $\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \pm\sqrt{0{,}91}$. По формуле $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$ получаем, что или $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{0{,}3}{1 + \sqrt{0{,}91}}$, или $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{0{,}3}{1 - \sqrt{0{,}91}}$.

б) **Решение.** Из формулы $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ получаем, что $3\operatorname{tg}^2\alpha - 8\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = 3$ или $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{1}{3}$.

VI.147. а) $\sin 2\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{4}{3}$.

б) $\sin 2\alpha = -\dfrac{3}{5}$, $\cos 2\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

VI.148. а) $\dfrac{218}{11}$. б) $\dfrac{65}{162}$.

VI.149. **Решение.** Так как

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}} = 0{,}2,$$

то отсюда $3\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2} - 5\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} - 2 = 0$. А значит, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = 2$ или $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = -\dfrac{1}{3}$.

VI.150. **Решение.** Если $\sin x$ и $\cos x$ одновременно являются рациональными числами, то рационально и

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}.$$

Наоборот, если $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ — рациональное число, то рациональны и $\sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$, и $\cos x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}$.

VI.151. а) **Решение.**

$$\frac{\sin 20^\circ - \sqrt{3}\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} + 4\cos 20^\circ =$$

$$= \frac{2\left(\sin 20^\circ \cdot \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos 20^\circ\right)}{\sin 20^\circ} + 4\cos 20^\circ =$$

$$= \frac{2(\sin 20^\circ \cdot \cos 60^\circ - \sin 60^\circ \cdot \cos 20^\circ) + 4\cos 20^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} =$$

$$= \frac{2(\sin(-40^\circ) + \sin 40^\circ)}{\sin 20^\circ} = 0.$$

б) **Решение.**

$$\frac{2\sin 10^\circ + \sin 50^\circ}{2\sin 80^\circ - \sqrt{3}\cos 40^\circ} = \frac{\sin 10^\circ + (\sin 10^\circ + \sin 50^\circ)}{\sin 80^\circ + (\sin 80^\circ - \sqrt{3}\cos 40^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin 10^\circ + 2\sin 30^\circ \cos 20^\circ}{\sin 80^\circ + (2\sin 40^\circ \cos 40^\circ - \sqrt{3}\cos 40^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin 10^\circ + \sin 70^\circ}{\sin 80^\circ + 2\cos 40^\circ (\sin 40^\circ - \sin 60^\circ)} =$$

$$= \frac{2\sin 40^\circ \cos 30^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ + 2\cos 40^\circ (2\sin(-10^\circ)\cos 50^\circ)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}\sin 40^\circ}{2\sin 40^\circ \cos 40^\circ - 4\cos 40^\circ \sin 10^\circ \sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\cos 40^\circ - 4\cos 40^\circ \cos 80^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2\cos 40^\circ - 2(\cos 40^\circ + \cos 120^\circ)} = \sqrt{3}.$$

в) **Решение.**

$$\frac{1}{\sin 10^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \frac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} =$$

$$= \frac{2\left(\cos 10^\circ \cdot \frac{1}{2} - \sin 10^\circ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{0{,}5\sin 20^\circ} = \frac{4\cos 70^\circ}{\sin 20^\circ} = 4.$$

VI.152. *Указание*. Воспользоваться методом вспомогательного аргумента. а) Наименьшее значение $-\sqrt{2}$, наибольшее значение $\sqrt{2}$. б) Наименьшее значение $-\sqrt{10}$, наибольшее значение $\sqrt{10}$. в) Наименьшее значение $-\sqrt{41}$, наибольшее значение $\sqrt{41}$. г) Наименьшее значение –3, наибольшее значение 3. д) **Решение.**

$$|\sin\alpha - \cos\alpha| = \left|\sqrt{2}\left(\sin\alpha \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos\alpha \cdot \sin\frac{\pi}{4}\right)\right| =$$

$$= \left|\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)\right|.$$

Наименьшее значение 0, наибольшее значение $\sqrt{2}$.

VI.153. Наименьшее значение $-\sqrt{a^2 + b^2}$, наибольшее значение $\sqrt{a^2 + b^2}$.

VI.154. а) **Решение.**

$$7\sin 2\alpha + 8\cos 2\alpha = \sqrt{113}\sin\left(2\alpha + \arcsin\frac{8}{\sqrt{113}}\right) \leqslant \sqrt{113} < 12.$$

б) **Решение.**

$$|5\sin\alpha + \sqrt{11}\cos\alpha| = \left|6\sin\left(\alpha + \arcsin\frac{\sqrt{11}}{36}\right)\right| \leqslant 7.$$

в) *Указание.* Проще всего разобрать случаи: если $\cos x < 0$, то неравенство выполняется автоматически (правая часть всегда положительна), если $\cos x > 0$, то неравенство превращается в легко доказываемое с помощью метода вспомогательного аргумента неравенство $\sqrt{3}\cos x - \sin x \leqslant 2$.

VI.155. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ или $x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$. **Решение.** $\sin x - \sqrt{3}\cos x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sqrt{3}\cos x = 1 \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, откуда $x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, или $x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \arccos\frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{\pi}{2} + 2\pi k$. **Решение.** $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{7}\cos x - 3 = 0 \Leftrightarrow 3\sin\left(x - \arccos\frac{\sqrt{2}}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow x - \arccos\frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.156. Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2 + b^2}\sin\left(x + \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$. Если функция не равна тождественно нулю, то она обращается в нуль в точках вида $x = -\arccos\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, причём любые две такие точки отличаются на πk, $k \in \boldsymbol{Z}$, что и требовалось доказать.

VI.157. Решение. Сравнить нужно $\sin(\cos 1)$ и $\cos(\sin 1)$, но $\cos(\sin 1) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin 1\right)$, при этом $\cos 1$ и $\frac{\pi}{2} - \sin 1$ лежат в первой четверти, поэтому достаточно сравнить их. Ясно, что $\cos 1 + \sin 1 \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\sin(\cos 1) < \cos(\sin 1)$.

VI.158. а) **Решение.** $\sin 15^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{2}(\sin 60^\circ - \sin 30^\circ) = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$. б) **Решение.** $\sin\frac{\pi}{24}\sin\frac{5\pi}{24} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$. в) **Решение.** $\cos 75^\circ \sin 105^\circ = \frac{1}{2}(\sin 180^\circ +$

$+ \sin 30^\circ) = \dfrac{1}{4}$. г) **Р е ш е н и е.** $2\cos 20^\circ \cos 40^\circ - \cos 20^\circ =$ $= (\cos 60^\circ + \cos 20^\circ) - \cos 20^\circ = 0{,}5$.

VI.159. а) *Замечание.* Со второго издания в знаменателе дроби функция косинус. **Р е ш е н и е.**

$$\frac{\sin 35^\circ - \sin 25^\circ}{\cos 35^\circ - \cos 25^\circ} = \frac{2\sin 5^\circ \cos 30^\circ}{-2\sin 5^\circ \sin 30^\circ} = -\sqrt{3}.$$

VI.160. а) **Р е ш е н и е.** $\cos 2\alpha + \cos 6\alpha + \cos 10\alpha + \cos 14\alpha = (\cos 2\alpha + \cos 14\alpha) + (\cos 6\alpha + \cos 10\alpha) = 2\cos 8\alpha \cos 6\alpha + 2\cos 8\alpha \cos 2\alpha = 2\cos 8\alpha(\cos 6\alpha + \cos 2\alpha) = 4\cos 8\alpha \cos 4\alpha \cos 2\alpha$. б) **Р е ш е н и е.** $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha = \cos 2\alpha + 2\cos 2\alpha \cos\alpha = \cos 2\alpha(1 + 2\cos\alpha)$. в) **Р е ш е н и е.** $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha = (\sin\alpha + \sin 7\alpha) + (\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) = 2\sin 4\alpha \cos 3\alpha + 2\sin 4\alpha \cos\alpha = 4\sin 4\alpha \cos 2\alpha \cos\alpha$.

VI.161. а) **Р е ш е н и е.**

$$\frac{\cos\alpha - \cos 4\alpha + \cos 7\alpha - \cos 10\alpha}{\sin\alpha + \sin 4\alpha + \sin 7\alpha + \sin 10\alpha} =$$

$$= \frac{(\cos\alpha + \cos 7\alpha) - (\cos 4\alpha + \cos 10\alpha)}{(\sin\alpha + \sin 7\alpha) + (\sin 10\alpha + \sin 4\alpha)} =$$

$$= \frac{2\cos 3\alpha \cos 4\alpha - 2\cos 3\alpha \cos 7\alpha}{2\sin 4\alpha \cos 3\alpha + 2\sin 7\alpha \cos 3\alpha} =$$

$$= \frac{\cos 4\alpha - \cos 7\alpha}{\sin 4\alpha + \sin 7\alpha} = \frac{2\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{11\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{11\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{3\alpha}{2}.$$

б) **Р е ш е н и е.**

$$\frac{\sin 4\alpha + \sin 9\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha + \cos 4\alpha + \cos 9\alpha} = \frac{\sin 4\alpha + 2\sin 4\alpha \cos 5\alpha}{\cos 4\alpha + 2\cos 4\alpha \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} 4\alpha.$$

VI.162. а) **Р е ш е н и е.**

$$1 + \sin\alpha + \cos\alpha = 1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

б) $2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$. г) **Р е ш е н и е.** $1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha = 1 + \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = \cos\alpha(1 + 2\cos\alpha)$.

VI.163. а) **Р е ш е н и е.** $\cos 47^\circ + \sin 77^\circ - \sqrt{3}\cos 17^\circ = \cos 47^\circ + \cos 13^\circ - \sqrt{3}\cos 17^\circ = 2\cos 30^\circ \cos 17^\circ - \sqrt{3}\cos 17^\circ = 0$. б) 0.

VI.164. а) **Р е ш е н и е.** $\sin 10^\circ \cos 11^\circ + \cos 35^\circ \cos 54^\circ - \sin 46^\circ \sin 65^\circ = \frac{1}{2}(\sin 21^\circ + \sin(-1^\circ) + \cos 89^\circ + \cos 19^\circ - \cos 19^\circ + \cos 111^\circ) = 0$. б) 0.

VI.165. Р е ш е н и е.

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha} =$$

$$= \frac{\sin\alpha(\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha)}{\sin\alpha(\cos\alpha + \cos 3\alpha + \ldots + \cos(2n-1)\alpha)} =$$

$$= \frac{\sin\alpha\sin\alpha + \sin\alpha\sin 3\alpha + \ldots + \sin\alpha\sin(2n-1)\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha + \sin\alpha\cos 3\alpha + \ldots + \sin\alpha\cos(2n-1)\alpha} =$$

$$= \frac{0{,}5(\cos 0 - \cos 2\alpha + \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \ldots + \cos(2n\alpha - 2) - \cos 2n\alpha)}{0{,}5(\sin 0 + \sin 2\alpha + \sin(-2\alpha) + \sin 4\alpha + \ldots + \sin(-2n\alpha + 2\alpha) + \sin 2n\alpha)} =$$

$$= \frac{1 - \cos 2n\alpha}{\sin 2n\alpha} = \operatorname{tg} n\alpha.$$

VI.166. Р е ш е н и е. $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{7}{25}$. Тогда $\cos 2\alpha - \cos 6\alpha = 2\sin 2\alpha \sin 4\alpha = 2\sin 2\alpha \cdot 2\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = 4\cos 2\alpha \cdot \sin^2 2\alpha = 4\cos 2\alpha(1 - \cos^2 2\alpha) = 4 \cdot \left(-\frac{7}{25}\right)\left(1 - \frac{49}{625}\right) = -\frac{16\,128}{15\,625}$.

VI.167. Р е ш е н и е. а) $a^2 + b^2 = 2 + 2(\cos x \cos y + \sin x \sin y) = 2 + 2\cos(x - y)$. Отсюда получаем, что $\cos(x - y) = \frac{a^2 + b^2 - 2}{2}$. б) $\cos(x + y) = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$. **Р е ш е н и е.** Преобразуем суммы функций в произведение: $2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = a$ и $2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = b$. Разделив второе равенство на первое, получим $\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{b}{a}$. Осталось выразить косинус через тангенс половинного аргумента.

VI.168. а) **Р е ш е н и е.** $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$, поэтому $\sin\frac{\pi}{12} - \cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

б) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. *Указание.* $\frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}$.

VI.169. Решение. Пусть $\frac{\pi}{5} = x$. Тогда выполняется равенство $\sin 2x = \sin 3x$, т. е. $2\sin x\cos x = 3\sin x - 4\sin^3 x$. Сокращая последнее равенство на $\sin x \neq 0$, получим $2\cos x = 3 - 4\sin^2 x$, откуда получается квадратное уравнение относительно $\cos x$: $4\cos^2 x - 2\cos x - 1 = 0$. Учитывая то, что $\cos x = \cos\frac{\pi}{5} > 0$, получаем, что $\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$, а значит, $\sin\frac{\pi}{5} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$.

VI.170. Решение. $\cos^2(x+y) + \cos^2 y - 2\cos x\cos y \times \cos(x+y) = \cos^2 y + \cos(x+y)(\cos(x+y) - 2\cos x\cos y) = \cos^2 y - \cos(x+y)\cos(x-y) = \cos^2 y - (\cos^2 x\cos^2 y - \sin^2 x\sin^2 y) = \cos^2 y\sin^2 x + \sin^2 x\sin^2 y = \sin^2 x$.

VI.171. Решение.

$$\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = \frac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} =$$
$$= \frac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ} = 1.$$

VI.172. Решение.

$$\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ =$$
$$= \frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 25^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ}(1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ) + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ =$$
$$= \operatorname{tg} 45^\circ(1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ) + \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 25^\circ = 1.$$

VI.173. Решение.

$$\frac{\cos 140^\circ \cdot \sqrt{\sin^2 10^\circ - \cos^3 80^\circ}}{\sin 20^\circ} = \frac{(-\cos 40^\circ)\cdot \sin 10^\circ \cdot \sqrt{1 - \cos 80^\circ}}{\sin 20^\circ} =$$
$$= -\frac{\cos 40^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \sqrt{2}\sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} = -\frac{2\cos 40^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 10^\circ \cdot \sqrt{2}}{2\sin 20^\circ} =$$
$$= -\frac{\sin 80^\circ \sin 10^\circ \cdot \sqrt{2}}{2\sin 20^\circ} = -\frac{\sqrt{2}\cdot 2\cos 10^\circ \sin 10^\circ}{4\sin 20^\circ} = -\frac{\sqrt{2}}{4}.$$

VI.174. $\pm\sqrt{2-a^2}$. **Решение.** Преобразуем данное выражение: $\cos(30^\circ + \alpha) + \cos(60^\circ - \alpha) = 2\cos 45^\circ \cos(\alpha - 15^\circ) = a$, т. е. $\cos(\alpha - 15^\circ) = \frac{a}{\sqrt{2}}$. При этом требуется узнать, какие значения может принимать $\cos(30^\circ + \alpha) - \cos(60^\circ - \alpha) = 2\sin 45^\circ \sin(15^\circ - \alpha)$. Из основного тригонометрического тождества получаем, что $\sin(15^\circ - \alpha) = \pm\sqrt{1 - \frac{a^2}{2}}$, откуда следует ответ.

VI.175. Решение. Из условия $\sin\alpha + \cos\alpha = m$ получаем, что $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{m}{\sqrt{2}}$, откуда

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \pm\sqrt{1 - \frac{m^2}{2}}.$$

Тогда выражение

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$$

может принимать значения $\frac{m}{\sqrt{2}} \pm \sqrt{1 - \frac{m^2}{2}}$.

VI.176. Решение.

$$\frac{1 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{(1 + \sqrt{3})\cos x - (\sqrt{3} - 1)\sin x} =$$

$$= \frac{1 - 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{(\cos x - \sqrt{3}\sin x) + (\sqrt{3}\cos x + \sin x)} =$$

$$= \frac{\left(\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)^2}{2\left(\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right)} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right).$$

VI.177. Решение.

$$\operatorname{tg}3\alpha - \operatorname{tg}2\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}3\alpha -$$
$$- \frac{\operatorname{tg}2\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}(1 - \operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha) = \operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha.$$

VI.178. *Указание.* Для того чтобы доказать данные тождества, достаточно домножить левые части на $\sin\alpha$ и разложить произведения тригонометрических функций в суммы.

VI.179. Решение. Домножим и поделим левую часть на $\sin\frac{\pi}{7}$.

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}=\frac{\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{3\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}-\sin\frac{5\pi}{7}+\sin\pi}{\sin\frac{\pi}{7}}=-\frac{1}{2}.$$

VI.180. а) 0. *Указание.* Легко получается домножением левой части на $\sin\frac{\pi}{n}$. Можно также разбить слагаемые на пары $\sin\frac{\pi}{n}$ и $\sin\frac{(2n-1)\pi}{n}$, $\sin\frac{3\pi}{n}$ и $\sin\frac{(2n-3)\pi}{n}$ и т. д. (сумма слагаемых в каждой паре равна 0), разобрав отдельно случай чётного и нечётного n. б) $\dfrac{\sin\frac{(n+1)\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$. *Указание.* Получается домножением на $\sin\frac{\pi}{2n}$. Также можно воспользоваться формулой из задачи VI.178, *б*, взяв $\alpha=\frac{\pi}{2n}$. в) $\frac{n}{2}-\frac{\cos((n+1)x)\sin(nx)}{2\sin x}$ при $\sin x\neq 0$ и 0 при $\sin x=0$. *Указание.* Решение аналогично решению примера 33 учебника.

VI.181. Решение.

$$\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}80^\circ=\frac{\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ}{\cos20^\circ\cos40^\circ\cos80^\circ}=$$

$$=8(\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ)(\text{см. решение VI.144, } a).$$

$$8(\sin20^\circ\sin40^\circ\sin80^\circ)=8\left(\sin20^\circ\cdot\frac{1}{2}(\cos40^\circ-\cos120^\circ)\right)=$$

$$=2(2\sin20^\circ\cos40^\circ+\sin20^\circ)=$$
$$=2(\sin(-20^\circ)+\sin60^\circ+\sin20^\circ)=\sqrt{3}.$$

VI.182. а) **Решение.**

$$\frac{2(\sin^4 2+\cos^4 2)}{1+\cos^2 4}=\frac{2\left(\left(\frac{1-\cos4}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\cos4}{2}\right)^2\right)}{1+\cos^2 4}=1.$$

б) **Решение.**

$$\cos^2 70° + \sin^2 25° + \sqrt{2}\cos 70° \cos 65° =$$

$$= \frac{1+\cos 140°}{2} + \frac{1-\cos 50°}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 135° + \cos 5°) =$$

$$= 1 - \frac{\cos 40° + \cos 50°}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \cos 5°\right) =$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{2\cos 45° \cos 5°}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 5° = \frac{1}{2}.$$

VI.183. Наименьшее значение выражения равно $3-\sqrt{2}$, наибольшее — $3+\sqrt{2}$. *Указание.* $2\sin^2\alpha + \sin 2\alpha + 4\cos^2\alpha =$ $= 1 - \cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 2\,(1+\cos 2\alpha) = \sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 3$.

VI.184. а) $\frac{7}{8}$. *Указание.* $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1+\cos^2 2x}{2}$ (см. пример 32 учебника).

б) **Решение.**

$$\sin^4\frac{\pi}{16} + \sin^4\frac{3\pi}{16} + \sin^4\frac{5\pi}{16} + \sin^4\frac{7\pi}{16} =$$

$$= \frac{\left(1-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2}{4} + \frac{\left(1-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2}{4} + \frac{\left(1-\cos\frac{5\pi}{8}\right)^2}{4} + \frac{\left(1-\cos\frac{7\pi}{8}\right)^2}{4} =$$

$$= \frac{4 + \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}}{4} =$$

$$= \frac{1}{4}\left(4 + \frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{3\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{5\pi}{4}}{2} + \frac{1+\cos\frac{7\pi}{4}}{2}\right) = \frac{3}{2}.$$

VI.185. Решение.

$$\sqrt{4-4\sin 2\alpha} - \sqrt{2-2\cos 2\alpha} = \sqrt{4(\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha)} -$$

$$- \sqrt{4\sin^2\alpha} = 2\,|\sin\alpha - \cos\alpha| - 2\,|\sin\alpha| =$$

$$= 2\,(\sin\alpha - \cos\alpha) - 2\sin\alpha = -2\cos\alpha.$$

VI.186. а) **Решение.** $\cos 30° = 2\cos^2 15° - 1$. Если бы число $\cos 15°$ было бы рационально, то рационально было бы и число $\cos 30°$, а это не так. б) *Указание.* Решение аналогично решению задачи VI.186, *а*, $\cos 30° = 4\cos^3 10° - 3\cos 10°$. в) **Решение.** $\cos 10° = 2\cos^2 5° - 1$, а $\cos 10°$ иррационально согласно задаче VI.186, *б*. г) *Указание.* $\frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60° =$

$= 3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ$. д) **Решение.** $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{tg}(20^\circ + 10^\circ) = \frac{\operatorname{tg} 20^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 10^\circ}$, $\operatorname{tg} 20^\circ = \frac{2\operatorname{tg} 10^\circ}{1 - \operatorname{tg}^2 10^\circ}$. Из этих формул следует, что если бы $\operatorname{tg} 10^\circ$ был рациональным числом, то таким же числом был бы и $\operatorname{tg} 30^\circ$, а это не так.

VI.187. а) **Решение.** $\cos(\cos\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos\alpha\right)$,

$$\cos(\cos\alpha) - \sin(\sin\alpha) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \cos\alpha\right) - \sin(\sin\alpha) =$$

$$= 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{2}\right).$$

Заметим, что $|\sin\alpha \pm \cos\alpha| \leqslant \sqrt{2}$, откуда нетрудно выяснить, что аргументы полученных синуса и косинуса лежат в I четверти, т. е. выражение положительно, что и требовалось доказать.

б) *Указание.* Решение аналогично решению задачи VI.187, *а*.

VI.188. а) **Решение.** Докажем формулу синуса тройного угла. $\sin 3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos\alpha + \sin\alpha \cos 2\alpha = 2\sin\alpha \cos^2\alpha + \sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha) = 2\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) + \sin\alpha - 2\sin^3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$. б) Наибольшее значение равно 5, наименьшее равно -5. *Указание.* $4\cos x + \cos 3x = 4\cos x + 4\cos^3 x - 3\cos x = 4\cos^3 x + \cos x$. в) *Указание.* См. задачу VI.187. г) **Решение.** ОДЗ уравнения: $1 - x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in [-1;\ 1]$. Пусть α такое число, что $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0;\ \pi]$ (такое α существует в силу того, что $x \in [-1;\ 1]$). Тогда уравнение примет вид $\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \Leftrightarrow |\sin\alpha| = \cos 3\alpha \Leftrightarrow \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\right| = \cos 3\alpha$. Решениями этого уравнения являются четыре серии $\frac{\pi}{2} - \alpha = \pm 3\alpha + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, и $\frac{\pi}{2} - \alpha = \pi \pm 3\alpha + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$, при условии $\cos 3\alpha \geqslant 0$. Легко проверить, что этим условиям (учитывая, что $\alpha \in [0; \pi]$) удовлетворяют числа $\frac{\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{8}$, а значит, решениями исходного уравнения являются числа $\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{2 + \sqrt{2}}{4}}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\cos\frac{5\pi}{8} = -\sqrt{\frac{1 + \cos\frac{5\pi}{4}}{2}} = -\sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{2}}$.
д) $4t^3 - 3t = 0{,}5$.

VI.189. а) **Решение.** $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\pi-\gamma}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$. б) *Указание.* Решение аналогично решению задачи VI.189, *а*.

VI.191. *Указание.* Решение следует из равенства задачи VI.190.

VI.192. **Решение.** $\mathrm{tg}(\alpha-\beta) + \mathrm{tg}(\beta-\gamma) + \mathrm{tg}(\gamma-\alpha) = \frac{\mathrm{tg}(\alpha-\beta) + \mathrm{tg}(\beta-\gamma)}{1 - \mathrm{tg}(\alpha-\beta)\,\mathrm{tg}(\beta-\gamma)}(1 - \mathrm{tg}(\alpha-\beta)\,\mathrm{tg}(\beta-\gamma)) + \mathrm{tg}(\gamma-\alpha) = \mathrm{tg}(\alpha-\gamma)(1 - \mathrm{tg}(\alpha-\beta)\,\mathrm{tg}(\beta-\gamma)) + \mathrm{tg}(\gamma-\alpha) = -\mathrm{tg}(\alpha-\gamma) \times \mathrm{tg}(\alpha-\beta)\,\mathrm{tg}(\beta-\gamma)$. Таким образом, произведение трёх тангенсов равно 0. Значит, хотя бы один из них равен 0, а тогда треугольник является равнобедренным. В другую сторону утверждение очевидно.

VI.193. **Решение.** $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} =$

$$= \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \frac{\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\left(1 - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)}{1 - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(1 - \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right) = 1.$$

VI.194. **Решение.**

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \sin(\alpha+\beta) =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} =$$

$$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right) = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$$

VI.195. **Решение.**

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = \sin 2\alpha + \sin 2\beta - \sin 2(\alpha+\beta) =$$
$$= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) - 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) =$$
$$= 2\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

VI.196. Треугольник равнобедренный. *Указание.* Следует из равенства

$$\sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha) =$$
$$= 4\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}.$$

VI.197. Решение.

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos(\alpha+\beta) =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 1 =$$
$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right) + 1 =$$
$$= 4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} + 1 > 1.$$

VI.198. Решение. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = -2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + 1$ (см. задачу VI.197). Обозначим $t = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, $a = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ и рассмотрим выражение как квадратное относительно t. Оно равно $-2t^2 + 2at + 1$, и наибольшее его значение (при фиксированном a) равно $\frac{D}{8} = \frac{a^2+2}{2}$. Учитывая то, что $-1 \leqslant a \leqslant 1$, получаем, что исходная сумма меньше или равна 1,5, причём равенство достигается только при $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \pm1$. Легко заметить, что $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ не может быть равен -1, а 1 равен только при $\alpha = \beta$. Аналогично можно доказать, что для достижения равенства необходимо выполнение равенств $\alpha = \gamma$ и $\beta = \gamma$, что и требовалось доказать.

§ 36. Тригонометрические функции и их свойства

В этом параграфе список известных школьникам элементарных функций расширяется тригонометрическими функциями. В 11 классе они познакомятся с мощными средствами исследования функций, а пока, знакомясь с новыми функциями, школьники смогут повторить методы исследования свойств функций, изученные в главе IV.

Решения и указания к задачам

VI.201. Нет решений при $a < 1$ и $a > 2$; бесконечное число решений при всех остальных a. *Указание.* $f(x) = 1 + |\sin 2x|$.

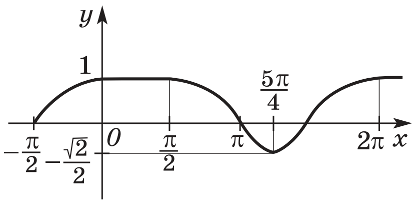


Рис. 6.11

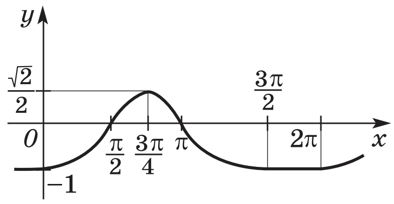


Рис. 6.12

VI.202. а) См. рис. 6.11. б) См. рис. 6.12.

VI.203. а) **Решение.** $y = 2\sin x - \cos 2x = 2\sin x - (1 - 2\sin^2 x) = 2\sin^2 x + 2\sin x - 1$. При этом если x пробегает промежуток $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right]$, то $\sin x$ пробегает промежуток $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. Сделаем замену переменной $t = \sin x$. Нам нужно найти наибольшее значение функции $2t^2 + 2t - 1$ на промежутке $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}; 1\right]$. Оно достигается при $t = 1$ и равно 3. б) $\frac{9}{8}$.

VI.204. Наибольшее значение равно 0, наименьшее значение равно $-\frac{9}{8}$ (достигается в вершине параболы $f(t) = 2t^2 - t - 1$ при $t = \frac{1}{4}$). *Указание.* $g(x) = 1 - \sqrt{\cos^2 x} - 2\sin^2 x = 1 - |\cos t| - 2(1 - \cos^2 t) = 2\cos^2 t - |\cos t| - 1$. Осуществить замену переменной $t = |\cos t|$ и найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(t) = 2t^2 - t - 1$ при $t \in [0; 1]$.

VI.205. а) 2. **Решение.** $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ одного знака, поэтому, чтобы их сумма была положительной, нужно, чтобы каждый из них был положителен. По неравенству Коши $\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x \geqslant 2\sqrt{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x} = 2$. При этом значение 2 достигается при $x = \frac{\pi}{4}$. б) 1. *Указание.* Воспользоваться равенством $(|\sin x| + |\cos x|)^2 = 1 + |\sin 2x|$.

VI.206. $24\pi - 1$. **Решение.** $16x + \frac{9\pi^2}{x} \geqslant 2\sqrt{16x \cdot \frac{9\pi^2}{x}} = 24\pi$. Значение 24π достигается при $16x = \frac{9\pi^2}{x}$, т. е. при $x = \frac{3\pi}{4}$. При этом $\sin 2x = -1$, т. е. $\sin 2x$ достигает своего наименьшего значения. Таким образом, $16x + \frac{9\pi^2}{x} + \sin 2x \geqslant$

$\geqslant 24\pi - 1$, при этом значение $24\pi - 1$ достигается при $x = \frac{3\pi}{4}$.

VI.207. а) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. **Решение.** $\cos x \in [-1; 1]$, поэтому, чтобы $\sin(\cos x)$ достигал наибольшего значения, $\cos x$ должен равняться 1. б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.208. а) $E(f) = \left[2; \frac{41}{8}\right]$. *Указание.* Преобразовать функцию к виду $f(x) = 3\sin^2 x + 5\cos^2 x + \sin x = -2\sin^2 x + 5 + \sin x$. б) $E(f) = \left[-\frac{49}{12}; 0\right]$. в) $E(f) = [2; 3]$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $3\cos^2 x - \cos 2x + 1 = \cos^2 x + 2$, г) $E(f) = \left[-\sqrt{13}; \sqrt{13}\right]$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $2\sin x + 3\cos x = \sqrt{13}\sin\left(x + \arccos\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$. д) $E(f) = [-10; 24]$. е) $E(f) = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right] \cup [3; +\infty)$. **Решение.** Так как $\cos x \in [-1; 1]$, то $2\cos x + 1 \in [-1; 3]$. Следовательно, $\frac{1}{2\cos x + 1} \in (-\infty; -1] \cup \left[\frac{1}{3}; +\infty\right)$. Значит, $-\frac{2}{2\cos x + 1} \in \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right] \cup [2; +\infty)$. Так как $\frac{2\cos x - 1}{2\cos x + 1} = 1 - \frac{2}{2\cos x + 1}$, получаем ответ. ж) $E(f) = \boldsymbol{R}$.

VI.209. а) Нечётная. б) Чётная. в) Чётная. г) Нечётная.

VI.210. а) При $a = 0$ функция чётна. **Решение.** Функция $f(x) = a\sin x + \cos x$ не может быть нечётной, так как при любом a её значение при $x = 0$ равно 1 (и не равно 0). Для того чтобы она была чётной, для любого x должно выполняться равенство $f(x) = f(-x)$, т. е. $a\sin x + \cos x = -a\sin x + \cos x \Leftrightarrow 2a\sin x = 0$. Это равенство может выполняться при любом x, только если $a = 0$. Проверив значение $a = 0$, убеждаемся, что в этом случае функция будет чётной. б) При $a = 1$ функция нечётна, при $a = -1$ функция чётна. **Решение.** Для того чтобы функция $f(x) = a(3\sin x + 2)^5 + (3\sin x - 2)^5$ была нечётной, необходимо, чтобы $f(0) = 0$. Это выполняется только при $a = 1$. Нетрудно проверить, что при $a = 1$ функция действительно будет нечётной. Для того чтобы функция была чётной, для любого x должно выполняться равенство $f(x) = f(-x)$, т. е. $a(3\sin x + 2)^5 + (3\sin x - 2)^5 = -a(3\sin x - 2)^5 - (3\sin x + 2)^5$.

Это равенство должно выполняться при любом x, в частности при $x = \frac{\pi}{2}$. Подставив это значение в равенство, получим необходимое условие на a: $a = -1$. Проверив, убеждаемся, что при $a = -1$ функция действительно является чётной.

VI.211. а) Возрастает на $[-\pi + 4\pi k; \pi + 4\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $[\pi + 4\pi k; 3\pi + 4\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) Возрастает на $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) Возрастает на $\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) Возрастает на $[-3\pi + 6\pi k; 6\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $[6\pi k; 3\pi + 6\pi k]$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.212. *Указание.* Во многих пунктах этой задачи удобно использовать теорему о монотонности композиции функций (с. 196 учебника). а) Возрастает на $\left[\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $\left[\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Ответ проще всего увидеть на эскизе графика функции $\sin^2 x$. б) *Указание.* Согласно теореме о монотонности композиции функций промежутки возрастания и убывания данной функции совпадают с промежутками возрастания и убывания $\cos x$ (так как $f(x) = 2^x$ — возрастающая функция на $\boldsymbol{R}$). в) Возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}; \frac{\pi k}{2}\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$, убывает на $\left[\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}\right]$, $k \in \boldsymbol{Z}$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1 + \cos^2 2x}{2}$. г) Убывает на отрезке $[-1; -0{,}5]$ и на отрезке $[0; 1]$, возрастает на отрезке $[-0{,}5; 0]$. **Решение.** Функция $g(x) = x^2 + x$ убывает на промежутке $[-1; -0{,}5]$ и возрастает на промежутке $[-0{,}5; 1]$, однако согласно теореме о монотонности композиции нам важно также, какие значения она принимает (точнее, когда эти значения попадают в промежуток монотонности функции $f(x) = \cos x$). Если $x \in [-1; -0{,}5]$, то $g(x) \in [-0{,}25; 0]$, а на этом промежутке функция $y = \cos x$ возрастает, поэтому по теореме о монотонности композиции функция $y = \cos(x^2 + x)$ убывает на отрезке $[-1; -0{,}5]$.

Если $x \in [-0{,}5; 0]$, то функция g возрастает и $g(x) \in$ $\in [-0{,}25; 0]$, функция $y = \cos x$ на этом промежутке также возрастает и по теореме о монотонности композиции функ-

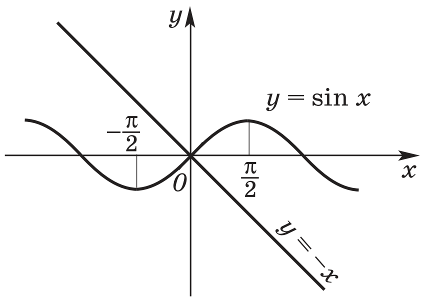


Рис. 6.13

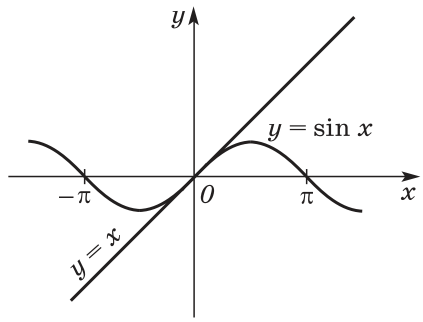


Рис. 6.14

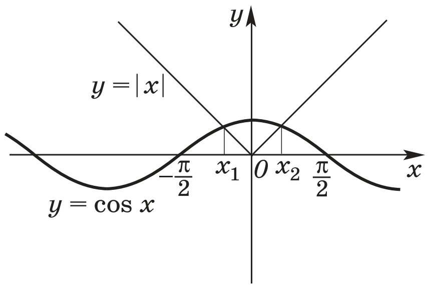


Рис. 6.15

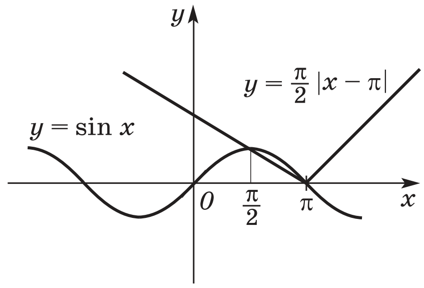


Рис. 6.16

ция $y = \cos(x^2 + x)$ возрастает на отрезке [–0,5; 0]. Наконец, если $x \in [0;\ 1]$, то $g(x) \in [0;\ 2]$, на этом промежутке функция $y = \cos x$ убывает и по теореме о монотонности композиции функция $y = \cos(x^2 + x)$ убывает на отрезке [0; 1]. *Замечание.* Мы не могли сразу же рассмотреть промежуток [–0,5; 1], несмотря на то, что функция g на нём монотонна, так как её значения не попадают в один промежуток монотонности функции $y = \cos x$. д) *Указание.* Решение аналогично решению задачи VI.121, *г*. Убывает на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2};\ -\frac{5\pi}{6}\right]$ и $\left[-\frac{\pi}{2};\ -\frac{\pi}{6}\right]$, возрастает на отрезках $\left[-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[-\frac{\pi}{6};\ 0\right]$. е) Возрастает на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$.

VI.213. а) См. рис. 6.13. б) См. рис. 6.14. в) См. рис. 6.15. г) $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$. См. рис. 6.16.

VI.214. *Указание.* Проще всего решить данные уравнения графически. а) $x = \pm 1$. *Указание.* См. рис. 6.17. б) $x = \frac{\pi}{2}$. *Указание.* См. рис. 6.18.

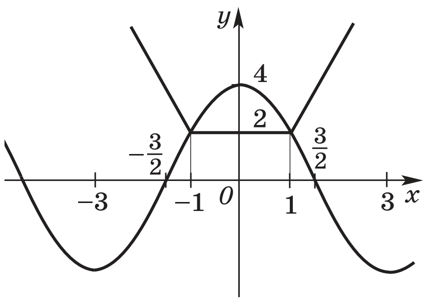


Рис. 6.17

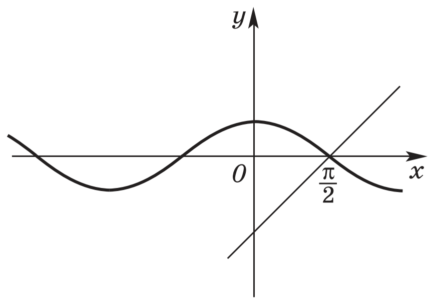


Рис. 6.18

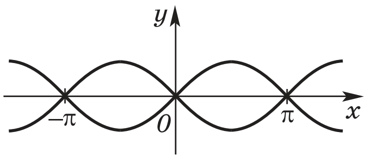


Рис. 6.19

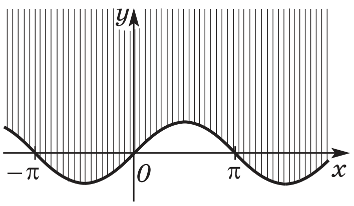


Рис. 6.21

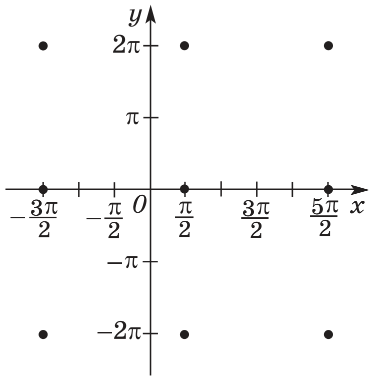


Рис. 6.20

VI.215. $a \geqslant 1$. **Решение.** Сделаем замену переменной $t = \sin x$. Тогда нам нужно найти значения параметра a, при которых функция $f(x) = t^2 - 2at + 4a - 3$ принимает неотрицательные значения на отрезке $[-1; 1]$. Заметим, что вершина графика этой функции имеет абсциссу a. Возможны два варианта: 1) $-1 \leqslant a \leqslant 1$. В этом случае, для того чтобы функция f принимала на отрезке $[-1; 1]$ только неотрицательные значения, необходимо и достаточно, чтобы неотрицательно было «значение в вершине», т. е. при $x = a$. Значит, должно выполняться неравенство $-a^2 + 4a - 3 \geqslant 0$. Решив его, получим ответ в этом случае: $a = 1$. 2) $a < -1$ или $a > 1$. Необходимо и достаточно выполнение двух условий: $f(1) \geqslant 0$, $f(-1) \geqslant 0$ (т. е. $2a - 2 \geqslant 0$) и $6a - 2 \geqslant 0$. В этом случае $a > 1$. Объединив результаты рассмотренных двух случаев, получим ответ.

VI.216. а) См. рис. 6.19. б) См. рис. 6.20. в) См. рис. 6.21.

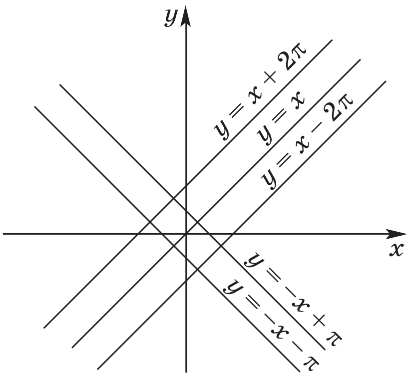


Рис. 6.22

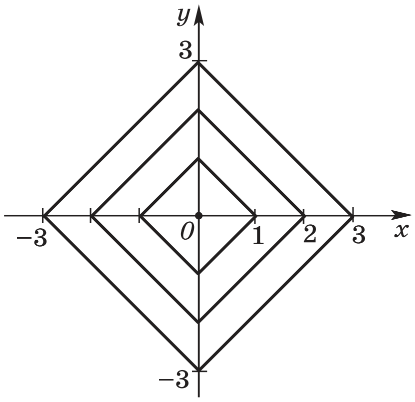


Рис. 6.23

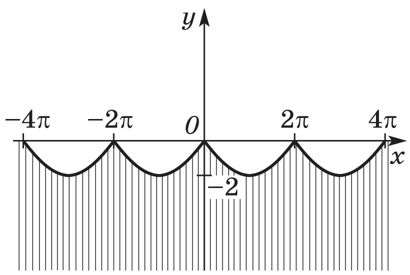


Рис. 6.24

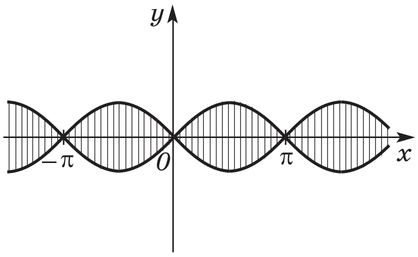


Рис. 6.25

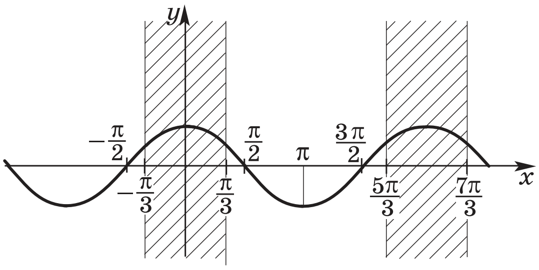


Рис. 6.26

VI.217. а) См. рис. 6.22. б) См. рис. 6.23.

VI.218. См. рис. 6.24.

VI.219. См. рис. 6.25.

VI.220. а) См. рис. 6.26. б) См. рис. 6.27. в) См. рис. 6.28.

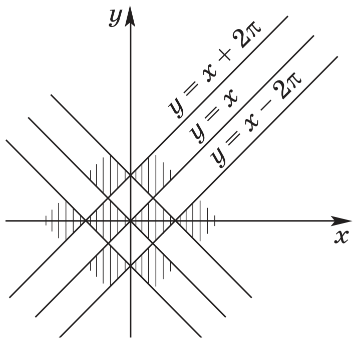


Рис. 6.27

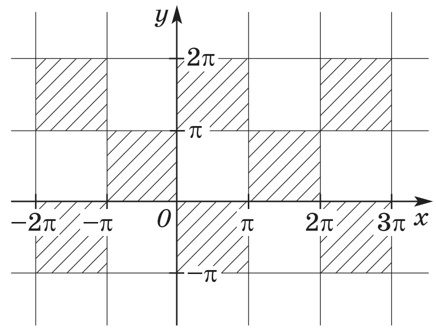


Рис. 6.28

VI.221. $a \in \left[2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12};\ 2+2\sqrt{2}\right] = \left[\sqrt{3}-1;\ 2+2\sqrt{2}\right].$

Указание. Фактически требуется найти множество значений функции $f(x) = |2\sin x + 1| + |2\cos x - 1|$. Для этого достаточно аккуратно раскрыть модуль, разобрав четыре случая:

$$x \in \left[-\frac{\pi}{3};\ -\frac{\pi}{6}\right],\ x \in \left[-\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{3}\right],\ x \in \left[\frac{\pi}{3};\ \frac{7\pi}{6}\right],\ x \in \left[-\frac{5\pi}{6};\ -\frac{\pi}{3}\right].$$

VI.222. а) $\frac{\pi}{2}$. *Указание.* Воспользоваться утверждением о периодичности функций вида $f(ax)$ (с. 191 учебника). б) 2π. **Решение.** В самом деле, если T — период функции $y = \sin x - \sin 2x$, то для любого x должно выполняться равенство $\sin x - \sin 2x = \sin(x+T) - \sin 2(x+T)$ (1). Подставим в него $x = 0$. Получим, что, для того чтобы число T было периодом, должно выполняться равенство $0 = \sin T - \sin 2T = -2\sin\left(\frac{T}{2}\right)\cos\left(\frac{3T}{2}\right)$. Нетрудно видеть, что первые четыре положительных числа, удовлетворяющие данному равенству, — это $\frac{\pi}{3}$, π, $\frac{5\pi}{3}$, 2π. При этом первые три числа периодами не являются. Это можно проверить непосредственно (например, число $\frac{\pi}{3}$ не является периодом, так как равенство (1) для $T = \frac{\pi}{3}$ не выполняется при $x = \frac{\pi}{2}$). Число 2π периодом является, причём как видно из вышеприведённых рассуждений, наименьшим положительным периодом, что и требовалось доказать. в) 2π. *Указание.* Воспользоваться тем, что $f(x)=\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$. г) 2π. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\sin\frac{3x}{2}\sin\frac{x}{2}=$ $=0{,}5(\cos x-\cos 2x)$. Решение аналогично решению задачи VI.222, *б*. д) $\frac{\pi}{2}$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1+\cos^2 2x}{2}=\frac{3+\cos 4x}{4}$. е) $\frac{2\pi}{3}$. *Указание.* Воспользоваться тем, что

$$\sin x\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{2}\sin x\left(\cos 2x-\cos\frac{2\pi}{3}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sin x\left(\frac{3}{2}-2\sin^2 x\right)=\frac{3}{4}\sin x-\sin^3 x=\frac{1}{4}\sin 3x.$$

ж) 2π. **Решение.** Пусть число T — период функции $f(x)=\cos x\cos 2x\cos 3x$. Тогда для любого x должно выполняться равенство

$$\cos x\cos 2x\cos 3x=\cos(x+T)\cos(2x+2T)\cos(3x+3T).$$

Подставим в него $x=0$. Получим, что $1=\cos T\cos 2T\cos 3T$, а это может быть только в случае, если $\cos T=1$, $\cos 2T=1$ и $\cos 3T=1$. Из первого равенства получаем, что наименьшее положительное число — «кандидат на главный период» — равно 2π. Проверив, убеждаемся, что оно подходит.

VI.223. а) У периодической функции область определения не может равняться промежутку $[0; +\infty)$. б) Пусть число T — период функции $\cos x+\cos\sqrt{3}x$. Тогда для любого x должно выполняться равенство $\cos x+\cos\sqrt{3}x=$ $=\cos(x+T)+\cos\sqrt{3}(x+T)$. Подставим в это равенство $x=0$. Получим, что $\cos T+\cos\sqrt{3}T=2$, а это может быть только в случае, если $\cos T=1$ и $\cos\sqrt{3}T=1$. Из первого равенства получаем, что $T=2\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$, из второго — что $\sqrt{3}T=2\pi n$, $n\in\boldsymbol{Z}$. Однако оба эти равенства выполняться не могут (иначе, поделив одно на другое, мы получили бы, что $\sqrt{3}$ — рациональное число). Противоречие значит, что данная функция не является периодической. в) Пусть T — период функции, тогда на промежутке $[0; T]$ функция принимает все свои значения, однако на этом промежутке функция не превосходит T, а при $x=([T]+1)2\pi$ функция принимает значение $([T]+1)2\pi$, что больше T. Противоречие.

VI.224. а) Да, например, одним из её периодов является 2π. б) Да, согласно утверждению о периодичности функций вида $f(ax)$ (с. 191 учебника).

VI.225. а) $f(x) = \sin 4x$. б) $f(t) = 2(2t^2 - 1)^2 - 1$. *Указание.* Подсказку может дать формула $\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1$. в) $f(t) = 4t^3 - 3t$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

§ 37. Обратные тригонометрические функции

В этом параграфе решаются различные задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями. Особенностью многих из них является необходимость проводить рассуждения при решении уравнений, не удовлетворяясь «действием по алгоритму». В самом деле, часто для решения уравнения необходимо взять синус (косинус) от обеих частей, но важно помнить, что это неравносильное преобразование! Равенство синусов не означает равенства чисел, а значит, необходимо рассуждать, какие из корней полученного уравнения являются корнями исходного. При этом часто (см. пример 47 учебника) проверки по ОДЗ явно недостаточно.

Решения и указания к задачам

VI.227. а) $\frac{\pi}{2}$. б) $\frac{\pi}{4}$. в) 0. г) $\operatorname{arcctg} x$ не принимает значение 0 (условие противоречиво).

VI.228. а) $[-2; 0]$. б) $\boldsymbol{R}\backslash\{-1\}$. в) $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$. г) $\{\pi\}$. **Решение.** $\cos x + (\pi - x)^2 + 2 \geqslant 1$, причём равенство достигается только при $x = \pi$.

VI.229. $\{-1\}$. **Решение.** $2\arcsin x \geqslant -\pi \geqslant -\pi - (x + 1)^2$, причём равенство достигается только при $x = -1$, которое и является единственным корнем уравнения.

VI.230. а) $[3 - \pi; 3 + \pi]$. б) $\left[0; \frac{\pi}{4+\pi}\right]$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\frac{\arccos x}{\arccos x + 4} = 1 - \frac{4}{\arccos x + 4}$. в) $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. г) $\left[-\frac{\pi^2}{4}; 0\right)$. д) $[\pi; 2\pi]$.

VI.231. а) **Решение.** $\arcsin(x^2 - 5x + 1) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x^2 - 5x + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{23}}{2}$. б) $\{0; 1\}$. *Указание.* $\arcsin(4x^3 - 3x^2 -$

$-\ 1) = \arcsin(x-1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 3x^2 - 1 = x - 1, \\ -1 \leqslant x - 1 \leqslant 1. \end{cases}$ в) **Решение.** $4\operatorname{arctg}(x^2 - 4x + 4) = \pi \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 1 \Leftrightarrow x \in \{1; 3\}$. г) $x = 0$. *Указание.* $\arcsin(x^3 + 3x) = \arcsin(4x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x = 4x, \\ -1 \leqslant 4x \leqslant 1. \end{cases}$ д) $x = 0$, $x = -\frac{2}{3}$. *Указание.* $\arcsin(3x^3 - x^2 + 1) = \arcsin(2x + 1) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^3 - x^2 + 1 = 2x + 1, \\ -1 \leqslant 2x + 1 \leqslant 1. \end{cases}$$

VI.232. а) $x \in [-1; 0{,}5)$. б) $x \in \varnothing$. в) $x \in [-1; 1]$. г) $x < -1$.

VI.233. а) $(0; 1]$. б) $(-1; 1)$. в) $\left\{\frac{\pi}{2}\right\}$. *Указание.* Сделать замену $t = \arcsin x$, тогда $t \in [1; 4]$. г) $[-4; -2] \cup [2; 4]$.

VI.234. *Указание.* Убедиться, что косинусы левой и правой частей равны. Для доказательства тождества останется заметить, что значения выражений в обеих частях принадлежат промежутку $[0; \pi]$, а значит, равенство косинусов означает равенство самих выражений.

VI.235. *Указание.* Доказательство аналогично доказательству такого же равенства для $\arcsin x$ и $\arccos x$.

VI.236. а) $-\frac{\pi}{2}$. б) $\frac{\pi}{2}$. в) 0,3. г) $-0{,}5$.

д) **Решение.** $\arcsin\left(\sin\frac{25\pi}{3}\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$.

е) **Решение.** $\arccos\left(\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = \frac{5\pi}{6}$. *Замечание.* Обратите внимание, в этом примере мы сначала прибавлением числа, кратного 2π, «загнали» наше число в промежуток от 0 до 2π, а потом привели аргумент к промежутку $[0; \pi]$, для чисел x из которого выполняется равенство $\arccos\cos x = x$.

ж) **Решение.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{23\pi}{4}\right) = \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$.

з) **Решение.** $\arcsin(\sin 6) = \arcsin(\sin(6 - 2\pi)) = 6 - 2\pi$.

и) **Решение.** $\arccos\cos 4 = \arccos\cos(2\pi - 4) = 2\pi - 4$.

VI.237. а) $\frac{15}{17}$.

б) **Решение.** $\arcsin(\cos 92°) = \arcsin\sin(-2°) = -2°$.

в) **Решение.** $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{18\pi}{11}\right)=\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{22}\right)\right)=-\frac{3\pi}{22}$.

г) $\frac{-\pi}{6}$.

VI.238. а) **Решение.**

$$\cos(2\arcsin 0{,}2) = 1 - 2\sin^2\arcsin 0{,}2 = 0{,}92.$$

б) **Решение.**

$$\sin(2\arccos 0{,}1) = 2\sin(\arccos 0{,}1)\cos(\arccos 0{,}1) =$$
$$= 2\sqrt{1-\cos^2\arccos 0{,}1}\cdot 0{,}1 = 0{,}2\sqrt{0{,}99}.$$

Замечание. При замене $\sin(\arccos 0{,}1)$ на $\sqrt{1-\cos^2\arccos 0{,}1}$ мы использовали положительность первого выражения. В дальнейшем мы не будем отмечать подобные ситуации, хотя, конечно, школьники должны уметь объяснять эти переходы.

в) **Решение.** $\sin(2\operatorname{arcctg} 2) = \frac{2\operatorname{tg}\operatorname{arcctg} 2}{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arcctg} 2} =$

$$= \frac{2\frac{1}{\operatorname{ctg}\operatorname{arcctg} 2}}{1+\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\operatorname{arcctg} 2}} = \frac{4}{5}.$$

г) **Решение.** $\cos\left(2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}\right) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}}{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arcctg}\frac{1}{3}} = -\frac{4}{5}$.

д) **Решение.** $\cos(0{,}5\operatorname{arctg} 2{,}4) = \sqrt{\frac{1+\cos\operatorname{arctg} 2{,}4}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\operatorname{arctg} 2{,}4}}}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

е) **Решение.** $\sin\left(0{,}5\arcsin\frac{7}{18}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\arcsin\frac{7}{18}}{2}} =$

$$= \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\arcsin\frac{7}{18}}}{2}} = \sqrt{\frac{18-5\sqrt{11}}{36}}.$$

VI.239. *Указание.* Задачи *а* и *б* проще решить графически (см. график $y = \arcsin\sin x$ на рис. 6.48 на с. 320 учебника). а) $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. б) $\{1\}$.

VI.240. а) $\frac{\pi}{4}$. **Решение.**

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{4}\right)}=1,$$

при этом $0<\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$, поэтому $\operatorname{arctg}\frac{3}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{4}=\frac{\pi}{4}$. *Замечание.* Из того что тангенс суммы равен 1, не следует сразу же, что сумма равна 1. б) $\frac{\pi}{2}$. *Замечание.* Если мы попробуем взять тангенс и воспользоваться формулой суммы, то обнаружим в знаменателе 0. Этой формулой пользоваться нельзя, тангенс суммы не определён, а это значит, что сумма равна $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in\boldsymbol{Z}$. Учитывая то, что $0<2\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}0{,}75<\pi$, получаем ответ.

VI.241. *Указание.* Требуемое равенство следует из того, что $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}+\operatorname{arctg}\frac{n}{n+2}\right)=1$ и $0<\operatorname{arctg}\frac{1}{n+1}+\operatorname{arctg}\frac{n}{n+2}<\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$.

VI.242. Решение. $\operatorname{arctg}3x+\operatorname{arctg}2x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3x+\operatorname{arctg}2x)=1\Leftrightarrow\frac{5x}{1-6x^2}=1\Leftrightarrow x\in\left\{-1;\ \frac{1}{6}\right\}$. Проверка показывает, что -1 не подходит (в этом случае левая часть отрицательна), а $\frac{1}{6}$ подходит (в этом случае $0<\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}2<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3)=1$, поэтому $\operatorname{arctg}3x+\operatorname{arctg}2x=\frac{\pi}{4}$). *Замечание.* Воспользовавшись формулой тангенса суммы, в данном случае мы не сузили область определения выражения.

VI.243. а) $x=1$. **Решение.** Нетрудно заметить, что область определения уравнения состоит из одного числа 1, которое и является корнем. б) $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$. в) **Решение.**

$3\arcsin 2x + 2\arccos 2x = \frac{5\pi}{4} \Leftrightarrow \arcsin 2x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{4}$. г) **Решение.** $\arcsin x \arccos x = \frac{\pi^2}{16} \Leftrightarrow \arcsin x\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right) = \frac{\pi^2}{16} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \arcsin x = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

VI.244. Решение. $\operatorname{arctg} 3 - \operatorname{arctg} 2 \leqslant \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} < 1$.

VI.245. а) **Решение.** $\arcsin \frac{3}{x} > \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 1 \geqslant \frac{3}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in [3; 6)$. б) $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. *Указание.* Воспользоваться тем, что $\arcsin \frac{8}{x^3} + \arccos \frac{8}{x^3} = \frac{\pi}{2}$ для всех x из области определения уравнения. в) *Указание.* $18\operatorname{arctg}^2 x - 3\pi \operatorname{arctg} x \leqslant \pi^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \operatorname{arctg} x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\right] \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}; \sqrt{3}\right]$. г) $x \in [-2; 1]$. д) $x \geqslant 0{,}5$. **Решение.** $\arccos \frac{1-x}{1+x} \geqslant \arccos \frac{1}{3} \Leftrightarrow -1 \leqslant \frac{1-x}{1+x} \leqslant \frac{1}{3}$.

VI.246. а) $\varnothing$. **Решение.** $\arcsin(y^2 - y + 1) > \arcsin(y + 1) \Leftrightarrow 1 \geqslant y^2 - y + 1 > y + 1 \geqslant -1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$. б) $\varnothing$. *Указание.* Нетрудно убедиться, что область определения данного неравенства состоит из одного числа 0.

VI.247. б) $x = \frac{1}{\sqrt{5}}$. в) $x \in [0, 1]$. г) $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$. *Указание.* Решения этих задач аналогичны решению примера 47 учебника. Основной метод решения — избавиться от обратных тригонометрических функций, взяв синус или косинус от обеих частей. При этом нужно внимательно следить за равносильностью (обычно получаются уравнения-следствия и нужно либо потом проверять полученные корни, либо исследовать множество значений левой и правой частей).

VI.248. Решение. Если $x > y$, то $x + \operatorname{arctg} x > y + \operatorname{arctg} y$. Если $x < y$, то $x + \operatorname{arctg} x < y + \operatorname{arctg} y$. Поэтому из равенства $x + \operatorname{arctg} x = y + \operatorname{arctg} y$ следует, что $x = y$, а тогда и $\arcsin x = \arcsin y$.

VI.249. Решение.

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{8} = \frac{\sin \frac{\pi}{4}}{1 + \cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1,$$

таким образом, тангенсы чисел $\operatorname{arctg}(\sqrt{2} - 1)$ и $\frac{\pi}{8}$ равны, а сами числа попадают в промежуток $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, значит, числа равны.

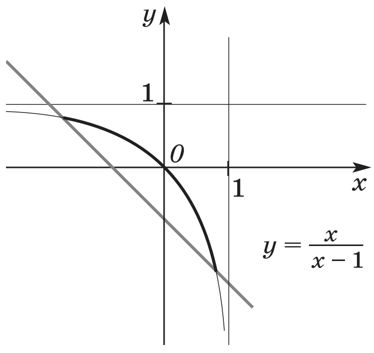


Рис. 6.29

VI.250. а), б) См. рис. 6.29.

VI.251. **Решение.** Пусть $x = \cos\alpha$, $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, а $y = \cos\beta$, $\beta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$\arccos x + \arccos y - \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) = \arccos\cos\alpha + \arccos\cos\beta - \arccos\left(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sqrt{1-\cos^2\alpha}\,\sqrt{1-\cos^2\beta}\right) = \alpha + \beta - \arccos\left(\cos(\alpha+\beta)\right) = 0.$$

VI.252. При любых значениях параметра a можно взять $x = 0$ и тогда числа $\arcsin(-a)$, $\arcsin x$, $\arcsin(a)$ образуют арифметическую прогрессию.

VI.253. а) $x \in [-2; -1]$. **Решение.** Область определения уравнения: $x \in [-2; -1] \cup [1; 2]$. Тогда при $x \in [-2; -1]$ $\arccos\frac{x}{2} > 0 > 2\arcsin\frac{1}{x}$, а при $x \in [1; 2]$ $\arccos\frac{x}{2} \leqslant \frac{\pi}{3} \leqslant 2\arcsin\frac{1}{x}$, причём значение $\frac{\pi}{3}$ достигается в левой и правой частях при разных x.

VI.254. а) См. рис. 6.30. б) См. рис. 6.31. в) См. рис. 6.32. г) См. рис. 6.33.

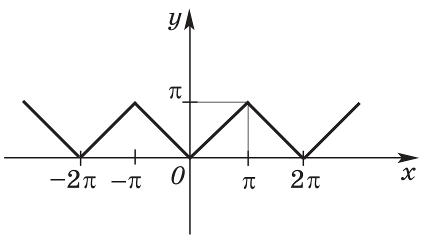


Рис. 6.30

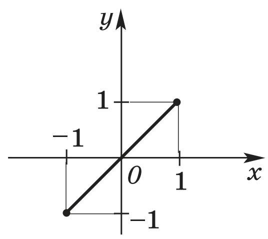


Рис. 6.31

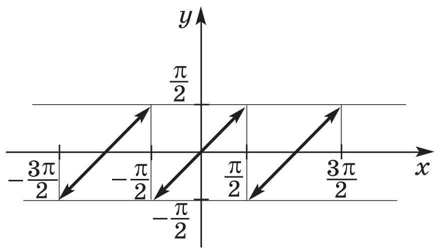


Рис. 6.32

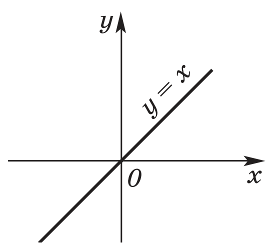


Рис. 6.33

VI.255. б) $g(x) = -\arcsin x + \pi$. **Р е ш е н и е.** В самом деле, $D(g) = [-1;\ 1]$, $E(g) = \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]$ и выполняются равенства $f(g(x)) = \sin(-\arcsin x + \pi) = \sin\arcsin x = x$ и $g(f(x)) =$ $= -\arcsin\sin x + \pi = -\arcsin\sin(\pi - x) + \pi = -(\pi - x) + \pi = x$ $\left(\arcsin\sin(\pi - x) = \pi - x \text{ в силу того, что } x \in \left[\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2}\right]\right)$, а значит (эти условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы утверждать, что f и g — взаимно обратные функции, что легко следует из теоремы о взаимно обратных функциях), g — обратная к f функция. Заметим, что найти формулу для g может быть проще всего из графика (график g должен быть симметричен графику f относительно прямой $y = x$, рис. 6.34). в) $g(x) = \arcsin x + 2\pi$. г) Обратной функции не существует, так как функция $y = \sin x$ не является однозначной на этом промежутке.

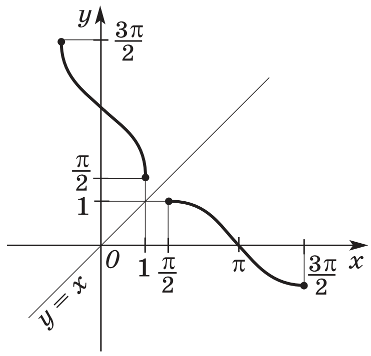


Рис. 6.34

VI.256. *Указание.* Решить проще всего графически. Из рисунка 6.35 видно, что данное уравнение имеет ровно 4 решения при $a \in \left(-\frac{1}{3};\ -\frac{1}{5}\right) \cup \left(\frac{1}{5};\ \frac{1}{3}\right)$.

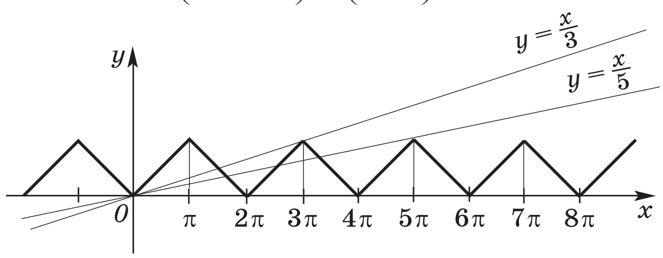


Рис. 6.35

VI.257. $x \in \left[2\pi k;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbf{Z}$. *Указание.* Самое удобное решение — графическое. Можно также заметить, что достаточно решить данное уравнение на промежутке $[0;\ 2\pi]$ в силу периодичности функций $\sin x$ и $\cos x$.

§ 38. Тригонометрические уравнения

В этом параграфе подробно разобраны все основные методы решения тригонометрических уравнений.

Практически все тригонометрические уравнения, встречающиеся в данной главе, стандартны. Методы их решения подробно описаны в учебнике, и в задачнике они сгруппированы по методам решения. Поэтому здесь мы приводим только ответы к уравнениям. К более сложным тригонометрическим уравнениям мы обратимся уже в 11 классе.

Решения и указания к задачам

VI.260. а) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x = -2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = -2 - \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{28} - \frac{6}{7} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. д) $x = -\frac{\pi}{12} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{19}{60}\pi + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. е) $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. ж) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. з) $x = \frac{\pi}{14} + \frac{2\pi k}{7}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. и) $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. к) $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi k}{7}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.261. а) $\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $\varnothing$.

VI.262. а) $x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.263. а) $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $\varnothing$. г) $\varnothing$.

VI.264. а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x = -\frac{5\pi}{24} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{13\pi}{24} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.265. а) $\varnothing$. б) $x = -\arccos\frac{3}{5} + \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\arccos\frac{3}{5} + \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $\varnothing$. г) $x = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} +$

$+\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{13}}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\arccos\dfrac{2}{\sqrt{13}}+\pi-\arcsin\dfrac{1}{2\sqrt{13}}+$

$+2\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$ д) $x=\dfrac{-\arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}}+\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{34}}}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\quad k\in\boldsymbol{Z};$

$x=\dfrac{-\arccos\dfrac{3}{\sqrt{34}}+\pi-\arcsin\dfrac{4}{\sqrt{34}}}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}.$

е) $x=\dfrac{-\arccos\dfrac{2}{\sqrt{13}}+\arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{4}-2}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\boldsymbol{Z};$

$x=\dfrac{-\arccos\dfrac{2}{\sqrt{13}}+\pi-\arcsin\dfrac{\sqrt{13}}{4}-2}{3}+\dfrac{2\pi k}{3},\ k\in\boldsymbol{Z}.$

VI.266. а) $x=\dfrac{-\arccos\dfrac{5}{13}}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\quad k\in\boldsymbol{Z};\quad x=\dfrac{\arccos\dfrac{5}{13}}{2}-$ $-\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$ б) $x=-\dfrac{\pi}{32}+\dfrac{\pi k}{4},\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\dfrac{\pi}{72}+\dfrac{\pi k}{9},\ k\in\boldsymbol{Z}.$

в) $x=\dfrac{\arccos\dfrac{4}{5}}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\quad k\in\boldsymbol{Z};\quad x=\dfrac{-\arccos\dfrac{4}{5}}{6}+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi k}{3},\quad k\in\boldsymbol{Z}.$

VI.267. а) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$ б) $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};$ $x=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$ в) $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z}.$ г) $\varnothing$.

VI.268. а) $x=\pm\arccos\dfrac{\sqrt{3}-\sqrt{363}}{-20}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$ б) $x=\pm\pi+$ $+6\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$ в) $t=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$ г) $x=2\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z};$ $x=\pm\arccos\left(-\dfrac{1}{3}\right)+2\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$ д) $x=-\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z};$ $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$

VI.269. а) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\quad k\in\boldsymbol{Z};\quad x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z}.$ б) $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2},\ k\in\boldsymbol{Z};\ x=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}.$

VI.270. а) $x=1+\dfrac{\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\boldsymbol{Z};\quad x=1+\operatorname{arctg}\dfrac{2}{3}+\pi k,$ $k\in\boldsymbol{Z}.$ б) $x=\dfrac{\operatorname{arctg}2}{3}+\dfrac{\pi k}{3},\quad k\in\boldsymbol{Z};\quad x=\dfrac{\operatorname{arctg}0{,}5}{3}+\dfrac{\pi k}{3},\quad k\in\boldsymbol{Z}.$

в) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \operatorname{arcctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.271. а) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.272. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.273. а) $x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.274. б) $x = \arcsin\frac{\sqrt{29}-5}{2\sqrt{2}} - \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{3\pi}{4} - \arcsin\frac{\sqrt{29}-5}{2\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. д) $x = \pi + 2\pi k$; $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{5\pi}{4} - \arcsin\frac{1}{3\sqrt{2}} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. е) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.275. а) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $\varnothing$.

VI.276. а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $\operatorname{arctg} 2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x = \pm\operatorname{arctg}\sqrt{3+\sqrt{12}} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.277. а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \operatorname{arctg}(-2) + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.278. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.279. а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}; \quad x = \operatorname{arctg} 4 + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$ б) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ в) $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z};\ x = 2\operatorname{arctg}\frac{9}{7} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ г) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

VI.280. а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}; \quad x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$ б) $x = \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

VI.281. а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{4}\right) + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ б) $x = \operatorname{arctg}\frac{1 \pm \sqrt{7}}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ в) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ г) $x =$ $= \operatorname{arctg} 2 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ д) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z}; \quad x = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}.$ е) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z};$ $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

VI.282. а) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \boldsymbol{Z}; \quad x = \operatorname{arctg}\frac{-2 \pm \sqrt{7}}{6} + \pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z}.$ б) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

VI.283. а) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \pm\arccos\frac{3}{4} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};$ $x = \pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ б) $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \arcsin\left(\pm\frac{3}{\sqrt{20}}\right) +$ $+ 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \pi - \arcsin\left(\pm\frac{3}{\sqrt{20}}\right) + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

VI.284. $-\frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$

VI.285. При $a = -1$ решений два, при $a = 0$ решений три, при $a = 3$ решений два, при $a \in (-1;\ 3)\backslash\{0\}$ решение одно, при остальных a решений нет.

VI.286. $a \in [-1;\ 2].$

VI.287. а) $a \in [-3;\ 1{,}5].$ б) $a \in \left[-\frac{201}{40};\ 6\right].$ в) При $a \geqslant 1$ и $a \leqslant -1.$

VI.288. а) $x = \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ б) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,$ $k \in \boldsymbol{Z};\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}.$ в) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \boldsymbol{Z};\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,$

$k \in \boldsymbol{Z}$; $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.289. а) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{\pi}{12} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{8} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{3\pi}{8} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{7\pi}{8} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{11\pi}{8} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.290. а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \pm\arccos\frac{7 - \sqrt{65}}{8} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.291. а) $x = \frac{\pi k}{10}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.292. а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{24} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. в) $x = \frac{\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. д) $x = \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. е) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.293. а) $x = -2 + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi k - \frac{3}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.294. а) $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = -\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.295. а) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

в) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. г) $x = \frac{\pi k}{9}$, $k \in \boldsymbol{Z}$, $k \not\vdots\, 9$. д) $x = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi k}{9}$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.296. а) $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. б) $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

VI.297. $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$; $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \boldsymbol{Z}$.

Глава VII. Предел последовательности

Основным отличием данной главы от остальных глав учебника является то, что её материал практически никогда не используют на экзаменах. Более того, изучение материала этой главы (равно как и материала главы VIII в части исследования понятия предела функции и связанных с ним вопросов) не является необходимым. Однако этот материал представляет несомненный интерес. Поэтому при наличии времени и желания им не следует пренебрегать.

Самым важным и трудным в изучении данной главы является передать не только «букву» анализа, но и его «дух». Исторически представление о пределе сложилось существенно раньше, нежели было дано формальное определение, и соответствующие рассуждения многократно использовались. Да и сейчас вряд ли у кого-либо из учащихся возникнет сомнение в том, что $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{n} = 0$, даже до ознакомления с определением предела последовательности. Теоремы о действиях с пределами и о свойствах, связанных с неравенствами, также интуитивно естественны.

С другой стороны, имеется столько «интуитивно естественных» утверждений (в том числе и в задачном материале), которые неверны, что возникает необходимость некоторой формальной опоры в рассуждениях, которую и даёт определение предела.

Приведём примерный план изучения главы VII.

Глава VII. Предел последовательности	**8**	**18**
Понятие последовательности. Определение предела последовательности. Арифметические действия над сходящимися последовательностями	6	8
Предел монотонной последовательности. Число e. Подпоследовательности		8
Контрольная работа № 12	2	2

§ 39. Понятие последовательности. Свойства последовательностей

Материал параграфа призван актуализировать знания учащихся о последовательностях, объединив их со знаниями, полученными при изучении главы IV. Особое внимание следует обратить на то, что последовательность в отличие от абстрактной функции можно задать рекуррентно.

Полезно также акцентировать внимание учащихся на доказательстве монотонности и ограниченности последовательностей с помощью метода математической индукции (в соответствии с описанием в конце параграфа).

Решения и указания к задачам

VII.4. б) *Указание.* Выпишем первых три члена последовательности:

$$a_1 = 1 = \frac{2^1 - 1}{2^0}, \quad a_2 = \frac{3}{2} = \frac{2^2 - 1}{2^1}, \quad a_3 = \frac{7}{4} = \frac{2^3 - 1}{2^2}.$$

Теперь можно предположить, что $a_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}}$. В правильности этой гипотезы можно убедиться, используя метод математической индукции.

VII.5. Решение. Выпишем несколько первых членов последовательности: 1; 2; 2; 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; 1; 2; 2. Ясно (и легко проверяется по индукции), что последовательность $\{a_n\}$ периодична и период равен 6, иначе говоря, $\forall n \in \boldsymbol{N}\ a_n = a_{n+6}$. Тогда $\left\{\frac{1}{2}; 1; 2\right\}$ — множество значений этой последовательности.

Замечание. Наряду с выяснением вопроса о множестве значений этой последовательности можно попутно решить вопрос и о её монотонности, если задать $a_1 = a$, а $a_2 = b$, т. е. выяснить, существуют ли такие положительные a и b (если $ab < 0$, то ответ очевиден), что последовательность $\{a_n\}$ является возрастающей. (Ответ: не существуют.)

VII.6. а) **Решение.** Из неравенства $x_n = (n-1)^2 - 2 \geqslant \geqslant -2$ следует, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу. Так как множество значений квадратичной функции $f(x) = x^2 - 2x - 1$ при натуральных значениях аргумента не ограничено сверху, то последовательность не ограничена сверху.

б) **Решение.** $x_n = \dfrac{2n^2 - 1}{n + 1} = 2n - 2 + \dfrac{1}{n + 1}$. Покажем, что последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху, т. е. $\forall M > 0\ \exists n_0 \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant n_0\ \ 2n - 2 + \dfrac{1}{n + 1} > M$.

Действительно, возьмём произвольное $M > 0$. Тогда неравенство $2n - 2 > M$ влечёт за собой $x_n > M$. Значит, в качестве n_0 можно взять $n_0 = \left[\dfrac{M + 2}{2}\right] + 1$. Заметим, что $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \ x_n > 0$, откуда следует, что последовательность ограничена снизу.

Замечание. Можно предложить учащимся решить вопрос о монотонности последовательности. Так как верно $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{(2n^2 - 1 + 4n + 2)(n + 2)}{(n + 1)(2n^2 - 1)} > 1$, то $\forall n \in \boldsymbol{N}\ x_n \leqslant x_{n+1}$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ возрастает.

в) **Решение.** $|\sin n| \leqslant 1$, поэтому последовательность $\{x_n\}$ ограниченная.

г) **Решение.** Представим общий член последовательности в виде $x_n = 3 - \dfrac{5}{n+2}$. При $x \geqslant 1$ функция $f(x) = 3 - \dfrac{5}{x+2}$ возрастает, множество её значений $E(f) = \left[\dfrac{4}{3};\ 3\right)$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ ограниченная.

д) **Решение.** Для любого натурального n выполнено неравенство $\left|\dfrac{\cos n}{n}\right| = \dfrac{|\cos n|}{n} \leqslant \dfrac{1}{n} \leqslant 1$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ ограниченная.

е) **Решение.** Так как $\forall n \in \boldsymbol{N}$

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

а последовательность с общим членом $y_n = \sqrt{n}$ не ограничена сверху, то последовательность $\{x_n\}$ не ограничена сверху. Понятно, что $\forall n \in \boldsymbol{N}\ x_1 < x_n$, а значит, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу.

ж) **Решение.** По формуле суммы первых n членов арифметической прогрессии $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = \dfrac{1 + (2n - 1)}{2}n = n^2$. Тогда $x_n = \dfrac{n^2}{n^2 + 1} = 1 - \dfrac{1}{n^2 + 1}$. Как и в задаче VII.6, *г*, последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу числом 0, а сверху числом 1.

з) Последовательность $\{x_n\}$ ограничена. *Указание.* Ясно, что $\frac{n}{4^n} > 0$. С помощью метода математической индукции можно доказать, что $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $\frac{n}{4^n} < 1$ (см., например, задачу I.65, *б*).

и) **Решение.** В задаче 1.65, *ж* было доказано с помощью метода математической индукции, что при $n \geqslant 4$ $2^n < n!$. Тогда $\forall n \geqslant 4$ $0 < x_n < 1$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ ограничена.

VII.7. а) Можно доказать с помощью метода математической индукции два утверждения: 1) $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_{n+1} > x_n$ и 2) $\forall n \in \boldsymbol{N}$, $n \geqslant 2$ $x_n < 3$.

1) База индукции очевидна. Переход индукции доказывает цепочка соотношений $x_{n+1} = \sqrt{3 + x_n} > \sqrt{3 + x_{n-1}} = x_n$, верная в силу свойств корней и индукционного предположения $x_n > x_{n-1}$.

2) База индукции: $x_2 = \sqrt{7} < 3$. Переход индукции: В силу индукционного предположения $x_n < 3$, а тогда $x_{n+1}^2 = 3 + x_n < 3 + 3 = 6$, и следовательно, $x_{n+1} < 3$. Из первого и второго утверждения следует ограниченность последовательности $\{x_n\}$.

VII.8. а) Последовательность $\{y_n\}$ обязательно ограничена. **Решение.** По одному из определений ограниченности последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной, если $\exists M > 0$: $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $|x_n| \leqslant M$. Но тогда $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $|y_n| \leqslant M$, поскольку $|y_n| = \|x_n\| = |x_n|$.

б) Необязательно ограничена. *Указание.* Например, $x_n = \frac{1}{n}$.

в) Обязательно ограничена. *Замечание.* Результат не зависит от ограниченности последовательности $\{x_n\}$, поскольку значения косинуса любого числа по модулю не превосходят 1.

г) Необязательно ограничена. *Указание.* Например, для $x_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}$ последовательность $\operatorname{tg} x_n$ будет неограниченной. Доказать это удобнее всего, решив неравенство $\operatorname{tg} x > M$ и убедившись, что при любом значении M в множество решений этого неравенства попадают члены последовательности $\{x_n\}$.

д) Необязательно ограничена. *Указание.* Например, при $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ получаем $y_n = \sqrt{n}$.

е) Необязательно ограничена. *Указание.* Например, при $x_n = \frac{1}{n}$ получаем последовательность $y_n = -\lg n$, которая является неограниченной.

VII.9. Решение. Так как последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ ограничены, существуют такие числа A и B, что $\forall n \in \boldsymbol{N}\ (|x_n| \leqslant A) \wedge (|y_n| \leqslant B)$.

а) Неравенства $|x_n + y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| \leqslant A + B$ показывают, что последовательность $z_n = x_n + y_n$ обязательно ограничена.

б) Неравенства $|x_n - y_n| \leqslant |x_n| + |y_n| \leqslant A + B$ показывают, что последовательность $z_n = x_n - y_n$ обязательно ограничена.

в) Неравенства $|x_n y_n| \leqslant |x_n| \cdot |y_n| \leqslant A \cdot B$ показывают, что последовательность $z_n = x_n \cdot y_n$ обязательно ограничена.

г) Каждый член последовательности по модулю не превосходит 2, поэтому последовательность ограничена независимо от ограниченности исходных последовательностей.

д) Пусть $x_n = \sqrt[n]{2}$, $y_n = 1$. Тогда $z_n = n$ — неограниченная последовательность.

е) В задаче VII.8, *а* было показано, что сумма ограниченных последовательностей ограничена. Используя результат этой задачи, получаем, что последовательности $|x_n|$ и $|y_n|$ ограничены, а тогда и $\{z_n\}$ — ограниченная последовательность.

VII.10. а) Обязательно ограничена. б) Может быть как ограниченной, так и неограниченной. в) Обязательно ограничена. г) Может быть как ограниченной, так и неограниченной. д) Может быть как ограниченной, так и неограниченной.

VII.11. (–3; 2). **Решение.** Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n = x_n^2 + 4x_n + 4 = (x_n + 2)^2$. Она положительна, если $x_n \neq -2$. Если $x_2 \neq -2$, то, рассуждая по индукции, получим $x_n \neq -2$. Выясним, когда $x_2 = -2$:

$$-2 = a^2 + 5a + 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -2, \\ a = -3. \end{array}\right.$$

Значит, при $a \neq -2$ и $a \neq -3$ последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Далее, пусть $x_1 = a > -2$. Тогда в силу возрастания последовательности $\{x_n\}$ выполнено:

$$\forall n \in \boldsymbol{N}\ x_{n+1} = x_n^2 + 5x_n + 4 > -2, \text{ т. е. } \left[\begin{array}{l} x_n > -2, \\ x_n < -3. \end{array}\right.$$

Однако неравенство $x_n < -3$ не выполняется при $n \geqslant 2$, поскольку неравенство $x^2 + 5x + 4 < -3$ не имеет решений.

Итак, пусть для любых натуральных значений n выполнено $x_n > -2$. Тогда при всех натуральных k выполнено $x_{k+1} - x_k = (x_k + 2)^2 > (x_1 + 2)^2$, а тогда $x_{n+1} = x_{n+1} - x_n + x_n - x_{n-1} + \ldots + x_2 - x_1 + x_1 > x_1 + n(x_1 + 2)^2$. Из неравенства $x_{n+1} > x_1 + n(x_1 + 2)^2$ ясно, что члены последовательности могут быть сколь угодно большими. Если $-3 < x_1 = a < -2$, то $-3 < x_n^2 + 5x_n + 4 < -2 \Leftrightarrow x_n \in (-3; -2)$. Тем самым последовательность будет ограниченной.

VII.13. а) **Решение.** Рассмотрим функцию $f(n) = n^2 - n + 1 = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Она возрастает на множестве натуральных чисел, значит, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

в) **Решение.** Рассмотрим функцию $f(x) = -x^2 + 3x + 4$. Абсцисса вершины параболы $x_0 = \frac{3}{2} > 1$, следовательно, последовательность $\{x_n\}$ убывающая, начиная с $n = 2$. При этом $x_1 = x_2 = 6$, поэтому можно утверждать, что последовательность убывает на множестве $\boldsymbol{N}$, но нестрого.

г) **Решение.** Последовательность с общим членом $x_n = \frac{4n+3}{2n+1} = 2 + \frac{1}{2n+1}$ убывающая, так как $f(x) = 2 + \frac{1}{2x+1}$ убывает на $[-1; +\infty)$.

д) **Решение.** Последовательность с общим членом $x_n = \frac{2n}{n^2+1} = \frac{2}{n + \frac{1}{n}}$ убывает, так как функция $f(x) = x + \frac{1}{x}$ возрастает и положительна на $[1; +\infty)$.

е) При $x \in (2k; 2k + 1)$ убывает; при $x \in (2k - 1; 2k)$ возрастает; при $x \in \boldsymbol{Z}$ является константой, поэтому может быть сочтена как нестрого возрастающей, так и нестрого убывающей. **Решение.** 1) Если $\sin \pi x > 0 \Leftrightarrow 2k < x < 1 + 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n = \frac{\sin \pi x}{n} > \frac{\sin \pi x}{n+1} = x_{n+1}$, значит, последовательность $\{x_n\}$ убывающая.

2) Если $\sin \pi x < 0 \Leftrightarrow 2k + 1 < x < 2 + 2k$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Тогда $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n = \frac{\sin \pi x}{n} < \frac{\sin \pi x}{n+1} = x_{n+1}$, значит, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая.

3) Если $x \in \boldsymbol{Z}$, то $x_n = 0$.

ж) Не является монотонной. *Указание.* Общий член последовательности может быть записан в виде

$$x_n = \begin{cases} 6k, \ n = 2k, \\ 2k - 1, \ n = 2k - 1. \end{cases}$$

з) **Решение.** Последовательность с общим членом $x_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ убывает, так как убывает функция $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Замечание. Задачи VII.14 и VII.15 являются подготовительными для VII.16.

§ 40. Определение предела последовательности. Свойства сходящихся последовательностей

Основной задачей этого параграфа является обучение «переводу» интуитивных догадок в строгие доказательства, базирующиеся на определении предела. Здесь будут полезны следующие задания:

1. Предложить поменять в определении предела имеющиеся кванторы всеми возможными способами (возникнет 8 вариантов, включая само определение предела) и попросить описать возникающие при этом последовательности. Например, выполнение условия

   $$\exists \varepsilon > 0: \exists k \in \boldsymbol{N}: \forall n > k \ |x_n - A| < \varepsilon$$

   означает, что последовательность $\{x_n\}$ ограничена, а выполнение условия

   $$\forall \varepsilon > 0 \ \forall k \in \boldsymbol{N} \ \forall n > k \ |x_n - A| < \varepsilon$$

   означает, что все члены последовательности (кроме, возможно, первого) равны A.

2. Первое время пытаться формулировать доказательства на «естественном языке» наподобие того, как это описано в послесловии для учителя (с. 413 учебника).

3. Полезно провести урок по определению предела в форме мастерской. Разработка такого урока приведена в книге Окунева А. А. Как учить не уча / А. А. Окунев. — СПб.: Питер Пресс, 1996.

Стоит обратить внимание учащихся на то, что наличие предела последовательности равносильно тому, что во множестве решений соответствующего неравенства с параметром ε содержится луч.

VII.14. в) **Решение.** $\frac{1}{n^3} < \varepsilon \Leftrightarrow n^3 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}$, т. е. $n \geqslant \left[\sqrt[3]{\frac{1}{\varepsilon}}\right] + 1$. Если $\varepsilon = \frac{1}{10}$, то $n \geqslant \left[\sqrt[3]{10}\right] + 1 = 3$.

VII.15. б) **Решение.** $\frac{1}{n+1} < \varepsilon \Leftrightarrow n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$, т. е. $n \geqslant \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right] + 1$.

VII.17. б) **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant N_\varepsilon\ \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$. Рассмотрим неравенство $\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$, т. е. в качестве N_ε можно взять $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}\right] + 1$. г) **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{n^2} = 1 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ $\exists N_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant N_\varepsilon\ \left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| < \varepsilon$. Рассмотрим неравенство $\left|\frac{n^2+1}{n^2} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, т. е. в качестве N_ε можно взять $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right] + 1$.

VII.18. а) **Решение.** Аналогично решению задачи VII.17, так как $\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{n} < \varepsilon$, то в качестве N_ε можно взять $N_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. То есть мы доказали, что $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3^n} = 0$.

б) **Решение.** Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n = 0$. Тогда должно выполняться $\left|\left(-\frac{2}{5}\right)^n\right| = \left|(-1)^n\left(\frac{2}{5}\right)^n\right| = \left(\frac{2}{5}\right)^n < \varepsilon$. Взяв $N_\varepsilon = \left[\log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, получим, что неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^n < \varepsilon$ выполнено для всех $n > \boldsymbol{N}_\varepsilon$.

в) **Решение**. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$. Заметим, что $\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leqslant\frac{1}{n}$. Тогда, взяв $N_\varepsilon=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, получим, что неравенство $\left|\frac{\sin n}{n}\right|<\varepsilon$ выполнено для всех $n>N_\varepsilon$.

г) **Решение**. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2+5n}=0$. Рассмотрим неравенство $\left|\frac{1}{2n^2+5n}\right|<\varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{2n^2+5n}<\varepsilon \Leftrightarrow 2n^2+5n>\frac{1}{\varepsilon}$. Так как $2n^2+5n>2n^2$, то решим неравенство $2n^2>\frac{1}{\varepsilon}$, откуда $n>\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}$ и в качестве N_ε можно взять $N_\varepsilon=\left[\sqrt{\frac{1}{2\varepsilon}}\right]+1$.
д) 0. е) 1.

ж) 1. *Указание.* При $n>6$ выполнено неравенство $n^2-5n-7>0$, откуда при $n>6$ будет выполняться $x_n=1$. з) 0. *Указание.* Действительно, так как при $n>8$ выполнено $0<\frac{7n+5}{n^2+1}<1$, то при $n>8$ будет выполняться $x_n=0$.

VII.19. *Замечание.* Типичной ошибкой было бы написать: $\exists\varepsilon>0$: $\forall N_\varepsilon\in\boldsymbol{N}$ $\exists n\geqslant N_\varepsilon$: $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$. Действительно, приведённая запись означает, что число a не является пределом последовательности $\{x_n\}$.

Решение. Сходимость последовательности $\{x_n\}$ означает существование какого-либо её предела. Значит, отрицание утверждения «последовательность $\{x_n\}$ сходится» выглядит так: $\forall a$ $\exists\varepsilon>0$: $\forall N_\varepsilon\in\boldsymbol{N}$ $\exists n\geqslant N_\varepsilon$: $|x_n-a|\geqslant\varepsilon$.

VII.20. а) $x_n=-n$. б) $x_n=0$. Предел не может быть равен 1. Множеством возможных пределов последовательности $\{x_n\}$ является луч $(-\infty;\,0]$. **Решение.** 1) Допустим, что предел последовательности $\{x_n\}$ равен 1, тогда $\forall\varepsilon>0$ $\exists k\in\boldsymbol{N}$: $\forall n\geqslant k$ $1-\varepsilon<x_n<\varepsilon+1$. В силу произвольного выбора ε возьмём $\varepsilon_1=1-\varepsilon>0$ и тогда, начиная с некоторого номера $x_n>\varepsilon_1$. Получили противоречие, значит, наше предположение было неверным.

2) Действительно, любое неположительное число a является пределом последовательности, каждый член которой равен a, удовлетворяющей условию задачи. Кроме того, рассуждение, повторяющее пункт 1 с заменой 1 на произвольное положительное число, показывает, что никакое положительное число не может быть пределом последовательности, удовлетворяющей условию задачи.

VII.21. Решение. Ясно, что для любой окрестности числа A вне этой окрестности находится конечное число членов последовательности или их нет вовсе. Значит, и конечно число членов последовательности $\{y_{n_k}\}$, полученных перестановкой членов последовательности $\{x_n\}$.

Замечание. Эта задача тесно связана с задачей VII.22. Здесь не надо усердствовать в получении формального доказательства, но необходимо уточнить понятия перестановки членов последовательности. А именно, последовательность — функция, заданная на множестве натуральных чисел. Рассмотрим преобразование множества натуральных чисел, т. е. взаимно однозначное отображение множества $\boldsymbol{N}$ на себя. Обозначим это отображение буквой $n = n(k)$. Перестановкой последовательности $\{x_n\}$ называется результат композиции этой последовательности и функции $n(k)$. По соглашению, связанному с записью последовательностей, вместо $n(k)$ записывают n_k, тем самым вместо $x(n(k))$ можно записать x_{n_k} (схожее рассуждение встретится в учебнике позже на с. 387).

VII.22. Решение. Пусть удалось расположить рациональные числа из отрезка $[0; 1]$ в последовательность, сходящуюся к какому-то числу A. Ясно, что в любой ε-окрестности числа A будет бесконечно много членов последовательности, но вне этой окрестности окажется также бесконечно много членов последовательности, что противоречит геометрическому смыслу предела последовательности (вне любой окрестности должно быть конечное число членов последовательности).

VII.23. Решение. Обозначим $y_k = a_k - a$ и $S_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$. Тогда $S_n - a = \frac{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}{n}$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$, то $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant N\ |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Обозначим $c = |y_1 + y_2 + \ldots + y_N|$. Тогда, если $n > N$, то $|S_n - a| \leqslant \frac{|y_1 + y_2 + \ldots + y_N|}{n} + \frac{|y_{N+1}| + \ldots + |y_n|}{n} < \frac{c}{n} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{n-N}{n} \leqslant \frac{c}{n} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Выберем номер k^* так, чтобы $\frac{c}{k^*} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда справедливо: $\forall n \geqslant k^*\ \frac{c}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть, наконец, $n_1 = \max(N; k^*)$. Тогда для всех $n \geqslant n_1$ выполняется неравенство $|S_n - a| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$. *Замечание.* Задача созвучна с задачей VII.73. Поэтому удобно одну из них рассмотреть в классе, а другую предложить в качестве домашнего задания.

VII.32—VII.33. *Указание.* Как и в задаче VII.21, не стоит гнаться за формальным доказательством. Достаточно обратиться к геометрическому смыслу предела последовательности.

VII.34. а) Необязательно сходится. **Решение.** Пусть $a_n = \frac{1}{n}$, тогда последовательность $\{a_n\}$ сходится, а если $a_n = \begin{cases} 1, \ n = 2k - 1, \\ \frac{1}{n^2}, \ n = 2k, \end{cases}$, то последовательность $\{a_n\}$ расходится.

б) *Указание.* Решение аналогично решению задания *а*. в) Необязательно сходится. **Решение.** Пусть $\{a_n\}$ — последовательность вида 0; 0; 1; 0; 0; 1; 0; 0; 1; ... . Тогда последовательность $\{n^2 a_n a_{n+1}\}$ состоит из одних нулей и сходится, а последовательность $\{n^2 a_n a_{n+3}\}$ будет иметь вид 0; 0; 9; 0; 0; 36; ..., т. е. расходится.

§ 41. Арифметические действия над сходящимися последовательностями. Вычисление пределов

Центральными теоремами данного параграфа являются теоремы об арифметических действиях. Поскольку эти теоремы интуитивно ясны, то при недостатке времени можно обойтись без их доказательства.

Вместе с тем вычисление пределов не является самоцелью. Полагаем, что стоит уделить особое внимание соотношению между бесконечно малыми и бесконечно большими последовательностями, а также рассмотреть виды неопределенностей.

Решения и указания к задачам

VII.35. а) Нет, например $x_n = \begin{cases} 0, \ n = 2k, \\ \frac{n+1}{2}, \ n = 2k - 1. \end{cases}$ б) Нет, например последовательность с общим членом $x_n = 1$. в) Да. **Решение.** Рассмотрим произвольное число $E > 0$. Существует лишь конечное число натуральных чисел, меньших E, а значит, лишь конечное число членов $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots, x_{n_k}$ последовательности, меньших E (каждое натуральное число может встретиться в последовательности не более одного раза). Это означает, что начиная с некоторого номера (большего n_k) все члены последовательности будут больше E. Следовательно, по определению $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

VII.38. Решение. Пусть $\{x_n\}$ — бесконечно малая последовательность. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant N_\varepsilon\ |x_n| < \varepsilon$, но $|x_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \|x_n\| < \varepsilon$, что и доказывает требуемое.

VII.39. *Замечание.* Решение задачи аналогично решению задачи VII.38. Одну из них можно решить в классе, а другую дать на дом в качестве задачи на тройку.

VII.40. а) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; $y_n = n$. б) $x_n = \dfrac{1}{2n+1}$; $y_n = n$. в) $x_n = \dfrac{1}{n}$; $y_n = n^2$. г) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$; $y_n = n$.

VII.41. а) $x_n = n$; $y_n = n^3$. б) $x_n = n - 1$; $y_n = n + 1$. в) $x_n = n^3$; $y_n = n$. г) $x_n = (-1)^n n$; $y_n = n$.

VII.42. а) $x_n = \sqrt{n^2 + 1}$; $y_n = -n$. б) $x_n = \sqrt{n^2 + n}$; $y_n = -n$.

VII.43. а) $x_n = n^2$; $y_n = n^3$. б) $x_n = (-1)^n n$; $y_n = n$.

VII.44. Решение. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$. По определению это означает, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists K_1 \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant K_1$ $x_n > \dfrac{\varepsilon}{2}$ и $\forall\varepsilon > 0\ \exists K_2 \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant K_2$ $y_n > \dfrac{\varepsilon}{2}$. Выберем $K = \max\{K_1; K_2\}$, тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists K \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant K$ $x_n + y_n > \varepsilon$, что и доказывает утверждение.

VII.45. Решение. Рассмотрим, например, случай, когда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = -\infty$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists K_2 \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant K_2$ $y_n < -\varepsilon < -\sqrt{\varepsilon}$ (т. е. $-y_n > \sqrt{\varepsilon}$) и $\forall\varepsilon > 1\ \exists K_1 \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant K_1$ $x_n > \varepsilon > \sqrt{\varepsilon}$. Выберем $K = \max\{K_1; K_2\}$, тогда $\forall\varepsilon > 1$ $\exists K \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant K$ $-x_n y_n > \varepsilon$, а значит, $x_n y_n < -\varepsilon$. Таким образом, последовательность $\{x_n y_n\}$ бесконечно большая.

VII.46. *Указание.* Решение аналогично решению задачи VII.45.

Решение. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то начиная с некоторого номера $x_n > \dfrac{A}{2} > 0$ (см. лемму на с. 367 учебника). Возьмём $E > 0$. Тогда $\exists k_1 \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant k_1$ $x_n > \dfrac{A}{2}$ и $\exists k_2 \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant k_2$ $|y_n| > \dfrac{2E}{A}$. Выберем $k^* = \max\{k_1; k_2\}$, тогда $\forall n \geqslant k^*$ $|x_n y_n| = |x_n||y_n| > \dfrac{A}{2}\dfrac{2E}{A} = E$. В силу произвольного выбора E получим, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = \infty$.

VII.47. а) Нет, например $y_n = \dfrac{1}{n^2}$ и $x_n = n$. б) Нет, например $x_n = -n$ и $y_n = 0$. в) Нет, например $x_n = (-1)^n n$ и $y_n = (-1)^{n+1} n$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$.

VII.49. Нет. **Решение.** По условию $\forall n \in \boldsymbol{N}$ выполнено $x_{2n} > x_n > 0$. Последовательно применяя это неравенство, получаем $x_{2^n} > x_1 > 0$, т. е. все члены последовательности с номерами, являющимися степенями двойки, будут больше x_1. Таким образом, вне окрестности $(-x_1; x_1)$ окажется бесконечное множество членов последовательности.

VII.50. а) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = n$. б) $x_n = \dfrac{1}{n+1}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$. в) $x_n = \dfrac{1}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n^2}$. г) $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$.

VII.51. а) Нет, например $x_n = \dfrac{1}{n^2}$, $y_n = \dfrac{1}{n}$. б) Нет, например $x_n = \begin{cases} n, \ n = 2k, \\ \dfrac{1}{n^2}, \ n = 2k-1 \end{cases}$ и $y_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n^2}, \ n = 2k, \\ n, \ n = 2k-1. \end{cases}$ Тогда $x_n y_n = \dfrac{1}{n}$.

VII.52. а) $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^n n$. б) $x_n = \dfrac{1}{n^2}$; $y_n = n$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} \neq 0$ — условие для сходимости $\{y_n\}$.

в) **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n \cdot y_n}{y_n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

VII.53. а) $x_n = n + 1$, $y_n = -n$. б) $x_n = ((-1)^n + 1)$, $y_n = ((-1)^n + 1)n$. в) См. задание *а*. г) $x_n = (-1)^n$, $y_n = (-1)^{n+1}$.

VII.54. Решение. Например $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+n}{3n-1} + \dfrac{6n^3+1}{1-9n^2}\right) = \dfrac{5}{9}$, но последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$, для которых $x_n = \dfrac{2n^2+n}{3n-1}$ и $y_n = \dfrac{6n^3+1}{1-9n^2}$, расходятся.

(Аналогично для последовательностей, имеющих общие члены $x_n = \sqrt{n+1}$, $y_n = -\sqrt{n}$.)

VII.55. Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) - \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n - x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

VII.56. *Указание.* Решение аналогично решению задачи VII.55. **Решение.** Пусть существует $\lim\limits_{n\to\infty}(ax_n+by_n)$, тогда так как $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, то $\exists \lim\limits_{n\to\infty} ax_n$. Рассмотрим $\lim\limits_{n\to\infty}(ax_n+by_n) - \lim\limits_{n\to\infty}(ax_n) = \lim\limits_{n\to\infty} by_n = b\lim\limits_{n\to\infty} y_n$, следовательно, последовательность $\{y_n\}$ сходится, что противоречит условию.

VII.58. Решение. Пусть $\sqrt{x_n} = \sqrt{a} + \alpha_n$. Заметим, что $\alpha_n = \sqrt{x_n} - \sqrt{a} = \dfrac{x_n - a}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}}$ и получим $|\alpha_n| < \dfrac{|x_n - a|}{\sqrt{a}}$. Пусть дано произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как последовательность $\{x_n - a\}$ бесконечно малая, то, начиная с некоторого номера $n = k$, будет выполняться неравенство $|x_n - a| < \varepsilon\sqrt{a}$. Следовательно, при $n \geqslant k$ будет выполняться неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n = 0$. Тогда по утверждению на с. 370 учебника $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x_n} = \sqrt{a}$.

Замечание. Сильным учащимся можно предложить доказательство того, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$.

Решение. В этом случае

$$\alpha_n = \sqrt[3]{x_n} - \sqrt[3]{a} = \frac{x_n - a}{(\sqrt[3]{a_n})^2 + \sqrt[3]{a_n}\sqrt[3]{a} + (\sqrt[3]{a})^2} = b_n(x_n - a).$$

Так как найдётся номер k, начиная с которого x_n имеет такой знак, что и число a, то, следовательно, $\sqrt[3]{x_n}\sqrt[3]{a} > 0$. Поэтому $0 < b_n < \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$, а значит, последовательность $\{b_n\}$ ограничена (так как последовательность $\{x_n - a\}$ бесконечно малая, то последовательность $\{\alpha_n\}$ тоже бесконечно малая). По утверждению на с. 370 учебника $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{x_n} = \sqrt[3]{a}$.

Полученные результаты можно обобщить:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[k]{x_n} = \sqrt[k]{a}.$$

VII.60. а) -1. б) $\dfrac{1}{2}$. в) 0. г) $-\dfrac{1}{2}$.

VII.61. *Замечание.* В этой задаче учащиеся впервые сталкиваются с неопределённостями и получают первый опыт избавления от них. а) 5. б) $\dfrac{3}{5}$. в) $\dfrac{1}{3}$. г) -1. д) 1. е) 0.

ж) 1. з) $-\frac{1}{6}$. и) -1. *Указание.* $\dfrac{(-1)^n + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} - (-1)^n} = \dfrac{1 + \frac{(-1)^n}{n}}{\frac{(-1)^n}{n^2} - 1}$. к) **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n}{5 + 3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{5\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3} = \dfrac{1}{3}$. л) 27. м) $-\dfrac{15}{2}$.

н) $\frac{1}{6}$. **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 6^n - 5^{n+1}}{5^n - (-1)^{n+1} 6^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 - 5(-1)^n\left(\frac{5}{6}\right)^n}{(-1)^n\left(\frac{5}{6}\right)^n + 6} = \dfrac{1}{6}$.

о) $-\frac{1}{2}$. **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+\ldots+n}{n+2} - \dfrac{n}{2}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{(n+1)n}{2(n+2)} - \dfrac{n}{2}\right) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{2n+4} = -\dfrac{1}{2}$.

VII.62. а) 0. б) 0. **Решение.** Умножив числитель и знаменатель дроби на сопряжённые выражения, получим

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2 + 1 - n^2)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)(n + 1 - n)} \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{\frac{1}{n}}\right)}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} = 0.$$

в) $\frac{1}{6}$. г) 0. д) $+\infty$. **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1} - n}{\sqrt{n^3+1} - n\sqrt{n}} =$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n^2+1-n^2)\left(\sqrt{n^3+1} + n\sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n^2+1} + n\right)(n^3 + 1 - n^3)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(\sqrt{n + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{n}\right)}{n\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1\right)} = +\infty.$$ е) 0.

ж) 0. **Решение.** Умножим числитель и знаменатель дроби на сопряжённые выражения. Получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1}}{\sqrt[4]{n+1} + \sqrt[4]{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n - n - 1)\left(\sqrt[4]{n+1} - \sqrt[4]{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt[3]{n^2} + \sqrt[3]{n^2+n} + \sqrt[3]{(n+1)^2}\right)(n + 1 - n)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{-n^{\frac{1}{4}}\left(\sqrt[4]{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) n^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1}\right)}{n^{\frac{2}{3}}\left(\sqrt[3]{1} + \sqrt[3]{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt[3]{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}\right)} = 0.$$

VII.63. а) 3. б) 1. в) 0. г) $\frac{1}{2}$. д) -1.

ж) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+2n^2}-n\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3+2n^2-n^3}{\sqrt[3]{(n^3+2n^2)^2}+\sqrt[3]{n^6+2n^5}+n^2}=$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2}{n^2\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}+\sqrt[3]{1+\frac{2}{n}}+1\right)}=\dfrac{2}{3}$. з) $\dfrac{1}{3}$.

VII.64. а) 1. **Решение.** 1) Если $a\neq 0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{an^2+bn+2}-n=\lim_{n\to\infty}\frac{an^2+bn+2-n^2}{\sqrt{an^2+bn+2}+n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-1)n^2+bn+2}{n\left(\sqrt{a+\frac{b}{n}+\frac{2}{n^2}}+1\right)}=A.$$

Ясно, что если $a=1$, то $A=\frac{b}{2}$, если $a>1$, то $A=+\infty$, и если $a<1$, то $A=-\infty$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ при $b=2$. 2) Если $a=0$. Тогда при всех значениях b имеем $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{bn+2}-n)=-\infty$.

VII.65. а) **Решение.** Так как $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, то последовательность $\alpha_n=a_n-a$ бесконечно малая при $n\to\infty$. Значит, $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in \boldsymbol{N}$: $\forall n\geqslant k\ \ |a-a_n|<\varepsilon$. Докажем, что $\forall\varepsilon>0$ $\exists k_1\in\boldsymbol{N}$: $\forall n\geqslant k_1\ \ |\sin a_n-\sin a|=\left|2\sin\frac{a_n-a}{2}\cos\frac{a_n+a}{2}\right|<\varepsilon$. Поскольку выполнены неравенства $|\sin\alpha_n|\leqslant|\alpha_n|$ (пример 39 учебника, с. 313) и $|\cos\alpha_n|\leqslant 1$, то получаем

$$\left|2\sin\frac{a_n-a}{2}\cos\frac{a_n+a}{2}\right|\leqslant 2\left|\frac{a_n-a}{2}\right|<\varepsilon.$$

Поэтому, как только $|a_n-a|<\varepsilon$, так сразу $|\sin a_n-\sin a|<\varepsilon$. Доказательство того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\cos a_n=\cos a$, аналогично приведённому.

б) **Решение.** Пусть $A=\lim\limits_{n\to\infty}\sin n$. Тогда $A=$ $=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n+2)$. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin(n+2)-\sin n)=0$. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\cos(n+1)=0$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\cos n=0$, а тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=0$ и в то же время $\lim\limits_{n\to\infty}\sin 2n=A$. Но тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(\sin^2 n+$ $+\cos^2 n)=0$, что противоречит основному тригонометрическому тождеству.

VII.66. а) **Решение.** Так как $\forall x \sin^2 x = \sin^2(x - \pi k)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n} - \pi n\right) = \lim_{n\to\infty} \sin^2 \frac{\pi(n^2+n-n^2)}{\sqrt{n^2+n}+n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sin^2 \frac{\pi n}{n\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)} = 1$$

(здесь использован результат задачи VII.65).

VII.67. а) **Решение.** В задаче 26, *б* учебника показано, что $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ при $a > 0$. Пусть $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = A > 0$. Из определения предела следует, что начиная с некоторого n, выполнено неравенство $\frac{A}{2} < a_n < \frac{3A}{2}$, откуда $\sqrt[n]{\frac{A}{2}} < \sqrt[n]{a_n} < \sqrt[n]{\frac{3A}{2}}$. По теореме о сжатой последовательности получаем $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

б) $x_n = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n, & n = 2k, \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n, & n = 2k-1. \end{cases}$ в) $x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

г) **Решение.** Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = A > 1$. Это значит, что начиная с некоторого номера n_0, все члены последовательности будут больше 1. В дальнейших рассуждениях рассматриваются члены последовательности с номерами, большими n_0. Так как последовательность $\{a_n\}$ ограничена, то $\exists m, M$: $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $m \leqslant a_n \leqslant M$, причём $m \geqslant 1$. Тогда $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $\sqrt[n]{m} \leqslant \sqrt[n]{a_n} \leqslant \sqrt[n]{M}$. Перейдём к пределу в неравенствах. А так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{M} = 1$, то по теореме о сжатой последовательности получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, а это противоречит предположению.

VII.68. а) **Решение.** $\forall n \geqslant 4010$ верно $\frac{2005}{n} \leqslant \frac{1}{2}$. Тогда $0 < \left(\frac{2005}{n}\right)^n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Перейдём к пределу в неравенствах

$\lim\limits_{n\to\infty} 0 \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2005}{n}\right)^n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Так как крайние пределы равны нулю, то по теореме о сжатой последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2005}{n}\right)^n = 0$.

б) **Решение**. При $a > 1$ аналогично задаче VII.68, *а*. При $a = 1$ очевидно $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^n} = 0$. При $0 < a < 1$ выполнены неравенства $0 < \left(\frac{a}{n}\right)^n < \left(\frac{1}{n}\right)^n$. Перейдя к пределу в неравенствах и воспользовавшись теоремой о сжатой последовательности, получим $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n}\right)^n = 0$. Если $a < 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a}{n^n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\left(\frac{-a}{n^n}\right)^n = 0$ как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную.

в) **Решение**. При $n > 2$ выполняется $\frac{2}{n} = \frac{2n}{n^2} < \frac{2n+3}{n^2} < \frac{4n}{n^2} = \frac{4}{n}$. Тогда так как $\forall n > 2$ $\left(\frac{2}{n}\right)^n < \left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n < \left(\frac{4}{n}\right)^n$, то по теореме о сжатой последовательности

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n = 0.$$

г) 0. *Указание*. $\forall n > 17$ $\frac{n+10}{2n-1} < \frac{5}{6}$. Следовательно, $0 < \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n < \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

VII.69. а) **Решение**. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$ при $a > 0$ (ещё одно доказательство содержится в примере 25 на с. 380). Пусть натуральное число $k > 2a$, тогда при $n > k$ будет выполнено

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n} = \left(\frac{a}{1}\cdot\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{k}\right)\cdot\left(\frac{a}{k+1}\cdot\frac{a}{k+2}\cdot\ldots\cdot\frac{a}{n}\right) <$$
$$< a^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = (2a)^k\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, то при достаточно большом n будет выполнено $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{(2a)^k}$, и следовательно, $\frac{a^n}{n!} < \varepsilon$, а это значит, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!} = 0$. Теперь отметим, что выполнено неравенство $0 < \frac{2^n}{(n+2)!} < \frac{2^n}{n!}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{(n+2)!} = 0$, а так как произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность есть бесконечно малая последовательность, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-2)^n}{(n+2)!} = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\frac{2^n}{(n+2)!} = 0.$$

б) 0. в) **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\cdot 3^n+1}{n!+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{3^n}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}}{1+\frac{1}{n!}} = 0.$

г) **Решение.** Заметим, что $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $0 < \frac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2} < \frac{4^k+n^2\cdot 2^n-1}{n^4} = \left(\frac{2^n}{n^2}\right)^2+\frac{2^n}{n^2}-\frac{1}{n^4}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{2^n}{n^2}\right)^2+\frac{2^n}{n^2}-\frac{1}{n^4}\right) = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+n^2\cdot 2^n-1}{n^4+(n!)^2} = 0$. д) **Решение.** $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $0 < \frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!} < \frac{10^n+n!}{(n+1)!} = \frac{10^n}{(n+1)!}+\frac{1}{n+1}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{10^n}{(n+1)!}+\frac{1}{n+1}\right) = 0$, то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10^n+n!}{2^n+(n+1)!} = 0$. е) 0. **Решение.** $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $n^2-n < n^3$, следовательно, $0 < \frac{(3)^{n^2-n}}{(n^3)!} < \frac{3^{n^3}}{(n^3)!} = \frac{3^t}{t!}$. А так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^t}{t!} = 0$ (если $n \to \infty$, то и $t = n^3 \to \infty$), то и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n^2-n}}{(n^3)!} = 0$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ есть произведение бесконечно малой последовательности на ограниченную $(-1)^n$. ж) **Решение.** $\frac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)} = \frac{\frac{2^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}+1}{\frac{n\cdot 3^n}{(n+1)!}+\frac{n}{n+1}}$, а так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{2^{\frac{n}{2}}}{(n+1)!}+1}{\dfrac{n\cdot 3^n}{(n+1)!}+\dfrac{n}{n+1}} = 1$, то и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{\frac{n}{2}}+(n+1)!}{n(3^n+n!)} = 1$.

з) **Решение.** $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}} \leqslant \dfrac{n+1}{\sqrt{n^2+1}} =$ $= \dfrac{n\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{n\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}} = y_n$. Но $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $1 \leqslant x_n \leqslant y_n$, а так как $y_n \to 1$ при $n\to\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$. и) **Решение.** При $n > 7$ верно неравенство (доказываемое по индукции) $2^{n-1} \leqslant 2^n - n^2 < 2^n \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \sqrt[n]{2^{n-1}} \leqslant \sqrt[n]{2^n - n^2} < \sqrt[n]{2^n}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n} = 2$.

VII.70. а) **Решение.** Способ 1. Если $a > 1$, то $a = 1 + \alpha$, где $\alpha > 0$. Откуда $a^n = (1+\alpha)^n > C_n^{p+1}\cdot \alpha^{p+1}$ при $n > p$. Пусть $n > 2p$. Тогда

$$C_n^{p+1} = \frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{(p+1)!} > \frac{n}{(p+1)!}\left(\frac{n}{2}\right)^p$$

(так как $n - k > \dfrac{n}{2}$ при $1 \leqslant k \leqslant p$). Отсюда следует, что $0 < \dfrac{n^p}{a^n} < \dfrac{2^p(p+1)!}{\alpha^{p+1}\cdot n}$, а следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^p}{a^n} = 0$. (Поскольку $\dfrac{2^p(p+1)!}{\alpha^{p+1}}$ не зависит от n, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^p(p+1)!}{\alpha^p\cdot n} = 0$).

Замечание. В заданиях *а*, *б*, *в* можно воспользоваться следующей леммой: Пусть последовательность $\{x_n\}$ такова, что $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n > 0$ и $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} \underset{n\to\infty}{\to} B$, причём $B < 1$. Тогда $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$ такое, что $B + \varepsilon < 1$. Тогда для этого ε $\exists k \in \boldsymbol{N}$: $\forall n \geqslant k$ $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < B + \varepsilon < 1$. Обозначим $B + \varepsilon = q$ и рассмотрим геометрическую прогрессию, первый член которой $b_1 = x_n$, а знаменатель равен q. Тогда $x_{k+1} < x_k q$, $x_{k+2} < x_{k+1}q < x_k q^2$, $\ldots$, $x_{k+m} < x_k q^m$ и, таким образом, $\forall m \in \boldsymbol{N}$ $0 < x_{k+m} < x_k q^m$, но $x_k q^m \underset{m\to\infty}{\to} 0$. Итак, $\forall n \geqslant k$ $0 < x_n < x_k q^{n-k}$, $x_k q^{n-k} \underset{n\to\infty}{\to} 0$, а значит, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. ■

Способ 2. Если $x_n = \frac{n^p}{a^n}$, $a > 1$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^p \cdot a^n}{a^{n+1} \cdot n^p} =$

$= \frac{1}{a}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^p \underset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{a}$ и $\frac{1}{a} < 1$. Следовательно, по лемме $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Если $x_n = \frac{(2n)!}{a^{n!}}$ $(a > 1)$, то $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n > 0$ и $\frac{x_{n+1}}{x_n} =$

$= \frac{(2n+2)! \cdot a^{n!}}{a^{(n+1)!}(2n)!} = \frac{2n+1}{a^{(n-1)n!}} \cdot \frac{2n+2}{a^{n!}} \underset{n \to \infty}{\to} 0$ (обе бесконечно малые при $a > 1$), то в силу леммы $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Если $x_n = \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \ldots \cdot (4n+2)} > 0$ и $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $\frac{x_{n+1}}{x_n} =$

$= \frac{3n+4}{4n+6} \underset{n \to \infty}{\to} \frac{3}{4}$, то в силу леммы $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

VII.71. $-\frac{1}{4}$. **Решение.** $\lim\limits_{n \to \infty} n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} - 2\sqrt{n}\right) =$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n^{\frac{3}{2}}\left(2n + 2\sqrt{n^2 - 1} - 4n\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} + 2\sqrt{n}\right)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{n^2 - 1} - n\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 2\right)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{-2n}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} + 2\right)n\left(\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} + 1\right)} = \frac{-2}{4 \cdot 2} = -\frac{1}{4}.$$

§ 42. Предел монотонной последовательности. Число e. Комбинированные методы нахождения пределов

Материал параграфа — одно из самых красивых мест главы. Конечно, набор задач избыточный по сравнению с требованиями как стандарта, так и здравого смысла и отражает пристрастие авторов к этой тематике. Однако теорема Вейерштрасса наряду с теоремой о сжатой последовательности является одним из основных способов доказательства наличия предела без его непосредственного вычисления.

Показательно также рассуждение о монотонности последовательности $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ с использованием её экономического смысла. Здесь же полезно вспомнить рассуждения в начале § 31, приводившие к числу e как к одному из лучших оснований логарифмов.

История появления числа e, равно как и строгое обоснование его выбора в роли основания логарифмов, может служить темой для доклада.

К числу наиболее трудных, но интересных задач относятся VII.85, VII.87, VII.90 и VII.91, а также VII.97. Задача VII.97 представляет теоретический интерес как представление числа e в виде суммы чисел, обратных факториалам (что позволяет вычислять число e с большой точностью), а также доказывает иррациональность числа e. Эта задача может составлять содержание небольшой исследовательской работы учащегося. Во всяком случае, упомянутые задачи не те, которые можно давать учащимся в качестве рядовой домашней работы. Они требуют вдумчивой работы на уроке, причём желательно в формах, отличных от классического урока (например, работы в малых группах, мастерской и т. п.).

Полезным является также осознание учащимися поиска неподвижной точки отображения методом итераций, изложенное после решения задачи VII.79.

Задачи VII.89—VII.91 образуют выделенную группу. Их решения практически не связаны с теоремой Вейерштрасса, но требуют творческого и нестандартного понимания того, что такое предел последовательности и как можно использовать его свойства.

Решения и указания к задачам

VII.74. а) **Решение.** Покажем, что последовательность убывает:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^3 \cdot 10^n}{10^{n+1} \cdot n^3} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{10} < 1.$$

Так как $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $\frac{n+1}{n} \leqslant 2$, а значит, $\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 < 10$. Таким образом, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_{n+1} < x_n$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу нулём ($\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n > 0$). По теореме Вейерштрасса она имеет предел. Можно показать, как найти этот предел (этого не требуется в задаче). Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$, имеем $x_{n+1} = \frac{1}{10}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 x_n$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = 1$, то $a = \frac{1}{10}a$. Значит, $a = 0$.

б) *Указание.* $\forall n > 2$ $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2}{n+1} < 1$. Доказательство того, что предел существует, здесь гораздо очевиднее, но зато нет способа его найти. Предельный переход, как в предыдущем пункте, здесь ничего не даёт для поиска предела последовательности $\{x_n\}$, равного a.

в) **Решение.** $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{3n+8}{6n+1}$. Задачу можно решить по лемме из решения задачи VII.70, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{1}{2} < 1$ и $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n > 0$. А можно так: $\forall n > 8$ $\dfrac{3n+8}{6n+1} < \dfrac{2}{3}$ (это легко доказать). Значит, при $n > 8$ последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу нулём. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

г) *Указание.* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = \dfrac{2n+2}{2n+3} < 1$. Далее решение аналогично решению задачи VII.74, *в*.

д) **Решение.** Так как $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{(n+1)^{n+1}} > 0$, то последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Кроме того, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n < 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^3} + \ldots + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2} + \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots + \dfrac{1}{2^n}\right) < \dfrac{3}{2}$ (как сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} + \ldots = \dfrac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1$). То есть последовательность $\{x_n\}$ ограничена сверху.

VII.75. а) 4. б) Выясним сначала, чему может быть равен предел последовательности $\{x_n\}$. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = B$, тогда $B = \sqrt{B + a}$, $B^2 - B - a = 0$ и $B = \dfrac{1 + \sqrt{1 + 4a}}{2}$ ($B > 0$, так как $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n > 0$). Докажем по индукции, что $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n < x_{n+1} < B$. База индукции очевидна.

Индукционный переход. Докажем, что $x_k < x_{k+1} < B$, если $x_{k-1} < x_k < B$. Действительно, $x_{k-1} < x_k < B \Leftrightarrow x_{k-1} < \sqrt{a + x_{k-1}} < B$, но в силу монотонности корня и того, что $x_{k-1} < x_k$, выполняется $\sqrt{a + x_{k-1}} < \sqrt{a + x_k} = x_{k+1} < B$ (так как $x_k < B$ и $\sqrt{a + x_k} < \sqrt{a + B} = B$). Мы доказали, что последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена снизу и имеет предел, равный $\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$.

в) **Решение**. Как и в задаче VII.75, *б*, найдём искомый предел из уравнения $A^k = 5A$ (так как $x_{n+1}^k = 5x_n$). Откуда $A = 0$ или $A = \sqrt[k-1]{5}$. Так как последовательность $\{x_n\}$ возрастает и $x_1 = \sqrt[k]{5} > 1$, то $A = \sqrt[k-1]{5}$. Докажем возрастание и ограниченность последовательности $\{x_n\}$ по индукции. Так как $x_{n+1} < x_n$ по индукционному предположению, то $x_n = \sqrt[k]{5x_{n-1}} < \sqrt[k]{5x_n} = x_{n+1}$. Кроме того, $x_{n+1} = \sqrt[k]{5x_n} < \sqrt[k]{5A} = A$.

г) *Указание.* Решение аналогично решению задачи VII.75, *в*.

д) Докажем для случая $x_1 = \frac{1}{6}$. Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{3}x_n - x_n^2 = x_n\left(\frac{1}{3} - x_n\right)$. По индукции легко показать, что последовательность $\{x_n\}$ возрастает и $\forall n \in \boldsymbol{N}\ \ x_n \leqslant \frac{1}{3}$.

База индукции: $x_1 = \frac{1}{6}$. Тогда $x_2 - x_1 = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) = \frac{1}{36} > 0$ и $x_2 = x_1 + \frac{1}{36} = \frac{13}{36}$, т. е. $0 < x_1 < x_2 < \frac{1}{3}$.

Индукционный переход. Докажем, что $0 < x_k < x_{k+1} < \frac{1}{3}$, если $0 < x_{k-1} < x_k < \frac{1}{3}$. Так как $x_{k+1} - x_k = x_k\left(\frac{1}{3} - x_k\right) > 0$ (по индукционному предположению), то $x_{k+1} > x_k$. Если рассмотреть функцию $g(t) = t\left(\frac{4}{3} - t\right) - \frac{1}{3}$; $g(t) = -\frac{1}{3}(3t-1)(t-1)$, то $g(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < t < 1$, поэтому $g(x_k) < 0$, т. е. $x_{k+1} < \frac{1}{3}$.

VII.76. а) **Решение.** Предположим, что существует предел последовательности $\{x_n\}$, равный t и найдём его. По условию $t = -\sqrt{1-t}$. Так как $t < 0$, то $t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Докажем существование.

Если $x_1 < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, то последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. Можно проверить, что $x_1 < x_2 <$

$< \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$. По индукции докажем, что $x_k < x_{k+1} < t$, где $x_{k+1} = -\sqrt{1-x_k}$. Выясним, верно ли, что $x_k < -\sqrt{1-x_k} < t$.

1) $\sqrt{1-x_k} < -x_k \Leftarrow 1 - x_k < x_k^2 \Leftrightarrow x_k^2 + x_k - 1 > 0 \Leftarrow$ $\Leftarrow x_k < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2) $-\sqrt{1-x_k} < t \Leftrightarrow \sqrt{1-x_k} > \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 1 - x_k > \dfrac{6+2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x_k < \dfrac{-\sqrt{5}-1}{2}$.

Если $x_1 > \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, то $x_2 = -\sqrt{1-x_1} > t \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} < -t \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 0 \leqslant 1 - x_1 < t^2 \Leftarrow x_1 > 1 - t^2 = t$. Далее по индукции доказываем, что $t < x_{k+1} < x_k$.

б) *Указание*. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ убывает и ограничена снизу нулём. $0 \leqslant x_2 = x_1(1 - x_1) \leqslant$ $\leqslant x_1 \leqslant 1$, так как $0 \leqslant x_1 \leqslant 1$. Легко показать по индукции, что $0 \leqslant x_{k+1} = x_k(1 - x_k) \leqslant x_k$ (индукция нужна лишь для доказательства неравенства $x_{k+n} \geqslant 0$). Тогда пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n =$ $= \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = a$. Итак, $a = a - a^2 \Leftrightarrow a = 0$.

в) **Решение**. Все члены последовательности положительны, коль скоро первый её член положителен. Рассмотрим разность $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{x_n} - x_n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a - x_n^2}{x_n}\right)$. Знак этой разности определяется соотношением между x_n и $\sqrt{a}$.

Применив неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом для двух чисел $\dfrac{a}{x_n}$ и x_n получим $x_{n+1} = \dfrac{x_n + \dfrac{a}{x_n}}{2} \geqslant \sqrt{x_n \cdot \dfrac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$. Итак, все члены последовательности, начиная со второго, больше $\sqrt{a}$, а потому последовательность убывает, начиная с x_2.

Таким образом, последовательность убывает и ограничена снизу (например, числом $\sqrt{a}$ или просто нулём), а значит, имеет предел. Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = b$.

Совершив предельный переход в равенстве, получим, что $b = \dfrac{1}{2}\left(b + \dfrac{a}{b}\right)$. А следовательно, $b^2 = a$ и $b = \sqrt{a}$ (так как $\forall n \in \boldsymbol{N}\ x_n > 0$).

VII.77. а) **Решение.** $x_1 \leqslant x_2 = f(x_1) \leqslant f(x_2) = x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_n = f(x_{n-1}) \leqslant f(x_n) = x_{n+1}$ в силу возрастания функции f. Тогда последовательность $\{x_n\}$ — возрастающая (не строго). б) *Указание.* Решение аналогично решению задачи VII.77, *а*.

в) Если f — ограниченная функция, то $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность, а в силу заданий *а* и *б* ещё и монотонная. Значит, последовательность $\{x_n\}$ сходится по теореме Вейерштрасса.

VII.78. *Указание.* Главная идея, помогающая решить задачу, в том, что $(f \circ f)(x)$ — возрастающая функция. Кроме того, в этой задаче находят применения результаты задачи VII.77. **Решение.** Пусть $x_3 = f(f(x_1))$ и $x_5 = f(f(x_3))$.

Если $x_1 < x_3$, то $\{x_{2n-1}\}$ — возрастающая последовательность по предыдущей задаче, при этом $x_2 = f(x_1)$, $x_4 = f(x_3)$ и так как $x_1 < x_3$, а f — убывающая функция, то $x_2 > x_4$, и т. д. Заметим, что здесь возможно единственное расположение точек x_i на оси: $x_3 \in (x_1; x_2)$. Действительно, x_1 располагается слева от $(x_2; x_3)$, $x_1 < x_2$. Так как f — убывающая функция, то $x_2 = f(x_1) > f(x_2) = x_3$. В результате последовательность $\{x_{2n-1}\}$ возрастающая и ограничена сверху x_2, последовательность $\{x_{2n}\}$ убывающая и ограничена снизу x_3.

Если же $x_1 > x_3$ (x_1 расположена справа от $(x_2; x_3)$), то $x_3 \in (x_2; x_1)$, и тогда последовательность $\{x_{2n-1}\}$ убывающая и ограничена снизу x_2.

VII.79. а) **Решение.** Пусть $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1$. Тогда $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_{n+1} - x_n = x_n^2 - 2x_n + 1 = (x_n + 1)^2 \geqslant 0$. Таким образом, последовательность $\{x_n\}$ возрастающая. Выясним, когда последовательность $\{x_n\}$ ограничена. Рассмотрим график $f(x) = x^2 + 3x + 1$ (рис. 7.1). Ясно, что при $x_1 > -1$ последовательность $\{x_n\}$ расходится, так как в силу неограниченности функции f $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1$ и его можно сделать сколь угодно большим.

Аналогично при $x_2 < -2$ последовательность $\{x_n\}$ неограниченная.

Замечание. Можно рассуждать и так. Пусть последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, равный b, тогда $b = b^2 + 3b + 1$ и $b \neq -1$. Отсюда ясно, что если $x_n > -1$ (при каком-то n), то последовательность x_n не имеет предела.

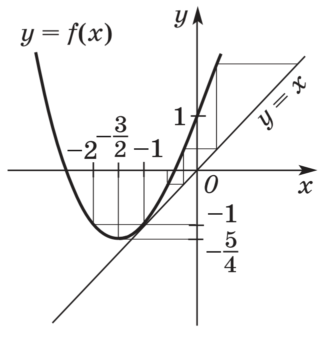


Рис. 7.1

Но $x_{n+1} = x_n^2 + 3x_n + 1 \leqslant -1 \Leftrightarrow -2 \leqslant x_n \leqslant -1$. Поэтому ясно, что если $x_1 < -2$, то последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела; если же $x_1 \in [-2; -1]$, то все $x_n \in [-2; -1]$ (легко проверить по индукции). Итак, в этом случае последовательность $\{x_n\}$ возрастающая и ограниченная, следовательно, имеющая предел последовательность.

б) $x_1 \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Переход к решению номера VII.80 можно осуществить через следующую задачу, демонстрирующую метод итераций для решения уравнений вида $f(x) = x$.

Задача. Докажите, что последовательность $\{x_n\}$, где $x_1 = 1$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$, $n \in \boldsymbol{N}$, имеет предел, и найдите его.

Решение. Если предел существует, то его можно найти из предельного перехода в рекуррентной формуле. Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = B$, тогда $\lim\limits_{n \to \infty} x_{n+1} = B$ и из предельного перехода в равенстве $B = \sqrt{1 + B}$. Откуда в силу неотрицательности B получаем $B = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Напомним, что это замечательное число обозначается τ, и будем использовать это обозначение в дальнейших рассуждениях.

Но остаётся главное препятствие: необходимо доказать, что этот предел существует, иначе наши предположения лишены оснований и могут быть просто неверными. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху. Проведём доказательство по индукции. Непосредственной проверкой убеждаемся, что $x_1 < x_2 < \tau$ и $1 < \sqrt{2} < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Пусть теперь $x_{k-1} < x_k < \tau$; покажем, что отсюда следует неравенство $x_k < x_{k+1} < \tau$. Действительно, неравенство $x_k < x_{k+1}$ равносильно тому, что $\sqrt{1 + x_{k-1}} < \sqrt{1 + x_k}$, а это верно потому, что по индукционному предположению $x_{k-1} < x_k$. Далее, $x_{k+1} < \tau \Leftrightarrow \sqrt{1 + x_k} < \tau \Leftrightarrow x_k < \tau^2 - 1$, но по определению числа τ имеем $\tau^2 - \tau - 1 = 0$ и $\tau^2 - 1 = \tau$ и последнее неравенство равносильно тому, что $x_k < \tau$, что выполнено по индукционному предположению. Таким образом, действительно $x_k < x_{k+1} < \tau$. Так мы доказали, что последовательность возрастает и ограничена сверху, а значит, имеет предел по теореме Вейерштрасса, значение этого предела мы уже вычислили.

Замечание. Если рассмотреть функцию $f(x) = \sqrt{1+x}$, то последовательность из разобранного примера можно представить в виде $f(0)$; $f(f(0))$; $f(f(f(0)))$; ... .

Поведение таких последовательностей (вида x_0, $f(x_0)$, $f(f(x_0))$, $f(f(f(x_0)))$, ...) удобно исследовать графически. В одной системе координат рисуют график функции $y = f(x)$ и прямую $y = x$. Тогда рассматриваемой последовательности соответствует такой пошаговый процесс: из точки $M_0(x_0; 0)$ на оси OX проводится вертикальная прямая до пересечения с графиком в точке $N_0(x_0; f(x_0))$. Из этой точки проводится горизонтальная прямая до пересечения с прямой в точке $M_1(f(x_0); f(x_0))$. Из этой точки снова проводится вертикальная прямая до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ в точке $N_1(f(x_0); f(f(x_0)))$ и т. д.

Абсциссы точек N_i, $i \in \boldsymbol{N}$ (или ординаты точек M_i, $i \in \boldsymbol{N}$) являются членами исходной последовательности. В данном случае из рисунка видно, что члены последовательности растут и стремятся к числу τ, где τ — абсцисса точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = x$. Вычисляя по формуле $x_{n+1} = \sqrt{1 + x_n}$ члены последовательности, начиная с $x_0 = 0$, мы тем самым находим всё с большей точностью корень τ уравнения $x^2 - x - 1 = 0$.

Заметим, что такой графический подход, как правило, позволяет увидеть, как устроена последовательность, сделать предположения о её характере поведения и сходимости. Конечно, рисунок не является доказательством и всё ещё нужно доказать аналитически! Но, по крайней мере, уже есть определённые подсказки и план действий.

Описанная выше процедура используется для приближённого решения уравнений. Для этого уравнение $g(x) = 0$ переписывается в виде $x = f(x)$. Далее выбирается число x_0 и один за другим находятся члены последовательности $x_{n+1} = f(x_n)$. Такой метод нахождения корней уравнения называется методом итераций.

VII.80. а) **Решение**. Заметим, что $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n > 0$. Тогда используем то, что $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ убывает на $[0; +\infty)$. Найдём несколько первых членов последовательности: $x_1 = 1$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$; $x_3 = \dfrac{2}{3}$; $x_4 = \dfrac{3}{5}$; $x_5 = \dfrac{5}{8}$ (рис. 7.2). Нетрудно

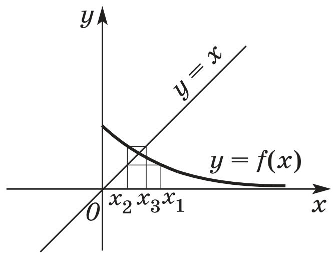


Рис. 7.2

видеть, что последовательность $\{x_{2n}\}$, членами которой являются числа $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{5}$; ... возрастающая, а последовательность $\{x_{2n-1}\}$, членами которой являются числа 1; $\frac{2}{3}$; $\frac{5}{8}$; ... убывающая. Кроме того, $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_{2n} < 1$, $x_{2n-1} > 0$. Тогда существуют $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$. Покажем, что они равны:

$$x_{n+1} = \frac{1}{1+x_n} = \frac{1}{1+\dfrac{1}{1+x_{n-1}}} = \frac{1+x_{n-1}}{2+x_{n-1}}.$$

Эта формула связывает соседние члены в обеих последовательностях. Если в ней перейти к пределу, то получим $A = \frac{1+A}{2+A}$, откуда $A = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (так как $A > 0$). Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

б) **Решение.** $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_n \in (0;\ 1)$, но на $(0;\ 1)$ функция $f(x) = (1-x)^2$ убывает. Таким образом, обе последовательности монотонные и ограниченные, а значит, имеют предел. Осталось показать, что эти пределы равны. Для этого в равенстве $x_{n+1} = (1-(1-x_{n-1})^2)^2$ перейдём к пределу, обозначив его за A. Получим уравнение $A = (1-(A-1)^2)^2$. Заметим, что кроме 0 и 2, это уравнение имеет корни $\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, из которых лишь $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ может служить пределом обеих последовательностей.

г) **Решение.** Пусть $\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Как и в заданиях *а*, *б*, τ — это предел в предположении, что он существует. Заметим, что

$$x_2 = \sqrt{1-x_1} > \sqrt{1-\tau} = \tau > x_1,$$
$$x_3 = \sqrt{1-x_2} > \sqrt{1-\tau} = \tau.$$

Выясним, верно ли, что $x_3 > x_1$, т. е. верно, что

$$\sqrt{1-x_2} = \sqrt{1-\sqrt{1-x_1}} > x_1.$$
$$1-\sqrt{1-x_1} > x_1^2;\ \sqrt{1-x_1} < (1+x_1)(1-x_1);\ \sqrt{1-x_1}(1+x_1) > 1.$$

Последнее неравенство верно, так как

$$\sqrt{1-x_1} \leqslant 1-x_1 \Leftrightarrow \sqrt{1-x_1} \geqslant 1 \Leftarrow 0 < x_1 \leqslant \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Таким образом, $x_1 \notin (x_2;\ x_3)$ (рис. 7.3). Итак, последовательность $\{x_{2n-1}\}$ возрастающая и ограниченная сверху τ, а последовательность $\{x_{2n}\}$ убывающая и ограниченная снизу τ и окончательно $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \tau$.

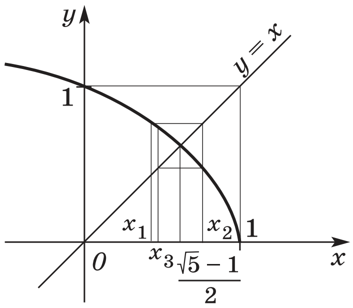


Рис. 7.3

VII.81. *Указание.* В этой задаче, возможно, надо прикладывать меньше усилий для строгих рассуждений. Гораздо важнее увидеть динамику процесса сходимости. а) **Решение.** Выпишем несколько первых членов последовательности: $x_1 = -3$; $x_2 = -1$; $x_3 = -5$; $x_4 = -\frac{1}{5}$; $x_5 = -29$; $x_6 = \frac{23}{29}$; $x_7 = 1 + \frac{6 \cdot 29}{23}$ (рис. 7.4). Таким образом, процесс переходит в первую четверть ($x_k > 0$), а сначала хотелось сказать, что он расходится.

Далее, действуя по сценарию решения задачи VII.80, получим, что $\forall n \geqslant 6$ ($x_n > 0$) последовательность $\{x_{2n}\}$ возрастающая и ограничена сверху, а последовательность $\{x_{2n+1}\}$ убывающая и ограничена снизу ($n \geqslant 3$), $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

б) *Указание.* Аналогично заданию *а*. $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x_n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ (рис. 7.5).

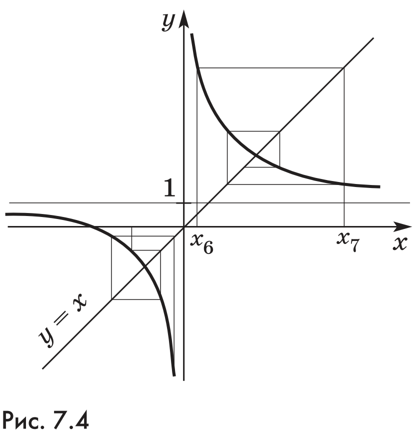


Рис. 7.4

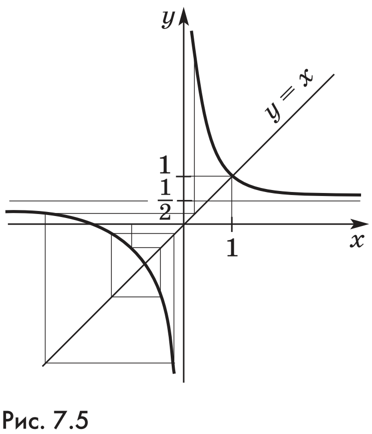


Рис. 7.5

в) *Указание.* См. рис. 7.6.

г) *Указание.* Как обычно, мешает разрыв. Было бы хорошо сказать, что функция возрастает и последовательность $\{x_n\}$ возрастает. Но всё не так: $x_2 = \frac{1}{2}$; $x_3 = -2$; $x_4 = \frac{11}{2}$; $x_5 = 3\frac{5}{11}$; $x_6 = 3\frac{5}{38}$. При $n \leqslant 4$ последовательность $\{x_n\}$ убывает (рис. 7.7). Значение предела получается из уравнения

$$a = 4 - \frac{3}{a} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a - 3, \\ a = 1. \end{array}\right.$$

Но $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 3$, и это, вообще говоря, надо доказать.

д) *Указание.* См. рис. 7.8. $x = \frac{a}{x} + b \Leftrightarrow x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4a}}{2}$.

е) **Решение.** Задача опирается на результат, полученный в задаче VII.78.

Если $x_1 = a$, то $x_2 = \cos a$, $x_3 = \cos(\cos a)$, так как $-1 \leqslant \cos a \leqslant 1$, то $x_3 \in (0; 1)$. Более того, начиная с $n = 3$ все члены последовательности $\{x_n\}$ принадлежат интервалу $(0; 1)$, где косинус убывает. Таким образом, последовательность удовлетворяет условиям задачи VII.78, а тогда последовательности $\{x_{2n-1}\}$ и $\{x_{2n}\}$ монотонны и ограниченны, т. е. имеют пределы. Осталось показать, что эти пределы равны.

Заметим, что $x_{2n+1} = \cos(\cos x_{2n-1})$ и $x_{2n+2} = \cos(\cos x_{2n})$. Переходя к пределу в обеих частях равенства с учётом ре-

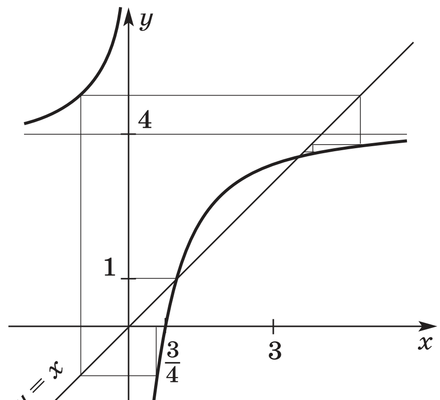


Рис. 7.6

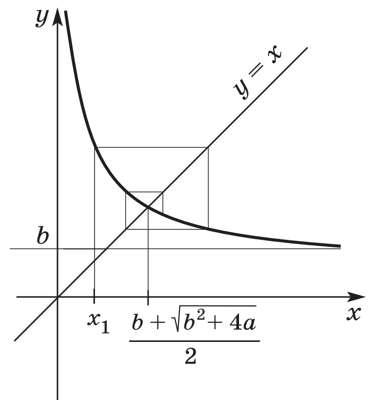


Рис. 7.7

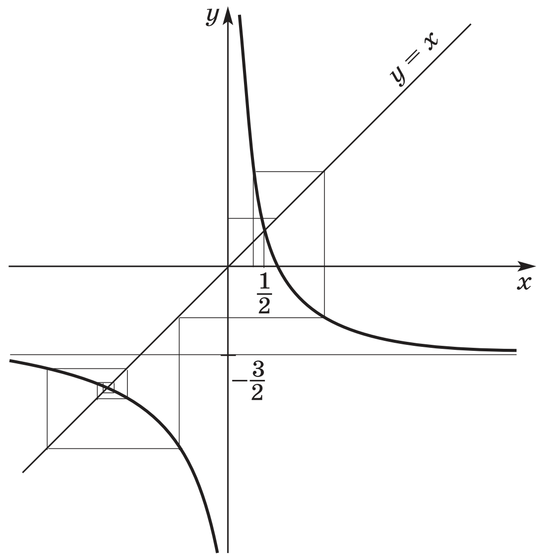


Рис. 7.8

зультата задачи VII.65, получаем, что оба предела являются корнями уравнения $x = \cos(\cos x)$. Покажем, что уравнение $x = \cos(\cos x)$ имеет один корень. Пусть этих корней два: $x_1 \neq x_2$. Тогда

$$|x_1 - x_2| = 2\left|\sin\frac{\cos x_1 + \cos x_2}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{\cos x_2 - \cos x_1}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\frac{(\cos x_2 - \cos x_1)}{2}\right| =$$

$$= 2\left|\sin\frac{x_1 - x_2}{2}\right| \cdot \left|\sin\frac{x_1 + x_2}{2}\right| \leqslant$$

$$\leqslant |x_1 - x_2|.$$

Противоречия можно избежать, только если вместо знаков неравенства всюду стоят знаки равенства, что возможно лишь при $|x_1 - x_2| = 0$ (использовано неравенство $|\sin x| \leqslant \leqslant |x|$, верное при всех значениях x и обращающееся в равенство при $x = 0$, и то, что $|\sin x| \leqslant 1$).

VII.82. а) **Решение.** Рассмотрим $f(x) = 2x - x^2$. Можно показать по индукции, что если $0 < x_1 < 1$, то $\forall n$ $x_n \in (0; 1)$. Тогда при $x \in (0; 1)$ $E(f) = (0; 1)$. Более того, функция f возрастает на $(0; 1)$. Значит, последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена. И следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, который находится однозначно из уравнения

$a = a(2 - a)$. Опять-таки, как и в задаче VII.81, можно проиллюстрировать процесс сходимости.

б) *Указание.* $x_1 \notin (0; 1)$, например $x_1 \in (1; 2)$. Тогда снова $\{x_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ($\forall n \geqslant 2$ $x_n \in (0; 1)$ и далее воспользоваться заданием *а*). Если $x_1 < 0$, то последовательность $\{x_n\}$ убывающая и не ограничена снизу и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$. Если $x_1 > 2$, то всё сводится к случаю $x_1 < 0$. Вообще говоря, можно заметить, что если существует $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, то $A = 0$ или $A = 1$, но при $x_1 < 0$ и $x_1 > 2$ $A \neq 0$ и $A \neq 1$.

Замечание. Задачи VII.83 и VII.84 лучше предложить учащимся решить дома, уже после разобранной в классе задачи VII.82.

VII.84. Решение. Если $x_1 < a - 1$, то последовательность $\{x_n\}$ убывающая и ограничена сверху значением $B = a - 1$; то же, если $\forall n \geqslant 2$ $x_n > 1$. Если $a - 1 < x_1 < 1$, то последовательность $\{x_n\}$ убывающая и ограничена снизу значением $B = a - 1$ (см. рис. 7.8).

а) Очевидно, что $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_{n+1} \geqslant y_{n+1}$. Докажем, что последовательность $\{x_n\}$ убывающая, а последовательность $\{y_n\}$ возрастающая, начиная с некоторого k $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $x_{n+2} - x_{n+1} = \dfrac{y_{n+1} - x_{n+1}}{2} \leqslant 0$. $\forall n \in \boldsymbol{N}$ $y_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}y_{n+1}} = \sqrt{\dfrac{x_n + y_n}{2} \cdot y_{n+1}} \geqslant y_{n+1}$, так как $\dfrac{x_n + y_n}{2} \geqslant \sqrt{x_n y_n} = y_{n+1}$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ возрастает и ограничена сверху, например $y_1 = b$, а последовательность $\{y_n\}$ убывает и ограничена снизу, например $y_1 = 0$, так что обе имеют пределы.

Осталось показать, что эти пределы равны. Перейдём в равенстве $x_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$ к пределу: $A = \dfrac{A + B}{2} \Leftrightarrow A = B$, что и требовалось.

б), в) *Указание.* Доказательства наличия предела аналогичны задаче VII.84, *а*.

VII.86. а) **Решение.**

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n} < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} = 0.$$

Таким образом, последовательность убывает. Поскольку последовательность ограничена снизу (например, числом 0), то имеет предел, причём этот предел меньше $a_3 = \frac{19}{20} < 1$.

б) **Решение**. Заметим, что последовательность отличается от последовательности из задания *а* на $\frac{1}{n}$, значит, имеет тот же предел. При этом, так как

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0,$$

последовательность возрастает. Её предел больше $a_2 = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$. Довольно сложно доказать наличие предела последовательности из задания *б*, не рассматривая последовательность из задания *а*.

VII.87. а) **Решение**. Подстановка $x_n = 2\sin a_n$ даёт $x_{n+1} = 2\sin\frac{a_n}{2}$. Поэтому $x_n = 2\sin\frac{a_1}{2^{n-1}}$. Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1}{2^{n-1}} = 0$, то в силу результата задания VII.65, *а* получаем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

б) **Решение**. Та же подстановка, что и в задании *а* показывает, что при $a = 2$ члены последовательности $\{x_n\}$ суть периметры правильных 2^{n+1}-угольников, вписанных в окружность радиуса 1 (рис. 7.9), предел которых есть длина этой окружности, т. е. 2π.

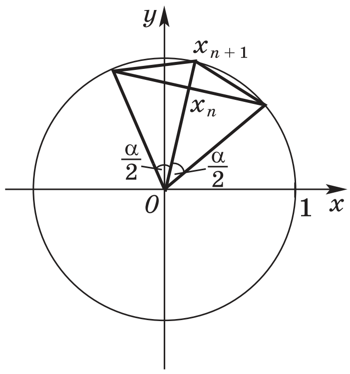


Рис. 7.9

Замечание. Отметим, что место это «скользкое», поскольку определение длины окружности как предела последовательности периметров правильных многоугольников существенно опирается на предел отношения синуса к своему аргументу. В то же время само определение синуса связано с изображением вещественного числа точкой окружности, которое, в свою очередь, опирается на понятие длины окружности. Имеет смысл обсудить с учащимися этот момент, наметив определение длины окружности как супремума периметров помещённых в неё выпуклых многоугольников и инфимума периметров содержащих её многоугольников (можно показать, что эти величины равны). Это определение уже не зависит от упомянутого предела и может служить основанием для его доказательства.

VII.88. **Решение.** Приведённое неравенство равносильно тому, что последовательность $\{b_n - a_n\}$ возрастает. Будучи разностью двух ограниченных, эта последовательность ограничена, а тогда она сходится. Таким образом, поскольку $b_n = a_n + (b_n - a_n)$, то последовательность $\{b_n\}$ сходится как сумма двух сходящихся последовательностей.

Замечание. Наш опыт работы показывает, что эта задача является для учащихся трудной несмотря на всю простоту её решения.

VII.89. а) **Решение.** При $c \geqslant -2$ имеем $x_1 \geqslant 0$, а тогда все последующие члены последовательности положительны. В таком случае очевидно, что каждый последующий член последовательности больше предыдущего. б) *Указание.* Доказать по индукции.

в) **Решение.** Если предел последовательности $\{x_n\}$ не равен 0, то $\lim\limits_{n\to\infty}(nx_n + 2) = \infty$, как следует из результата задачи VII.46 в то время как он должен быть равен пределу последовательности $\{x_{n+1}\}$, т. е. числу.

г) **Решение.** Пусть $c = \dfrac{p}{q}$ — несократимая дробь. Тогда все члены последовательности будут иметь знаменатель, не больший q. Заметим, что в последовательности $\{x_n\}$ могут совпасть не более двух членов. Последовательность чисел, знаменатели которых не больше q, не может иметь предела, поскольку в любом интервале таких чисел содержится лишь конечное количество. Как будет показано ниже, при рациональном c члены последовательности, начиная с некоторого номера, становятся целыми числами.

д) $c = 2 - 2e$. *Указание.* В самом деле,

$$x_1 = c + 2,$$
$$x_2 = 2x_1 + 2 = 2c + 2(2 + 1),$$
$$x_3 = 3!c + 2(3 \cdot 2 + 3 + 1),$$
$$x_4 = 4!c + 2(4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 + 1).$$

С помощью метода математической индукции нетрудно показать, что

$$x_n = n!\,c + 2\left(n! + \frac{n!}{2} + \frac{n!}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{n!}{2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n}\right),$$

откуда

$$\frac{x_n}{n!} = c + 2\left(1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}\right). \qquad (1)$$

Если последовательность $\{x_n\}$ имеет предел, то последовательность $\left\{\frac{x_n}{n!}\right\}$ стремится к 0, а тогда с учётом результата задания VII.97, *г* из равенства (1) получаем $c + 2(e - 1) = 0$, откуда $c = 2 - 2e$. Осталось показать, что при полученном c последовательность $\{x_n\}$ сходится. Для этого используем результат задания VII.97, *ж*. Подставив равенство из этого пункта в (1), получим $\frac{x_n}{n!} = -2 \cdot \frac{a_n}{n! \cdot n}$, где $0 < a_n \leqslant 1$, а тогда $x_n = -\frac{2a_n}{n}$, откуда видно, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$.

Отметим, что попутно нами решены задания *в* и *г* данной задачи.

VII.90. Решение. Рассмотрим наибольшее из чисел. Пусть этим числом является a. Тогда из условия следует, что при всех натуральных n выполнено неравенство $a^n < b^n + c^n$. Поделим обе части неравенства на a^n. Получим неравенство

$$\left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n > 1, \qquad (2)$$

верное при всех натуральных n.

Если a не равно ни одному из чисел b и c, то $\frac{b}{a} < 1$, $\frac{c}{a} < 1$, а тогда $\lim\limits_{n \to \infty}\left(\left(\frac{b}{a}\right)^n + \left(\frac{c}{a}\right)^n\right) = 0$, что противоречит неравенству (2).

VII.91. Решение. Идея решения этой задачи схожа с идеей решения предыдущей. Пусть $a_1, \ldots, a_k$ — данные числа. Пусть a_1 — число с максимальным модулем. Из условия получаем равенство

$$1 + \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n + \ldots + \left(\frac{a_k}{a_1}\right)^n = 0, \qquad (3)$$

верное при всех натуральных нечётных n.

Если среди записанных в равенстве (3) дробей нет дроби, по модулю равной 1, то, устремляя n к бесконечности, получаем предел левой части равным 1, что противоречит равенству (3). Значит, среди таких дробей есть равные 1 и -1. Сумма дробей, имеющих модуль 1, должна быть равна 0, поскольку остальные дроби «уйдут в 0» при нахождении предела. Значит, среди исходных чисел было поровну равных a_1 и $-a_1$.

Поскольку сумма всех чисел с наибольшим модулем в нечётных степенях будет равна 0, для оставшихся чисел условие задачи будет выполнено, и то же самое рассуждение можно проделать ещё несколько раз.

VII.92. а) **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = e^{-1}$.

б) e^2. в) **Решение.** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$.

VII.93. а) *Указание.* Последовательность $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ возрастающая (см. замечание на с. 383 учебника). В нашем случае $a_n < a_{2n}$.

б) **Решение.** $a_1 = 2$, таким образом, из возрастания последовательности $\{a_n\}$ следует, что при $n > 1$ выполнено $a_n > 2$. Второе неравенство следует из того, что $a_n < e$, поскольку e является пределом возрастающей последовательности, который, как следует из доказательства теоремы Вейерштрасса, является её супремумом. В свою очередь, $e < 3$.

в) **Решение.** Замечание на с. 383 показывает, что при всех натуральных n выполнено $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1} > e$, откуда, возводя обе части неравенства в степень $\dfrac{n}{n+1}$, получаем

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > e^{1-\frac{1}{n+1}},$$

которое влечёт требуемое неравенство, так как

$$1-\frac{1}{n+1} > 1-\frac{1}{n}.$$

г) *Указание.* Левая часть данного неравенства получается логарифмированием по основанию e обеих частей неравенства задания *в*.

Правая часть неравенства получается логарифмированием по основанию e неравенства

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e.$$

VII.94. *Указание.* Следует из задания VII.93, *г*.

VII.96. **Решение.** Заметим, что

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=$$

$$=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}=\frac{n^{n}}{n!}.$$

Тогда можно записать следующие равенства:

$$\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{\frac{n!}{n^{n}}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[n]{1\cdot\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}}.$$

Тем самым, взяв натуральный логарифм исходной последовательности, можно записать его в виде

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right)=$$

$$=-\frac{\ln 1+\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{n}.$$

Мы знаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=1$, а тогда в силу утверждения задачи VII.23 и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln 1+\ln\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}+\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)^{3}+\ldots+\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}{n}=1,$$

а значит, $\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right)=-1$, откуда $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}\right)=\frac{1}{e}$.

VII.97. а) *Указание.* Упомянутое разложение можно записать так:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

б) **Решение.** Если отбросить в каждой скобке вычитаемые, каждый положительный сомножитель увеличится, а тогда увеличатся почти все (кроме двух первых) слагаемые, значит, увеличится сумма. Результатом отбрасывания вычитаемых и является выражение

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

в) **Решение**. Возьмём первые k членов разложения из задания a (точнее, $k+1$ слагаемое). При $n > k$ выполнено неравенство

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geqslant 1+1+\frac{1}{2!}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right).$$

Устремим n к бесконечности. Левая часть неравенства устремится к e, а правая — к $1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{k!}$. Осталось применить теорему о предельном переходе в неравенстве для получения требуемого неравенства.

г) *Указание.* Следует из теоремы о сжатой последовательности.

з) **Решение**. Пусть $e=\frac{p}{q}$, где p и q — натуральные числа. Из задания $ж$ следует, что

$$\frac{p}{q}=1+1+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{q!}+\frac{a_q}{q!q},\ \ 0 < a_q \leqslant 1.$$

Умножив обе части этого равенства на $q!$, получаем

$$p=2q!+\frac{q!}{2!}+\ldots+1+\frac{a_q}{q}.$$

В левой части этого равенства стоит натуральное число. В правой части равенства все слагаемые, кроме последнего, являются натуральными числами, а последнее слагаемое целым не является. Полученное противоречие доказывает утверждение задачи.

Кстати, из доказанного утверждения следует, что в использованном представлении числа e для всех натуральных n выполнено строгое неравенство $a_n < 1$. В противном случае получилось бы, что e — рациональное число.

и) **Решение**. Вновь используем представление числа e, полученное в задании $ж$.

$$n!e=m_n+\frac{a_n}{n},\ \ 0 < a_n \leqslant 1,$$

где m_n — некоторое целое число.

Тогда

$$\sin(2\pi n!e) = \sin\left(2\pi m_n + \frac{2\pi a_n}{n}\right) = \sin\left(\frac{2\pi a_n}{n}\right).$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{2\pi a_n}{n}\right) = 0$.

VII.98. *Указание.* Докажем более общее утверждение. Последовательность $\{x_n\}$ является объединением двух подпоследовательностей, имеющих один и тот же предел a. Тогда сама последовательность также стремится к a.

Доказательство. Возьмём произвольную окрестность точки a. Пусть члены одной подпоследовательности принадлежат окрестности $V_\varepsilon(a)$, начиная с члена x_{n_1}, а другой — начиная с x_{n_2}. Тогда члены последовательности $\{x_n\}$ будут принадлежать $V_\varepsilon(a)$, начиная с номера $n_0 = \max\{n_1;\ n_2\}$. Далее повторяем рассуждения, опирающиеся на геометрический смысл определения предела.

VII.100. а) Нет. б) Да. в) Нет, например $a_n = (-1)^n$.

Оглавление

Учебное издание

Пратусевич Максим Яковлевич
Столбов Константин Михайлович
Соломин Вадим Николаевич

АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Книга для учителя

10 класс

Профильный уровень

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *П. А. Бессарабова*
Младший редактор *Е. А. Андреенкова*
Художник *О. П. Богомолова*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *А. Г. Вьюниковской, С. А. Кутикова*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *А. К. Райхчин, Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93 — 953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать 18.11.11. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Бумага газетная. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 16,83. Тираж 2000 экз. Заказ №

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано в ОАО «Тверской ордена Трудового Красного Знамени полиграфкомбинат детской литературы им. 50-летия СССР». 170040, г. Тверь, проспект 50-летия Октября, 46.