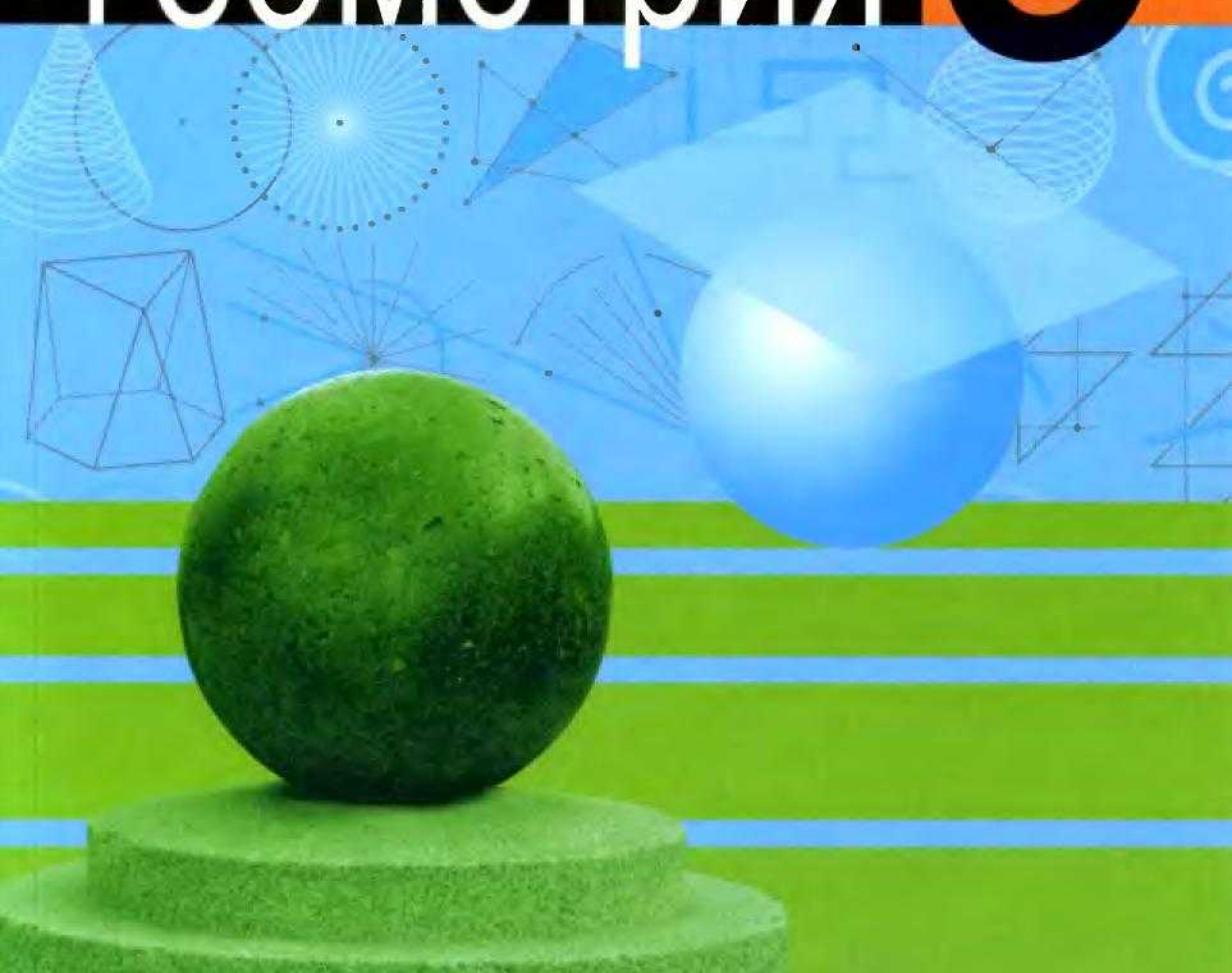




Т. Г. Ходот  
А. Ю. Ходот  
В. Л. Велиховская

# Наглядная геометрия 6



Т. Г. Ходот А. Ю. Ходот

# Наглядная геометрия

**Учебник**

для учащихся 6 классов  
общеобразовательных  
учреждений

Москва «Просвещение» 2007

УДК 373.167.1:51  
ББК 22.151я72  
Х69

**Ходот Т. Г.**

**Х69** Математика : наглядная геометрия : учеб. для учащихся 6 кл. общеобразоват. учреждений / Т. Г. Ходот, А. Ю. Ходот. — М. : Просвещение, 2007. — 143 с. : ил. — ISBN 978-5-09-015973-9.

Предлагаемый учебник содержит вторую часть курса «Наглядная геометрия», главная цель которого, кроме развития пространственных представлений и логического мышления, подготовить учащихся 6 классов к успешному усвоению систематического курса геометрии средней школы: создать целостные представления об этом курсе, на конструктивном уровне познакомить со всеми геометрическими фигурами, встречающимися в школьном курсе, способствовать развитию навыков изображения фигур, формированию правильной математической речи.

УДК 373.167.1:51  
ББК 22.151я72

ISBN 978-5-09-015973-9

© Издательство «Просвещение», 2007  
© Художественное оформление.  
Издательство «Просвещение», 2007  
Все права защищены

## Дорогой шестиклассник!

Мы продолжаем заниматься геометрией.

В прошлом году мы занимались геометрическими фигурами: мы использовали их для изображения формы предмета, научились конструировать их модели, рисовать и некоторые из них строить с помощью чертёжных инструментов. Кроме того, мы занимались измерением фигур: ты знаешь, как определить длину линии, площадь плоской фигуры, объём тела, меру угла.

В этом году мы будем рассматривать комбинации известных тебе фигур, обсуждать различные варианты взаимного расположения этих фигур и их частей. Мы сможем теперь обсуждать более серьёзные вопросы, в том числе и связанные с творческим конструированием. Ты познакомишься с симметричными фигурами и поймёшь, чем они интересны и как можно их использовать для создания новых, приятных для глаза форм и конструкций.

И конечно, мы предложим тебе новые интересные задачи, которые помогут развить сообразительность, гибкость ума, внимание, память. Полистай учебники пятого и шестого классов и найди в них иллюстрации ко всему тому, о чём мы сейчас говорили. Интересно посоревноваться с друзьями: кто больше найдёт таких иллюстраций и придумает соответствующих примеров.

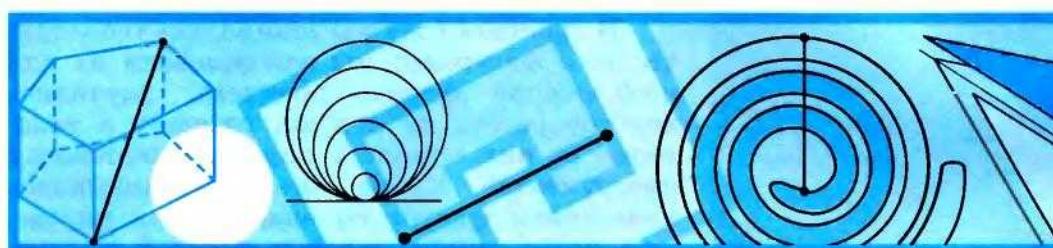
А начнём мы с повторения.

Мы повторим материал, в основном, решая задачи. При этом ты будешь узнавать об известных фигурах что-нибудь новое. Повторяя какую-нибудь тему, сначала постарайся решить задачи, а затем обязательно найди соответствующий материал в учебнике пятого класса. Здесь появятся новые важные задачи. Весь новый материал в главе 1 мы отмечаем знаком **■**. Мы советуем тебе внимательно относиться к повторению, так как в дальнейшем при изучении нового материала все изложенные здесь факты будут использованы.

# Глава 1

## Повторение.

### Знакомые и новые понятия



## § 1 Какие геометрические фигуры бывают

### 1.1. Самые общие воспоминания.

1.1. Разбей на две группы фигуры, изображённые на рисунке 1. Объясни своё решение. Назови каждую из этих фигур.

1.2. Нарисуй какую-нибудь конструкцию из плоских фигур. Является ли твоя конструкция плоской фигурой?

1.3. Нарисуй какую-нибудь конструкцию из пространственных фигур. Является ли твоя конструкция пространственной фигурой?

1.4. Нарисуй геометрические фигуры, описывающие форму предметов, изображённых на рисунке 2.

1.5. Нарисуй какие-нибудь предметы, форма которых изображена фигурами рисунка 3.

1.6. Верно ли, что если одна окружность проходит через центр другой окружности такого же радиуса, то они пересекаются?

**Подсказка.** Рассмотри случай, когда окружности не лежат в одной плоскости.

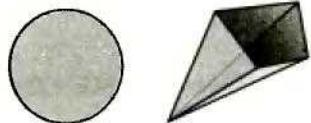
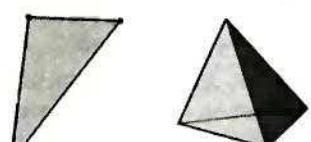
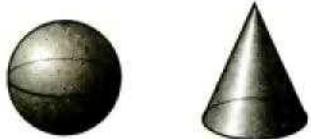
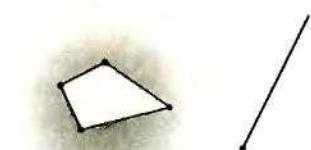
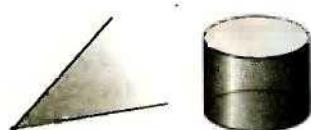


Рис. 1

Рис. 2

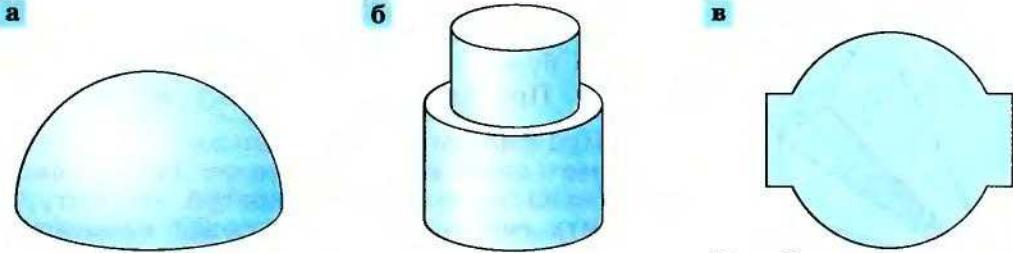


Рис. 3

**1.7.** Какую из следующих фраз иллюстрирует рисунок 4?

- Круг лежит между прямоугольником и треугольником.
- Круг отличается от треугольника тем, что не имеет углов.
- Три замкнутые линии, одна из которых — пятизвенная ломаная, имеют только одну общую точку.

**1.8.** Определи закономерность (рис. 5) и выпиши номера рисунков в порядке, соответствующем этой закономерности.

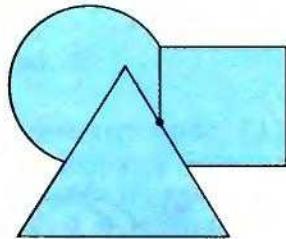


Рис. 4

**1.2. Новые задачи.** Мы начали изучение геометрии с игры: со спичками, с танграмом, с кубиками. Но есть игры, участвуя в которых можно потренироваться в способах размышления и поисках ответа. Можно сказать, что эти игры почти математические задачи.

Одна из таких игр — игра «Да и нет». В ней надо отгадать задуманный объект, задавая вопросы, на которые ведущий может отвечать только «да» или «нет».

Приведём пример такой игры. Предположим, ведущий загадал призму. Игроки спрашивают:

«Это геометрическая фигура?» — «Да».

«Это плоская фигура?» — «Нет».

«Имеет основание?» — «Да».

«Можно ли её увидеть как круг?» — «Нет».

«Имеет рёбра?» — «Да».

Один игрок «отгадывает»: «Это пирамида!» На основании информации, полученной из ответов ведущего, нельзя однозначно утверждать, что загадана пирамида. Игрок не учёл того, что среди фигур, обладающих всеми этими свойствами, могут быть и призмы. Для уточнения можно задать вопрос: «У этой фигуры больше одного основания?» Подумай, нельзя ли задать более точный вопрос, ответ на который даёт возможность точно определить загаданную фигуру.

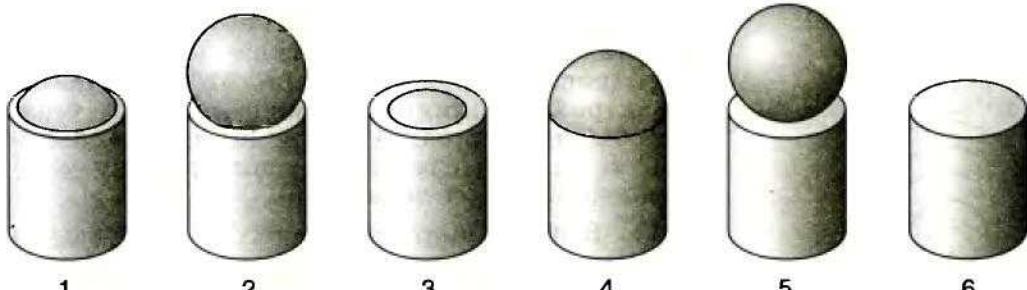


Рис. 5

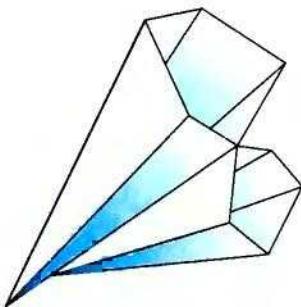


Рис. 6

В задачах мы будем предлагать готовый набор признаков геометрического объекта. Нужно будет по этим признакам определить объект. Приведём пример такой задачи.

**1.9.** Про фигуру известно, что она: 1) плоская; 2) имеет один конец; 3) может быть сконструирована из отрезков. Нарисуй эту фигуру.

Есть ещё одна игра, которая называется «Ассоциации».

Слово **ассоциация** (от лат. *associare* — соединять) имеет корень *socius* — товарищ. Ты знаком с распределительным законом сложения чисел: складывая числа, можно объединять их в группы, например:  $a + b + c = a + (b + c)$ . Математики говорят, что сложение обладает свойством **ассоциативности**.

В другом значении — это связь между какими-то предметами или явлениями, возникающая при восприятии человеком одного из них. Например, шесть листьев может **ассоциироваться** с шёпотом.

В игре «Ассоциации» ведущий должен назвать человека, загаданного остальными игроками. Ведущий может задавать вопросы: «С каким деревом этот человек ассоциируется?», или «Какое животное он напоминает?», или «С каким атмосферным явлением он связывается?» и так далее. На основании ответов ведущий строит гипотезу (делает предположение) о росте человека, цвете его волос и глаз, любимых занятиях и даже о характере. Понятно, что можно загадывать не только известного человека, но и предметы, явления, абстрактные понятия, в том числе и геометрические.

Поиграй с друзьями в эти игры: они интересны, полезны и очень увлекательны.

Мы предложим задачи, основанные на принципах этой игры: те, в которых требуется указать какие-нибудь (чаще всего конкретные) геометрические ассоциации, возникающие при рассматривании картинки или чтении слова. Вот две такие задачи.

**1.10.** Какие из следующих слов или словосочетаний ты можешь связать с картинкой (рис. 6): а) объединение; б) пересечение; в) штриховая линия; г) многогранный угол; д) общая вершина; е) сфера; ж) пятиугольники? В каждом случае объясни причину установленной тобой связи.

**1.11.** Выбери картинки (рис. 7), которые ты связываешь со всеми следующими словами и словосочетаниями: 1) круг; 2) взаимное расположение; 3) класс.

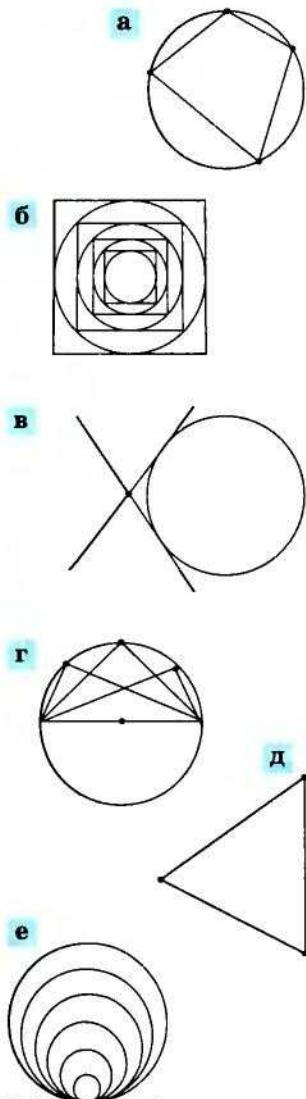


Рис. 7

## § 2 Отрезки. Конструкции из отрезков

### 2.1. Отрезки, лучи, прямые.

**2.1.** На рисунке 8 изображены точки  $M$ ,  $N$ ,  $P$ ,  $Q$ . Определи, пересекаются ли: а) отрезки  $MN$  и  $PQ$ ;  $PM$  и  $NQ$ ; б) лучи  $MN$  и  $PQ$ ; в) прямые  $PM$  и  $NQ$ . Если возможно, укажи точку пересечения.

**2.2.** Определи закономерность (рис. 9) и выпиши номера рисунков в порядке, соответствующем этой закономерности.

### 2.2. Ломаные и многоугольники.

**2.3.** Какая картинка лишняя (рис. 10)?

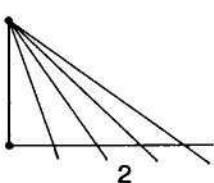
**2.4.** Какие ломаные плоские, какие — пространственные (рис. 11)?

**2.5.** Звенья замкнутой ломаной  $ABCD$  совпадают с рёбрами тетраэдра  $ABCD$ . Сделай рисунок. Является ли  $ABCD$  четырёхугольником?

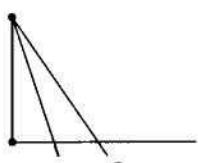
**2.6\*.** Нарисуй какой-нибудь многогранник, имеющий 6 граней. Какую форму имеют его грани?



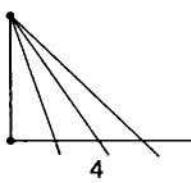
1



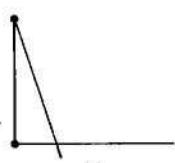
2



3



4



5

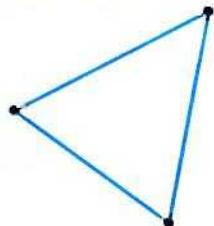
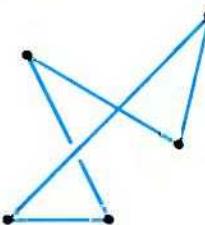
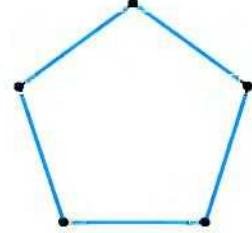
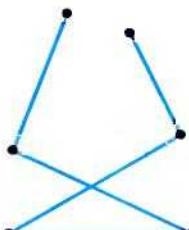


Рис. 9

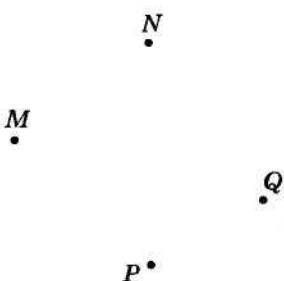


Рис. 8

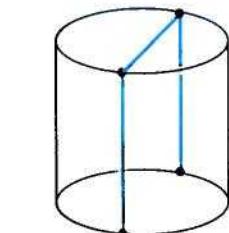
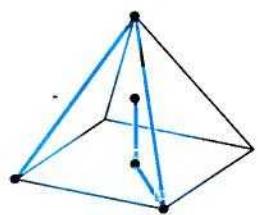
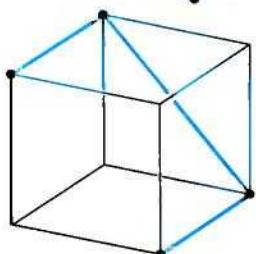
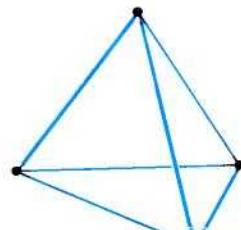


Рис. 10

Рис. 11

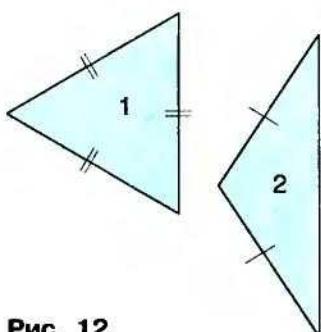


Рис. 12

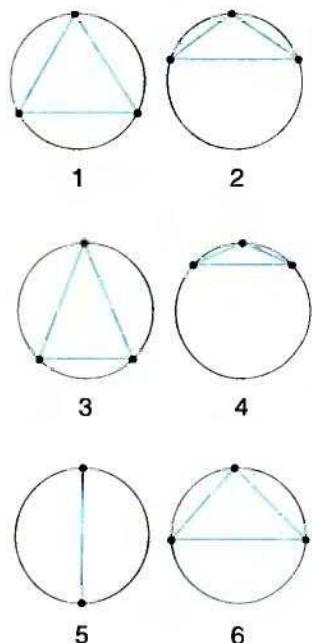
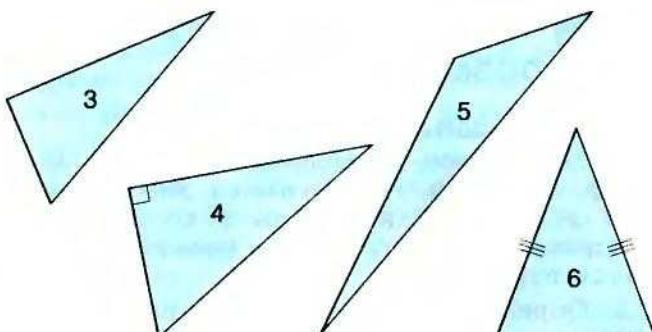


Рис. 13

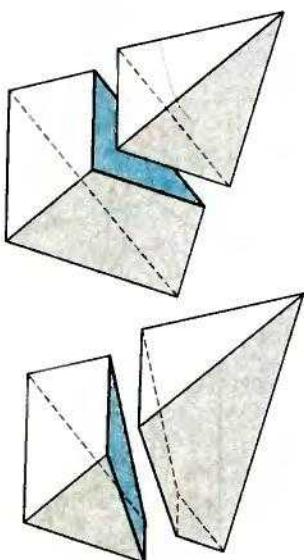


Рис. 14

**2.7.** Объедини фигуры (рис. 12) в группы. Объясни своё решение. Возможно ли другое объединение фигур?

**2.8.** Имеются рейки длиной 29 см, 15 см, 6 см, 15 см, 10 см. Из каких реек можно сделать модель треугольника? Какого вида треугольники получаются?

**2.9.** Определи закономерность (рис. 13) и выпиши номера рисунков в порядке, соответствующем этой закономерности.

**2.10.** Построй равнобедренный треугольник с боковой стороной, равной 4 см.

**2.11.** Построй отрезок  $AB$ , длина которого 6 см. Построй, если возможно, равнобедренный треугольник с основанием  $AB$ , в котором боковая сторона равна: а) 5 см; б) 3 см; в) 2 см; г) 12 см.

**Совет.** Воспользуйся циркулем.

**2.12.** Построй треугольник  $ABC$ , в котором сторона  $AB$  равна 4 см, углы  $A$  и  $B$  соответственно равны: а)  $29^\circ$  и  $80^\circ$ ; б)  $45^\circ$  и  $45^\circ$ ; в)  $34^\circ$  и  $110^\circ$ ; г)  $105^\circ$  и  $100^\circ$ . Всегда ли можно выполнить соответствующее построение? В каждом из возможных случаев определи вид получившегося треугольника.

**Напоминание.** В треугольнике не может быть больше одного прямого или тупого угла.

**2.13.** Построй треугольник, стороны которого соответственно равны: 3 см, 4 см, 6 см.

**2.14.** Можно ли разбить на два прямоугольных треугольника остроугольный треугольник? А прямоугольный или тупоугольный треугольник? Сколько способов такого разбиения ты можешь предложить?

**2.15\*.** Из каких трёх одинаковых треугольников можно составить равносторонний треугольник?

### 2.3. Цилиндры, конусы.

**2.16.** Нарисуй треугольную и четырёхугольную призмы.

**2.17.** Нарисуй треугольную и четырёхугольную пирамиды.

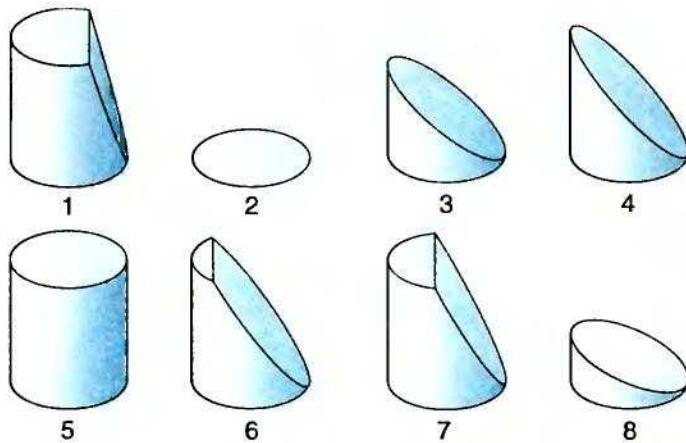


Рис. 15

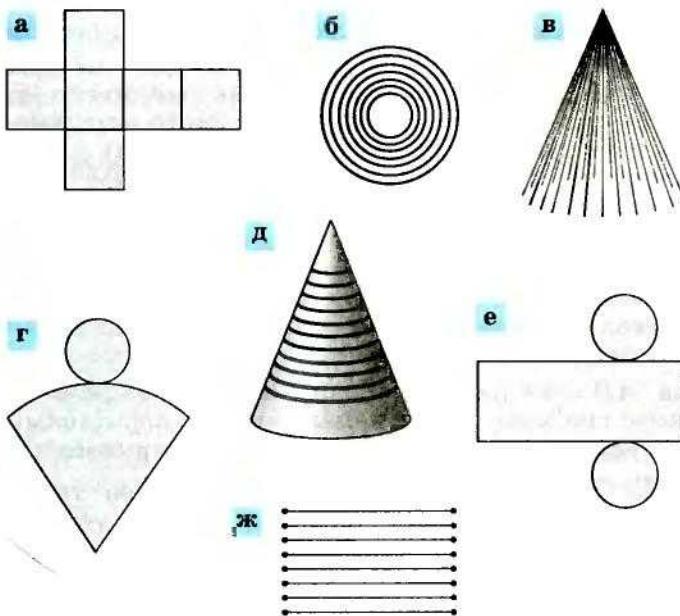
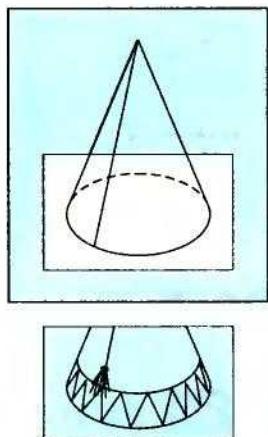


Рис. 16

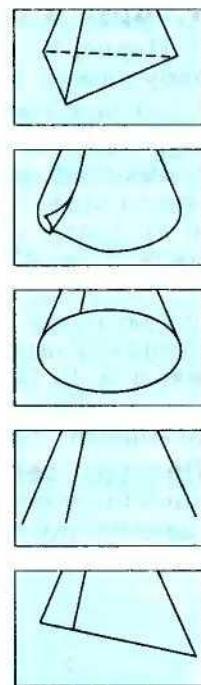


Рис. 17

**2.18.** Тетраэдр, сделанный из пластилина, разрезают ножом на две части. Какая фигура может получиться в сечении (в месте разреза)?

**Проверь себя.** Некоторые варианты изображены на рисунке 14.

**2.19\***. Какая фигура может получиться при пересечении плоскостью:  
а) треугольной призмы; б) куба?

**2.20.** Определи закономерность, которой связаны рисунки (рис. 15), и выпиши их номера в порядке, соответствующем закономерности.

**2.21.** Выбери картинки (рис. 16), которые ты связываешь со всеми следующими словами и словосочетаниями: 1) вершина; 2) боковая поверхность; 3) круг; 4) конструирование. Объясни свой выбор.

**2.22‡.** Каким фрагментом можно заменить выделенный фрагмент иллюстрации (рис. 17) для того, чтобы у неё появился другой геометрической смысл?

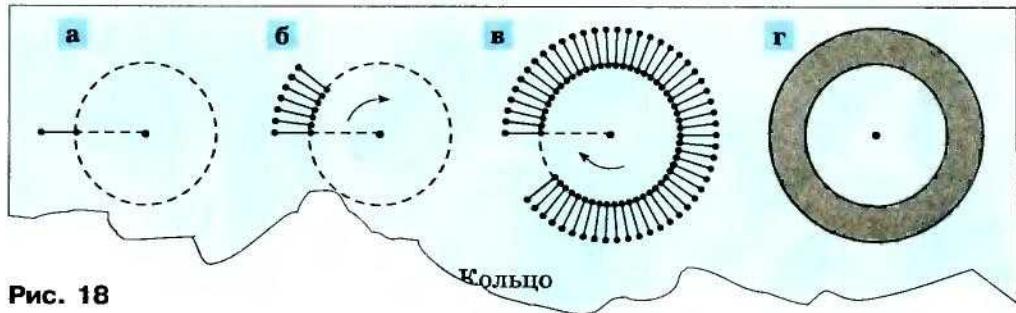


Рис. 18

Кольцо

## § 3 Круглые фигуры

### 3.1. Круг и окружность.

**3.1.** Нарисуй круг. Закрась красным цветом его внутренность, а окружность обведи синим. Чем отличаются круг и окружность?

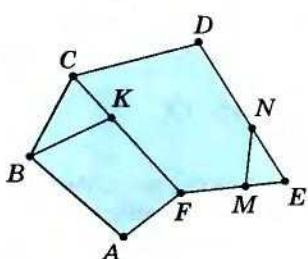
**3.2\***. О чём говорится в изображённом фрагменте книги, в котором осталась лишь последовательность иллюстраций (рис. 18)?

**3.3.** Построй окружность с радиусом 2 см и отметь на ней точку  $A$ . Проведи через эту точку: а) радиус окружности; б) диаметр окружности; в) хорду, отличную от диаметра; г) хорду длиной 3 см; д) хорду длиной 5 см. Сколько решений имеет задача в каждом случае?

**3.4\*.** Построй окружность с радиусом 3 см и выбери на ней произвольную точку  $M$ . Проведи через точку  $M$  две произвольные взаимно перпендикулярные хорды  $MA$  и  $MB$ . Измерь расстояние между точками  $A$  и  $B$ . Повтори те же действия для двух других взаимно перпендикулярных хорд, проходящих через точку  $M$ , и для другой точки окружности. Что ты заметил?

**Проверь себя.** Хорда  $AB$  каждый раз равна 6 см. Это диаметр данной окружности. Таково свойство всех прямых углов с вершинами на данной окружности и сторонами, пересекающими эту окружность.

**3.2. Хорда.** Оказывается, слово **хорда** в геометрии употребляется не только для отрезков в окружности или круге, но и для любых других фигур.



**Хордой** произвольной фигуры называют отрезок, который соединяет две точки её границы и других общих точек с этой границей не имеет.

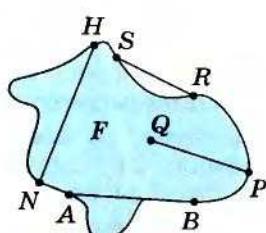


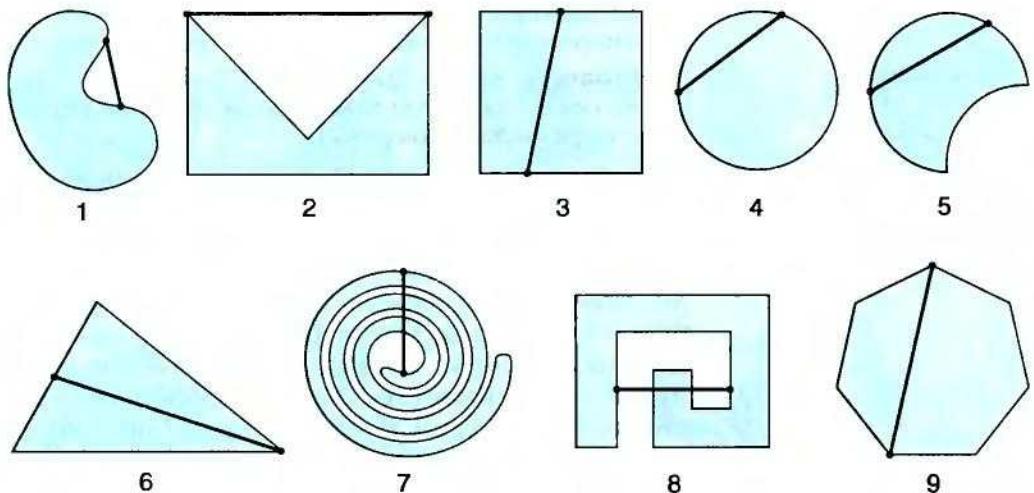
Рис. 19

**3.5.** Какой отрезок является хордой: а) многоугольника  $ABCDEF$ ; б) фигуры  $F$  (рис. 19)?

**3.6.** Объедини картинки (рис. 20) в группы, объясни принцип их объединения.

**3.7.** Построй прямой угол и какую-нибудь его хорду. Измерь её. Можно ли построить: а) ещё одну хорду этого угла той же длины; б) наибольшую хорду этого угла; в) наименьшую хорду этого угла?

**3.8.** Построй отрезок  $AB$ , длина которого 6 см. С помощью чертёжного треугольника или



**Рис. 20**

шаблона построй прямой угол, для которого отрезок  $AB$  является хордой. Построй ещё несколько таких углов. Нарисуй линию, на которой лежат вершины всех таких углов. Сравни результат с результатом задачи 3.4.

**Подсказка.** Смотри рисунок 21.

**3.9.** Нарисуй пятиугольник  $ABCDE$ . Построй какую-нибудь его хорду, соединяющую две вершины.

Хорда многоугольника, соединяющая две его вершины, называется **диагональю** многоугольника.

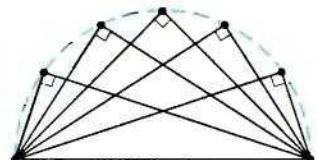
**Замечание.** Так как хорда многоугольника не совпадает ни с какой его стороной, то она может соединять только две несоседние вершины этого многоугольника (рис. 22).

Как это часто бывает, по тому, как образовано слово **диагональ**, можно догадаться о его смысле. Корень этого слова *gonia* (греч.) — угол. С приставкой *dia* — насквозь — мы уже встречались в слове **диаметр**. Таким образом, диагональ — это отрезок, идущий сквозь многоугольник, из угла в угол.

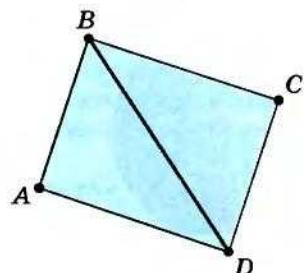
Диагональ можно провести и в многограннике. Так же как и в многоугольнике, диагональ многогранника — это его хорда, соединяющая две вершины многогранника, не лежащие в одной грани (рис. 23).

**3.10.** Сколько диагоналей имеют четырёхугольник, шестиугольник?

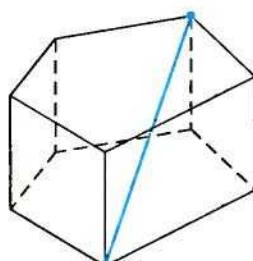
**3.11.** Нарисуй прямоугольный параллелепипед и какую-нибудь его диагональ. Сколько всего диагоналей имеет прямоугольный параллелепипед?



**Рис. 21**



**Рис. 22**



**Рис. 23**

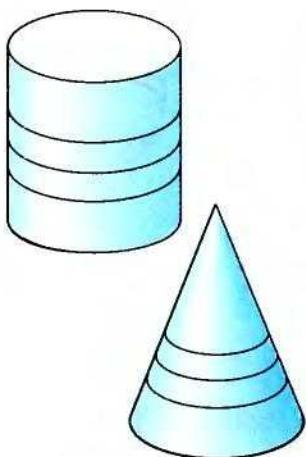


Рис. 24

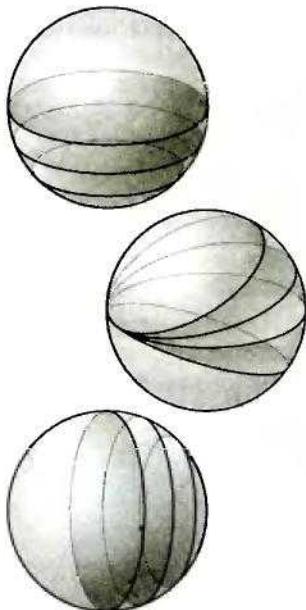


Рис. 25



Рис. 26

**3.12.** Приведи примеры многоугольника и многогранника, у которых нет диагоналей.

💡 **Проверь себя.** Диагоналей не имеют треугольники, треугольные призмы, всевозможные пирамиды (почему?).

**3.3. Круглые тела.** Среди так называемых круглых тел тебе известны круговой цилиндр и круговой конус. Если их поставить на горизонтальную плоскость и рассекать другими горизонтальными плоскостями, то каждый раз будут получаться круги (рис. 24). Но «самым круглым телом», конечно же, является шар: какой бы плоскостью мы ни пересекали шар, каждый раз будем получать круг (рис. 25).

💡 Шар — это пространственная фигура (тело), которая с геометрической точки зрения аналогична (похожа) кругу: шар имеет центр и радиус, все точки шара удалены от его центра на расстояние, не большее чем радиус. Поверхность шара называется *сферой*. Все точки сферы удалены от центра шара (который является также и центром сферы) на расстояние, равное длине радиуса.

**Сферой** с центром в точке  $O$  и радиусом  $r$  называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, которые удалены от точки  $O$  на расстояние, равное  $r$ .

**Шаром** с центром в точке  $O$  и радиусом  $r$  называется тело, состоящее из всех точек пространства, которые удалены от точки  $O$  на расстояние, не большее чем  $r$ .

Шар и сфера, так же как круг и окружность, имеют радиус, диаметр и, конечно же, хорды (рис. 26). Определения этих отрезков дословно повторяют определения радиуса, диаметра и хорды круга и окружности. Сформулируй их.

**3.13.** Приведи примеры различных природных объектов и предметов, сделанных руками человека, которые имеют форму шара или сферы.

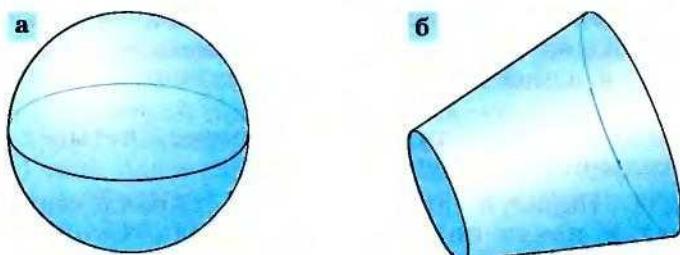


Рис. 27

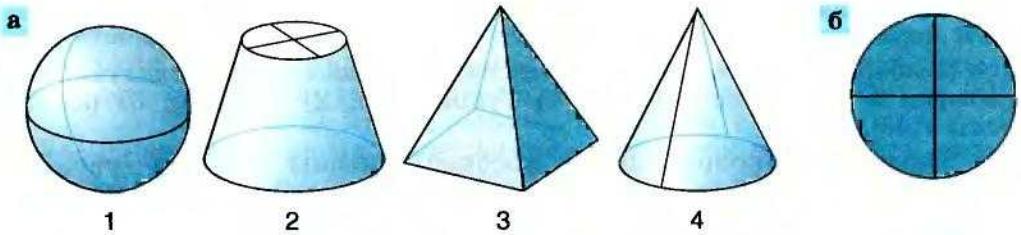


Рис. 28

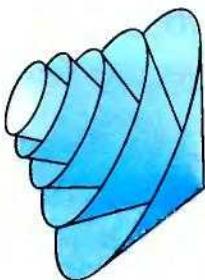


Рис. 29



Рис. 30

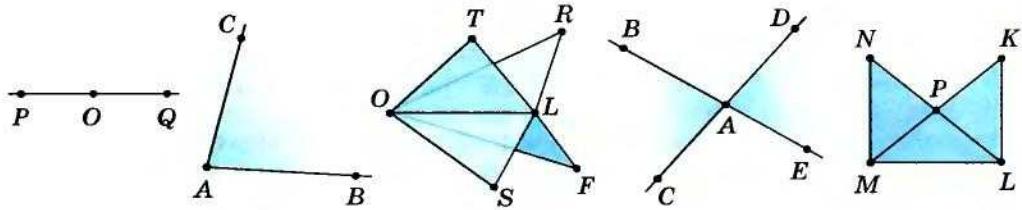


Рис. 31

**3.14.** Нарисуй известные тебе круглые тела — геометрические фигуры.  
**3.15.** Какое словосочетание ты используешь при описании отличия одной фигуры от другой (рис. 27): а) «может кататься только по окружности»; б) «имеет основания»; в) «тень — многоугольник»; г) «верх и низ — одно и то же»; д) «есть рёбра»; е) «сделаны из разных материалов».

**3.16.** Какую из фигур рисунка 28, а, можно увидеть так, как показано на рисунке 28, б?

**3.17.** Какие из следующих слов или словосочетаний можно связать с картинкой (рис. 29): а) конус; б) пересечение; в) куб; г) конструирование; д) развернутый угол; е) равенство; ж) класс; з) дюйм? Ответ объясни.

**3.18.** Какая картинка лишняя (рис. 30)?

## § 4 Углы

### 4.1. Общие воспоминания об углах.

**4.1.** Среди фигур (рис. 31) найди углы. Какие из них плоские? Назови элементы каждого из углов: вершины, стороны, рёбра, грани.

**4.2.** Найди среди углов (рис. 32) прямые углы. Проверь свой выбор.

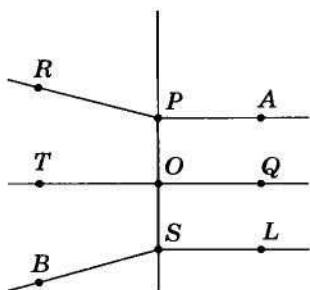


Рис. 32

**4.3.** Какие виды плоских углов ты знаешь? Нарисуй по два угла каждого вида.

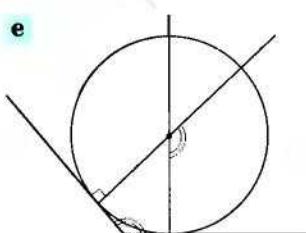
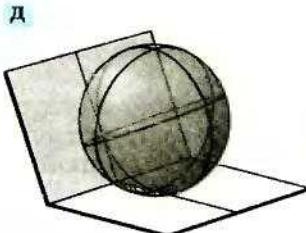
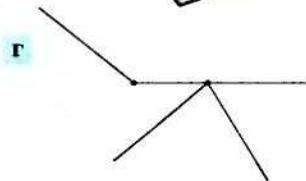
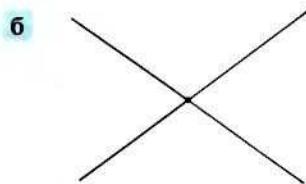
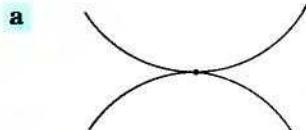
**4.4.** Выбери картинки, которые ты связываешь со всеми следующими словами и словосочетаниями: 1) тупой угол; 2) касание; 3) равные углы (рис. 33).

**4.5.** Определи закономерность, которой связаны рисунки (рис. 34), и выпиши их номера в порядке, соответствующем закономерности.

**4.6.** Построй острый и тупой углы и биссектрису каждого из них.

**4.7.** С помощью циркуля и линейки построй прямой угол и угол  $45^\circ$ .

**4.8.** Нарисуй две пересекающиеся прямые. Построй биссектрисы каждого из четырёх образовавшихся углов. Что ты заметил?



**4.9.** Построй треугольник и биссектрисы его углов. Что ты заметил?

**4.10.** Построй треугольник  $ABC$  так, чтобы:

а)  $AB = 3 \text{ см}$ ,  $AC = 4 \text{ см}$ ,  $\angle A = 55^\circ$ ;

б)  $AB = 5 \text{ см}$ ,  $\angle A = 11^\circ$ ,  $\angle B = 24^\circ$ ;

в)  $AB = AC = 4 \text{ см}$ ,  $\angle A = 115^\circ$ ;

г)  $AB = AC = 5 \text{ см}$ ,  $\angle A = 29^\circ$ ;

д)  $AC = 4 \text{ см}$ ,  $\angle A = \angle C = 40^\circ$ ;

е)  $AC = 3 \text{ см}$ ,  $\angle A = \angle C = 100^\circ$ .

Всегда ли можно решить эту задачу? (Всегда ли задача имеет решение?) Определи сумму углов каждого из построенных треугольников. Что ты заметил?

**4.11.** Построй равнобедренный треугольник  $ABC$ , один из углов которого: а)  $90^\circ$ ; б)  $11^\circ$ ; в)  $60^\circ$ ; г)  $34^\circ$ ; д)  $45^\circ$ ; е)  $100^\circ$ . Сколько таких треугольников можно построить в каждом случае (сколько решений имеет задача)?

**4.12.** Построй и вырежи из картона 3 одинаковых равнобедренных треугольника с углом  $120^\circ$  между боковыми сторонами. Сконструируй фигуру, прикладывая их последовательно боковыми сторонами так, чтобы тупые углы имели общую вершину. Какую фигуру ты получил?

Рис. 33

Рис. 34

**4.13.** Сколько нужно взять одинаковых равнобедренных треугольников, чтобы, решая задачу, аналогичную предыдущей, построить многоугольник с равными сторонами, если известно, что угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника равен: а)  $90^\circ$ ; б)  $72^\circ$ ; в)  $60^\circ$ ? Какой многоугольник в каждом случае получается?

**Замечание.** Такие многоугольники, как у тебя получились, называются **правильными**: у них все стороны равны и все углы равны. Ты уже встречался с правильным шестиугольником в пятом классе.

**4.14\***. Решая задачи 4.12, 4.13, ты построил правильные треугольник, четырёхугольник (квадрат), пятиугольник, шестиугольник. Какие ещё правильные многоугольники ты можешь построить?

## 4.2. Перпендикулярность.

Две **прямые** называются **взаимно перпендикулярными**, если при их пересечении образуются прямые углы (рис. 35).

Две **плоскости** называются **взаимно перпендикулярными**, если при их пересечении образуются прямые двугранные углы (рис. 36).

**4.15.** Начерти прямую. Отметь точку, не лежащую на этой прямой, и проведи из этой точки к ней перпендикуляр.

**4.16.** Начерти негоризонтальную прямую  $l$  и выбери три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , не лежащие на этой прямой. Построй перпендикуляры из этих точек на прямую  $l$ . Что ты заметил?

**4.17.** Начерти три прямые  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , проходящие через одну точку. Обозначь эту точку буквой  $M$ . Построй проходящие через точку  $M$  прямые, перпендикулярные соответственно прямым  $a$ ,  $b$ ,  $c$ .

**4.18.** Определи закономерность, которой связаны рисунки (рис. 37), и выпиши номера в порядке, соответствующем этой закономерности.

**4.19.** Нарисуй прямоугольный параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Выдели разными цветными карандашами три пары взаимно перпендикулярных прямых, на которых лежат его рёбра.

**4.20.** Определи, на каком из рисунков (рис. 38) отрезок  $AB$  — перпендикуляр к прямой  $a$ .

**4.21.** Объясни, почему каждое ребро прямоугольного параллелепипеда перпендикулярно плоскости той грани, которую оно пересекает.

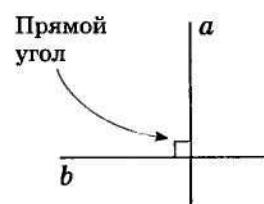
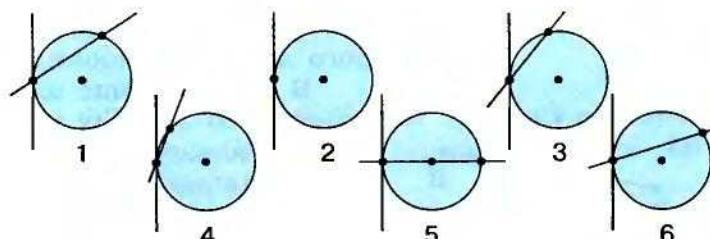


Рис. 35



Прямой двугранный угол

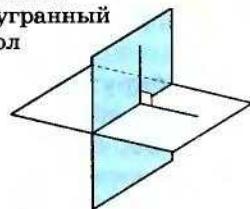


Рис. 36

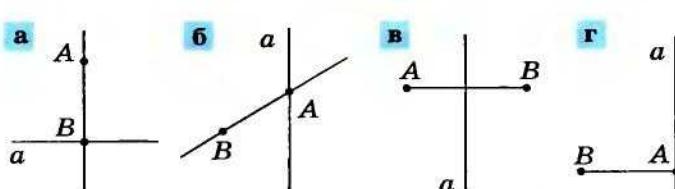


Рис. 38

## § 5 Алгоритмы

Как и раньше, мы будем большое внимание уделять применению имеющихся знаний. В этом нам поможет знание об алгоритмах.

Ты, возможно, слышал это слово. Что оно означает? Откроем Энциклопедический словарь юного математика («Педагогика», 1989) и прочитаем: «*Алгоритм — точное предписание, определяющее процесс перехода от исходных данных к искомому результату*». Конечно, с алгоритмами ты не раз встречался и на уроках математики, и во многих других ситуациях. Например, ещё во 2 классе, когда ты учился складывать двузначные числа, ты читал в учебнике:

Нужно сложить два числа 34 и 23.

1. Пишу десятки под десятками, а единицы под единицами.
2. Складываю единицы:  $4 + 3 = 7$ .
3. Пишу 7 под единицами.
4. Складываю десятки:  $3 + 2 = 5$ .
5. Пишу 5 под десятками.
6. Читаю ответ: сумма равна 57.

Это алгоритм. Здесь сформулировано точное правило, по которому можно от исходных данных (двух слагаемых 34 и 23) перейти к искомому результату (сумме 57). Ясно, что нет смысла называть алгоритмом последовательность операций, которые выполняются только для конкретного случая.

Важное свойство, которым должен обладать алгоритм, — это массовость, т. е. возможность применения к меняющимся исходным данным. И хотя мы рассмотрели пример с конкретными числами, приведённый алгоритм может быть применён и к другим натуральным числам.

В геометрии ты тоже не раз встречался с алгоритмами. Например, ты знаешь алгоритм измерения данного отрезка с помощью линейки, данного угла с помощью транспортира, построения биссектрисы угла и угла, равного данному (вспомни эти алгоритмы).

В качестве ещё одного примера рассмотрим способ деления отрезка пополам. Конечно, это можно делать на глаз или с помощью линейки с делениями. Но в том и другом случае построение не будет точным. Более точным оно получится, если будет выполнено циркулем и линейкой.

Опишем алгоритм деления отрезка пополам этими инструментами.

Пусть требуется разделить пополам отрезок  $AB$  (рис. 39, а).

1. Построим какую-нибудь окружность с центром в точке  $A$ , радиус которой больше половины данного отрезка (рис. 39, б).

2. Построим окружность с центром в точке  $B$ , равную первой, и обозначим точки  $C$  и  $D$  пересечения окружностей (рис. 39, в).

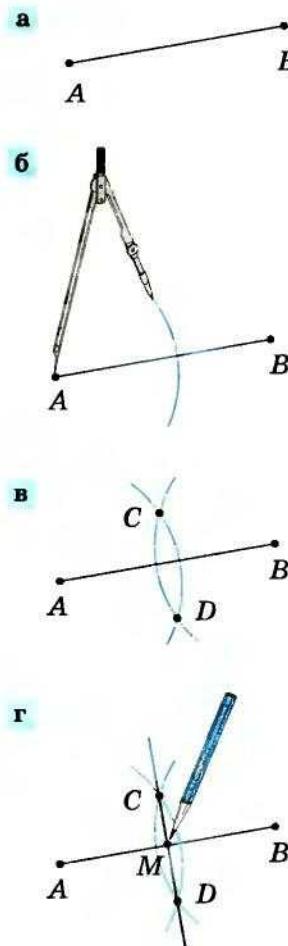
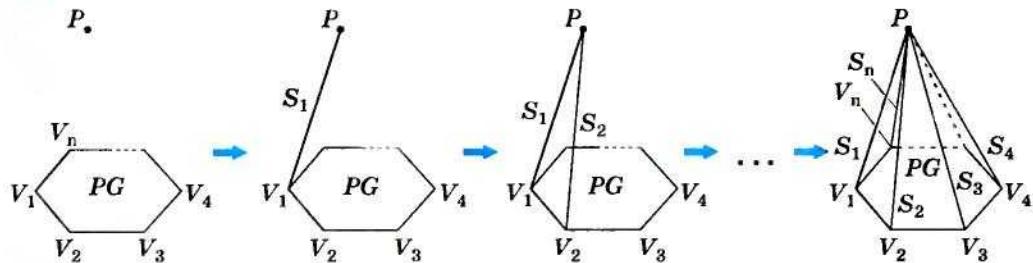
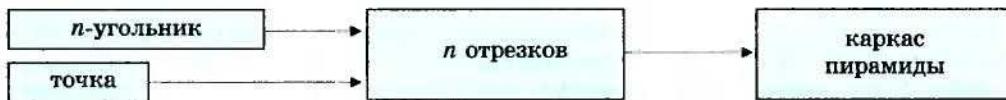


Рис. 39

а



б



в  $\left(\cdot\right) P \leq (\diamond) PG \Rightarrow (\triangle) PS$

г

```

INPUT POINT; POSITION{V(1)..V(n)}
LET P=POINT; PG=POSITION{V(1)..V(n)}
FROM V=1 TO n DO
    CREATE SEGMENT{P,V(k)}
    LET S(k)=SEGMENT{P,V(k)}
END
CREATE PIRAMIDSKELETON{PG,S(1)..S(n)}
LET PS(P,PG)=PIRAMIDSKELETON{PG,S(1)..S(n)}
OUTPUT PS(P,PG)
    
```

Рис. 40

3. Построим прямую  $CD$  и обозначим буквой  $M$  точку пересечения прямых  $AB$  и  $CD$  (рис. 39, г). Это и есть середина отрезка  $AB$ . (В 7 классе мы докажем, что это так.)

Записать алгоритм можно по-разному. Порядок действий можно описать обычными словами — так, как мы это только что сделали, а можно коротко изложить на специально придуманном языке.

Рассмотрим, например, алгоритм построения каркаса пирамиды, с которым мы уже встречались.

Чтобы построить каркас пирамиды, возьмём многоугольник, точку, не лежащую в его плоскости, и соединим отрезками эту точку со всеми вершинами многоугольника. Мы получим каркас пирамиды.

Этот алгоритм можно записать с помощью рисунков (рис. 40, а), схемы (рис. 40, б), символов и буквенных обозначений (рис. 40, в), программы для компьютера (рис. 40, г).

В дальнейшем ты будешь знакомиться с разными алгоритмами и потренируешься в составлении новых алгоритмов.

## § 6 Отношения в геометрии

**6.1. Отношение отрезков.** Ты знаком с отношением двух чисел и знаешь, что отношение чисел — это частное от деления этих чисел. В геометрии тоже есть понятие отношения. Это отношение отрезков.

Под **отношением отрезков** обычно понимают отношение их длин.

**6.1.** Выпиши пары отрезков (рис. 41), отношение которых одинаковое. Определи на глаз это отношение и проверь своё мнение, измерив отрезки.

**6.2.** Построй отрезок  $AB$ , длина которого 4 см и отрезок  $CD$  так, чтобы отношение отрезков  $AB$  и  $CD$  было: а)  $1 : 2$ ; б)  $2 : 1$ ; в)  $2 : 3$ .

**6.3.** Построй какой-нибудь отрезок  $MN$ . Построй отрезок  $PQ$  так, чтобы отношение этих двух отрезков было  $1 : 4$ . Сколько таких разных отрезков ты можешь построить?

**Проверь себя.** Эта задача отличается от предыдущей тем, что в задаче 6.2 указан порядок отрезков ( $AB$  и  $CD$ ), а в этой задаче порядок отрезков не указан. Поэтому можно построить два различных отрезка  $PQ$ , таких, что  $MN : PQ = 1 : 4$  и  $MN : PQ = 4 : 1$ .

Ты знаешь, что геометрия изучает форму реальных предметов. На рисунке 42 изображены разные предметы. Каждый из них имеет какую-нибудь часть прямоугольной формы. Эти прямоугольники имеют разную форму: на рисунке 43, а — длина прямоугольника равна его ширине, это квадрат; на рисунке 43, б — длина прямоугольника в три раза больше его ширины; на рисунке 43, в — в четыре раза больше.

**6.4.** Сравнивая форму прямоугольников (рис. 44), разбей их на группы. Измерь стороны каждого из них и определи отношение его сторон, исходящих из одной вершины.

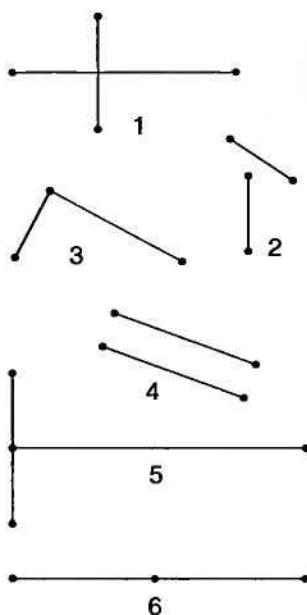


Рис. 41

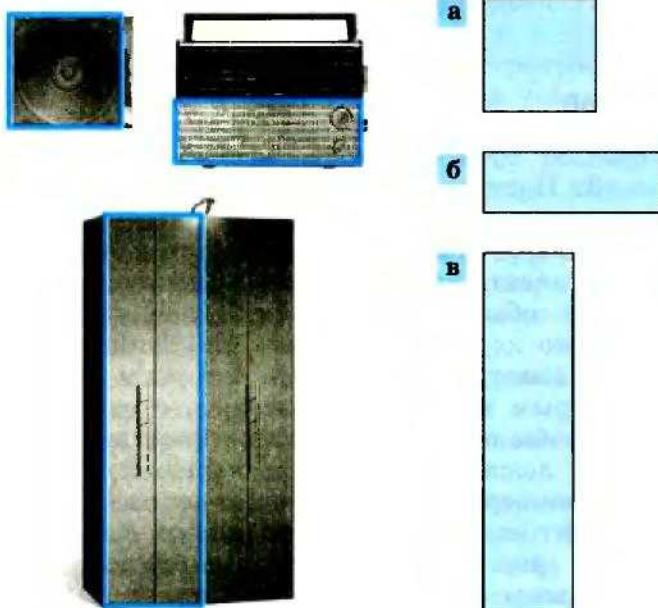


Рис. 42

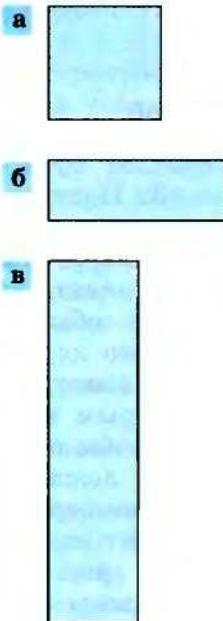


Рис. 43

**Проверь себя.** Можно в каждую группу отнести прямоугольники, имеющие одинаковую форму. Отношение неравных сторон прямоугольников первой группы равно  $1 : 2$ , второй группы —  $1 : 3$ , третьей группы —  $3 : 5$ , четвёртой группы —  $1 : 1$ .

**6.5.** Построй три прямоугольника:  $ABCD$ ,  $MNPQ$  и  $DFKL$ , у которых известны длины сторон:  $AB = 3$  см,  $AD = 4$  см;  $MN = 4,5$  см,  $MQ = 6$  см;  $DF = 2$  см,  $DL = 5$  см. Что ты заметил?

**Проверь себя.** Прямоугольники  $ABCD$  и  $MNPQ$  имеют одинаковую форму, и при этом отношения их сторон равны между собой:  $3 : 4 = 4,5 : 6$  (проверь это!); прямоугольники  $ABCD$  и  $DFKL$  имеют разную форму, и при этом отношения их сторон  $3 : 4$  и  $2 : 5$  не равны между собой.

Мы пришли к важному выводу:

Отношение неравных сторон прямоугольника определяет его форму.

**6.6.** Построй прямоугольные треугольники, стороны прямых углов которых: а) 3 см и 4 см; б) 4,5 см и 6 см; в) 3 см и 5 см. Сравни форму этих треугольников. Построй ещё прямоугольный треугольник с отношением сторон, равным  $3 : 5$ . Что ты заметил?

**Проверь себя.** Первый и второй треугольники имеют одинаковое отношение сторон, содержащих прямой угол, и одинаковую форму, а первый и третий треугольники — разное отношение этих сторон и разную форму.

**6.7.** Построй какой-нибудь параллелограмм с острым углом  $45^\circ$ , неравные стороны которого относятся как: а)  $2 : 3$ ; б)  $3 : 5$ ; в)  $4 : 6$ . Сравни форму этих параллелограммов. Что ты заметил?

Решая задачи, можно заметить, что при данном угле между двумя сторонами треугольника или параллелограмма отношение этих сторон определяет форму этих фигур (рис. 45).

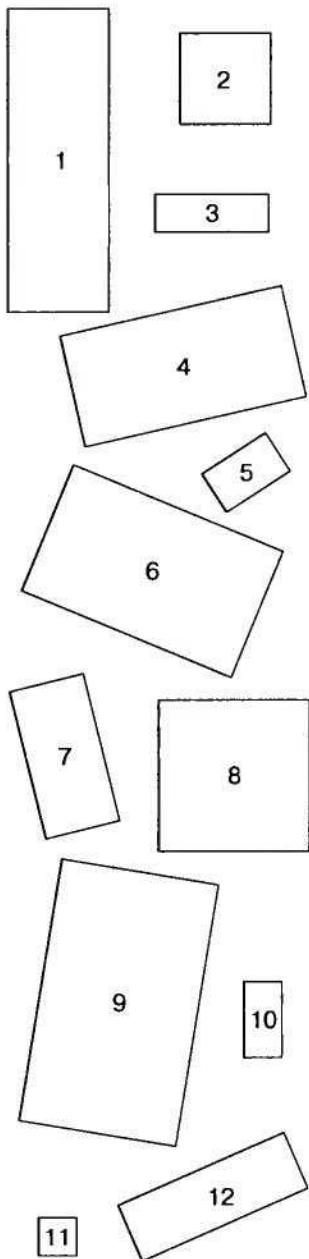


Рис. 44

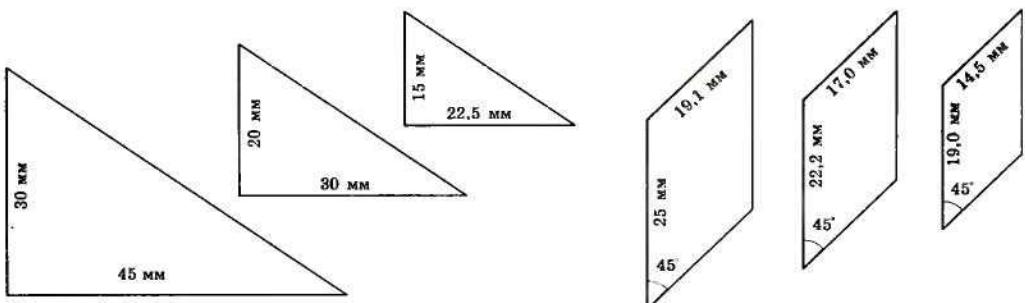


Рис. 45

**6.2. Подобные фигуры.** Про фигуры, имеющие одинаковую форму, математики говорят, что они *подобны*.

**6.8.** Построй два прямоугольника:  $ABCD$  со сторонами 3 см и 4 см и  $MNPQ$  со сторонами 6 см и 8 см.

Ты видишь, что прямоугольники имеют одинаковую форму, отношение сторон первого прямоугольника ( $3 : 4$ ) равно отношению сторон второго прямоугольника ( $6 : 8$ ). Кроме того, видно, что стороны второго прямоугольника получаются из сторон первого умножением на число 2. Понятно, что если мы построим прямоугольники со сторонами 12 см и 16 см, 1,5 см и 2 см и т. д. (т. е. станем умножать стороны прямоугольника  $ABCD$  на одно и то же число), то будем получать прямоугольники той же формы, что и прямоугольник  $ABCD$ .

**Два прямоугольника называются подобными**, если стороны одного из них получаются из соответствующих сторон второго умножением на одно и то же число.

Это число называется *коэффициентом подобия*.

Так как отношения неравных сторон подобных прямоугольников одинаковые (в нашем случае  $AB : AD = MN : MQ = 3 : 4$ ), то можно сказать и по-другому:

**Два прямоугольника подобны, если их стороны пропорциональны.**

Для прямоугольников  $ABDC$  и  $MNPQ$ , изображённых на рисунке 46, можно сказать так: прямоугольник  $MNPQ$  подобен прямоугольнику  $ABDC$  с коэффициентом подобия, равным 2, а прямоугольник  $ABDC$  подобен прямоугольнику  $MNPQ$  с коэффициентом подобия, равным  $\frac{1}{2}$ .

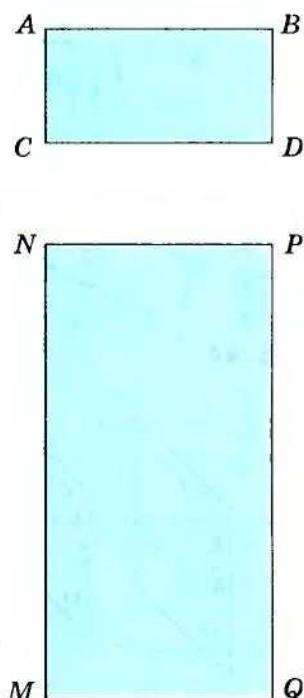


Рис. 46

**6.9.** Построй какой-нибудь прямоугольник и другой прямоугольник, подобный первому с коэффициентом подобия: а) 3; б) 2,5; в)  $\frac{1}{3}$ ; г)  $1\frac{1}{6}$ ; д)  $2\frac{3}{7}$ .

**6.10.** В прямоугольнике  $ABCD$  длины сторон равны 12 см и 10 см. Известно, что прямоугольник  $PMKL$  подобен прямоугольнику  $ABCD$  с коэффициентом  $1\frac{1}{4}$ , а прямоугольник  $QRST$  подобен прямоугольнику  $ABCD$  с коэффициентом  $\frac{2}{3}$ . а) Расположи эти прямоугольники в порядке возрастания длин их сторон. Ответ объясни. б) Построй прямоугольник  $QRST$ .

**6.11.** Построй треугольник  $ABC$  со сторонами  $AB = 1,5$  см,  $AC = 2$  см. Как ты думаешь, если теперь мы построим треугольник  $MNP$ , стороны которого  $MN$  и  $MP$  в два раза больше отрезков  $AB$  и  $AC$ , обязательно ли получим треугольник той же формы?

**Проверь себя.** Конечно, нет. Меняя угол  $M$ , мы можем менять форму треугольника, сохраняя при этом отношение сторон  $MN$  и  $MP$  (рис. 47, а, б). При этом сторона  $NP$  будет менять свою длину, и только в одном положении она будет в два раза больше стороны  $BC$  (рис. 47, в). Именно в этом случае треугольник  $MNP$  станет той же формы, что и треугольник  $ABC$ . Поэтому можно сказать, что

**Два треугольника называют подобными,** если все стороны одного из них получаются из соответствующих сторон другого умножением на одно и то же число.

Это число тоже называется коэффициентом подобия.

**6.12.** Стороны треугольника  $ABC$  равны 3 см, 5 см и 4,5 см. Определи периметр треугольника  $DEF$ , подобного треугольнику  $ABC$  с коэффициентом подобия, равным: а) 2; б) 0,5; в) 1,3. Попробуй решить задачу двумя способами.

**6.13.** Построй треугольник  $ABC$ . Построй треугольник  $MPK$ , подобный треугольнику  $ABC$  с коэффициентом подобия 2. Затем построй треугольник  $HTE$ , подобный треугольнику  $MPK$  с коэффициентом подобия  $\frac{1}{2}$ . Подобны ли треугольники  $ABC$  и  $HTE$ ? Если да, то каков коэффициент подобия этих треугольников?

Подобными могут быть не только параллелограммы или треугольники, но и фигуры произвольной формы.

**Две фигуры называются подобными,** если все отрезки одной из них получаются умножением соответствующих отрезков другой на одно и то же число. Это число называется коэффициентом подобия фигур.

Примерами подобных фигур могут быть фотографии, сделанные с одного негатива и имеющие разные размеры, модели машинок, кораблей, самолётов — копии настоящих машин, в которых все размеры корпуса и других частей уменьшены в одно и то же число раз (рис. 48).

Подобные фигуры встречаются в природе, их используют в архитектуре, технике, декоративно-прикладном искусстве (рис. 49). Приведи свои примеры подобных фигур, встречающихся в жизни.

Интересно, что равные фигуры тоже являются подобными: в них все соответствующие отрезки равны, а значит, коэффициент подобия равных фигур равен 1. С такой ситуацией ты встретился, решая задачу 6.13.

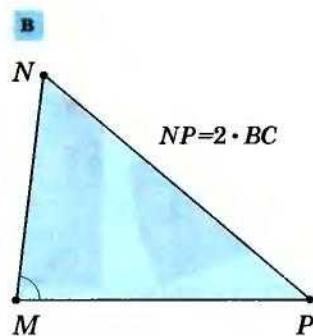
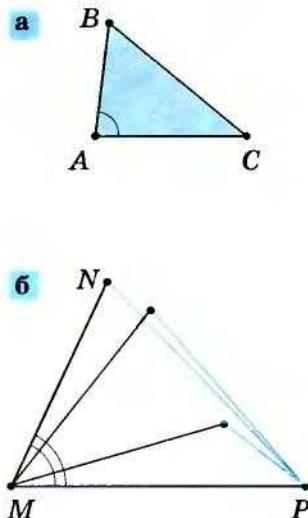


Рис. 47

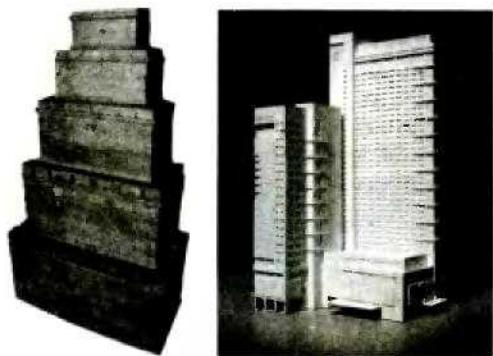


Рис. 48

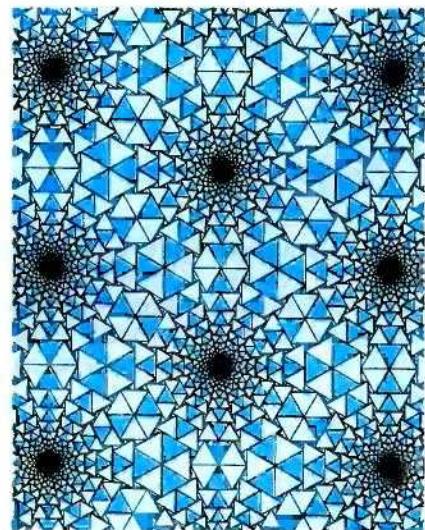


Рис. 49

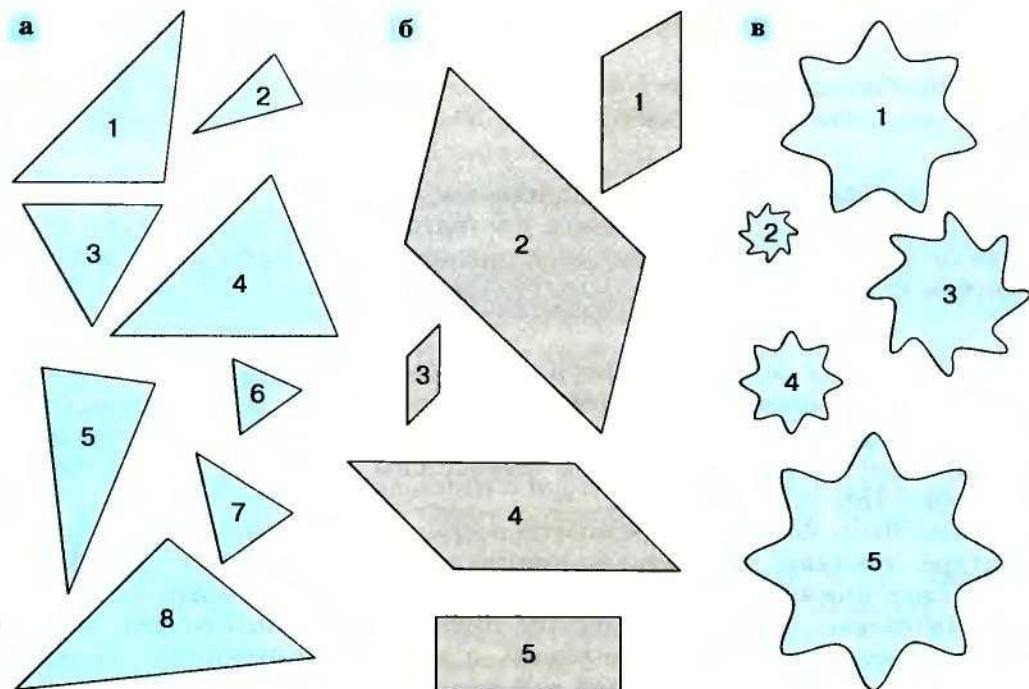


Рис. 50

**Важное замечание.** Раньше мы, говоря о форме предметов, сравнивали эту форму на уровне своих ощущений, представлений. Теперь мы можем сказать более грамотно: два предмета имеют одинаковую форму, если геометрические фигуры, их изображающие, подобны.

**6.14.** Распредели фигуры (рис. 50) по группам так, чтобы в группе оказались подобные фигуры.

**6.3. Масштаб.** На уроках географии вы сталкиваетесь с географическими картами одной и той же местности, выполненными в разных масштабах.

Слово **масштаб** пришло к нам из немецкого языка: *Maß* — мерка и *Stab* — палочка. Дословный перевод: масштаб — мерная палочка.

Масштаб карты показывает, во сколько раз расстояния между точками на карте меньше, чем реальные расстояния между объектами, которые эти точки изображают.

Так, на рисунке 51 масштаб карты  $1 : 1\,000\,000$ . Это значит, что, например, расстояние в 10 км на карте изображается отрезком 1 см (объясни почему). На рисунке 52 масштаб карты  $1 : 100\,000$ , т. е. на этой карте отрезок в 1 см изображает 1 км. Значит, все расстояния между точками на первой карте в 10 раз меньше соответствующих расстояний на второй карте. Коэффициент подобия фигур, изображённых на этих картах, равен 0,1.

**6.15.** Верно ли, что любые два квадрата подобны?

**6.16.** Объясни, почему все круги подобны.

**6.17.** Верно ли, что все ромбы подобны?

**6.18.** Верно ли, что любые два равносторонних треугольника подобны?

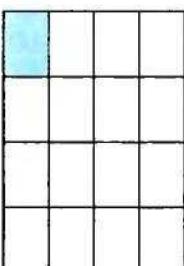
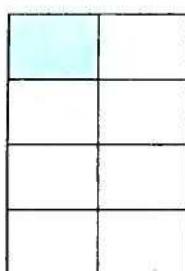
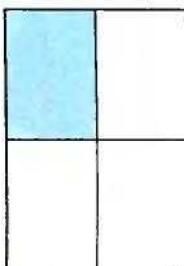
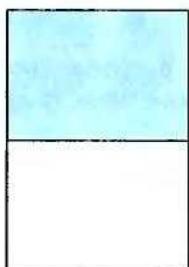


Рис. 51



Рис. 52

### Подсказка. Посмотри на диагонали ромбов.



**6.19.** По картам определи расстояние между отмеченными точками. Определи расстояние между пунктами, изображёнными этими точками.

**6.20.** Объясни, почему на всех географических картах изображения одной и той же местности подобны.

**6.4\*. Некоторые замечательные отношения в геометрии.** Обратил ли ты внимание на то, что стандартные листы (большой лист ватмана, бумага для черчения, писчая бумага, некоторые блокноты, страницы книг) имеют одну и ту же форму? Так кажется на первый взгляд.

Исследуем этот вопрос с геометрической точки зрения.

Возможно, ты знаешь, что размеры такой бумаги (и в том числе ватмана) обозначаются  $A1, A2, \dots$ . Встречаются листы размера  $A0$ .

Лист  $A0$  имеет размеры  $841 \times 1189$ ,  
 $A1 = 594 \times 841$ ,  
 $A2 = 420 \times 594$ ,  
 $A3 = 297 \times 420$  и т. д.

(Проверь это! Все размеры принято выражать в миллиметрах.)

Обрати внимание на то, что каждый следующий лист есть половина предыдущего: чтобы получить из первого листа второй, достаточно первый сложить, разделив пополам его большую сторону (рис. 53).

Действительно,

$$594 \approx 1189 : 2, \quad 420 \approx 841 : 2 \text{ и т. д.}$$

Конечно, такое обстоятельство очень удобно на производстве: при изготовлении бумаги стандартных размеров почти не остаётся отходов.

Самое замечательное состоит в том, что при этом сохраняется приближённое значение отношения их сторон: значения

$$1189 : 841, \quad 841 : 594, \quad 594 : 420 \dots$$

для всех прямоугольников одинаковые. Каждое из них приближённо равно 1,4.

Итак, все стандартные листы бумаги подобны между собой, а значит, действительно имеют одинаковую форму.

Существуют и другие размеры бумаги:  $B0, B1, B2, \dots; C0, C1, C2, \dots$ . Они построены по тому же принципу и имеют то же значение отношения длины прямоугольника к его ширине — 1,4.... При этом  $B0$  имеет размеры в миллиметрах  $1000 \times 1414$ ,  $C0 = 917 \times 1297$ .

Рис. 53

**6.21.** Возьми различные листы бумаги и для каждого проверь, получается ли при складывании пополам новый лист той же формы.

**6.22.** Вычисли, какие размеры имеет лист:  
а) A4; б)\* B3; в)\* C2.

**6.23.** Вычисли коэффициент подобия листов:  
а) A1 и A3; б) A1 и A4; в) A2 и A6.

**6.24.** Подобны ли листы бумаги A4 и B4, B4 и C4, A4 и C4? В случае положительно-го ответа вычисли коэффициенты подобия.

**6.25.** Определи, есть ли среди твоих учебни-ков и тетрадей такие, в которых страница (обложка) имеют ту же форму, что и стандартные листы писчей бумаги.

**6.5\*. Гармоническая пропорция.** Форма предмета может интересовать нас с практи-ческой точки зрения (удобство, вместимость и пр.), а также с точки зрения эстетической. По тому, как расположены части предмета по отношению друг к другу, мы судим о красоте, гармоничности этого предмета. Что же может обеспечить эту красоту?

**6.26.** Представь себе, что на белом альбомном листе, расположенным вертикально, тебе для поздравления друга надо написать «ПОЗДРАВЛЯЮ!». Расположи это слово на листе так, чтобы это было, на твой взгляд, красиво.

Сравни своё решение с обложкой учебника по геометрии (рис. 54). Ты видишь, что середины букв слова СТЕРЕОМЕТРИЯ находятся на одной прямой (на рисунке она обозначена буквой l). Положение этой прямой выбрано не случайно. Оказывается, фигура или форма како-го-нибудь предмета (надписи) производит лучшее для глаза впечатле-ние тогда, когда его вертикальная ось — в нашем случае ось AC обложки — делит все её горизонтальные отрезки пополам, а сама эта ось делится (в нашем случае прямой l) в отношении, которое называ-ется золотым сечением (или золотым отношением).

**Золотое сечение** — это такое деление отрезка на неравные части, при котором меньший отрезок так относится к большему, как боль-ший ко всему отрезку.

Оно приближённо равно 0,62:

$$AB : BC = BC : AC \approx 0,62.$$

Золотое сечение также называют гармонической пропорцией. Пропорция — потому, что здесь участвуют два равных отношения. А гармоническая — создающая гармонию, приятные для глаза впе-чатления.

Гармония (по-гречески *harmonia*) образовано от слова *harmozo* — приводить в порядок. В русском языке слово «гармония» означает созвучие, согласие, соразмерность, равновесное соединение частей.

Принято считать, что понятие о золотом делении ввёл в научный обиход Пифагор, древнегреческий философ и математик, который



Рис. 54

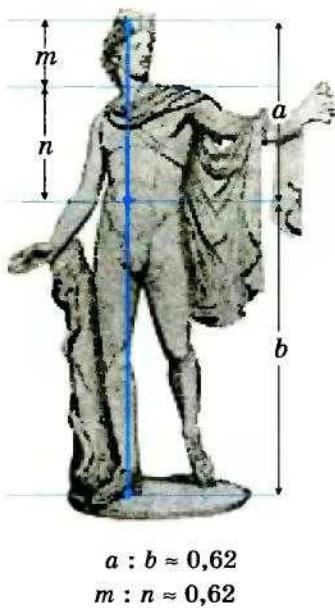


Рис. 55

жил в VI в. до н. э. Есть предположение, что Пифагор своё знание золотого деления позаимствовал у египтян и вавилонян. И действительно, пропорции пирамиды Хеопса, храмов, барельефов зданий, предметов быта и украшений из гробницы Тутанхамона свидетельствуют о том, что мастера Древнего Египта широко пользовались золотым сечением при их создании.

Древние греки считали принцип золотого сечения основополагающим в искусстве (скульптуре, архитектуре, декоративном искусстве). На примере скульптуры греческого бога Аполлона (рис. 55) мы можем наблюдать воплощение идеальных представлений греков о человеческой фигуре: на рисунке показаны некоторые золотые отношения в человеческой фигуре, применённые скульптором. (Эта скульптура была найдена в XV в. недалеко от Рима. Она является мраморной копией с бронзового оригинала, выполненного в IV в. до н. э.)

**6.6\*. Как построить отрезки, находящиеся в золотом отношении?** Любой отрезок можно разделить в золотом отношении циркулем и линейкой. Это делается так.

Построим произвольный отрезок  $AB$ , для которого требуется произвести золотое сечение (рис. 56, а).

1. Из точки  $B$  проведём перпендикуляр к прямой  $AB$ . (Вспомнить, как это делается, ты можешь, глядя на рисунок 246 учебника для 5 класса.)

2. На построенном перпендикуляре отложим отрезок  $BC$ , равный половине  $AB$ , и соединим отрезком полученную точку  $C$  с точкой  $A$  (рис. 56, б).

3. Проведём дугу окружности с центром в точке  $C$  радиуса  $BC$  до пересечения с  $AC$  в точке  $L$  (рис. 56, в).

4. На луче  $AB$  отложим отрезок  $AP$ , равный  $AL$  (рис. 56, г).

Точка  $P$  делит отрезок  $AB$  в золотом отношении (золотом сечении).

В нашем случае

$$PB : AP = AP : AB (\approx 0,62).$$

Для деления отрезка в каком-нибудь отношении на практике можно использовать так называемый *делительный циркуль*. Это две скреплённые рейки с заострёнными концами. То место, где скреплены рейки, определяет отношение тех отрезков, которые можно по-

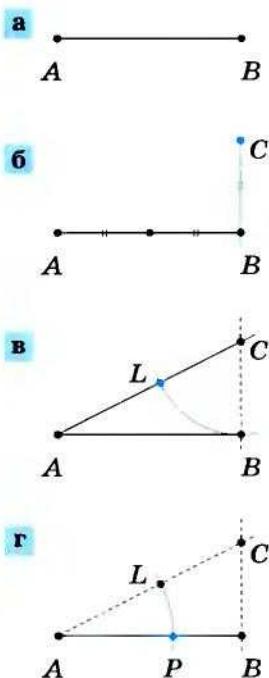
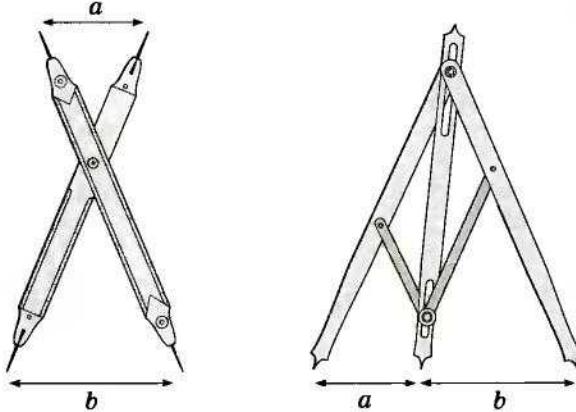


Рис. 56



**Рис. 57**

строить с помощью этого циркуля. Археологи обнаружили делительные циркули, которые позволяли мастерам строить изображения, сохраняя нужные пропорции, в том числе и золотое сечение.

На рисунке 57 изображены циркули, настроенные на золотое сечение. Глядя на этот рисунок, расскажи, как использовать каждый из этих циркулей.

**6.27.** Построй какой-нибудь отрезок  $MN$  и раздели его в золотом сечении точкой  $P$ . Сможешь ли ты это сделать для отрезка, расположенного не горизонтально?

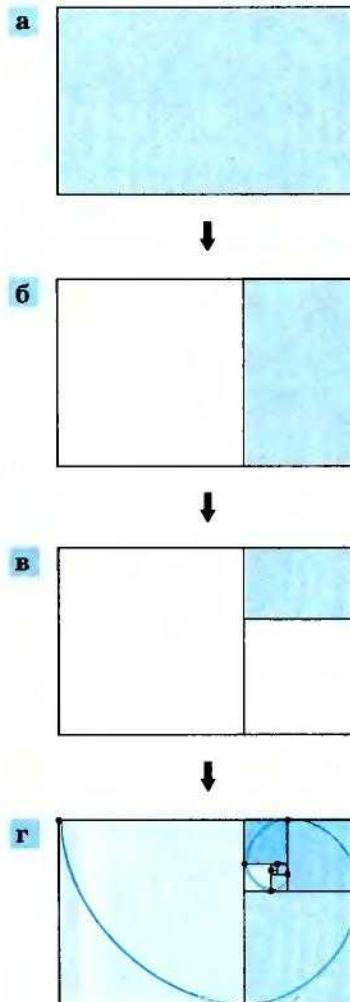
**6.28.** Построй прямоугольник, стороны которого равны соответственно отрезкам  $MP$  и  $NP$  (см. предыдущую задачу). Ты построил так называемый *золотой прямоугольник*. Объясни, почему все золотые прямоугольники подобны.

**6.29.** Вырежи из картона золотой прямоугольник и построй внутри него квадрат, одна сторона которого совпадает с меньшей стороной прямоугольника. Отрежь этот квадрат. Повтори эти действия ещё раз. Что ты заметил?

На рисунке 58 показано, как из данного «золотого» прямоугольника получаются другие. Понятно, что такие построения можно мысленно продолжать неограниченно. На рисунке 58, г можно увидеть, что вершины квадратов, отмеченные на рисунке, лежат на одной линии, которая называется *спиралью Архимеда*. Эта спираль при мысленном продолжении построений будет подходить к точке, в которой пересекаются диагонали первого и второго прямоугольников.

**6.30.** Выполни построения, изображённые на рисунке 58. Нарисуй приближённо спираль Архимеда и построй её «центр».

На рисунке 59 изображена алебастровая ваза, найденная археологами в гробнице египетского фараона Тутанхамона (XIV в. до н. э.), и показано, как мастер использовал золотое сечение и золотой прямоугольник в построении всей композиции.



**Рис. 58**



Рис. 59

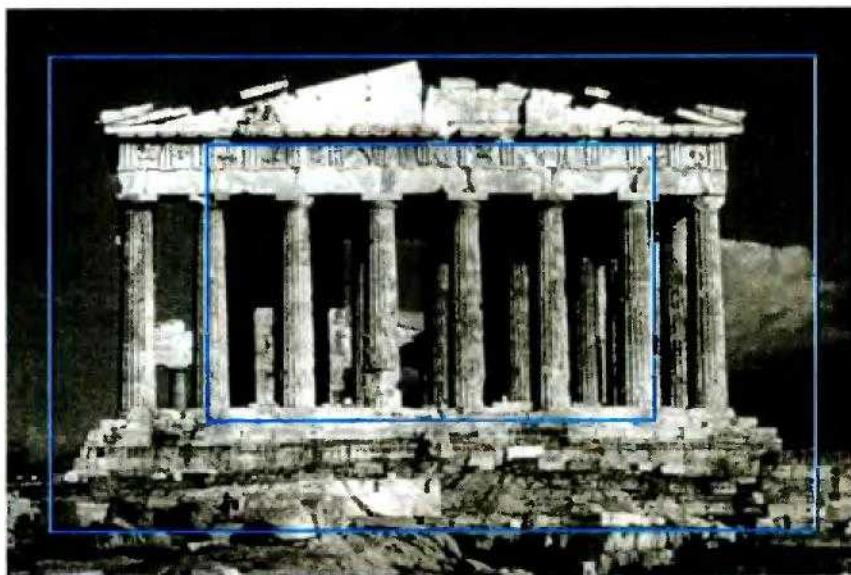


Рис. 60

На рисунке 60 изображено главное афинское святилище — храм Парфенон, построенный в 454—438 гг. до н. э. древнегреческими зодчими Иктином и Калликратом. В фасаде и некоторых деталях храма зодчие использовали золотой прямоугольник.

Золотое сечение встречаем мы и в так называемых пентаграммах.

**Пентаграмма** — слово греческого происхождения: *pente* — пять, *gramme* — линия.

В Древнем мире и в Средние века пентаграмма считалась таинственным символом и волшебным знаком.

Построить пентаграмму ты можешь сам, решая задачу 6.31.

**6.31.** Построй правильный пятиугольник  $ABCDE$  (рис. 61, а (см. задачу 4.13, б)) и проведи в нём диагонали. У тебя получилась пятиконечная звезда — пентаграмма (рис. 61, б). Определи с помощью измерений и вычислений на калькуляторе отношение, в котором одна диагональ, например  $AC$ , делится другой диагональю, например  $BD$  (рис. 61, в).

**Проверь себя.** Это отношение приближённо равно 0,62.

Правильный пятиугольник обладает ещё одним замечательным свойством: отношение стороны к диагонали, например  $BC$  к  $BD$ , тоже приближённо равно 0,62.

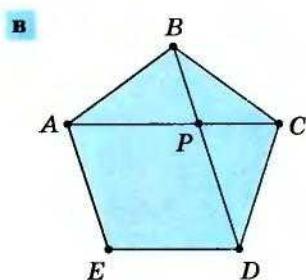
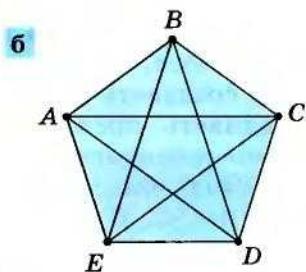
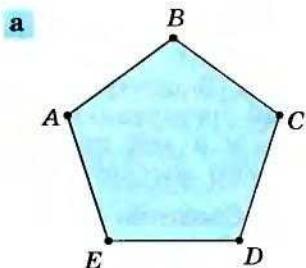
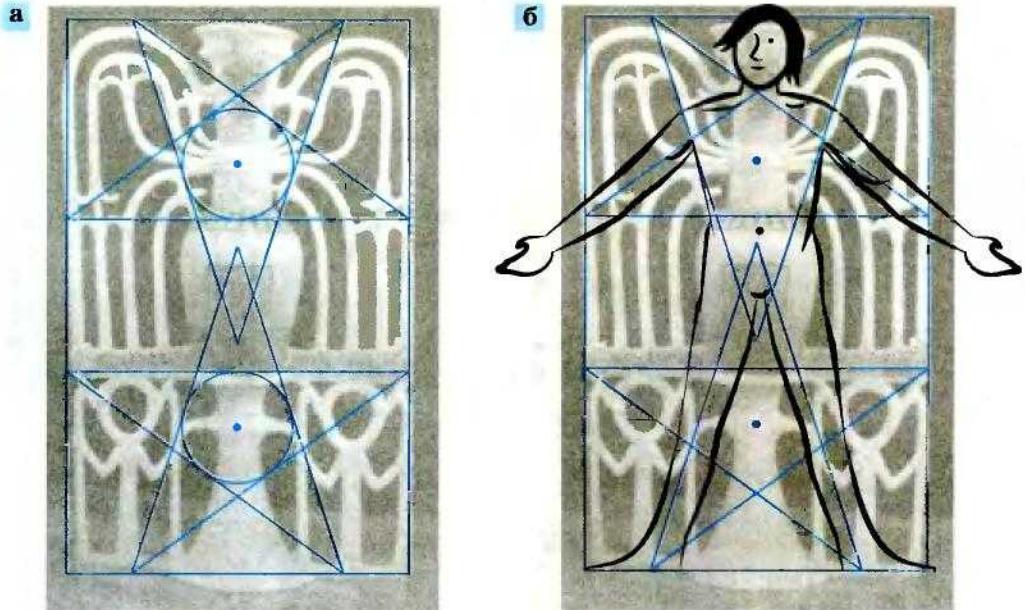


Рис. 61



**Рис. 62**

**6.32.** В центре построенной пентаграммы снова получился правильный пятиугольник. Построй для него новую пентаграмму. Убедись, что и в ней присутствует золотое сечение. Ясно, что такой процесс можно мысленно продолжать бесконечно.

Свойства правильного пятиугольника, как и золотого прямоугольника, издавна используются художниками, скульпторами и архитекторами в своих работах. На рисунке 62, а показаны более сложные соотношения между элементами уже знакомой нам вазы из гробницы Тутанхамона. Обрати внимание на то, что эти соотношения соответствуют пропорциям человеческого тела (рис. 62, б).

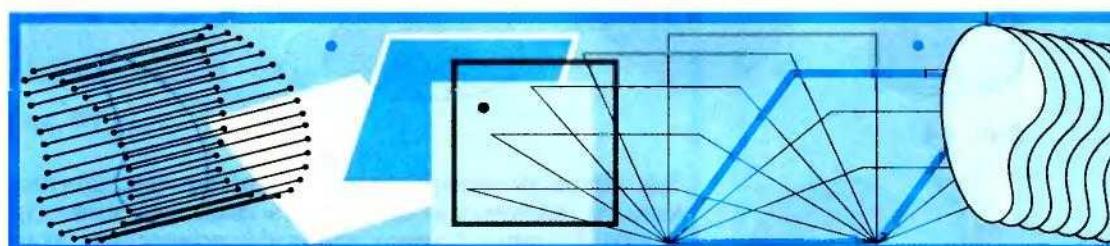
Гармоническая пропорция — это один из самых наглядных примеров того, что понимание природных закономерностей позволяет людям создавать замечательные произведения искусства, а также изготавливать предметы обихода, механизмы, удовлетворяя не только наши жизненные потребности, но и эстетические вкусы.

Подробнее о золотом сечении ты можешь прочитать, например, в книге А. В. Волошинова «Математика и искусство».

**6.33.** Найди какие-нибудь предметы, в которых использовано золотое сечение, и нарисуй их.

## Глава 2

### Взаимное расположение фигур



#### § 7 Расстояния

**7.1. Расстояние между двумя точками.** С понятием расстояния мы встречаемся ежедневно. В нашей жизни оно является едва ли не самым важным. Нам часто приходится определять различные расстояния: от дома до школы, от одного города до другого и другие. Имея географическую карту, мы можем определить расстояние между городами, например Парижем и Санкт-Петербургом (рис. 63, а). Эта задача сводится к нахождению расстояний между точками, которыми изображены города. Для её решения проведём отрезок, соединяющий эти точки, измерим его длину и, сопоставив его с масштабом карты, определим расстояние в километрах. Но почему мы, соединяя эти точки, провели отрезок, а не какую-то другую линию? Потому что интуитивно из всех линий, соединяющих данные точки, мы выбрали самую короткую (кратчайшую) — отрезок (рис. 63, б).

Так же и в математике:

**Расстоянием между двумя точками** на плоскости называется длина отрезка, соединяющего эти точки.

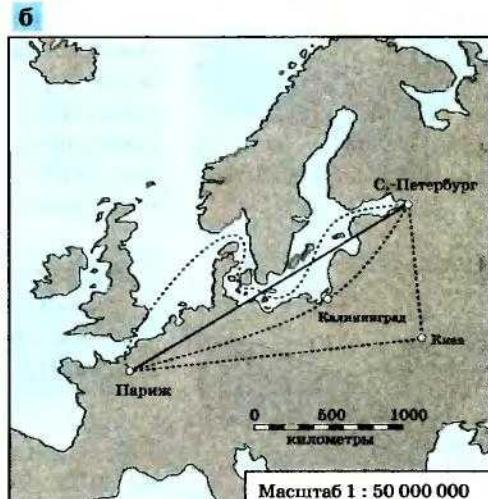
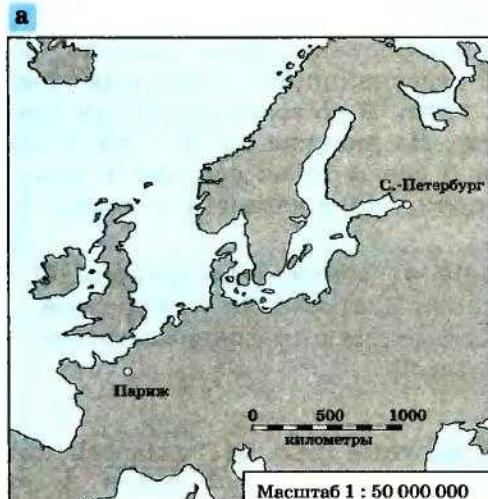


Рис. 63

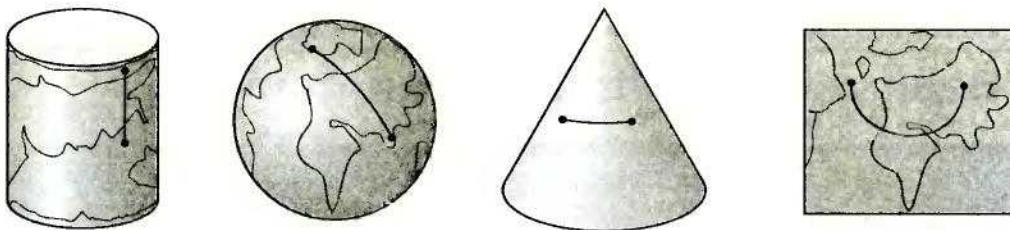


Рис. 64

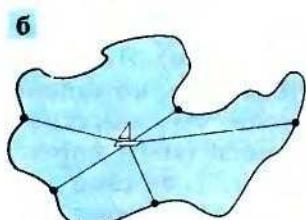
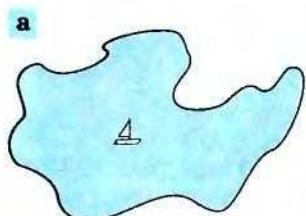


Рис. 65

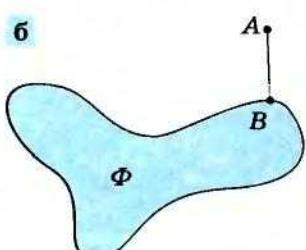
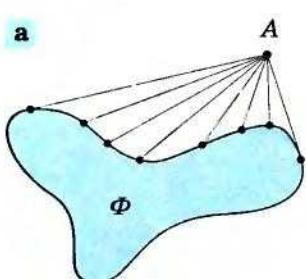


Рис. 66

**7.1.** Отметь три точки и найди расстояния между каждыми двумя из них. Какие две из этих точек ближе всего расположены друг к другу?

**7.2\*.** Отметь в тетради две точки  $A$  и  $B$ . Где расположена такая точка  $C$ , для которой сумма расстояний от  $A$  до  $C$  и от  $B$  до  $C$  наименьшая?

**Подсказка.** Вспомни про неравенство треугольника.

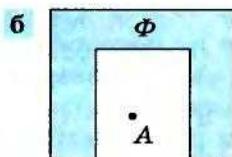
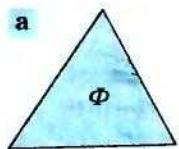
**7.3\*.** Какая картинка лишняя (рис. 64)?

**7.2. Расстояние от точки до фигуры.** Представь себе, что ты находишься на озере в лодке (рис. 65, а). Как ты думаешь, каково расстояние от лодки до берега? Береговая линия имеет некоторую протяжённость, расстояние между какой-нибудь её точкой и лодкой — это длина соответствующего отрезка (рис. 65, б). Длину какого из этих отрезков естественно назвать расстоянием от лодки до берега? Конечно, длину самого короткого из отрезков, соединяющих лодку и точку береговой линии, т. е. длину отрезка, который соединяет лодку с самой близкой к ней точкой линии берега.

В математике расстояние от точки до фигуры определяют так же. Например, чтобы измерить расстояние от точки  $A$  до фигуры  $\Phi$ , изображённой на рисунке 66, а, находят самый короткий (кратчайший) из всех отрезков, соединяющих точку  $A$  со всевозможными точками фигуры  $\Phi$ . На рисунке 66, б — это отрезок  $AB$ : точка  $B$  среди точек фигуры  $\Phi$  является самой близкой (ближайшей) к точке  $A$ .

**За расстояние от точки  $A$  до фигуры  $\Phi$  принимают длину кратчайшего из отрезков, соединяющих эту точку со всевозможными точками фигуры  $\Phi$ .**

**7.4.** Скопируй рисунки (рис. 67) и на каждом из них определи расстояние от точки  $A$  до фигуры  $\Phi$ . Отметь точку фигуры, ближайшую к точке  $A$ .



•A



A•

Рис. 67

**7.5.** Перерисуй фигуру, изображённую на рисунке 68, и отметь точку  $M$  так, чтобы расстояние от точки  $M$  до фигуры было: а) равно 3 см; б) равно 2 см; в) больше 3 см.

**7.6.** На рисунке 69 изображена карта некоторой местности. Известно, что отрезок длиной 1 см изображает 5 км. Точками  $A$  и  $B$  обозначены туристические группы, которые заранее договорились встретиться на мосту. Найди по карте: а) расстояние между этими группами; б) расстояние от каждой группы до дороги; в) расстояние от группы  $B$  до болота. Покажи по карте путь, который должна проделать каждая группа до моста, чтобы он был самым коротким, и найди его длину.

**7.7\***. Найди расстояние от точки  $O$  до отрезка  $AB$  (рис. 70).

**7.8\***. Найди расстояние от точки  $A$  до угла  $MNP$  и до его сторон (рис. 71).

**7.3. Расстояние от точки до прямой.** Представь себе, что ты находишься в лесу. У тебя есть план местности (рис. 72). Твоё положение на карте обозначено точкой  $A$ . Нужно определить по карте, сколько километров надо пройти по лесу, чтобы как можно скорее выйти на дорогу.

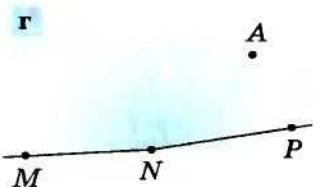
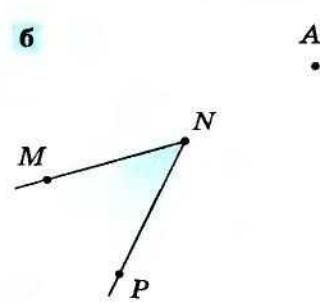
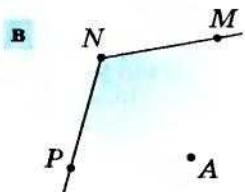
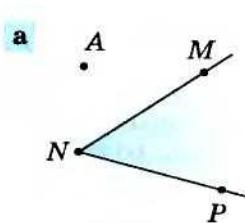
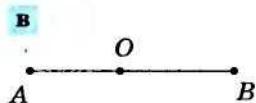
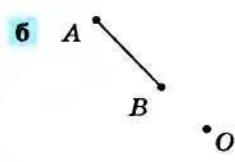
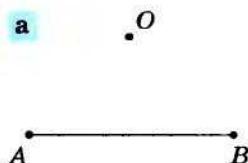


Рис. 70

Рис. 71

Рис. 68

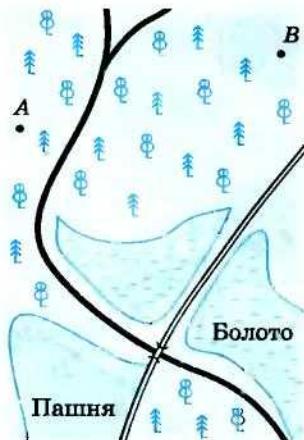


Рис. 69

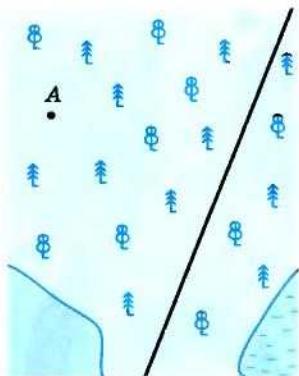
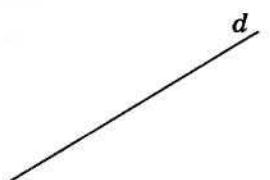


Рис. 72

а . А



б

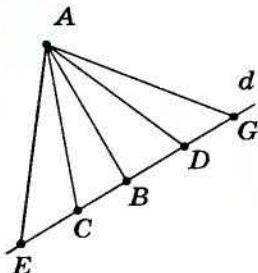


Рис. 73

В задаче требуется найти расстояние от точки на местности до дороги. На плане дорога изображена прямой, поэтому решение этой задачи сводится к нахождению расстояния от точки до прямой.

На рисунке 73, а точка  $A$  изображает данную точку местности, а прямая  $d$  — дорогу. Нужно найти расстояние от точки  $A$  до прямой  $d$ . Будем искать самый короткий из отрезков, соединяющих точку  $A$  с точками данной прямой. На рисунке 73, б на прямой  $d$  отмечено несколько точек —  $B, C, D, E$  и  $G$ , — которые соединены с точкой  $A$  отрезками. Сравни длины этих отрезков. Какой из них самый короткий? Среди отрезков  $AD, AC, AE, AB$  и  $AG$  отрезок  $AB$  — самый короткий. А что это за отрезок? — Ты, наверное, заметил, что отрезок  $AB$  — это перпендикуляр к прямой  $d$ .

Итак, нам кажется, что кратчайшим из отрезков, соединяющих точку прямой  $d$  с точкой  $A$ , является перпендикуляр  $AB$ , опущенный из точки  $A$  к прямой  $d$ . Его длина и является расстоянием от точки  $A$  до прямой  $d$ .

Это верно, и ты даже сможешь это доказать, зная, что в треугольнике против самого большого угла лежит самая большая сторона.

Чтобы найти расстояние от данной точки до прямой, надо провести перпендикуляр из этой точки к прямой и найти его длину.

**7.9.** Измерь с помощью линейки расстояние от обозначенной точки на местности до дороги (см. рис. 72).

**7.10.** По рисунку 74 найди расстояние от точек  $A, B, C$  и  $D$  до прямой  $a$ .

**7.11.** Начерти прямой угол  $AOB$ . Отметь внутри этого угла точку  $D$ . Нарисуй отрезки, длины которых равны расстояниям от точки  $D$  до прямых, содержащих стороны угла  $AOB$ .

**7.12.** Начерти остроугольный треугольник  $ABC$  и найди расстояние от вершины  $B$  до прямой, на которой лежит сторона  $AC$ .

**7.13.** Скопируй рисунки 75 и определи расстояния: а) от центра окружности до прямой  $a$ ; б)\* от точки  $M$  до сторон треугольника.

**7.14.** Нарисуй прямую  $a$  и точки  $A, B, C, D$ , лежащие по одну сторону от этой прямой и удаленные от неё на расстояние 1 см. Можно ли через все эти точки провести: а) прямую; б) какую-нибудь кривую; в) окружность? В случае положительного ответа сделай необходимые построения.

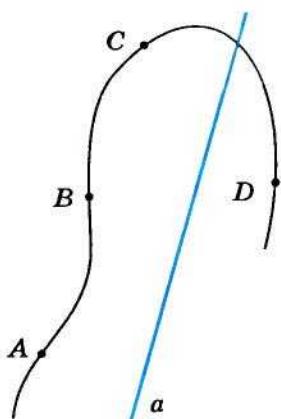


Рис. 74

**7.15.** На рисунке 76 изображено колесо, которое катится с горки. Какую линию описывает при этом центр колеса?

**7.16.** Нарисуй различные случаи взаимного расположения прямой и окружности, лежащих в одной плоскости. Глядя на рисунки, определи, как зависит количество общих точек прямой и окружности от расстояния от центра окружности до этой прямой.

**Проверь себя.** На рисунке 77 приведены соответствующие картинки. Обрати внимание на то, что на рисунке 77, б изображена прямая, которая удалена от центра окружности на расстояние, равное её радиусу, и имеет с ней только одну общую точку. Про такую прямую говорят, что она *касается* данной окружности или что она является *касательной* к данной окружности.

**7.17\***. Приведи пример окружности и прямой, которые имеют только одну общую точку, но не касаютсяся. Каким может быть в таком случае расстояние от центра окружности до прямой? В случае затруднений используй соответствующую модель.

**Подсказка.** Может быть, выйти в пространство?

**7.4. Расстояние от точки до плоскости.** В каком случае может возникнуть необходимость находить такое расстояние? — Например, если требуется определить, на какой высоте от пола нужно подвесить люстру так, чтобы никто не задел её головой, или достанем ли мы до яблока, висящего на ветке.

**7.18.** Определи, на каком расстоянии от пола в твоей квартире находится: а) верхний край раковины; б) ручка двери; в) замочная скважина в двери.

**7.19.** Расскажи, как определить расстояние от точки до плоскости.

**Проверь себя.** Расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту плоскость.

**7.20.** Известно, что чем дальше предмет от источника света, тем он меньше освещён. Определи на глаз, какая из обозначенных точек стола (рис. 78) больше всех освещена. Объясни свой ответ.

**7.21\***. Докажи, что расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость.

**7.22\***. Используя поверхность стола и несколько одинаковых карандашей, сообрази, какую фигуру заполняют все точки, одинаково удалённые от плоскости и лежащие по одну сторону от неё.

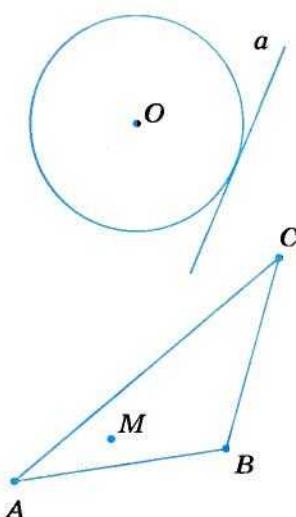


Рис. 75

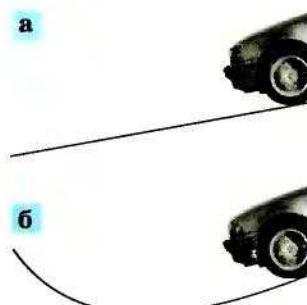


Рис. 76

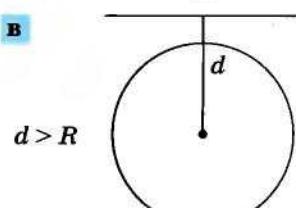
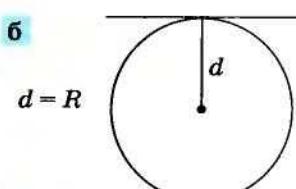
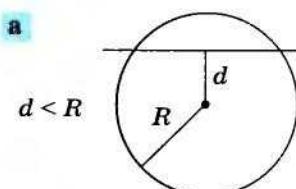


Рис. 77

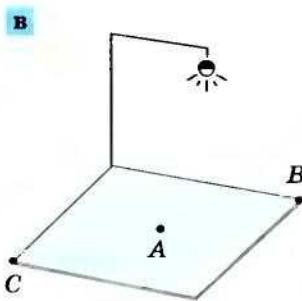
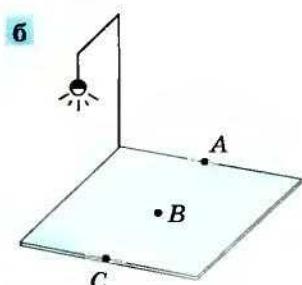
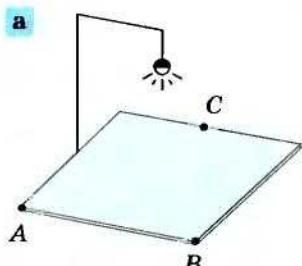


Рис. 78

**7.5. Высоты геометрических фигур.** Нахождение расстояния от точки до плоскости используется при определении высоты различных предметов, например для определения высоты архитектурных сооружений. Обычное здание (рис. 79, а) имеет вертикальные стены, поэтому верёвка отвеса, опущенного из самой высокой точки здания, пойдёт по стене. Геометрически это означает, что перпендикуляр, опущенный из этой точки на плоскость земли, лежит в плоскости стены. Для определения высоты такого здания можно узнать размеры стены.

Однако, например, для измерения высоты наклонной башни в итальянском городе Пиза (рис. 79, б) или египетской пирамиды (рис. 79, в) мы не сможем пользоваться измерением стен и должны будем применить другие методы. В случае с Пизанской башней достаточно сверху опустить отвес и измерить длину верёвки. Во втором случае нам пришлось бы отвес держать на длинной палке, расположенной горизонтально. (Да и где найти такую палку? — В общем, эта задача очень трудная.)

Для геометрических фигур тоже можно определить высоту. Чаще всего мы будем встречаться с высотами цилиндров (призм, параллелепипедов...) и конусов (в том числе и пирамид).

**Высотой цилиндра** называют расстояние (длину перпендикуляра) от любой точки одного основания до плоскости другого (рис. 80), а также сам этот перпендикуляр.

**Высотой конуса** называют расстояние (длину перпендикуляра) от вершины этого конуса до плоскости его основания (рис. 81), а также сам этот перпендикуляр.

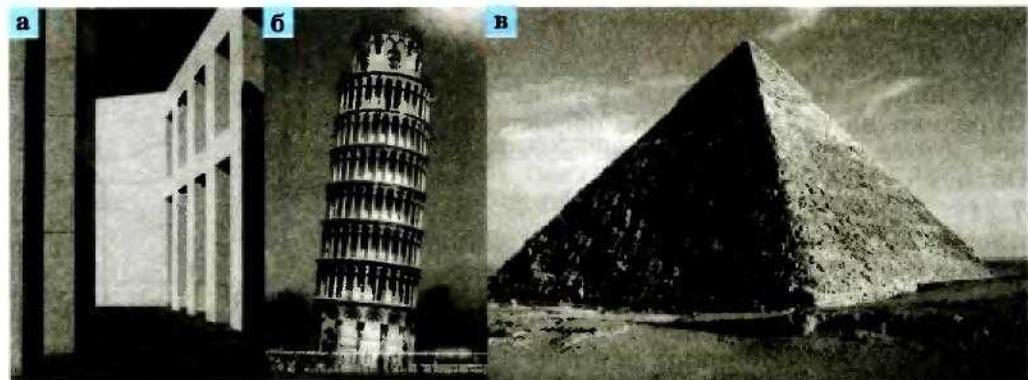


Рис. 79

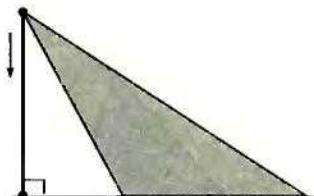
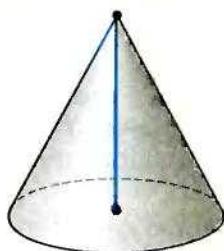
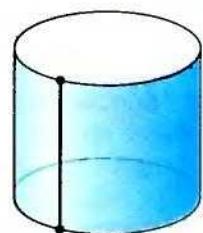
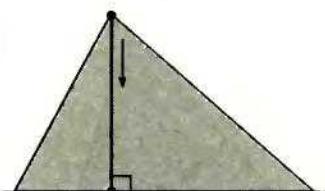


Рис. 82

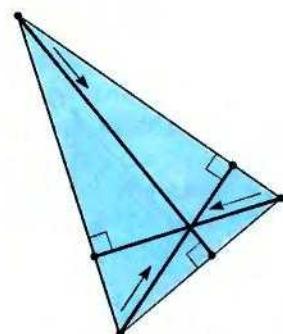
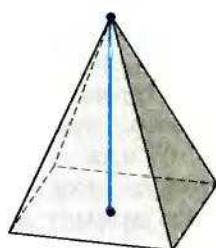
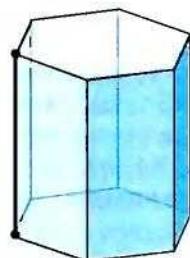


Рис. 80

Рис. 81

**7.23.** Определи высоту книжного шкафа, настольной лампы. Расскажи, как ты решаешь задачу.

**7.24.** Возьми модели различных пространственных фигур: цилиндра, конуса (и среди них пирамиды) — и определи высоту каждой из них. Расскажи, как ты решаешь задачу.

**7.25.** Возьми модель треугольной пирамиды, у которой есть неравные грани. Считая основанием различные грани пирамиды, определи в каждом случае её высоту. Сравни результаты.

В геометрии определяют также высоты некоторых плоских фигур, например высоту треугольника.

**Высотой треугольника** называют расстояние (длину перпендикуляра) от вершины этого треугольника до прямой, на которой лежит его сторона, противолежащая этой вершине (рис. 82), а также сам этот перпендикуляр.

Каждый треугольник имеет три высоты (рис. 83).

**7.26.** Построй остроугольный, прямоугольный и тупоугольный треугольники. Для каждого из них проведи все высоты.

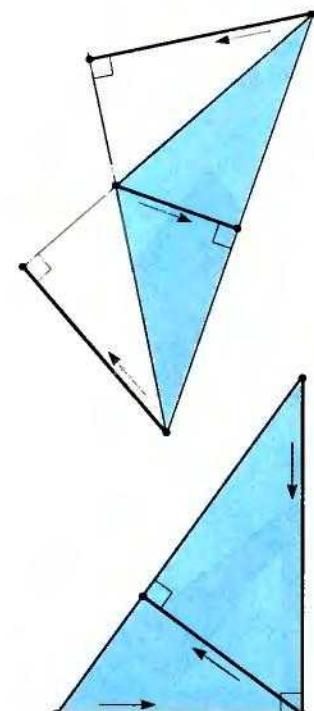


Рис. 83

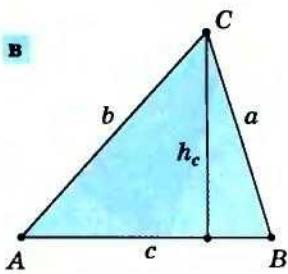
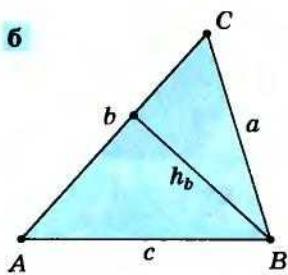
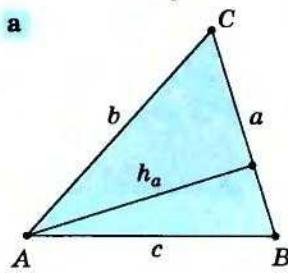


Рис. 84

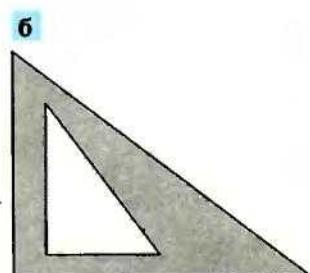
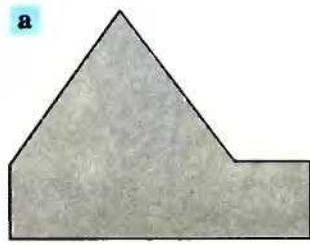


Рис. 85

### Проверь себя. Вернись к рисунку 83.

Мы уже сталкивались с высотой треугольника, когда определяли его площадь (п. 16.4 в учебнике 5 класса). Разбивая остроугольный треугольник на два прямоугольных треугольника, мы проводили его высоту (см. рис. 83). Такое же построение мы провели и для нахождения площади тупоугольного треугольника. Теперь мы можем сформулировать правило вычисления площади треугольника.

**Площадь треугольника** равна половине произведения стороны треугольника и его высоты, проведённой к этой стороне.

С помощью формулы это можно записать так:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} ah_a.$$

Здесь  $h_a$  обозначена высота треугольника, проведённая к стороне  $a$  (рис. 84, а). Можно, конечно, проводить высоту к стороне  $b$  (рис. 84, б) или к стороне  $c$  (рис. 84, в), и тогда формула для вычисления площади треугольника примет вид:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bh_b \text{ или } S_{ABC} = \frac{1}{2} ch_c.$$

**7.27.** Построй остроугольный треугольник и, проведя необходимые построения и измерения, вычисли его площадь тремя способами. Получились ли у тебя одинаковые результаты?

**7.28.** Скопируй рисунок 85. Сделай необходимые построения и измерения и определи площади фигур, изображённых на этом рисунке.

**7.29.** Построй треугольники разных видов и их высоты. Проведя необходимые измерения, определи площади этих треугольников.

**7.30\*.** Построй какой-нибудь пятиугольник и определи его площадь, сделав необходимые построения и вычисления.

**7.31\*.** Придумай, как определить расстояние между двумя фигурами. Приведи жизненные примеры, когда приходится решать эту задачу.

## § 8 Взаимное расположение прямых и плоскостей

**8.1. Параллельность.** Вернёмся к задаче 7.14. Решая эту задачу, мы построили точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ , удалённые от данной прямой на расстояние, равное 1 см (рис. 86, а). Теперь представим себе, что некоторая точка начинает двигаться по плоскости от точки  $A$  так, что

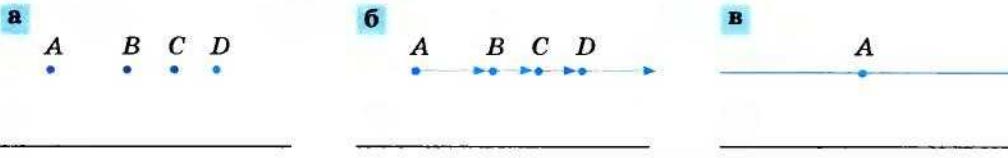


Рис. 86

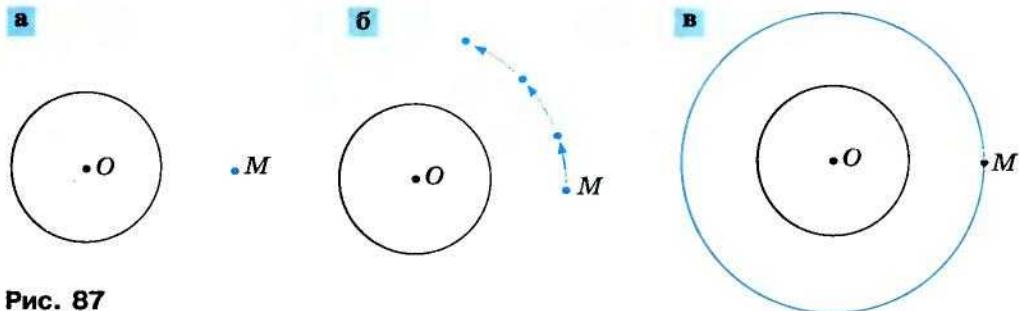


Рис. 87

её расстояние от данной прямой остаётся одним и тем же, равным 1 см (рис. 86, б). В некоторый момент она попадёт в точку  $B$ , затем в точки  $C, D, \dots$ . По какой линии будет двигаться эта точка? Нарисуй эту линию. На рисунке 86, в изображён след движения точки в обе стороны. Это прямая.

Пусть теперь дана окружность с центром в точке  $O$  и радиусом 1 см и точка  $M$  (рис. 87, а), которая движется по плоскости так, что расстояние от этой окружности до точки остаётся постоянным и равным 1 см (рис. 87, б). Какую линию будет описывать эта точка? Конечно, окружность с тем же центром  $O$  и радиусом 2 см (рис. 87, в).

В этих примерах мы рассматривали траекторию движения точки, при котором её расстояние от данной линии (прямой или окружности) не было равно нулю и всё время оставалось постоянным. В таких случаях говорят, что точка двигалась *параллельно* данной линии или что траектория движения точки *параллельна* этой линии.

Слово *параллельный* происходит от греческого *parallelos* — *идущий рядом*.

Можно сказать, что на рисунке 86, в изображены *параллельные прямые*, а на рисунке 87, в — *параллельные окружности*.

Параллельными могут быть не только прямые или окружности, но и некоторые другие фигуры. Прямая может быть параллельна плоскости (рис. 88, а). В этом случае все точки прямой одинаково удалены от плоскости. Могут быть параллельными и две плоскости (рис. 88, б).

Со словом *параллельно* мы иногда сталкиваемся и в жизни: машина может ехать параллельно краю дороги, т. е. сохраняя расстояние от края дороги; самолёт может лететь параллельно земле, т. е. на одной и той же высоте (на одном и том же расстоянии от земли).

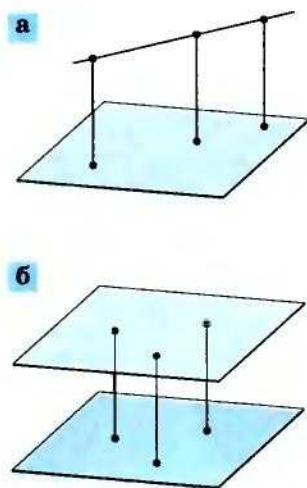


Рис. 88



Рис. 89

На уроках географии вы познакомились с *параллелями* (рис. 89): все точки одной параллели удалены от экватора на одно и то же расстояние.

**8.1.** Приведи примеры моделей параллельных:  
а) плоскостей; б) прямой и плоскости.

**8.2.** Могут ли параллельные плоскости (прямая и параллельная ей плоскость) пересекаться? Почему?

**8.3.** Какая картинка на рисунке 90 лишняя?

**8.4.** Нарисуй куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Перечисли пары параллельных плоскостей, которые изображены на твоём рисунке. Какие из нарисованных прямых параллельны плоскости: а)  $ABCD$ ; б)  $AA_1B_1B$ ; в)  $AA_1C_1C$ ?

**8.5\***. Нарисуй куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Найди среди нарисованных плоскостей те, которым параллельна прямая: а)  $AB$ ; б)  $AA_1$ ; в)  $AC$ .

**8.6.** Нарисуй куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Как расположены по отношению к плоскости  $ABCD$ : а) плоскость  $A_1B_1C_1D_1$ ; б) плоскость  $AA_1C_1C$ ; в) прямая  $AB$ ; г) прямая  $AA_1$ ; д) прямая  $DA_1$ ; е) прямая  $A_1C_1$ ?

**8.7\***. Представь себе две параллельные плоскости. Объясни, почему любая прямая, которая лежит в первой плоскости, параллельна второй плоскости.

**Совет.** В случае затруднений сделай модели соответствующих фигур.

**8.2. Параллельные прямые.** Среди примеров моделей параллельных прямых наиболее известными являются рельсы железной дороги, а также её шпалы. Мы уже много работали с геометрическими фигурами, в которые входят отрезки параллельных прямых. И в первую очередь это плоские фигуры — *параллелограммы* (рис. 91).

**8.8.** Возьми модель куба и нарисуй его. Назови куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (рис. 92). Используя спицы в качестве модели прямой, найди несколько пар параллельных прямых, на которых лежат рёбра куба. Сделай соответствующий рисунок и выпиши какие-нибудь пары параллельных рёбер куба.

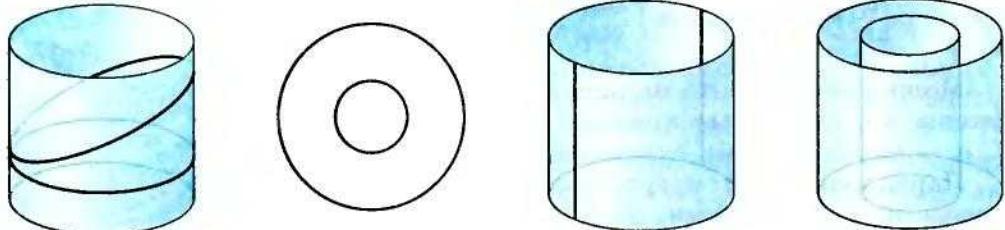


Рис. 90

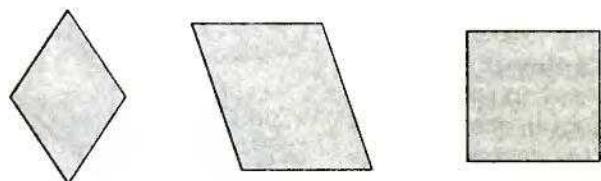


Рис. 91

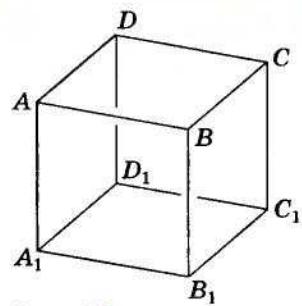


Рис. 92

**Проверь себя.** Параллельными являются, например, прямые  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BB_1$  и  $CC_1$ ,  $AA_1$  и  $CC_1$ ,  $AD$  и  $B_1C_1$ .

**8.9.** Верно ли, что прямые  $AB$  и  $CC_1$  (см. рис. 92) параллельны?

Для упрощения записи параллельных прямых в математике используют специальный значок:  $\parallel$ . Например, если хотят написать: «прямая  $AB$  параллельна прямой  $CD$ », то пишут:  $AB \parallel CD$ . А если хотят написать: «прямая  $AB$  не параллельна прямой  $CD$ », то пишут:  $AB \not\parallel CD$ . Запиши коротко ответы на вопросы задач 8.8 и 8.9.

**8.10.** Найди на каркасе куба такие два ребра, которые параллельны и не лежат в плоскости одной грани. Проверь с помощью картонной модели плоскости, что через выбранные тобой рёбра куба можно провести плоскость.

**Проверь себя.** Такими являются, например, рёбра  $AA_1$  и  $CC_1$  (см. рис. 92).

В ходе решения задачи 8.10 ты познакомился с одним очень важным свойством параллельных прямых: *через две параллельные прямые всегда можно провести плоскость*. Вместе с тем, как и всякие параллельные фигуры, параллельные прямые не пересекаются.

Эти два свойства являются настолько важными, что их часто кладут в основу определения параллельных прямых.

Две прямые называют **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Работая с моделью куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ , ты, наверное, обратил внимание на два момента. С одной стороны, каждая из прямых  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  перпендикулярна плоскости одной грани куба  $ABCD$ . С другой стороны — эти прямые *попарно параллельны*. Попарно параллельны — это значит, что каждые две такие прямые параллельны:  $AA_1 \parallel BB_1$ ,  $AA_1 \parallel CC_1$ ,  $AA_1 \parallel DD_1$ ,  $BB_1 \parallel CC_1$ ,  $DD_1 \parallel BB_1$  и т. д. Наши наблюдения можно сформулировать короче:

Если две прямые перпендикулярны одной плоскости, то они параллельны.

**8.11.** Приведи примеры предметов, которые можно считать реальными отрезками, расположеными перпендикулярно какой-нибудь плоскости, а потому параллельными между собой.

**Подсказка.** Смотри, например, рисунок 93.

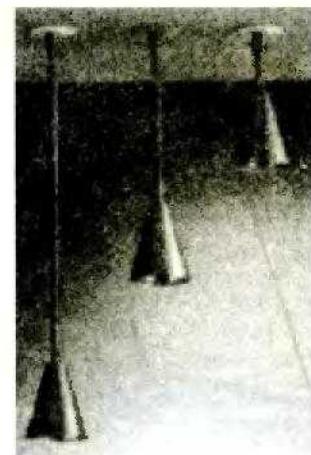


Рис. 93

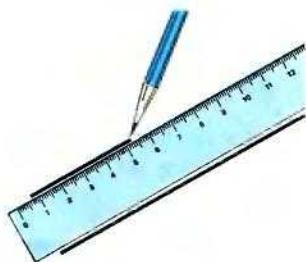


Рис. 94

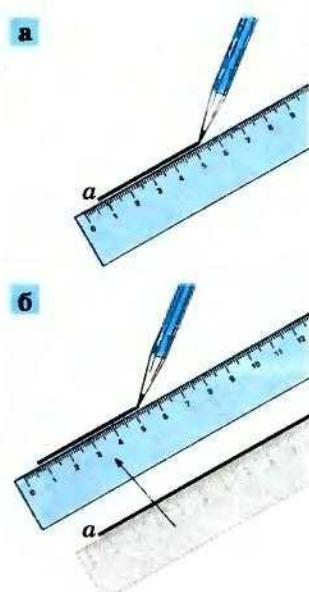


Рис. 95

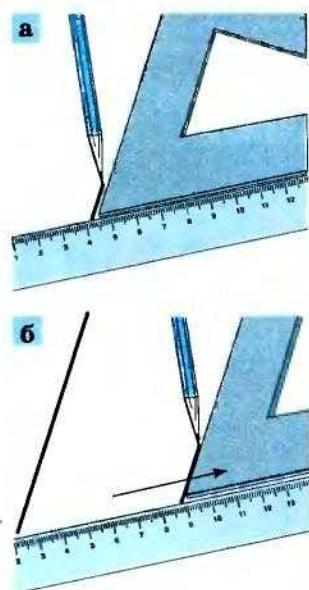


Рис. 96

**8.12\***. Верно ли, что: а) две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны; б) две плоскости, перпендикулярные третьей плоскости, параллельны?

**Подсказка.** Можно опять воспользоваться моделью куба.

**8.13\***. Придумай, как можно построить две параллельные прямые.

**8.3. Как построить две параллельные прямые?** Обсудим различные варианты решения этой задачи 8.13.

Самое простое решение — обвести карандашом две противоположные стороны линейки (рис. 94). Этот способ позволяет получить параллельные прямые, удалённые друг от друга на определённое расстояние.

Рассмотрим другой способ построения параллельных прямых. Построим прямую  $a$  с помощью линейки (рис. 95, а), а затем будем линейку так передвигать по бумаге, чтобы её разные концы двигались одинаково. Остановив линейку, мы проведём по ней вторую прямую (рис. 95, б). Однако сохранять направление линейки при перемещении трудно.

Для более точного построения параллельных прямых поступают так, как показано на рисунке 96. Берут чертёжный треугольник, проводят по одной из его сторон прямую, прикладывают к другой стороне линейку (рис. 96, а). Эта линейка служит опорой треугольнику при перемещении и не даёт возможности измениться направлению стороны, по которой чертятся параллельные прямые (рис. 96, б).

**8.14.** Начерти прямую и построй несколько прямых, параллельных ей.

**8.15.** Начерти прямую  $a$  и отметь точку  $A$ , не лежащую на этой прямой. Построй прямую  $b$ , проходящую через точку  $A$  и параллельную прямой  $a$ .

**8.16.** Начерти прямую  $a$  и построй с помощью чертёжного треугольника две прямые  $b$  и  $c$ , перпендикулярные к ней. Обрати внимание на взаимное расположение прямых  $b$  и  $c$ .

**Проверь себя.** На рисунке 97 показано решение задачи. Ты, конечно, заметил, что прямые  $b$  и  $c$  параллельные. Мы обнаружили важный факт: если три прямые лежат в одной плоскости и при этом две из них перпендикулярны третьей, то эти две прямые параллельны. Этот факт полезно запомнить. Мы его будем использовать при построении параллельных прямых.

**8.17.** Реши задачу 8.15 путём проведения взаимно перпендикулярных прямых.

**8.18.** Начерти какие-нибудь два отрезка с общим концом, не лежащие на одной прямой (например,  $AB$  и  $AC$ ). Проведи пять отрезков с концами, лежащими на отрезке  $AB$  (один из них — через точку  $B$ ), параллельных отрезку  $AC$  и равных ему. Где лежат вторые концы этих отрезков?

**8.19.** Начерти какой-нибудь треугольник. Построй прямые, каждая из которых проходит через вершину треугольника параллельно противолежащей его стороне.

**8.20.** Нарисуй какой-нибудь шестиугольник, стороны которого попарно параллельны.

**8.21.** Построй две параллельные прямые  $a$  и  $b$ .  
а) Построй несколько точек, одинаково удаленных от этих прямых. б) Какую фигуру образуют все такие точки плоскости?

**8.22.** Построй какую-нибудь прямую  $a$  и отметь точку  $A$ , не лежащую на этой прямой. Разными способами построй прямую, проходящую через точку  $A$  параллельно данной прямой. Что ты заметил?

**Проверь себя.** Если ты выполнял построения аккуратно, все построенные тобой прямые совпали. Это не случайно: через каждую точку, не лежащую на данной прямой, можно провести только одну прямую, параллельную данной.

**8.4. Ещё один случай взаимного расположения двух прямых.** Мы выяснили, что прямые на плоскости или пересекаются, или параллельны (рис. 98, а). В первом случае расстояние от точек одной прямой до второй не является постоянным, а во втором — постоянно (рис. 98, б).

Оказывается, в пространстве это не так. В пространстве может быть ещё один случай взаимного расположения двух прямых.

Представь себе, что по дороге едет машина, а на обочине дороги стоит столб (рис. 99, а). Понятно, что прямая  $a$ , изображающая траекторию движения машины, и прямая  $b$ , моделью

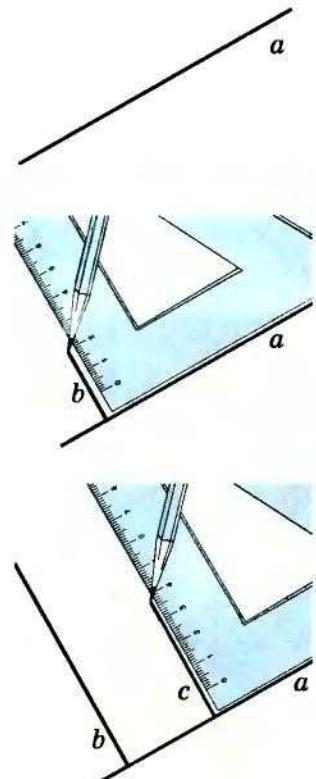


Рис. 97

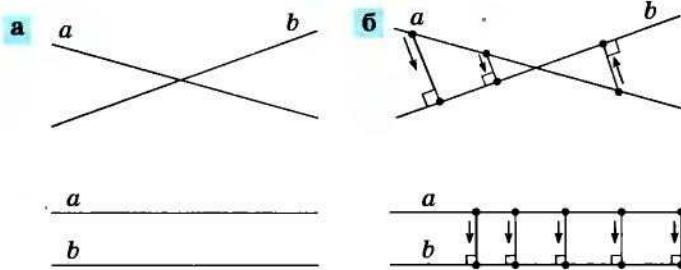


Рис. 98

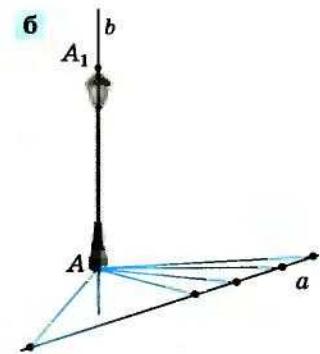


Рис. 99



Рис. 100

которой является столб, не пересекаются (рис. 99, б). Но расстояние между машиной и столбом всё время изменяется: сначала машина приближается к столбу, а затем, начиная с некоторого момента, от него удаляется. Значит, прямые  $a$  и  $b$  и не параллельны. Такие прямые называются скрещивающимися.

**Две прямые называются скрещивающимися, если они не пересекаются и не параллельны.**

Примеры моделей скрещивающихся прямых или отрезков привести нетрудно: автомобильная и железная дороги, лыжи у спортсменов во время прыжков на соревнованиях по фристайлу (рис. 100) и многие другие. Приведи сам примеры моделей скрещивающихся прямых или отрезков.

Проще всего увидеть скрещивающиеся прямые на модели куба.

**8.23.** Выбери на модели куба  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  (рис. 101) какое-нибудь ребро, например  $AA_1$ . Перечисли прямые, содержащие другие рёбра куба и не пересекающие прямую  $AA_1$ . Назовите, которые параллельны прямой  $AA_1$ , и те, которые скрещиваются с прямой  $AA_1$ .

▼ **Проверь себя.** Каждая из прямых  $BC$ ,  $B_1C_1$ ,  $CD$  и  $C_1D_1$  скрещивается с прямой  $AA_1$ .

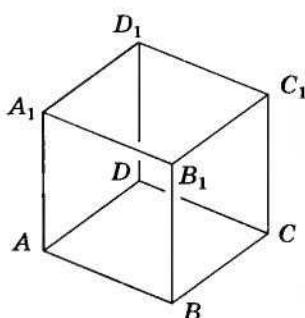


Рис. 101

## § 9 Фигуры, составленные из параллельных отрезков

**9.1. Четырёхугольники с параллельными сторонами.** В четырёхугольнике может быть одна пара параллельных сторон или две таких пары. Четырёхугольник, содержащий только две параллельные стороны (рис. 102), называется *трапецией*.

**Трапецией** называется четырёхугольник, в котором две стороны параллельны, а две другие не параллельны.

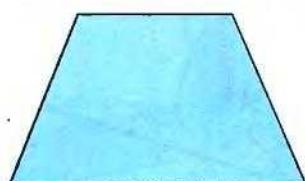


Рис. 102

Слово трапеция однокоренное с греческим словом *trapeza* — стол. В русском языке слово «трапеза» употребляется (чаще всего в церковном лексиконе) для обозначения процесса приёма пищи.

Если ты был в цирке, возможно, ты видел гимнастов, которые выступают под куполом цирка и выполняют свои упражнения на спор-

тивном снаряде, который так и называется — трапеция.

Можно построить четырёхугольник, в котором имеются две пары параллельных отрезков (рис. 103). Такой четырёхугольник называется **параллелограммом**.



Рис. 103

**Параллелограммом** называется четырёхугольник, в котором противоположные стороны попарно параллельны.

Слово *параллелограмм* греческого происхождения. Первая часть его тебе знакома, а вторая *gramma* — начертание, линия.

**9.1.** Построй какую-нибудь трапецию и какой-нибудь параллелограмм.

**9.2.** Отметь в тетради три точки *A*, *B* и *C*. Построй параллелограмм *ABCD*. Всегда ли это можно сделать?

**9.3.** Отметь в тетради три точки *A*, *B* и *C*. Построй трапецию *ABCD*. Сколько таких трапеций можно построить? Нарисуй разными цветными карандашами несколько таких трапеций.

**9.4.** Начерти треугольник. а) Проведи в нём отрезок так, чтобы получились трапеция и треугольник. Сколько таких отрезков можно построить? б)\* Построй два отрезка так, чтобы получились две трапеции, параллелограмм и два треугольника.

**9.5.** Вырежи из картона такие треугольник и трапецию, чтобы из них можно было сложить параллелограмм.

**9.6.** Про фигуру известно, что она — часть плоскости; её граница — замкнутая ломаная, в её границе есть параллельные и есть равные отрезки. Нарисуй такую фигуру. Сколько разных таких фигур ты можешь построить?

## 9.2. Разные виды параллелограммов.

Сделай каркасную модель параллелограмма. Для этого вырежи из картона две пары равных между собой полосок (рис. 104, *a*), которые будут играть роль моделей отрезков (например, по 6 см и 3 см), а затем скрепи их так, как показано на рисунках 104, *b*, *v*. Полоски картона, изображающие стороны параллелограмма, могут вращаться вокруг места соединения. Если изменять угол между соседними сторонами параллелограмма, то будут получаться новые параллелограммы, так как противоположные стороны четырёхугольников остаются попарно параллельными (рис. 105). В какой-то момент этот угол станет прямым, и тогда получится каркасная модель прямоугольника: в нём окажутся все углы прямыми. Можно сказать, что



Рис. 104

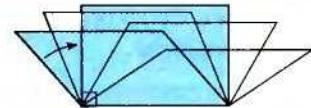


Рис. 105

**Прямоугольник** — это параллелограмм, в котором есть прямой угол.

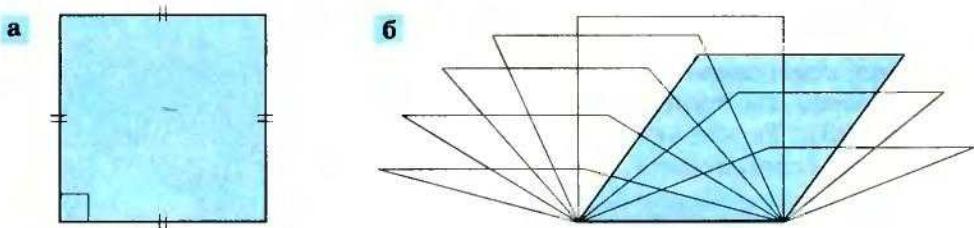


Рис. 106

**9.7.** Сколько прямоугольников этим способом можно получить из одного параллелограмма? А сколько параллелограммов можно так получить из одного прямоугольника? Покажи это на модели.

**9.8.** Изготовь каркасную модель квадрата.

**Проверь себя.** Для изготовления модели каркаса квадрата нужно взять четыре равных между собой отрезка и расположить их так, чтобы соседние отрезки оказались взаимно перпендикулярными. При этом получится прямоугольник, в котором все стороны равны между собой, — квадрат (рис. 106, а).

**Квадрат** — это прямоугольник, в котором все стороны равны между собой.

Слово **квадрат** происходит от латинского *quadratus* — четырёхугольный. Однокоренными словами являются:

**квarta** — интервал в музыке, содержащий четыре тона;

**квартет** — музыкальное произведение для четырёх голосов или инструментов, а также ансамбль из четырёх музыкантов;

**квартал** — часть города, ограниченная четырьмя улицами;

**квартира** — часть дома.

**9.9.** Попробуй сформулировать определение квадрата, используя слово *параллелограмм*.

**Проверь себя.** Квадрат — это параллелограмм, в котором все стороны равны между собой и есть прямой угол.

Меняя угол между соседними сторонами получившегося четырёхугольника, ты будешь каждый раз получать параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 106, б). Такой параллелограмм называется ромбом.

**Ромб** — это параллелограмм, у которого все стороны равны.

Интересно, что слово **ромб** происходит от древнегреческого слова *rhombos*, что в переводе означает бубен.

Оказывается, в Древней Греции бубен (музыкальный инструмент) имел непривычную для нас форму параллелограмма с равными сторонами. Это слово сохранилось в названии карточной масти — бубны. Их обозначают значками в виде ромба.

**9.10.** Является ли квадрат ромбом? Почему?

**9.11.** Отметь в тетради две точки *A* и *B*. а) Построй какой-нибудь ромб так, чтобы отрезок *AB* был его стороной. Сколько таких ромбов можно построить? б)\* Как нужно изменить условие задачи, чтобы

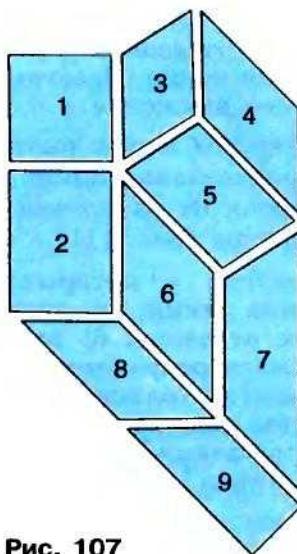


Рис. 107

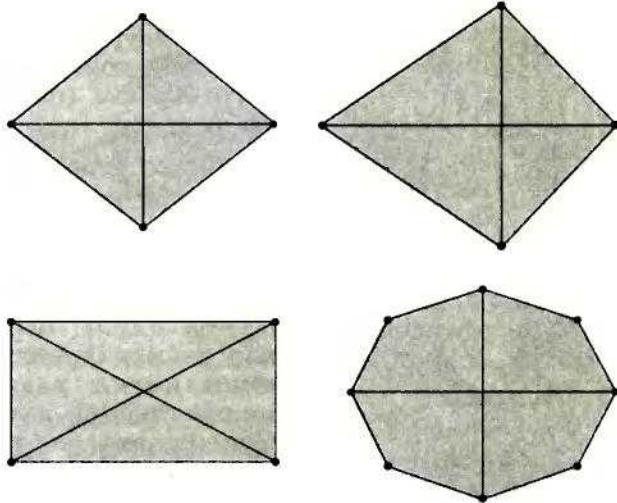


Рис. 108

по одну сторону от прямой  $AB$  можно было построить только один ромб со стороной  $AB$ ?

**9.12.** Перерисуй рисунок 107. Обведи разными цветами параллелограммы и ромбы. Получились ли у тебя такие четырёхугольники, которые обведены двумя цветами? Верно ли, что: а) каждый ромб является параллелограммом; б) каждый параллелограмм является ромбом?

**9.13.** Какая картинка лишняя (рис. 108)?

**9.14.** Какие слова или словосочетания ты связываешь с рисунком 109: а) падение; б) сохранение длин сторон; в) тень; г) трапеция; д) Пизанская башня; е) изменение угла?

**9.3. Изготовление плоских фигур из параллельных отрезков.** Мы конструировали каркасные модели параллелограммов различных видов. Эти модели показывают нам только контуры фигур. Чтобы сконструировать параллелограмм как часть плоскости, будем помещать концы равных отрезков на отрезке (который мы будем называть *направляющим отрезком*) и располагать эти отрезки параллельно друг другу (рис. 110, а). Будем называть эти параллельные отрезки *образующими отрезками*. Получится «стопка» параллельных образующих отрезков. Если мы увеличим число отрезков в «стопке», то она будет похожа на часть плоскости с прорезями (рис. 110, б). А если взять бесконечно много отрезков одной и той же длины, то из «стопки» получится параллелограмм (рис. 110, в).

**9.15.** Расскажи, как ты понимаешь смысл слов *направляющий отрезок* и *образующий отрезок*.

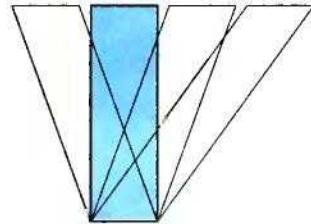
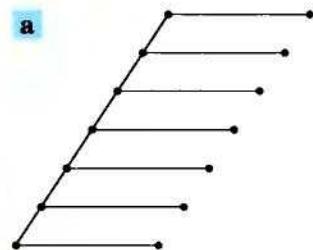
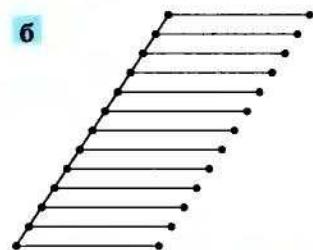


Рис. 109



а



б

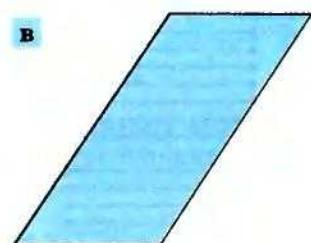


Рис. 110

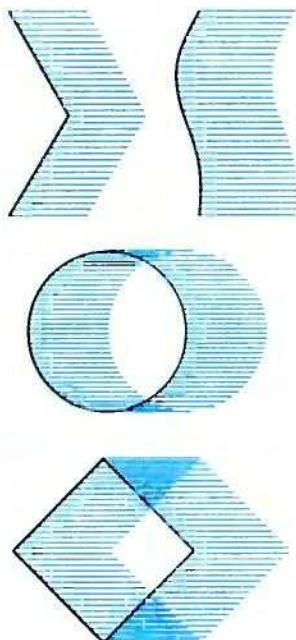


Рис. 111

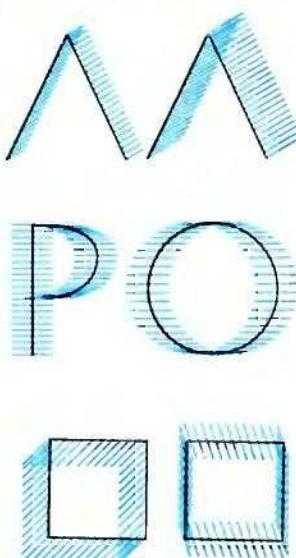


Рис. 112

**Проверь себя.** Образующие отрезки образуют фигуру. Направляющий отрезок определяет траекторию перемещения конца образующего отрезка (направляет его движение).

Заметим, что направляющим может быть не только отрезок, но и произвольная линия. При этом, конечно, получается не параллелограмм, а более сложная фигура (рис. 111).

**9.16.** Нарисуй разные фигуры, у которых:  
а) одинаковые направляющие линии, но отличаются длины образующих отрезков; б) разные направляющие линии, а образующие отрезки имеют равные длины; в) одинаковые направляющие линии, длины образующих отрезков равны, но различается взаимное расположение направляющей линии и образующих отрезков.

**Проверь себя.** Конечно, в каждом случае может быть бесконечное число ответов. Варианты некоторых из них предложены на рисунке 112.

Мы говорили, что можем *представить себе* полёт самолёта, видя в ночном небе только мигание его огней. Точно так же по некоторым изображениям (рис. 113) мы можем представить себе поведение отрезка (или другой геометрической фигуры), мысленно восстановив *действие*, происходившее с ним. Например, по рисунку 113, а мы понимаем, что отрезок перемещался по прямой линии, оставаясь перпендикулярным направлению. По рисунку 113, б видно, что отрезок тоже перемещался прямолинейно, но угол с направлением движения был не прямой. На рисунке 113, в изображено более сложное действие: сначала отрезок двигался прямолинейно, перпендикулярно направлению движения, а затем стал поворачиваться вокруг одного из своих концов.

**9.4. Получение пространственных фигур из параллельных отрезков.** Мы получали из параллельных отрезков плоские фигуры: направляющая и образующие этих фигур лежали в одной плоскости. Но можно взять такие образующие, которые не лежат в плоскости направ-

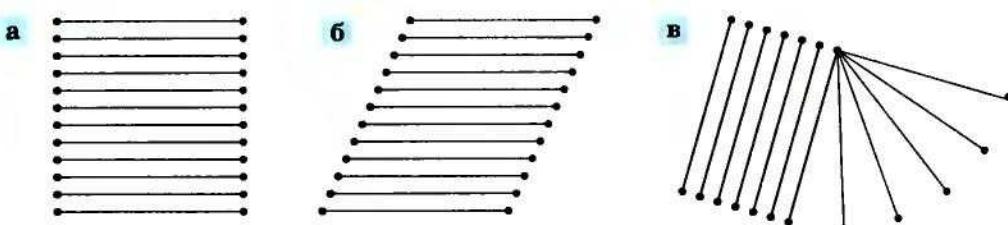


Рис. 113

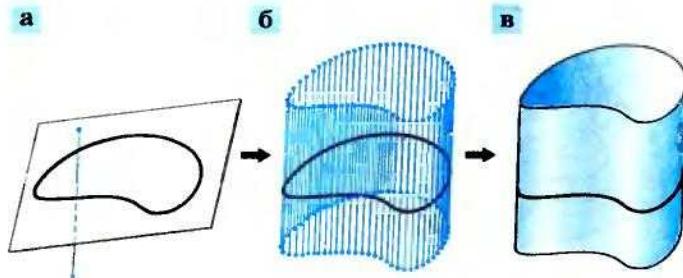


Рис. 114

ляющей, и тогда может получиться известная тебе пространственная фигура — цилиндр. Мы конструировали модели цилиндров с помощью ниток. Теперь используем для построения цилиндров понятие параллельности.

Возьмём какую-нибудь плоскую линию (она будет направляющей) и какой-нибудь отрезок, пересекающий эту линию, но не лежащий в её плоскости (рис. 114, а). Это один из образующих отрезков для цилиндрической поверхности. Чем плотнее мы будем размещать образующие отрезки на направляющей линии, тем более полное представление будем получать о боковой поверхности цилиндра (рис. 114, б, в).

Если в качестве направляющей взять незамкнутую плоскую линию, то получится поверхность, которую тоже называют цилиндрической (рис. 115).

**9.17.** Как называется цилиндр, у которого образующая по отношению к плоскости направляющей: а) перпендикулярна; б) не перпендикулярна?

**9.18.** Как называется цилиндр, у которого направляющая: а) окружность; б) пятиугольник; в) параллелограмм?

**9.19.** Сколько пар параллельных отрезков содержится в каркасе: а) параллелепипеда; б) призмы, в основании которой — трапеция?

**9.20.** Как называется цилиндр, боковая поверхность которого состоит из четырёх квадратов? Каким может быть основание такого цилиндра?

Из параллельных отрезков можно получить не только цилиндрические поверхности, но и цилиндр с «заполненной внутренностью», т. е. тело — телесный цилиндр (рис. 116).

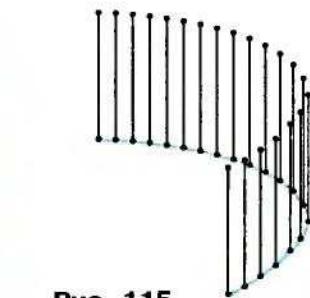


Рис. 115

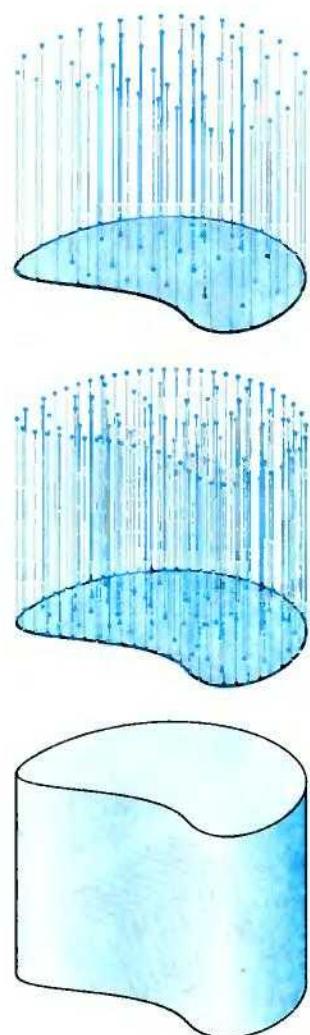


Рис. 116

**9.5\*. Получение пространственных фигур из равных плоских фигур.** Получить пространственную фигуру можно не только из параллельных отрезков, но и из плоских фигур.

**9.21.** Вырежи из картона по десять одинаковых: а) треугольников; б) прямоугольников; в) квадратов; г) кругов; д) эллипсов. Изготовь

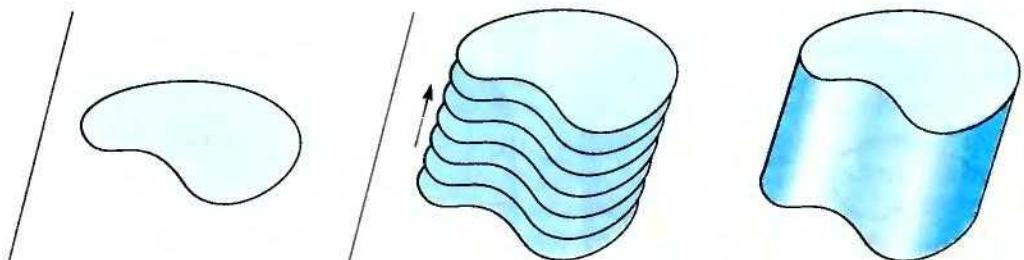


Рис. 117

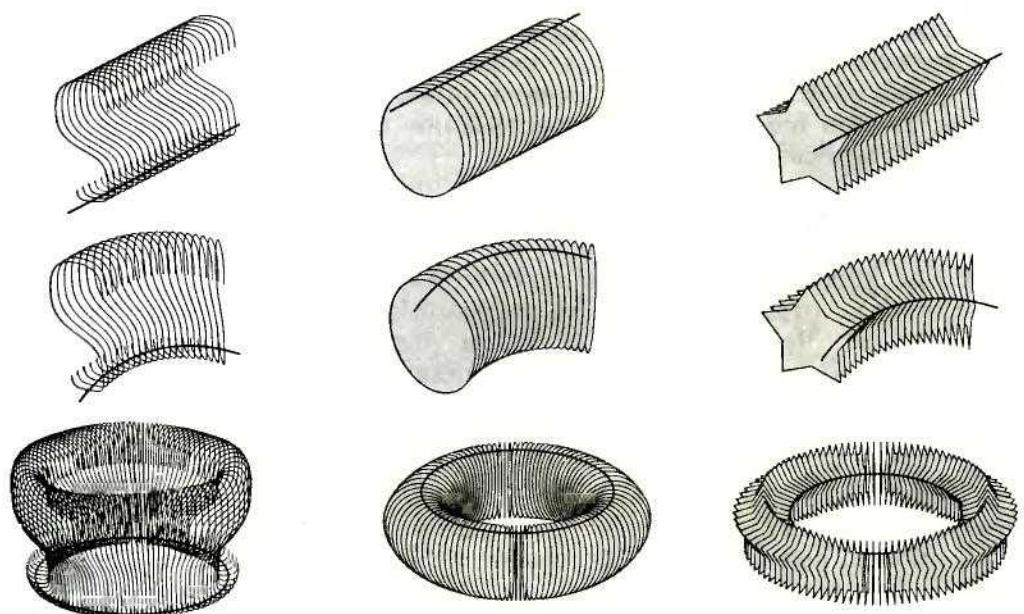


Рис. 118

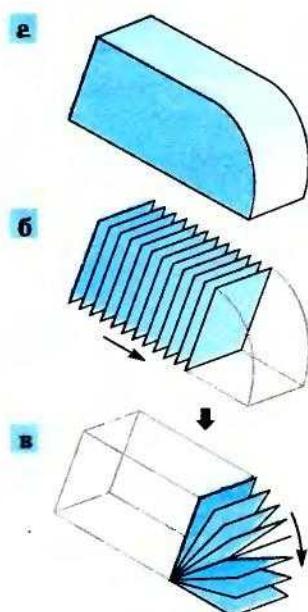


Рис. 119

модели прямых цилиндров, в основании которых лежит заданная фигура. Как из изготовленного прямого цилиндра получить наклонный цилиндр?

Понятно, что, взяв произвольную плоскую фигуру в качестве образующей и изменяя направляющую, мы можем получать всё более сложные поверхности (рис. 117).

**9.22.** Как получены поверхности (рис. 118)? Что общего имеют поверхности, расположенные: а) в одной строке; б) в одном столбце этого рисунка?

**9.23.** Что происходило с плоской фигурой, которая образовала пространственную фигуру, изображённую на рисунке 119, а?

▼ **Проверь себя.** Сначала квадрат двигался прямолинейно, располагаясь перпендикулярно направлению движения (рис. 119, б), а затем повернулся вокруг одной стороны на  $90^\circ$  (рис. 119, в).



Рис. 120

**9.6\*. Получение пространственных фигур из неравных плоских фигур.** Плоские фигуры могут образовывать разнообразные пространственные фигуры, если будут совершать сложные действия, например перемещения с изменением размеров.

Рассмотрим, например, конус и половину шара (рис. 120), которые могут быть образованы с помощью круга. Охарактеризуем действия, которые происходят с кругом в процессе образования этих фигур. Видно, что при получении и конуса, и шара размер круга (его диаметр) уменьшался до тех пор, пока круг не превратился в точку.

Понятно, что по такому общему описанию действия с кругом нельзя восстановить ту фигуру, которая получится в результате этого действия.

Важно иметь более точную информацию о том, как изменяется диаметр круга.

Проследим за тем, какую линию образуют концы диаметра круга при получении наших пространственных фигур. При получении конуса концы отрезка образуют угол (рис. 121, а), а при получении полушария (рис. 121, б) — дугу окружности. Эти линии можно воспринимать как контуры фигур.

Чтобы сделать из кругов пространственную фигуру, поступим следующим образом. Нарисуем контур будущего тела (рис. 122, а). Проведём параллельные отрезки на расстоянии друг от друга, равном толщине картона (рис. 122, б). Начертим циркулем на картоне круги, у которых диаметры равны этим отрезкам (рис. 122, в, размеры кругов уменьшены). Вырежем эти круги и сложим их так, чтобы контур получаемого тела был такой же, как на плоском рисунке (рис. 122, г).

**9.24.** Какие пространственные тела получаются из кругов, диаметры которых меняются по законам, которые представлены на рисунке 123?

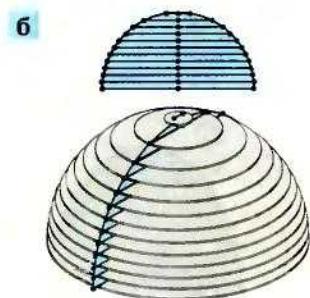
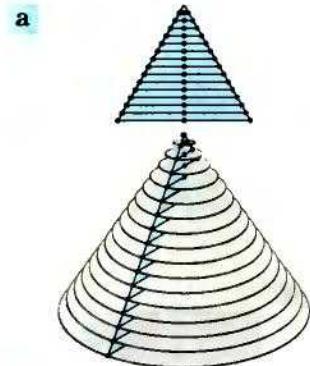


Рис. 121

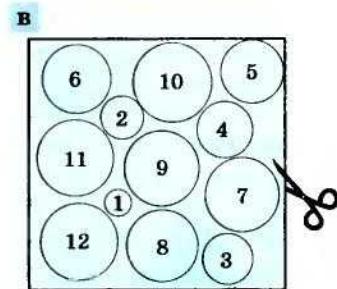
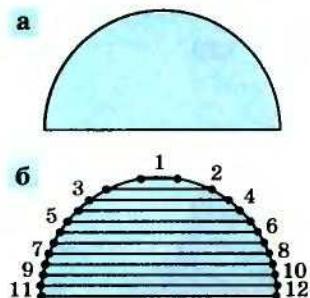


Рис. 122

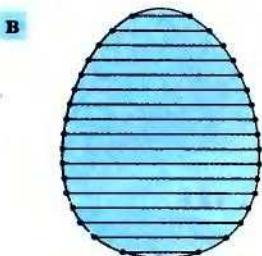
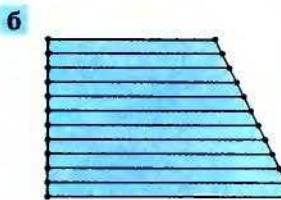
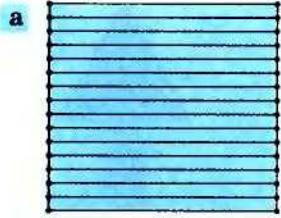


Рис. 123

**9.25.** Определи закономерность, которой связаны рисунки (рис. 124), и выпиши их номера в порядке, соответствующем этой закономерности.

**9.26.** Сделай тело из картонных квадратов, стороны которых изменяются так, как показано на рисунке 125.

**Проверь себя.** У тебя получилось тело, напоминающее четырёхугольную пирамиду. Такой способ использовали египтяне при строительстве пирамид. Самая большая пирамида — пирамида Хеопса, например, состоит из 128 слоёв камня, т. е. представляет собой ступенчатую гору, сложенную из 128 прямоугольных параллелепипедов — прямых четырёхугольных призм (рис. 126).

**9.7\*. Как мы видим и рисуем параллельные отрезки.** Мы знаем, что железнодорожные рельсы (рис. 127, а) параллельны, но видим мы их сходящимися. Мы знаем также, что колонны, украшающие галерею (рис. 127, б), имеют равные высоты, но видим мы их уменьшающимися. Такое видимое уменьшение удалённых предметов называется перспективой.

Перспектива (от лат. *per* — вдоль, *spectare* — смотреть) — искусство изображать даль так, как она видна в действительности. Кроме этого, слово *перспектива* имеет значение будущие события, а также вид в природе.



Рис. 124

2

4

6

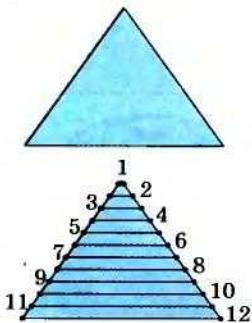


Рис. 125

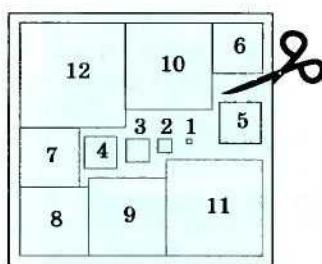


Рис. 126



Рис. 127

Рис. 128



Рис. 129

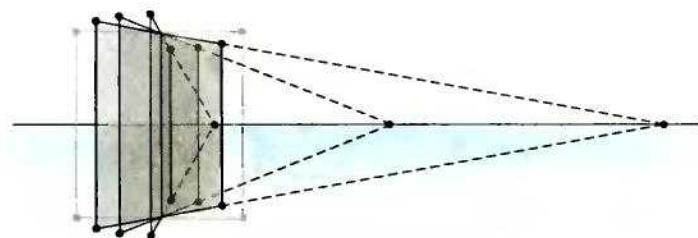


Рис. 130

Отметим некоторые закономерности перспективы.

1. Сначала понаблюдаем за прямоугольником, две стороны которого вертикальны, а две горизонтальны (рис. 128). На рисунке 128, а обе вертикальные стороны прямоугольника удалены от нас одинаково, мы видим их равными. Если мы повернём прямоугольник, сохранив его вертикальность (рис. 128, б), то заметим, что ту его сторону, которая приблизилась к нам, мы увидим увеличенной, а сторону, удалившуюся от нас, — уменьшенной. Получается, что из двух равных параллельных вертикальных отрезков мы видим меньшим тот, который находится дальше от наших глаз.

2. Все знают, что горизонт — это линия, «в которой земля сходится с небом». Можно заметить, что горизонтальную плоскость, расположенную на уровне наших глаз, мы видим как прямую, совпадающую с горизонтом. Для того чтобы представить себе это, рассмотрим набор равных кругов, расположенных горизонтально друг под другом (рис. 129). Круги, находящиеся выше линии горизонта, в перспективе мы увидим снизу, а круги, находящиеся под линией горизонта, сверху. Круг, расположенный на уровне глаз, мы увидим отрезком, лежащим на линии горизонта.

3. На рисунке 130 изображены одинаковые «вертикальные» прямоугольники в разных положениях. Горизонтальные стороны в каж-

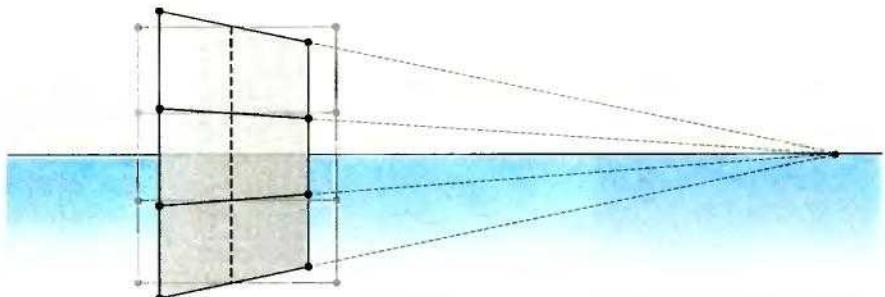
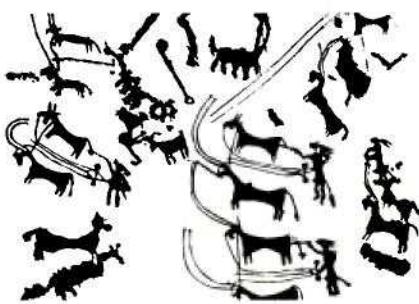


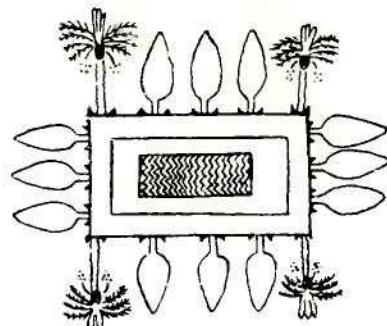
Рис. 131

дом из прямоугольников кажутся лежащими на пересекающихся прямых. Построим эти прямые и заметим, что каждая пара таких прямых имеет пересечение в точке, лежащей на линии горизонта. *Две параллельные горизонтальные прямые, не параллельные горизонту, мы видим пересекающимися на линии горизонта.*

4. Если каждую из вертикальных сторон нашего прямоугольника разделим на равные части (например, на три) и проведём через соответствующие точки прямые, то мы обнаружим ещё одну закономерность: *все прямые, имеющие одинаковое направление, мы видим в перспективе пересекающимися в одной точке* (рис. 131).



Изображение сцены охоты, выполненное первобытным человеком на скале



Древнеегипетское изображение бассейна и растущих по его краям деревьев

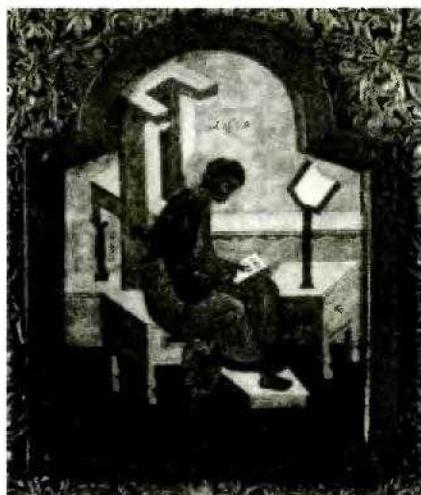


Античные художники не рисовали глубину пространства — все планы здесь одинаково близкие



На древних картах совмещались несколько видов (например, вид сверху и вид с дороги)

Рис. 132



На средневековых иконах намеренно выстраивалось «невиданное» пространство



На многих средневековых картинах можно заметить «покосившиеся» предметы



Мастера эпохи Возрождения изучали и успешно использовали законы перспективы

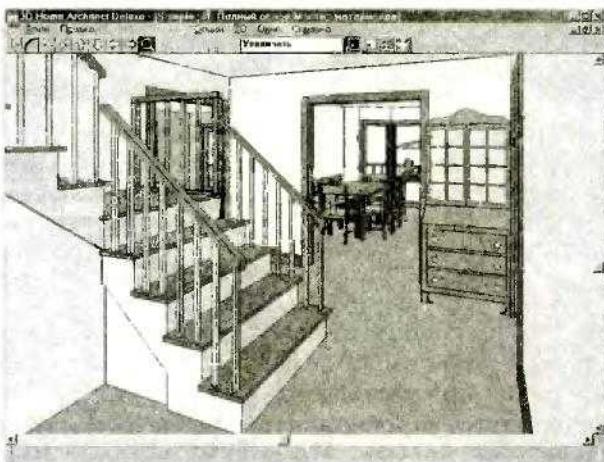


Фотография — наиболее простой и точный способ получения плоского перспективного изображения

Рис. 133

Перспектива — это убедительный пример того, что человек часто сталкивается с геометрическими законами и что без изучения геометрии невозможно развитие человека.

Теория изображения пространства на плоскости начала развиваться с самых древних времён. Но только в эпоху Возрождения она сложилась как геометрическая теория благодаря усилиям художников Пьера Делла Франческа, Леонардо да Винчи, Альбрехта Дюрера и др. На рисунках 132—134 представлены изобразительные работы разных времён, в которых по-разному передавалось видимое художником пространство.

**а****б****в****г**

Специальные программы для компьютера помогают создавать модели пространственных фигур

**Рис. 134**

Часто художники намеренно нарушают естественные законы видения пространства для того, чтобы картина приобрела дополнительную информативность или эффектность (см. рис. 134, а—в).

**9.27.** Найди в работах художников (см. рис. 134, а—в) изображение какой-нибудь пары параллельных отрезков.

## § 10 Известные примеры координат

**10.1. Несколько слов о знакомых играх.** Некоторые игры дают представление о координатах, например шашки или шахматы. На шахматном поле каждый горизонтальный ряд обозначают цифрой: 1, 2, 3, ..., 8, а каждый вертикальный ряд — буквой латинского алфавита: *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. И тогда каждое поле шахматной доски получает точное обозначение: буквой по вертикали и цифрой по горизонтали. Например, поле, на котором стоит белая пешка (рис. 135, а), обозначается *f4*. Есть и другие игры, в которых используются координаты. Например, «Морской бой». В этой игре каждое поле тоже имеет точное обозначение (рис. 136).

Слово координата от латинского *ordinatus* (*ordo* — порядок). Приставка *ко-* (вместе) имеет собирательное значение. Поэтому вводить координаты — значит приводить в порядок.

**10.1. На рисунке 135, а изображена шахматная доска. Назови координаты: а) белых пешек; б) чёрного коня; в) белого короля; г) чёрной ладьи.**

**10.2. Назови новые координаты чёрного ферзя, если он передвинулся на 4 клетки влево вниз по диагонали (см. рис. 135, б).**

**10.3. Запиши, используя координаты, возможную комбинацию ходов чёрной ладьи, если её исходное положение имело координаты *a8*, а конечное положение имеет координаты *d1*. (Напомним, что ладья может ходить только вверх-вниз или налево-направо.)**

**10.4. Проверь (см. рис. 136), будут ли удачными в игре «Морской бой» следующие ходы: *b4*; *d5*; *e7*; *k5*; *z5*; *b1*. Назови поля, на которых стоят однотрубные корабли.**

**10.2. Где мы встречаемся с координатами.** С координатами ты встречался на уроках географии. Зная географические координаты точки (*широту* и *долготу*), мы понимаем, где расположена эта точка на земной поверхности.

Для определения положения точки на небесном склоне астрономы составили карты звёздного неба. На рисунке 137 приведены две карты: на рисунке 137, а — старинная звёздная карта

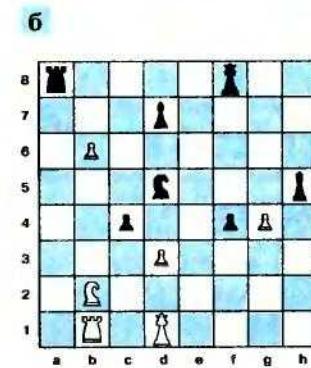


Рис. 135

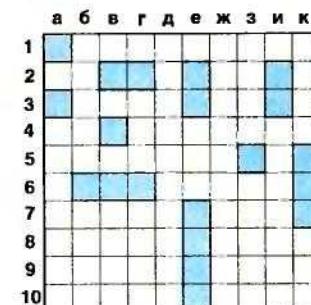
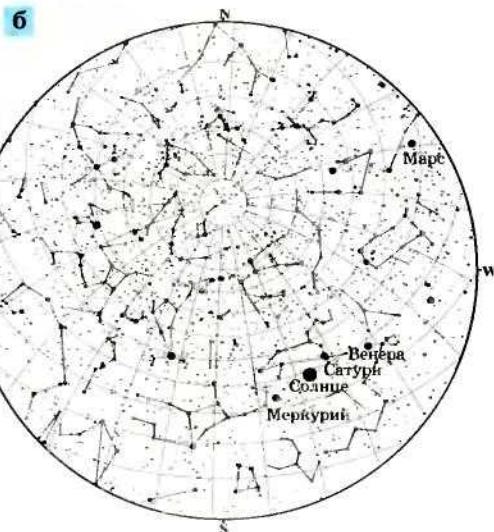


Рис. 136



**Рис. 137**

с изображением фигур созвездий, на рисунке 137, б — карта звёздного неба над Санкт-Петербургом в сентябре.

Приведём примеры использования координат в жизни.

Множество почтовых адресатов упорядочивается такими координатами: страна, населённый пункт, улица, дом, квартира (если надо), имя адресата. Например, известный литературный герой — детектив Шерлок Холмс имеет координаты: *Шерлок Холмс, Бейкер-стрит, 5-бис, Лондон, Англия*.

Множество автомобилей в России упорядочивается с помощью номерных знаков такими координатами: буква, трёхзначное число, сочетание из двух букв, номер региона (рис. 138).



**Рис. 138**



**Рис. 139**

Множество всех книг, выходящих в мире, упорядочиваются следующими координатами: авторы книги, название, номер издания, город, название издательства, год выпуска. Наш учебник имеет координаты: *Т. Г. Ходот, А. Ю. Ходот. Математика. Наглядная геометрия, 6, первое издание. Москва, «Просвещение», 2007*. Кроме того, существует международный индекс ISBN (см. оборот титула), содержащий следующие координаты: наименование товара (978 означает «Книжная продукция»), обозначение страны (для России — цифра 5), обозначение издателя (09 — издательство «Просвещение»), обозначение порядкового номера издания (015973 — номер данного издания в издательстве), последняя цифра контрольная. Один и тот же ISBN не может быть присвоен разным изданиям.

Множество файлов в компьютере упорядочивается с помощью адресов (путей), которые состоят из таких координат: диск, папка (директория), ..., имя файла. Например,

файл, в котором хранится текст этого параграфа, имеет координаты:  
`C:\documents\geom\G6\koord.doc`.

Даже в множестве цветов можно ввести координаты. Каждый цвет может быть получен смешиванием других цветов (например, зелёный цвет можно получить, смешивая жёлтый и синий). Поэтому можно выбрать базовые цвета и с их помощью определять все остальные. Например, существует система координат CMYK, в которой базовыми (составляющими) являются бирюзовый (Cyan), лиловый (Magenta), жёлтый (Yellow) и чёрный (Black). В такой системе координат координаты любого цвета определяются четырьмя числами, которые принимают значения от 0 до 100. Эти числа характеризуют количества составляющих цветов, участвующих в образовании определяемого цвета. Например, чтобы получить ярко-зелёный цвет, нужно взять максимальное количество бирюзового и жёлтого. В координатной системе CMYK такой зелёный цвет имеет координаты (C-100, M-0, Y-100, K-0), а координаты цвета указанных на рисунке 139 точек *A* и *B* обложки нашего учебника: (C-89, M-8, Y-11, K-9) и (C-2, M-29, Y-71, K-0).

10.5. Приведи свои примеры использования координат из жизни.

## § 11 Разные системы координат

**11.1. Что такое система координат?** Представь себе, что ты с друзьями пошёл в лодочный поход по реке. Сделав стоянку, вы начали изучать территорию, на которой оказались.

Сначала ты пошёл вдоль реки по направлению её течения и обнаружил несколько ориентиров (рис. 140, *a*): муравейник (1), большой камень (2), одиноко стоящий дуб (3). Вернувшись к друзьям, ты рассказал об увиденном. Чтобы они поняли, где расположены обнаруженные ориентиры, ты указал направление, в котором ты шёл, и приблизительное расстояние от палатки до этих объектов, например выраженное в шагах.

Говоря математическим языком, для объяснения места расположения объекта ты ввёл *систему координат*. И если считать, что река в этом месте течёт прямолинейно, то это — система координат *на прямой*, моделью которой является берег реки: прямая с выбранным направлением (направление течения реки), точка отсчёта *O* (палатка) и единица измерения расстояния (шаг) (рис. 140, *б*).

В дальнейшем изучение территории происходило следующим образом. Каждый из вас выбрал какое-то направление и отправился

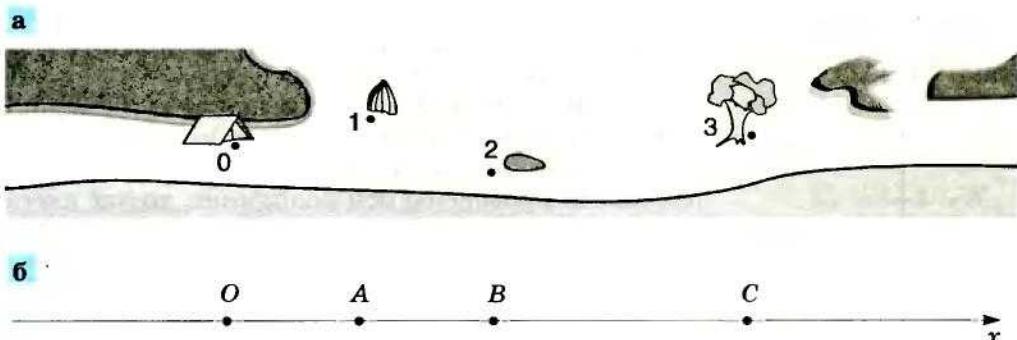


Рис. 140

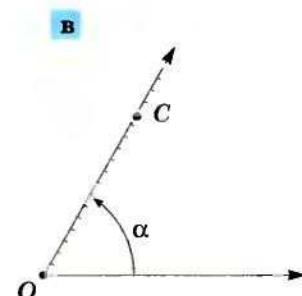
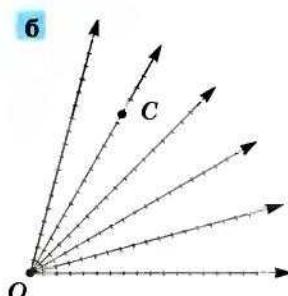
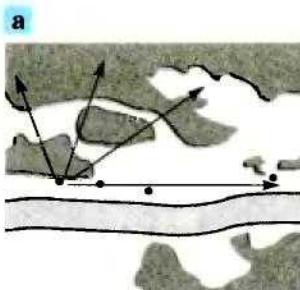


Рис. 141

по нему, стараясь сохранять прямолинейность движения (рис. 141, а). Рассказывая по возвращении друг другу о виденном, каждый вводил фактически систему координат на своей прямой (рис. 141, б). Выяснилось, что несколько объектов находится на одинаковом расстоянии от палатки. И для того чтобы представить себе их расположение, очень важно правильно указать, каково *направление* на каждый из этих объектов, или под каким углом к первоначально выбранной прямой (реке) нужно идти, чтобы попасть к указанному объекту. Таким образом, для указания положения каждого объекта понадобилось, кроме основной прямой (реки), точки отсчёта (палатки) и единицы измерения расстояния (шага), определить направление, которое можно задать, например, с помощью угла между ним и направлением течения реки (рис. 141, в). Так у вас *появилась система координат на плоскости*.

Если же кто-нибудь увидел дупло белки, гнездо птицы или гриб, выросший на стволе дерева, то для описания их положения пришлось ещё добавить указание высоты, на которой они расположены. Появилась необходимость ввести координаты в *пространстве*.

Из приведённых примеров видно, что координаты объекта, расположенного на прямой (на плоскости или в пространстве), — это числа, с помощью которых точно определяется положение этого объекта. В первом случае это одно число; во втором случае — два числа (в приведённом примере это угол и расстояние); в третьем случае — три числа (угол, расстояние и высота).

**11.2. Прямоугольная система координат на плоскости.** Для определения положения точки на плоскости существуют различные системы координат. Мы рассмотрим только одну, *прямоугольную систему координат*. Такой системой координат мы уже пользовались (см. рис. 135).

Прямоугольная система координат состоит из двух взаимно перпендикулярных числовых прямых, имеющих общее начало отсчёта (рис. 142). Одна из осей обозначается  $Ox$ , другая —  $Oy$ .

Прямые  $Ox$  и  $Oy$  называются *осами координат*. Общее начало отсчёта этих числовых прямых называется *началом координат*. Если на плоскости проведены оси координат, то эту плоскость называют *координатной плоскостью*.

**11.1.** Вспомни, чем числовая прямая отличается от прямой, и выбери из рисунков (рис. 143) тот, который изображает координатную плоскость.

Рис. 142

**Проверь себя.** Рисунок 143, а не является изображением координатной плоскости, так как на нём не указаны направления, начало отсчёта и единичный отрезок; рисунок 143, б не является изображением координатной плоскости, так как на нём не указан единичный отрезок. На рисунке 143, в изображены две взаимно перпендикулярные прямые, на которых выбраны направления, начало отсчёта и единичный отрезок. Этот рисунок изображает координатную плоскость. На рисунке 143, г тоже изображена координатная плоскость с так называемой *косоугольной* системой координат.

На рисунке 144, а изображена прямоугольная система координат и точка  $K$ . Для определения координат точки  $K$  поступают следующим образом:

- опускают из этой точки перпендикуляр на ось  $Ox$  (обозначим его  $KK_1$  — рис. 144, б);
- определяют число, соответствующее точке  $K_1$  на этой оси (координату точки  $K_1$  по оси  $Ox$ ), которая в нашем случае равна 3;
- опускают из точки  $K$  перпендикуляр на ось  $Oy$  (обозначим его  $KK_2$  — рис. 144, в) и определяют число, соответствующее точке  $K_2$  на этой оси (координату точки  $K_2$  по оси  $Oy$ ); в нашем случае эта координата равна 2.

В результате проведённых построений мы нашли два числа (3 и 2), которые определяют положение точки  $K$ . Каждое из этих чисел имеет свое название: число 3 называется *абсциссой* точки  $K$ , число 2 — *ординатой* точки  $K$ .

Записывают координаты точки рядом с её обозначением в скобках, сначала абсциссу, затем ординату:  $K(3; 2)$ .

**Абсцисса** точки — это координата по оси  $Ox$  основания перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту ось.

**Ордината** точки — это координата по оси  $Oy$  основания перпендикуляра, опущенного из данной точки на эту ось.

При этом оси  $Ox$  и  $Oy$  называются соответственно *осью абсцисс* и *осью ординат*.

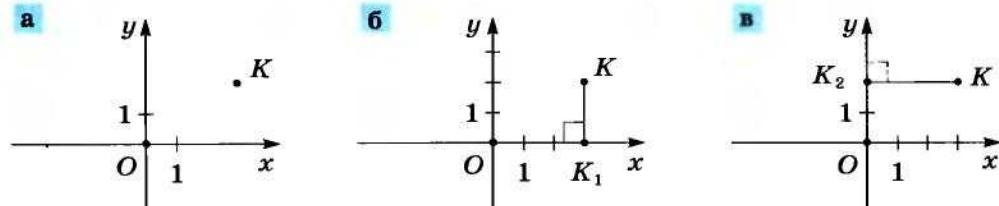


Рис. 144

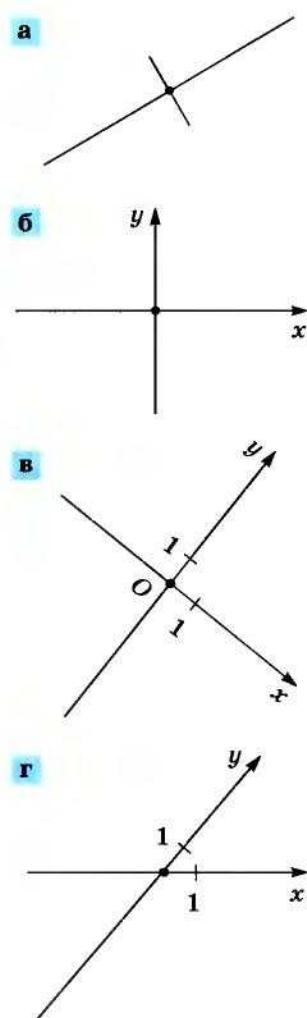


Рис. 143

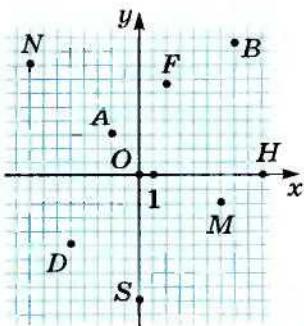


Рис. 145

Слова абсцисса, ордината — латинского происхождения. Слово абсцисса происходит от *abscissa* — отрезанная, отделённая; ордината (однокоренное со словом координата) — упорядоченный.

**11.2.** По рисунку 145 определи: а) абсциссы точек  $A$ ,  $B$ ,  $S$ ; б) ординаты точек  $M$ ,  $N$ ,  $D$ ,  $H$ ,  $O$ .

**11.3.** Определи координаты точек  $F$ ,  $H$ ,  $S$ ,  $O$  (см. рис. 145).

**Подсказка.** Обрати внимание на то, что если точка лежит на оси  $Oy$ , то её абсцисса равна нулю, а если точка лежит на оси  $Ox$ , то её ордината равна нулю.

**11.4.** Какие координаты имеют концы отрезков, изображённых на рисунке 146?

**11.5.** Как построить на координатной плоскости точку  $M$ , абсцисса которой равна 5, а ордината равна 7?

**Проверь себя.** Можно отметить на оси  $Ox$  точку с координатой 5 и провести через эту точку прямую, перпендикулярную оси  $Ox$ , затем отметить на оси  $Oy$  точку с координатой 7 и провести прямую, перпендикулярную оси  $Oy$ . Точка пересечения этих перпендикуляров и есть искомая точка  $M$ . А как иначе можно выполнить это задание?

**11.6.** Построй точки  $A(3; -4)$ ,  $B(-5; 6)$ ,  $C(-8; -1)$ ,  $D(0; -6)$ ,  $E(7; 0)$ .

**11.7.** Начерти четырёхугольник  $DFGH$  по заданным координатам вершин:  $D(-2; 1)$ ;  $F(2; 9)$ ;  $G(6; 1)$ ;  $H(2; -7)$ . Что это за четырёхугольник?

**11.8.** Определи вид четырёхугольника  $KLMN$ , если известны координаты его вершин:  $K(0; 6)$ ,  $L(3; 0)$ ,  $M(-3; -3)$ ,  $N(-6; 3)$ .

**11.9.** Определи взаимное расположение прямых  $AB$  и  $CD$  на плоскости, если: а)  $A(1; -3)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(-3; -1)$ ,  $D(-1; 3)$ ; б)  $A(2; 3)$ ,  $B(4; 5)$ ,  $C(-1; -3)$ ,  $D(7; -1)$ .

**11.10.** Построй точки с координатами  $(-2; 0)$ ,  $(-2; 4)$ ,  $(-2; -7)$ . Обозначь их. Как расположены на координатной плоскости все точки, абсцисса каждой из которых равна  $-2$ ? Ответ поясни.

**Проверь себя.** Ответ к задаче приведён на рисунке 147.

**11.11.** Как расположены на координатной плоскости все точки, ордината каждой из которых равна 5?

**11.12.** Где на координатной плоскости расположены все точки, у которых: а) абсциссы положительны; б) ординаты отрицательны;

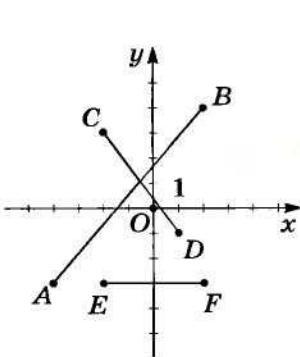


Рис. 146

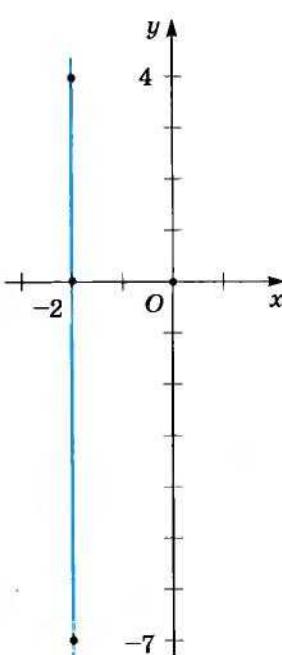


Рис. 147

а

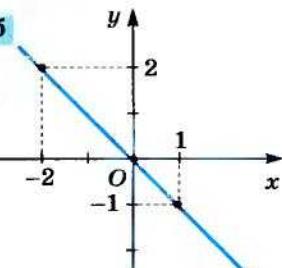
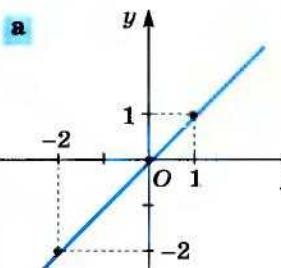


Рис. 148

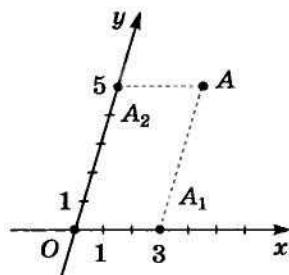


Рис. 149

в) обе координаты отрицательны; г) одна из координат положительна, а другая — отрицательна?

**11.13\***. Где лежат все точки плоскости, для которых: а) абсцисса и ордината положительны; б) абсцисса и ордината имеют разные знаки?

**11.14\***. Как расположены на координатной плоскости все точки, у которых: а) абсцисса равна ординате; б) абсцисса противоположна ординате?

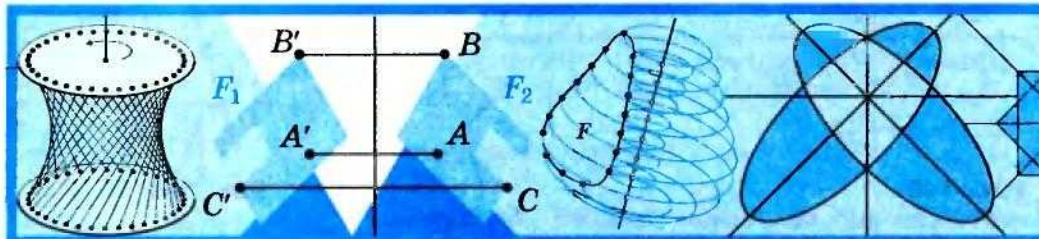
▼ **Проверь себя.** Ответы к задаче приведены на рисунке 148.

**11.15\***. Нарисуй все точки плоскости: а) абсциссы которых положительны и меньше единицы; б) абсциссы и ординаты которых положительны и меньше единицы.

**11.16\***. Придумай, как определить координаты точки в системе координат, оси которой не перпендикулярны друг другу (рис. 149). Ты знаешь, что такая система координат называется *косоугольной*.

## Глава 3

### Движения фигур



## § 12 Понятие преобразования фигуры

a



б



Рис. 150

### 12.1. Что такое преобразование фигуры?

Мы часто можем наблюдать разнообразные изменения предметов. Например, мы видим, как на ветру *меняется форма флага или паруса* (рис. 150, а), как *меняется положение флюгера* при изменении направления ветра или как *изменяются размеры воздушного шара* во время его надувания (рис. 150, б).

Многие изменения предметов могут быть изучены с геометрической точки зрения. В геометрии реальные предметы заменяются геометрическими фигурами, а изменения предметов описываются *геометрическими преобразованиями фигуры*. При этом для геометрии существенным является не действие, происходящее с фигурой, а изменение этой фигуры, которое описывается начальным и конечным её положениями.

Приставка пре- в слове *преобразование* имеет смысл *пере-*. Значит, преобразование — иначе *переделывание, изменение*.

Под *преобразованием фигуры* мы будем понимать любое изменение её формы, размеров или положения в пространстве.

Если фигура  $F_1$ , после преобразования превратилась в фигуру  $F_2$ , то фигуру  $F_2$  называют *образом фигуры  $F_1$*  (рис. 151). Возможно, тебе знакомо это слово «образ». Например, мы можем сказать: «Артист создал на сцене (или в кино) яркий *образ* такого-то человека», или «Образ, который создаёт своим поведением этот молодой человек, не соответствует ему самому», или «Карикатурист создал такой образ своего товарища, что без слёз на него

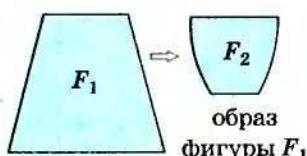


Рис. 151

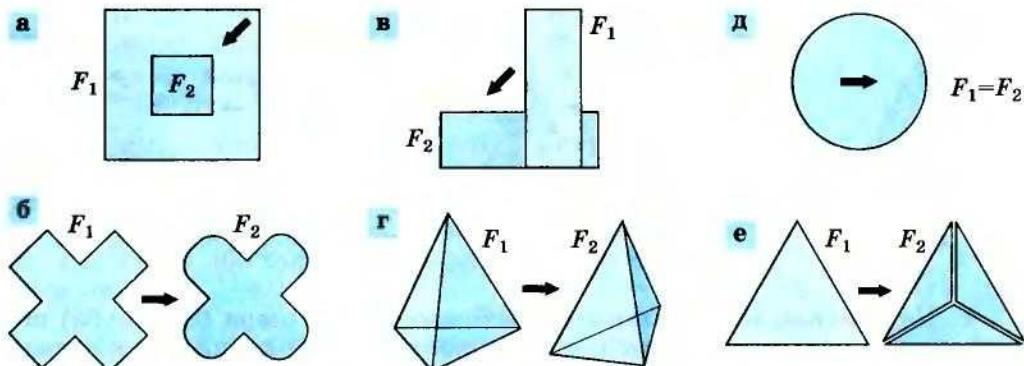


Рис. 152

и смотреть нельзя». Образ какого-то объекта — это новый вид этого объекта. Так и в геометрии: образ фигуры — это её новое «состояние», то, что получилось после преобразования.

Про фигуры, одна из которых является образом другой при некотором преобразовании, мы будем говорить, что они *связаны этим преобразованием*.

**12.1.** Расскажи, какие изменения произошли с фигурой  $F_1$  в каждом случае (рис. 152).

**12.2.** Придумай какие-нибудь модели, на которых можно было бы увидеть преобразования отрезка и окружности в различные линии (рис. 153, а, б).

**12.3.** Как можно с помощью непрерывного преобразования круга или прямоугольника получить многоугольник или части поверхностей тел: цилиндров, конусов и др. (рис. 153, в, г)?

**Совет.** Возьми кусочек тонкой эластичной резины, например часть испорченного воздушного шарика.

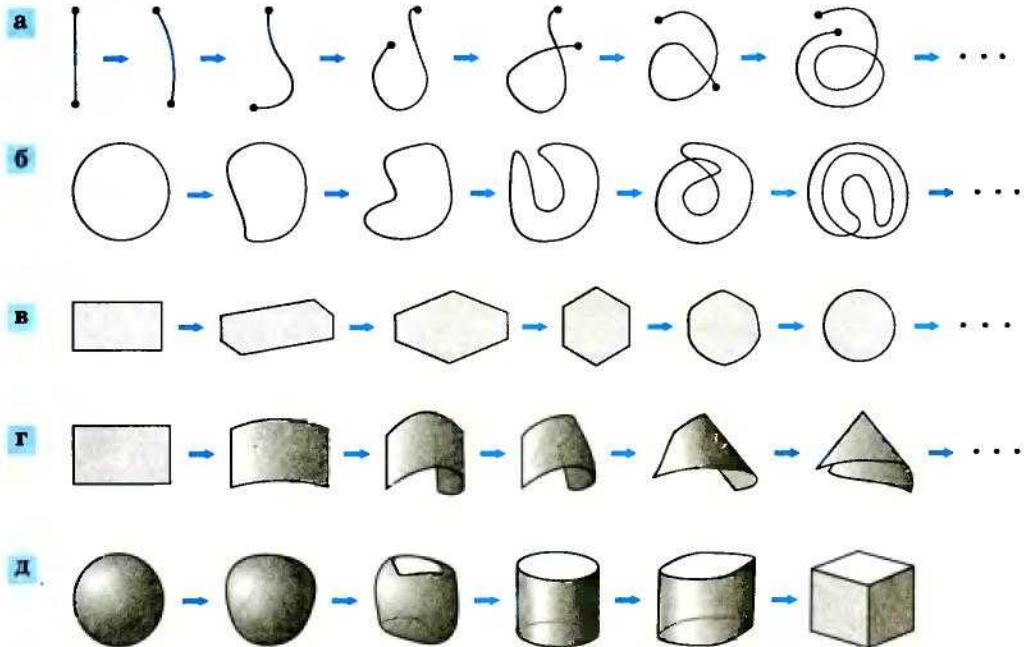


Рис. 153

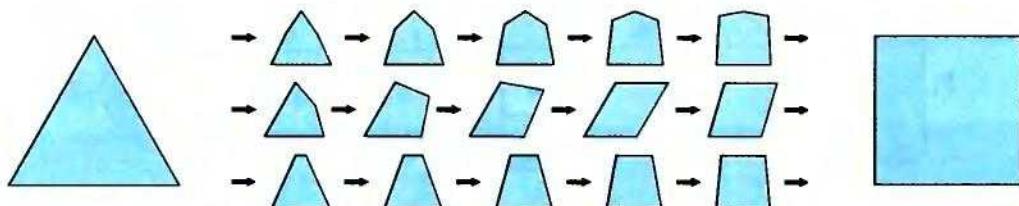


Рис. 154

**12.4.** Как можно непрерывным преобразованием шара (или куба) получить известные тебе тела и любые конструкции из них, в которых нет дырок (рис. 153, *д*)?

**12.5.** Используя каркасные модели, преобразуй: а) прямоугольник в параллелограмм; б) прямоугольный параллелепипед в наклонный.

**12.6.** Нарисуй на поверхности воздушного шарика какую-нибудь фигуру и проследи за тем, как при надувании шарика меняется форма фигуры. Нарисуй разные этапы изменения формы этой фигуры.

Обрати внимание на связь того, что мы обсуждаем сейчас, с тем, что мы наблюдали на картинках в п. 9.3, когда говорили о действиях с фигурами. Там на рисунках мы видели действия, которые происходили с фигурами в течение некоторого времени. Здесь мы интересуемся не действием, а только начальным и конечным положениями фигуры. Об этом можно сказать так: «Нас интересует не процесс, а его результат».

Мы часто встречаемся с такими ситуациями. Например, нам, как правило, не важно, *как* композитор сочиняет музыку или поэт пишет стихи, но нам очень важно, *что* именно они сочинили. Заметим, что разные действия с фигурами могут приводить к одному и тому же результату. Иначе говоря, разные действия с фигурами могут соответствовать одному и тому же преобразованию (рис. 154).

**12.2. Какие преобразования фигур бывают?** Есть такие преобразования, которые могут «разорвать» фигуру (рис. 155, *а*), а есть такие, которые плавно (непрерывно) меняют её форму (рис. 155, *б*). Есть такие преобразования, которые хоть и меняют форму фигуры, но сохраняют её «прямолинейность» (рис. 155, *в*). Есть преобразования, которые сохраняют форму фигуры, но меняют её размеры (рис. 155, *г*). И наконец, есть преобразования, которые сохраняют не только форму, но и размеры фигуры, а меняют только её положение в пространстве (рис. 155, *д*, *е*).

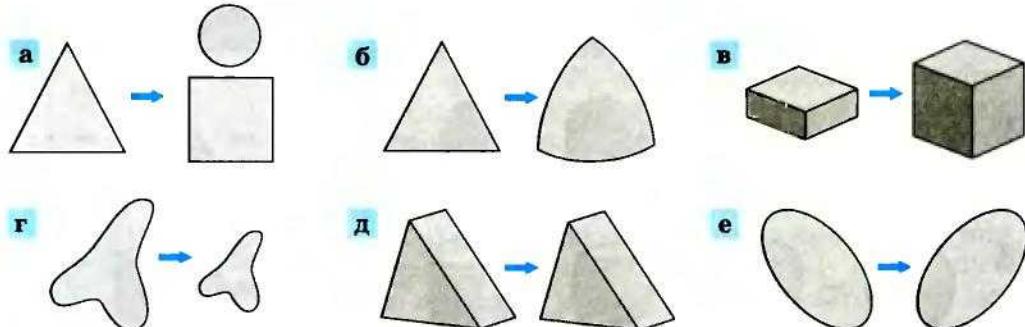


Рис. 155

**12.7.** На рисунке 156 изображены пары фигур. Попробуй представить себе и рассказать, что нужно в каждом случае сделать, чтобы из первой фигуры получить вторую.

▼ **Проверь себя.** Чтобы получить фигуру  $F_2$ , надо фигуру  $F_1$ : а) перенести вдоль прямой, не поворачивая её; б) повернуть; в) перевернуть; г) равномерно растянуть; д) сжать сверху; е) «раздуть» из точки, лежащей внутри треугольника.

Мы будем в основном рассматривать такие преобразования фигуры, которые *не меняют её форму и размеры* (рис. 157). Реальными примерами некоторых таких преобразований могут быть перемещения предметов: движение машины, стрелки часов и др. В геометрии, как и в жизни, они называются *движениями*, только в геометрии интересуются не процессом преобразования фигуры, а начальным и конечным её положениями в этом процессе.

Под **движением** фигуры будем понимать такое преобразование этой фигуры, которое не меняет её форму и размеры.

При этом конечное положение фигуры является *образом фигуры* при рассматриваемом движении. Связанные движением фигуры — это две одинаковые (равные) фигуры. В геометрии так и определяют равные фигуры:

**Две фигуры называют равными,** если одна из них есть образ другой при некотором движении.

Это определение соответствует нашим привычным представлениям: чтобы проверить на практике равенство двух плоских фигур, мы пытаемся наложить их друг на друга так, чтобы они совпали.

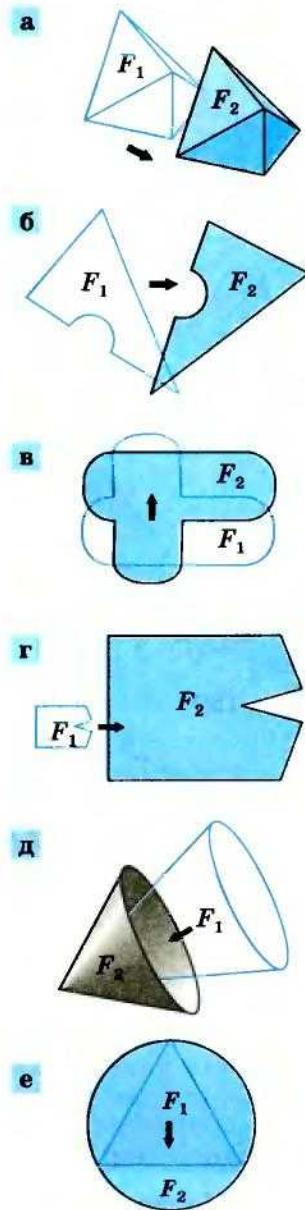


Рис. 156

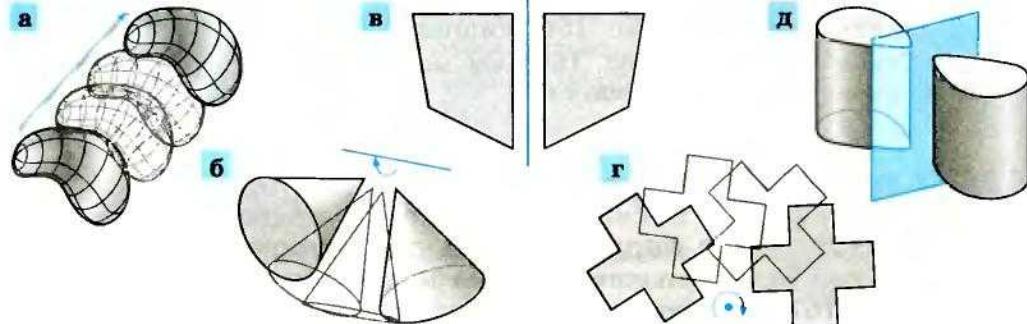


Рис. 157

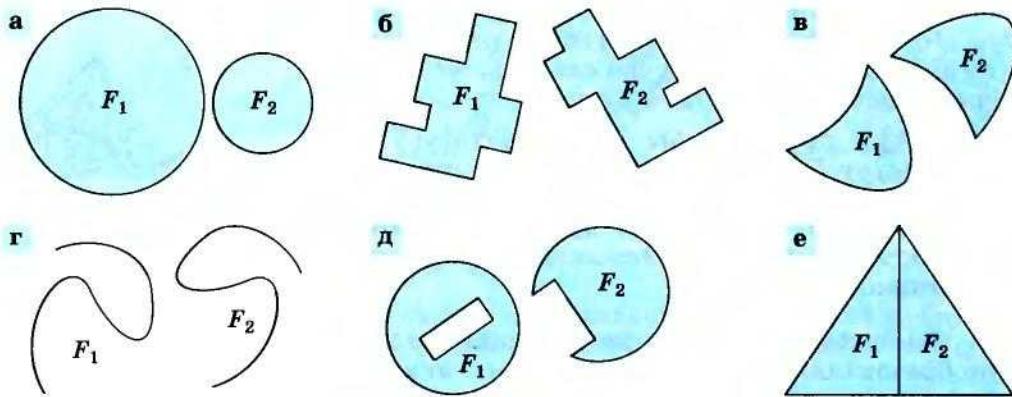


Рис. 158

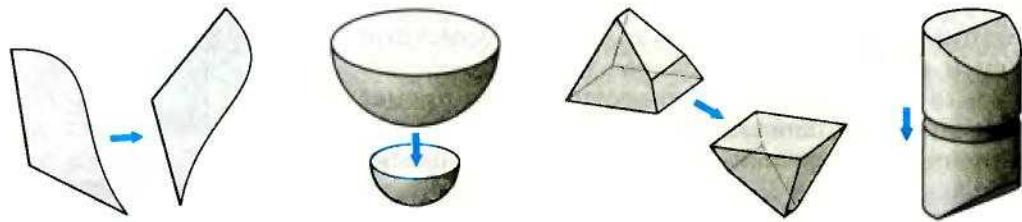


Рис. 159

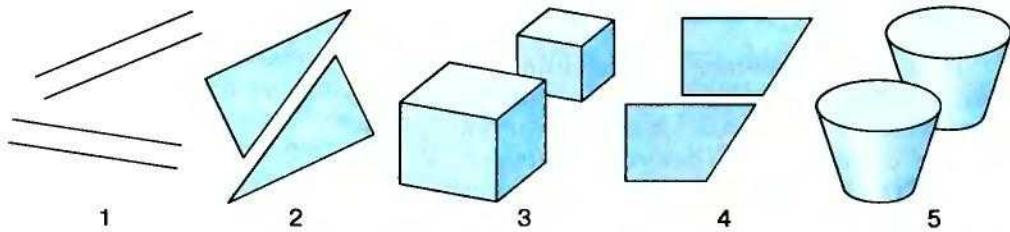


Рис. 160

**12.8.** На каких рисунках (рис. 158) изображены фигуры, связанные каким-нибудь движением? В каждом таком случае покажи фигуру и её образ при движении.

**Совет.** Воспользуйся калькой.

**12.9.** Нарисуй какую-нибудь фигуру, а затем другую фигуру, которая из первой может быть получена движением.

**Совет.** Если ты придумал сложную фигуру, то для решения задачи помоги себе, изготовив шаблон.

**12.10.** Какая картинка (рис. 159) лишняя?

**12.11.** Какую картинку (рис. 160) ты можешь связать со словосочетанием «параллельный перенос»?

## § 13 Параллельный перенос

**13.1. Знакомство с параллельным переносом фигур.** Реальным примером параллельного переноса может служить перемещение лифта (рис. 161, а). Нажимая на кнопку, мы попадаем («переносимся») с одного этажа на другой.

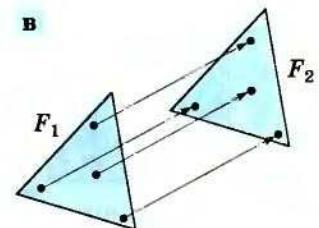
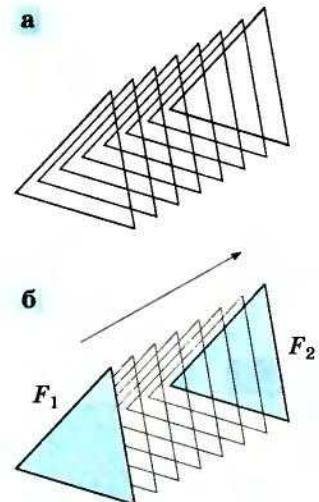
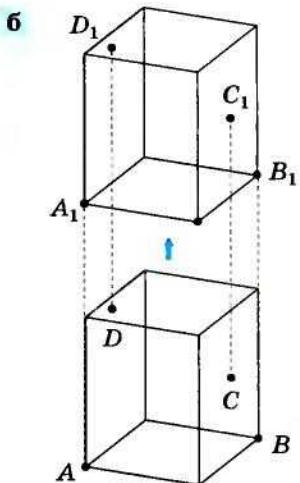


Рис. 161

На рисунке 161, б изображена геометрическая модель параллельного переноса лифта. При этом параллельном переносе точка  $A$  перешла в точку  $A_1$ , точка  $B$  — в точку  $B_1$ , точки  $C$  и  $D$  — соответственно в точки  $C_1$  и  $D_1$ . Сравни длины и взаимное расположение отрезков  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  — ты заметишь, что, во-первых, эти отрезки все равны между собой и, во-вторых, все они параллельны направлению перемещения кабины лифта. Именно поэтому перенос и называется параллельным.

На рисунке 162, а изображено действие фигуры, которое состоит только из прямолинейного перемещения. Теперь нас интересуют только начальное и конечное положения фигуры. Мы будем говорить, что фигуры  $F_1$  и  $F_2$  (рис. 162, б) связаны параллельным переносом или просто переносом. Ясно, что при этом фигуры  $F_2$  и  $F_1$  равны между собой и все точки фигуры  $F_1$  переместились в одном и том же направлении на одно и то же расстояние (рис. 162, в), причём фигура  $F_2$  — образ фигуры  $F_1$ .

Говорят, что совершён **параллельный перенос** фигуры, если все её точки перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Иллюстрацию свойств параллельного переноса можно увидеть в повторяющихся окнах дома (рис. 163, а), в секциях оград, в повторении рисунков на обоях, кафельных плитках (рис. 163, б) и др. Приведи и сам соответствующие примеры.

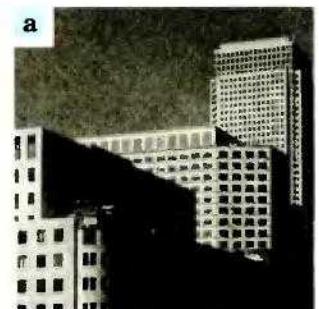


Рис. 163

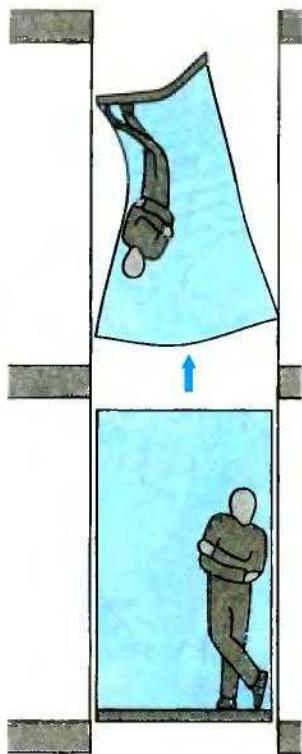


Рис. 164

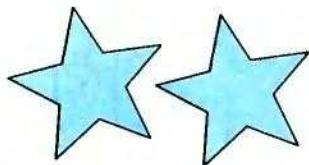


Рис. 165

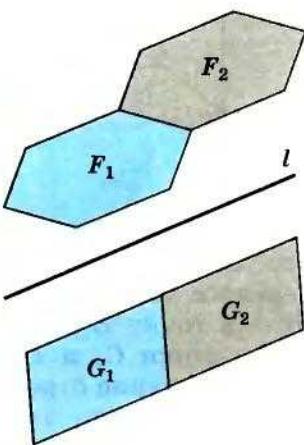


Рис. 166

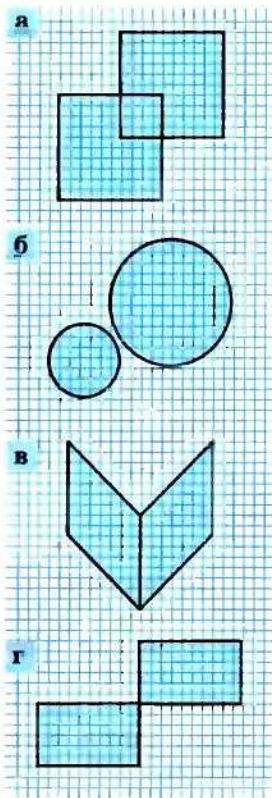


Рис. 167

**13.1.** Изображая перемещение кабины лифта (рис. 164), художник допустил некоторые неточности. Найди эти неточности.

**13.2.** Для фигур, изображённых на рисунках 165, определи направление и расстояние, на которые произведён параллельный перенос.

**13.3.** Верно ли, что в каждом случае (рис. 166) вторая фигура связана с первой параллельным переносом вдоль указанной на рисунке прямой  $l$ ? Как определить расстояние, на которое совершён параллельный перенос?

**13.4.** Перерисуй пары фигур (рис. 167). Для каждой из них укажи, если возможно, параллельный перенос, который связывает эти фигуры.

**Совет.** Укажи прямую, вдоль которой перенос происходит, и отрезок, длина которого равна расстоянию переноса.

**13.5.** Для каждой пары фигур (рис. 168) определи (если возможно) прямую, при переносе вдоль которой фигура  $F_1$  может перейти в фигуру  $F_2$ . Проверь себя с помощью кальки.

В дальнейшем мы будем указывать параллельный перенос стрелкой (рис. 169), которая будет показывать направление переноса. Длина отрезка покажет расстояние, на которое

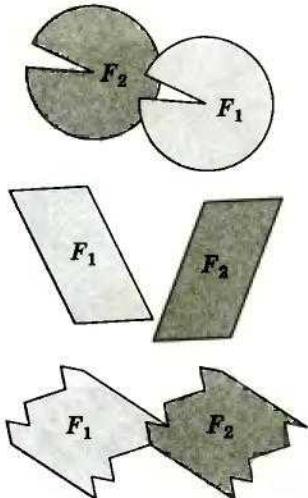


Рис. 168

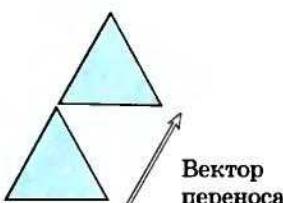


Рис. 169

этот перенос совершается. Такой направленный отрезок будем называть *вектором* или *вектором переноса*.

На рисунке 170, а таким вектором может являться отрезок  $\overrightarrow{AB}$ . Чтобы отличать отрезок  $AB$  от вектора  $\overrightarrow{AB}$ , мы будем над вектором рисовать стрелочку. Вот так:  $\overrightarrow{AB}$ , и при этом точку  $A$  будем называть началом вектора  $\overrightarrow{AB}$ , а точку  $B$  — его концом.

Перенос фигуры  $F_1$  на вектор  $\overrightarrow{BA}$  даст нам совсем другой результат — фигуру  $F_3$  (рис. 170, б).

Про фигуру  $F_2$  (рис. 171, а) можно сказать, что фигура  $F_2$  получена из фигуры  $F_1$  параллельным переносом на вектор  $\overrightarrow{MN}$ . Но можно сказать также, что фигура  $F_2$  получена из фигуры  $F_1$  параллельным переносом на вектор  $\overrightarrow{C_1C_2}$  или  $\overrightarrow{D_1D_2}$  (рис. 171, б), так как все точки фигуры  $F_1$  перемещаются в одном направлении на одно и то же расстояние.

**13.6.** Укажи, если возможно, параллельный перенос, при котором: а) одно из выделенных цветом рёбер куба (рис. 172) может перейти в другое выделенное цветом ребро; б) одна из выделенных цветных граней куба (рис. 173) может перейти в другую его выделенную грань. Сделай соответствующие рисунки.

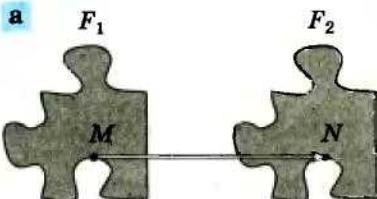


Рис. 171

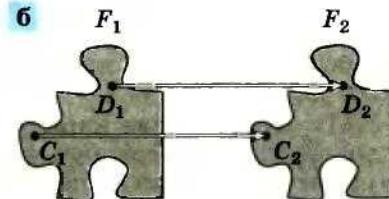


Рис. 172

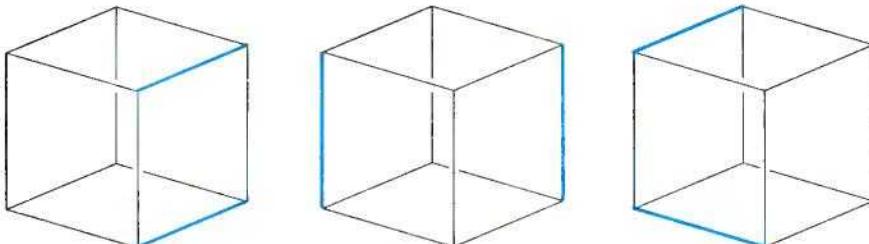


Рис. 173

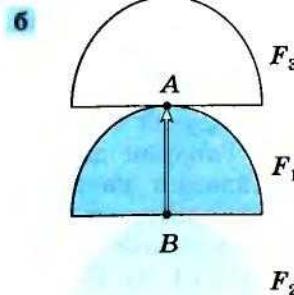
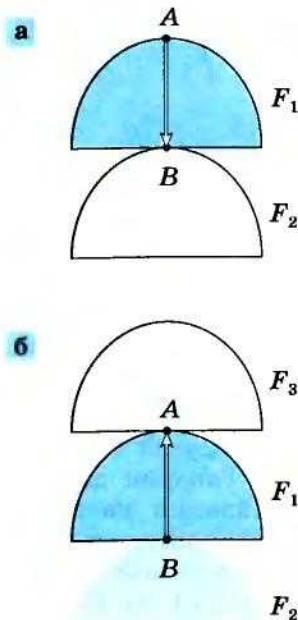
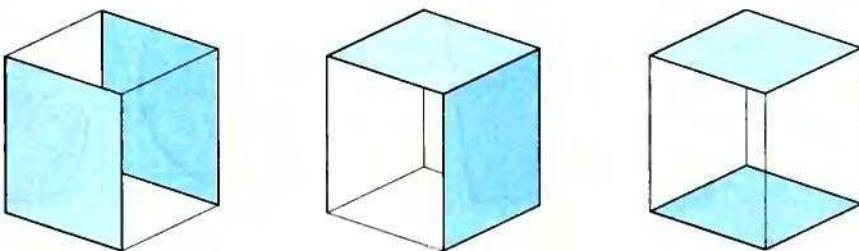


Рис. 170

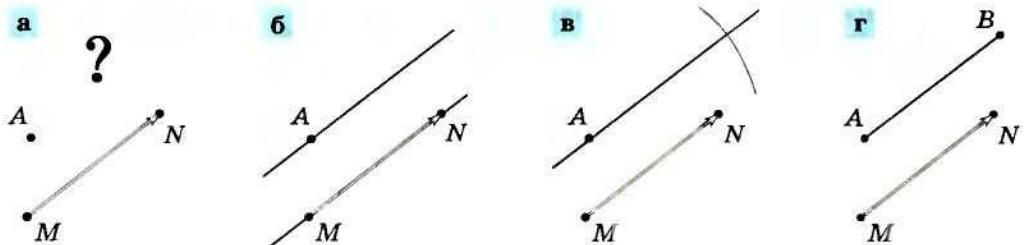


Рис. 174

### 13.2. Построение образов фигур при параллельном переносе.

Самой простой фигурой является точка. Пусть дана точка  $A$  и указан вектор переноса  $\vec{MN}$  (рис. 174, а). Как построить точку  $B$ , которая получится из точки  $A$  указанным параллельным переносом?

Так как данная точка должна быть перенесена в указанном направлении на данное расстояние, то достаточно построить прямую, проходящую через точку  $A$  параллельно прямой  $MN$  (рис. 174, б), и в нужном направлении отложить отрезок, равный отрезку  $MN$  (рис. 174, в). Конец построенного отрезка и есть искомая точка — точка  $B$  (рис. 174, г), образ данной точки  $A$  при переносе на вектор  $\vec{MN}$ .

**13.7.** Отметь в тетради три точки и нарисуй вектор. Построй образы данных точек при параллельном переносе на этот вектор.

**13.8.** Построй отрезок  $AB$  и вектор  $\vec{MN}$ . Построй цветным карандашом образ отрезка  $AB$  при параллельном переносе на вектор  $\vec{MN}$ .

**13.9.** Каково взаимное расположение при параллельном переносе: а) отрезка и его образа; б) луча и его образа; в) прямой и её образа? Сделай соответствующие рисунки цветными карандашами.

**13.10.** Перерисуй фигуры, изображённые на рисунках (рис. 175), и построй цветным карандашом их образы при указанных параллельных переносах.

**13.11.** Построй две параллельные прямые  $a$  и  $b$ . Построй вектор, при параллельном переносе на который: а) прямая  $a$  передёт в прямую  $b$ ; б) прямая  $b$  передёт в прямую  $a$ . Сколько таких векторов ты можешь построить?

**13.12.** Сформулируй и реши задачу, аналогичную предыдущей: а) для двух параллельных плоскостей; б) для двух равных окружностей; в)\* для двух равных кубов. Всегда ли эта задача имеет решение?

**13.13.** Построй какие-нибудь две фигуры, связанные между собой параллельным переносом.

**13.14.** Какая картинка лишняя (рис. 176)?

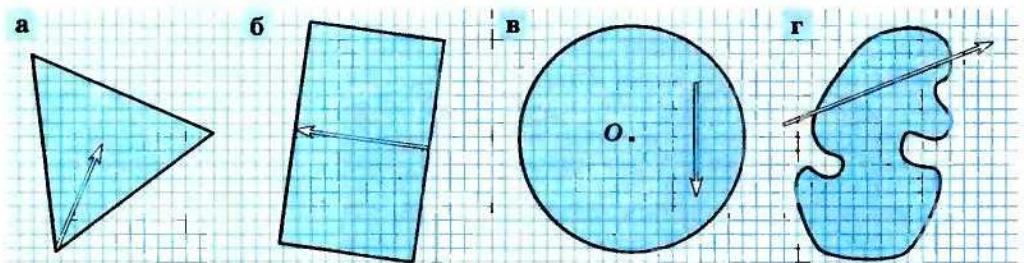


Рис. 175

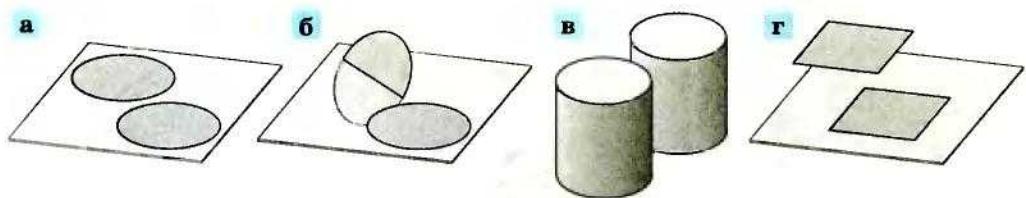


Рис. 176

**13.15\***. Изобрази куб и фигуру, которая получается при параллельном переносе четырёхугольника  $MNPQ$  на вектор  $\vec{PP_1}$  (рис. 177).

**13.16.** При каком параллельном переносе плоская фигура может остаться в своей плоскости?

**Подсказка.** Смотри рисунок 178.

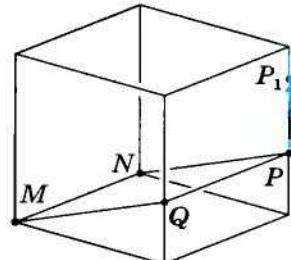


Рис. 177

## § 14 Поворот фигуры на плоскости

**14.1. Поворот фигуры вокруг точки.** Самым простым примером реального поворота на плоскости служат стрелки часов. Стрелки всё время находятся в плоскости, параллельной плоскости циферблата. Показания времени зависят от того, на какой угол повернулись стрелки.

**14.1.** Перерисуй три раза циферблат (рис. 179) и укажи положение минутной стрелки по отношению к указанному положению: а) через 10 минут; б) через 15 минут; в) 15 минут тому назад. В каждом случае определи, на какой угол повернулась стрелка.

В дальнейшем мы будем сравнивать направление поворота с поворотом часовой стрелки и говорить о повороте *по часовой стрелке* или *против часовой стрелки*.

Мы уже встречались с поворотом фигуры: отрезок, поворачиваясь вокруг одного из своих концов на полный угол (рис. 180, а), «зарисовывал» круг; луч, поворачиваясь вокруг своего начала, — угол (рис. 180, б).

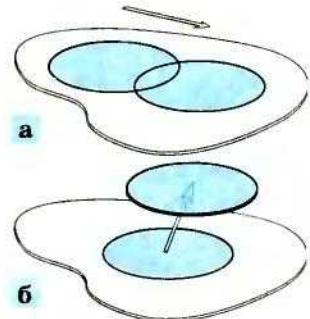


Рис. 178

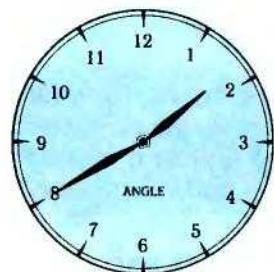


Рис. 179

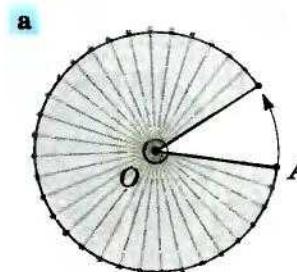


Рис. 180

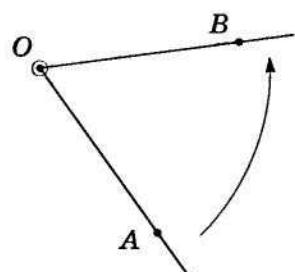
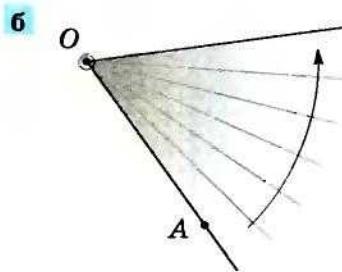
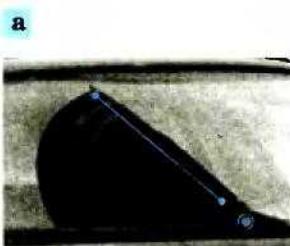




Рис. 181



а

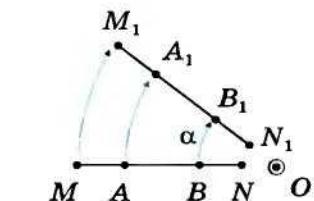
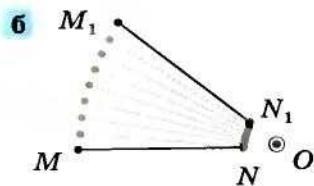


Рис. 182

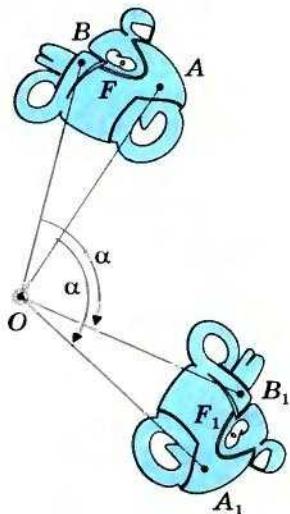


Рис. 183

Рассмотрим работу стеклоочистителя автомобиля. Каждая точка его щётки рисует на стекле линию (рис. 181). Очевидно, что это — дуги окружностей, имеющих общий центр. Этот центр находится в точке крепления стеклоочистителя, которую можно считать *неподвижной*.

Представим щётку стеклоочистителя в виде отрезка  $MN$ , а его крепление — точкой  $O$  (рис. 182, а). Чтобы определить преобразование отрезка, следует рассматривать только его начальное ( $MN$ ) и конечное ( $M_1N_1$ ) положения. При этом (рис. 183) все точки фигуры будут поворачиваться вокруг точки  $O$  на один и тот же угол, оставаясь в плоскости этой фигуры (рис. 182, б). Такое преобразование может быть применено не только к отрезку, но и к любой другой плоской фигуре.

Говорят, что в плоскости совершён **поворот** фигуры  $F$  на некоторый угол  $\alpha$  вокруг точки  $O$ , если все её точки повернулись вокруг точки  $O$  в одном и том же направлении на один и тот же угол  $\alpha$ . Точка  $O$  называется *центром поворота*, а угол  $\alpha$  — *углом поворота*.

**14.2.** На рисунке 184 изображены пары фигур. Какая из них иллюстрирует определение поворота фигуры? В каждом таком случае определи центр и угол поворота.

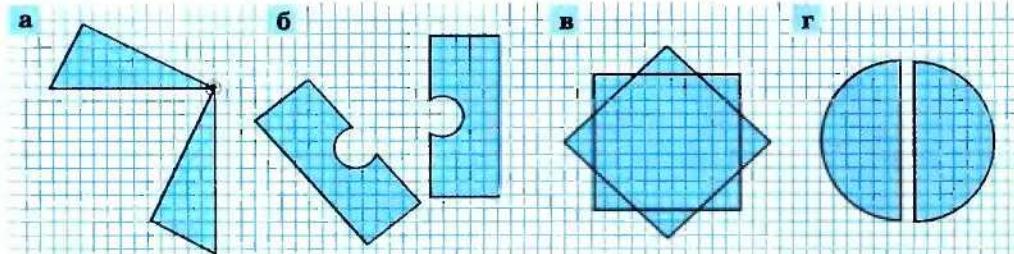


Рис. 184

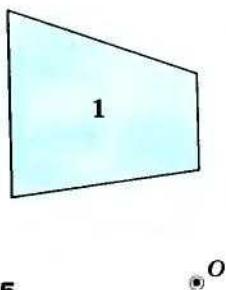
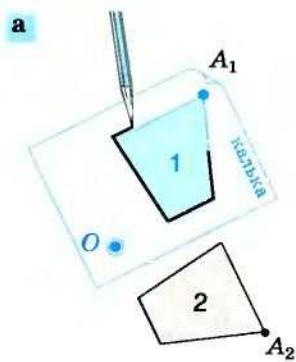
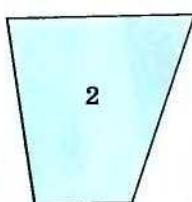


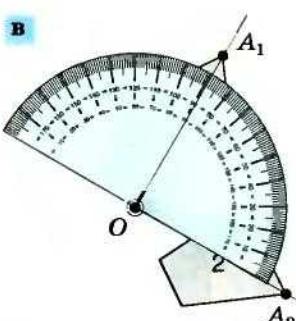
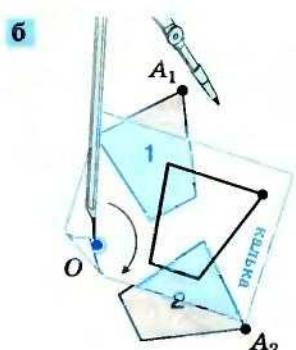
Рис. 185



**14.3.** Проверь с помощью кальки, что на рисунке 185 изображены фигуры: а) равные; б) связанные друг с другом поворотом вокруг точки  $O$ . Определи угол поворота.

**Совет.** Воспользуйся следующим алгоритмом:

- скопируй фигуру 1 на кальку (рис. 186, а);
- закрепи кальку с помощью ножки циркуля в центре поворота;
- поверни кальку (рис. 186, б) так, чтобы совместились, например, точки  $A_1$  и  $A_2$  фигур 1 и 2;
- если это удалось сделать и фигуры 1 и 2 совместились, то они связаны поворотом (в противном случае нет такого поворота вокруг точки  $O$ , при котором образом фигуры 1 была бы фигура 2);
- при совмещении фигур измерь угол поворота (рис. 186, в).



**14.4\*.** Построй окружность и найди поворот этой окружности, при котором она останется на месте.

**14.5.** Какая фигура может быть получена из фигуры  $F$  (рис. 187) поворотом вокруг данной точки  $O$  на: а) острый угол; б) прямой угол; в) тупой угол.

**14.6.** Выбери пары фигур, связанных поворотом вокруг точки  $O$  (рис. 188). Проверь свой выбор с помощью кальки.

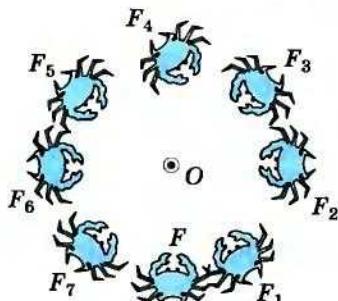


Рис. 187

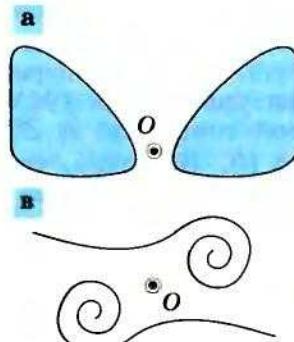
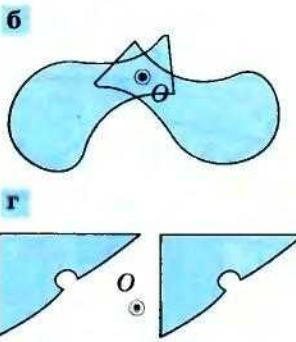


Рис. 188



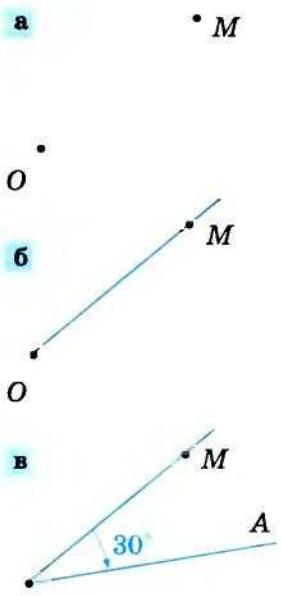


Рис. 189

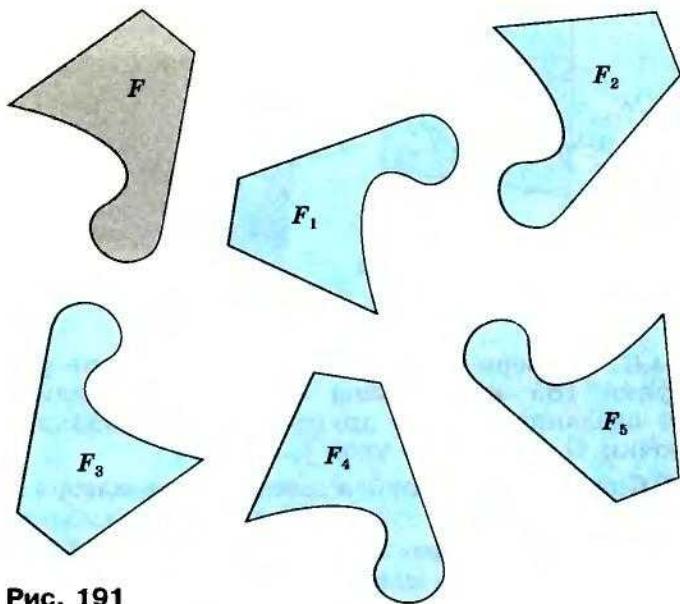


Рис. 191

**14.2. Построение образа фигуры при повороте вокруг точки.** Начнём с самой простой фигуры — точки.

**14.7.** Отметь в тетради точки  $M$  и  $O$ . Построй точку  $M'$  — образ точки  $M$  при повороте вокруг точки  $O$  на угол  $30^\circ$  по часовой стрелке.

**Проверь себя.** Для построения образа точки (рис. 189, а): построим луч  $OM$  (рис. 189, б); отложим от этого луча в направлении движения часовой стрелки угол  $MOA$ , равный  $30^\circ$  (рис. 189, в); проведём дугу окружности с центром в точке  $O$  и радиусом, равным длине отрезка  $OM$ , до пересечения с лучом  $OA$  в точке, которая и есть искомая точка  $M'$  (рис. 189, г).

**14.8.** На рисунках (рис. 190) изображены фигуры и отмечены точки. Сделай такие же рисунки и построй образ каждой фигуры при каком-нибудь повороте относительно указанной точки. Угол и направление поворота выбери сам. Проверь измерением, что в случаях б и в угол между прямой и её образом равен углу поворота.

**14.9.** Какая фигура может быть получена из фигуры  $F$  (рис. 191) поворотом вокруг некоторой точки на: а)  $30^\circ$ ; б)  $120^\circ$ ?

**14.10.** Известно, что отрезки  $AB$  и  $CD$ : а) равны и параллельны; б) равны и имеют общую середину. Каким движением они могут быть связаны?

**14.3. Новый взгляд на поворот фигуры на плоскости.** Мы занимались поворотом плоской фигуры относительно точки, лежащей в плоскости этой фигуры. Но реальные пред-

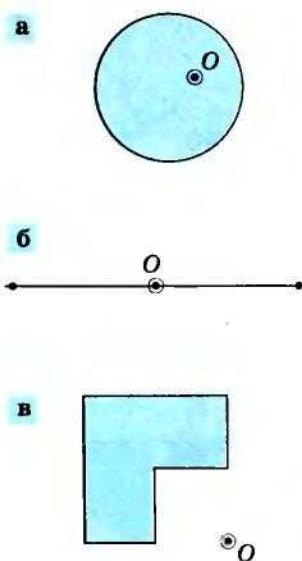


Рис. 190

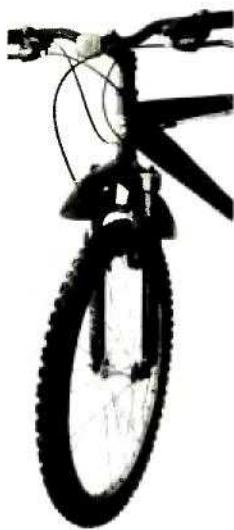


Рис. 192

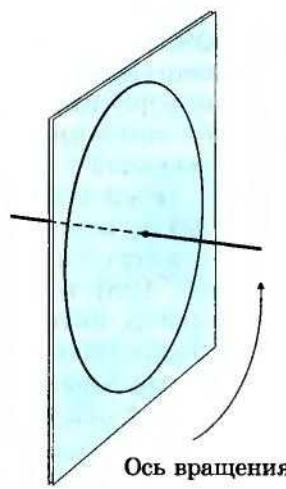


Рис. 193

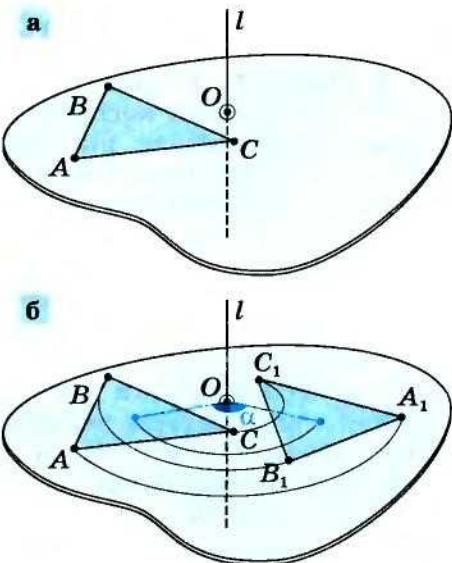


Рис. 194

меты, которые могут быть моделями плоских фигур, обычно вращаются вокруг некоторой оси (прямой). Вспомни, например, маятник часов или колесо велосипеда (рис. 192). Вращаясь вокруг оси, колесо остаётся в своей плоскости и вращается в ней вокруг точки пересечения этой плоскости и оси. Геометрическая иллюстрация этого факта изображена на рисунке 193.

Можно, конечно, рассматривать поворот любой плоской фигуры относительно прямой, перпендикулярной плоскости этой фигуры. Пусть, например, в некоторой плоскости расположена прямая  $l$ , перпендикулярная плоскости треугольника и пересекающая эту плоскость в точке  $O$ . При повороте этого треугольника вокруг прямой  $l$  на угол  $\alpha$  каждая точка этого треугольника в данной плоскости повернётся вокруг точки  $O$  на угол  $\alpha$  (рис. 194, б). (Обрати внимание на то, что на рисунке пути, по которым перемещались вершины треугольника, изображены не окружностями, а эллипсами. Ведь мы смотрим на эти окружности немного сбоку. Образ треугольника  $A'B'C'$  по той же причине мы видим тоже немножко искажённым.)

**14.11.** На рисунке 195 изображены квадрат  $MNPQ$  и прямая  $a$ , проходящая через его центр перпендикулярно плоскости квадрата. Назови образы точек  $M$ ,  $N$ ,  $P$  и  $Q$  при повороте вокруг прямой  $a$ : а) на угол  $90^\circ$ ; б) на угол  $180^\circ$ .

**14.12.** На рисунке 196 изображён куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Точки  $Q$  и  $Q_1$  — центры его граней  $AA_1B_1B$  и  $CC_1D_1D$ . Точки  $E$  и  $F$  — середины рёбер  $C_1D_1$  и  $CC_1$ . Как расположены образы этих точек при повороте вокруг прямой  $QQ_1$ : а) на угол  $90^\circ$ ; б) на угол  $180^\circ$ ? Сделай соответствующий рисунок.

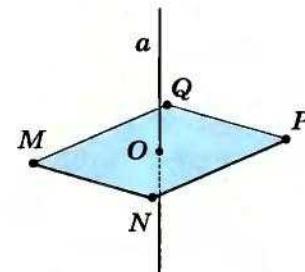


Рис. 195

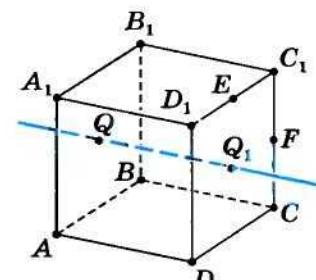


Рис. 196

## § 15 Поворот фигуры в пространстве

**15.1. Поворот фигуры вокруг прямой.** Мы можем вспомнить много таких ситуаций, когда фигура поворачивается (вращается) относительно какой-нибудь прямой. Дверь поворачивается вокруг своего косяка, флюгер — вокруг вертикального стержня, почти все элементы колеса обозрения — вокруг горизонтальной оси (рис. 197), карусель — вокруг столба, волчок — вокруг своей оси.

Во время работы карусели каждая подвижная её часть (и вместе с ней каждая её точка), поворачиваясь вокруг столба, движется по окружности. При вращении волчка (рис. 198) то же самое: каждая его точка движется по окружности, центр которой лежит на оси волчка. Геометрически это означает, что при повороте вокруг прямой каждая точка фигуры перемещается по окружности. Эта окружность расположена в плоскости, перпендикулярной оси поворота, а центр  $O$  этой окружности лежит на оси поворота.

Иначе говоря, если фигуру (рис. 199, *а*) рассматривать как сделанную из параллельных плоских фигур (рис. 199, *б*), то вращение



Рис. 198

Рис. 197

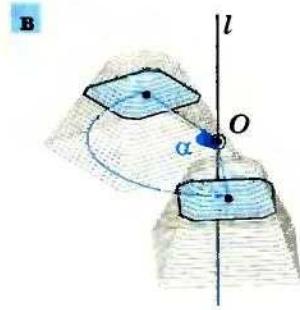
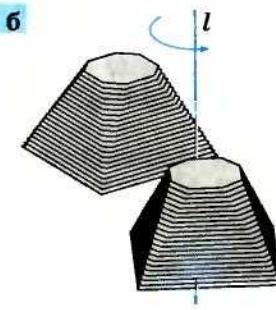
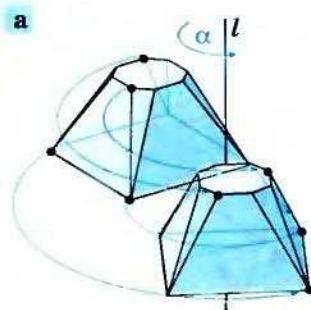


Рис. 199

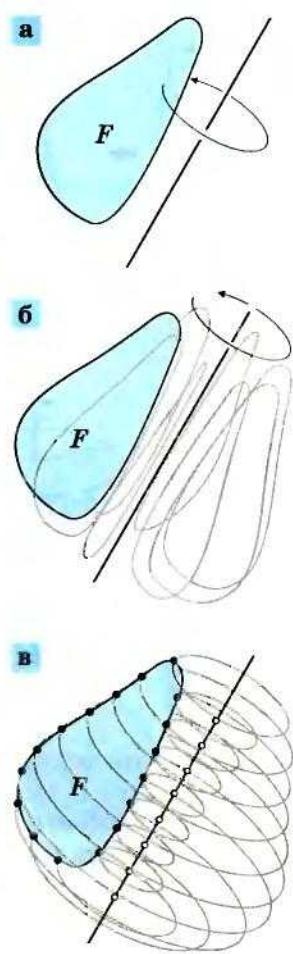
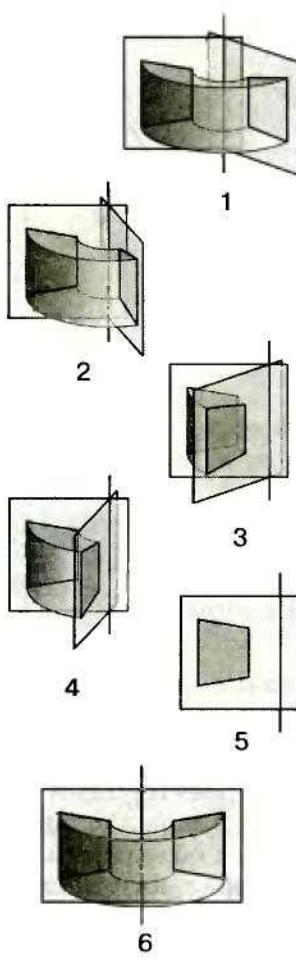
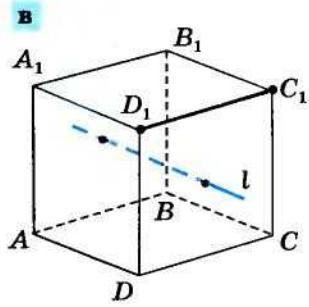
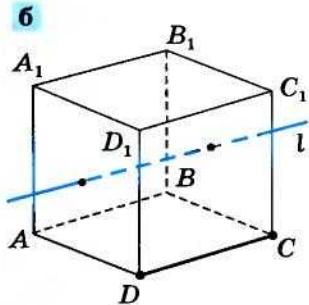
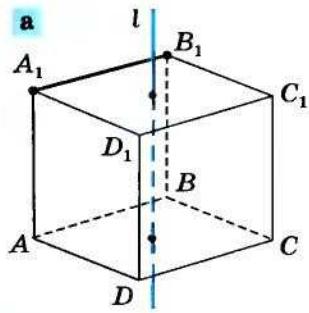


Рис. 200

Рис. 201

Рис. 202

этой фигуры вокруг оси  $l$  — это одновременный одинаковый поворот всех этих плоских «слоёв» вокруг точек, лежащих на оси поворота (рис. 199, в).

**15.1.** На рисунке 200 изображены куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  и прямая  $l$ . В какой отрезок переходит выделенное ребро куба при повороте его вокруг прямой  $l$  на угол  $90^\circ$ ?

**Совет.** Можно помочь себе при решении задачи, проследив за концами выделенного ребра.

**15.2.** Нарисуй четырёхугольную пирамиду  $SABCD$ , у которой в основании квадрат, а высота  $SO$  проходит через его центр. Нарисуй линию, в которую перейдёт ломаная  $SAB$  при повороте вокруг  $SO$  на угол: а)  $90^\circ$ ; б)  $180^\circ$ ?

**15.3.** Нарисуй куб  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Какое преобразование грани  $AA_1B_1B$  куба надо совершить, чтобы её образом была грань: а)  $AA_1D_1D$ ; б)  $ABCD$ ; в)  $A_1B_1C_1D_1$ ?

**15.4.** Определи закономерность и расставь картинки в порядке этой закономерности (рис. 201).

**15.2. Фигуры вращения.** Поворот плоской фигуры на полный угол вокруг оси, лежащей в плоскости этой фигуры, не изменяет фигуру (рис. 202, а). Действие (рис. 202, б), соответствующее этому преобра-

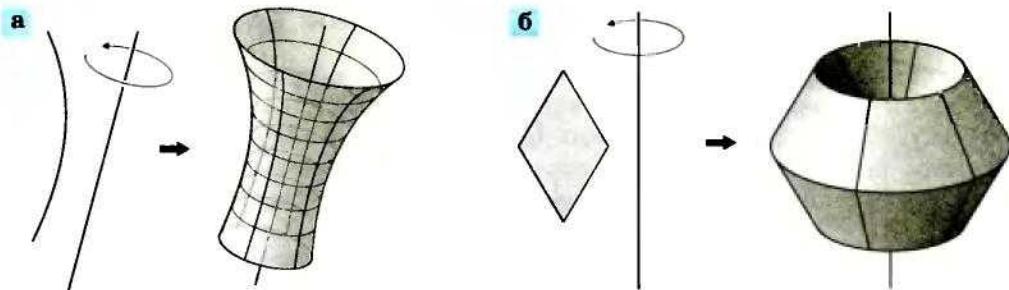


Рис. 203

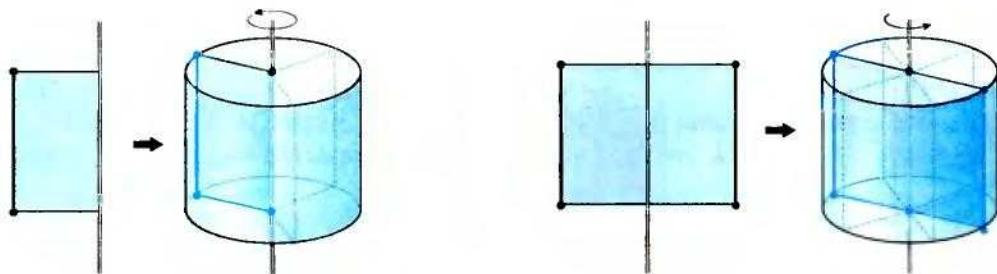


Рис. 204

зованию, представляет собой значительный интерес для получения новых фигур. Проследим за траекториями точек при таком действии. Это — окружности, лежащие в параллельных плоскостях с центрами на оси поворота (рис. 202, в), а объединение таких окружностей образует некоторую фигуру, которая называется *фигурой вращения*.

При вращении плоских линий вокруг оси получаются поверхности вращения (рис. 203, а), а при вращении частей плоскости (многоугольника, круга, эллипса), ограниченных замкнутыми линиями, получаются тела вращения (рис. 203, б).

**15.5.** Как с помощью вращения вокруг прямой можно получить боковую поверхность прямого кругового цилиндра?

**Проверь себя.** На рисунке 204 показаны два способа решения задачи.

**15.6.** Представь себе, что прямоугольный треугольник  $ABC$  поставили на плоскость стола одной из сторон ( $AC$ ) его прямого угла, а вторую сторону ( $BC$ ) этого угла расположили вертикально. Какую поверхность опишет третья сторона этого треугольника при своём вращении на полный угол вокруг прямой  $BC$ ?

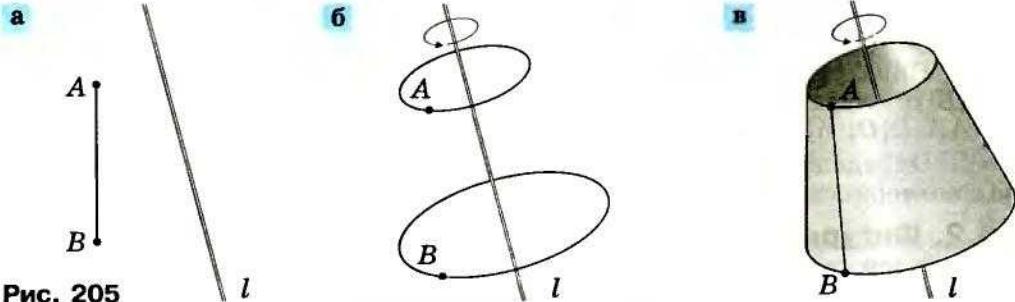


Рис. 205

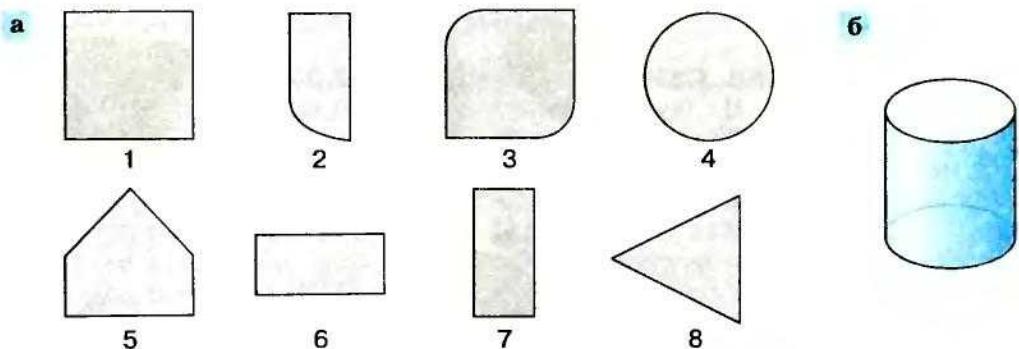


Рис. 206

**15.7\***. Пусть отрезок  $AB$  лежит с прямой  $l$  в одной плоскости, но не пересекает её и не параллелен ей (рис. 205, а). Нарисуй фигуру, которая получится при вращении отрезка  $AB$  вокруг прямой  $l$ .

**Проверь себя.** Посмотри на рисунок 205, б, в. Получится боковая поверхность прямого кругового усечённого конуса.

**15.8.** Используя шаблоны эллипсов, нарисуй какой-нибудь прямой круговой усечённый конус.

**15.9.** Какую фигуру нужно повернуть вокруг прямой на полный угол, чтобы получить:  
а) шар; б) сферу? Сделай соответствующие рисунки.

**15.10.** Выбери фигуры (рис. 206, а), вращая которые можно получить фигуру, изображённую на рисунке 206, б. Как при этом нужно расположить оси вращения?

**15.11.** Какие из фигур (рис. 207, а) могут быть получены вращением фигуры (рис. 207, б) вокруг какой-нибудь прямой?

До сих пор мы рассматривали вращение фигуры вокруг прямой, лежащей в её плоскости. Можно рассматривать и другие случаи взаимного расположения оси и фигуры: когда ось вращения пересекает плоскость данной фигуры (рис. 208, а) и когда вращается пространственная фигура (рис. 208, б).

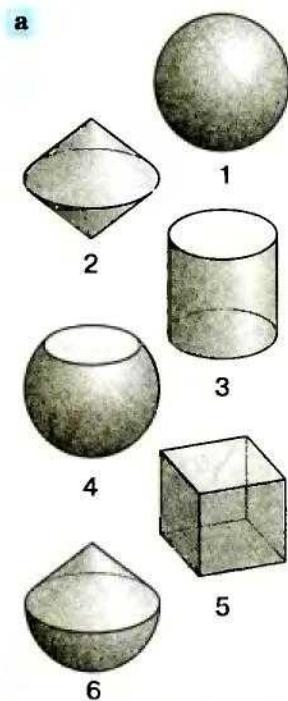


Рис. 207

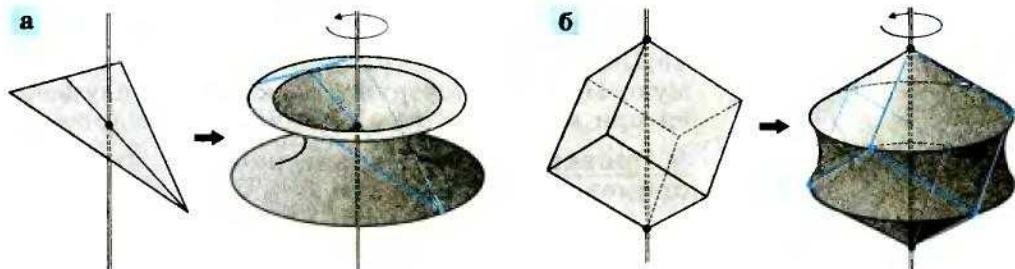


Рис. 208

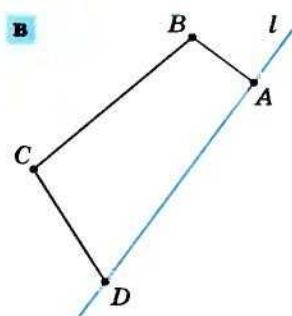
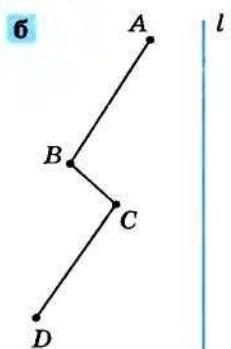
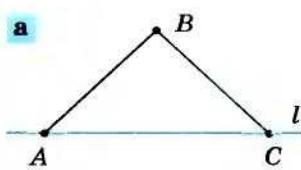


Рис. 209

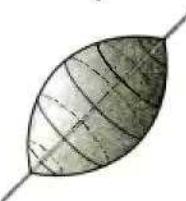
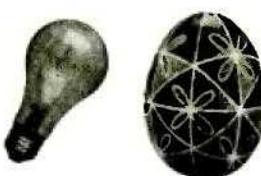


Рис. 210

Рис. 211

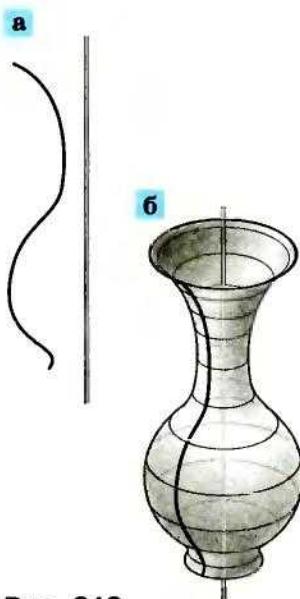


Рис. 212

**15.12.** Представь себе и нарисуй поверхность, которую зарисует ломаная (рис. 209) при повороте на полный угол вокруг указанной на рисунке прямой.

**15.13.** Поверхность какого из предметов, изображённого на рисунке 210, или его части можно рассматривать как поверхность вращения? Для каждого из таких предметов нарисуй линию, вращением которой можно получить его поверхность.

**15.14.** Какой из объектов на рисунке 211 лишний?

**15.15.** Нарисуй какую-нибудь линию и прямую. Нарисуй поверхность, которая получается при вращении твоей линии вокруг прямой.

**▼ Проверь себя.** На рисунке 212 приведён пример решения задачи.

**15.16.** Какую поверхность можно получить при вращении треугольника (квадрата) вокруг прямой, их пересекающей?

## § 16 Осевая симметрия фигур

**16.1. Понятие осевой симметрии фигур на плоскости.** На листе бумаги для черчения начерти прямую. В одной из образовавшихся полуплоскостей нарисуй краской какую-нибудь фигуру  $F_1$  (рис. 213, а) и сложи лист по прямой. Теперь, разгибая лист, ты увидишь, как вместе со второй половиной листа поворачивается вокруг прямой-сгиба образ (отпечаток) фигуры (рис. 213, б).

Если полностью развернуть лист, то фигура и её образ окажутся в одной плоскости. Поэтому можно считать, что произошло какое-то преобразование плоскости (рис. 214). Это не параллельный перенос, так как отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , соединяющие соответственные точки, параллельны, но не равны.

Это и не поворот. Нам известно, что при плоском повороте угол между любой прямой и её образом равен углу поворота. Здесь угол между прямыми  $CA$  и  $C_1A_1$  не равен углу между прямыми  $BC$  и  $B_1C_1$ . Проверь измерением, верно ли это.

Посмотри на отрезки  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ , соединяющие соответственные точки. Эти отрезки перпендикулярны прямой  $l$  и делятся ею пополам. Концы таких отрезков называются **симметричными относительно прямой  $l$** .

Точки  $A$  и  $A'$  называются **симметричными относительно прямой  $l$** , если отрезок, их соединяющий, перпендикулярен этой прямой и делится ею пополам. При этом прямая  $l$  называется **осью симметрии** этих точек (рис. 215). Если же точка лежит на оси симметрии, то она симметрична сама себе.

**16.1.** Для каждой точки (рис. 216) найди точку, симметричную ей относительно какой-нибудь прямой, изображённой на этом рисунке. Запиши результат в таблицу в соответствии с представленным на странице 84 образцом.

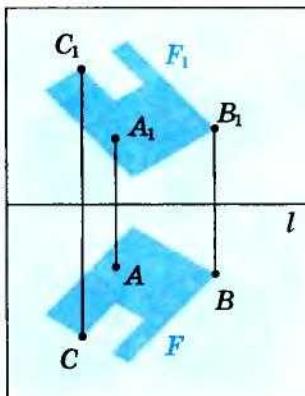


Рис. 214

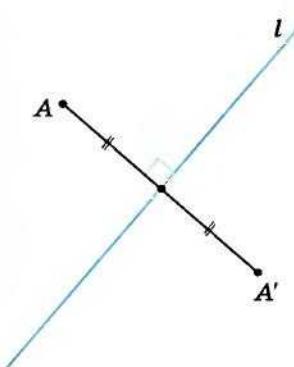


Рис. 215

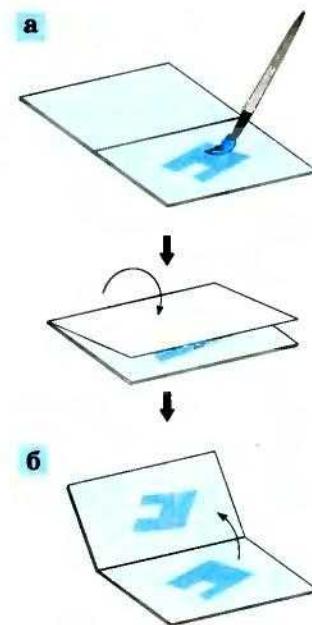


Рис. 213

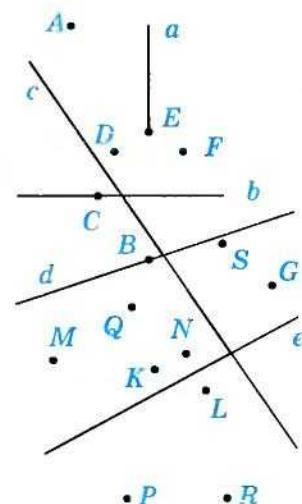


Рис. 216

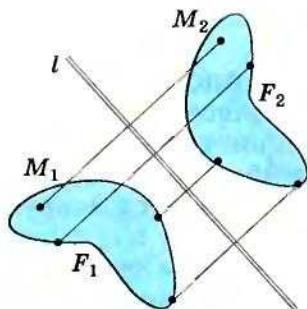


Рис. 217

Точки	Ось симметрии
$F, D$	$a$

Преобразование фигуры на плоскости, с которым мы познакомились, так же, как и перенос и поворот, является движением. Это движение называется *симметрией относительно прямой* или *осевой симметрией*. Говорят, что

Фигура  $F_1$ , преобразуется в фигуру  $F_2$  с помощью **симметрии относительно прямой  $l$** , если фигура  $F_2$  состоит из всех точек, симметричных точкам фигуры  $F_1$  относительно прямой  $l$  (рис. 217). При этом фигуры  $F_1$  и  $F_2$  называют *симметричными относительно прямой  $l$* .

Прямая  $l$ , относительно которой совершается симметрия, называется *осью симметрии*.

Осевая симметрия — это необычное движение, так как, в отличие от переноса (рис. 218, а) и поворота (рис. 218, б), невозможно в плоскости осуществить непрерывное действие с фигурой, соответствующее этому преобразованию (рис. 218, в).

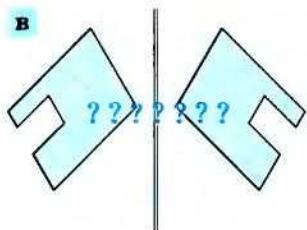
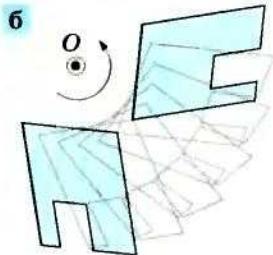
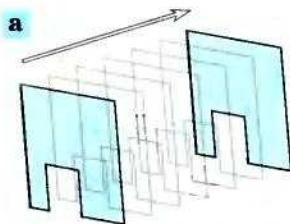


Рис. 218

**16.2.** На рисунке 219 изображены пары равных фигур. Определи, для какой пары можно подобрать параллельный перенос или поворот так, чтобы фигуры были связаны этим преобразованием. Для какой пары можно подобрать осевую симметрию?

Мы понимаем, что симметрию относительно оси можно считать пространственным поворотом вокруг этой оси на  $180^\circ$  (см. рис. 213).

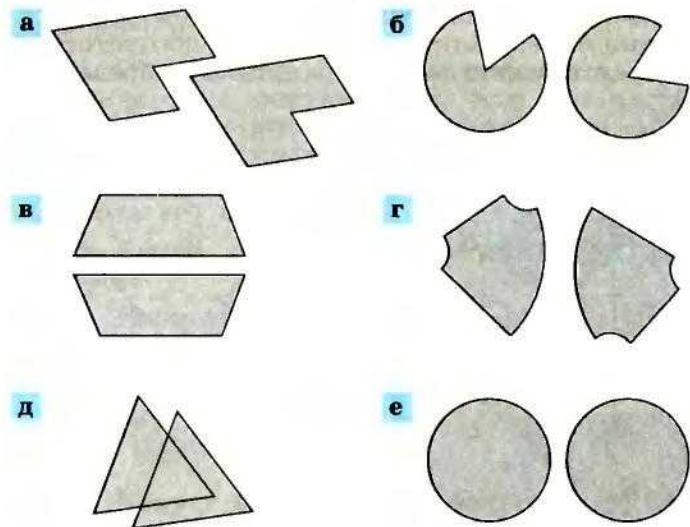


Рис. 219

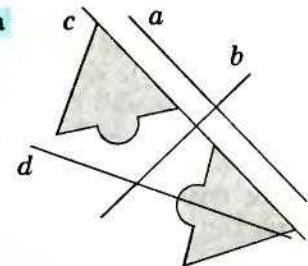
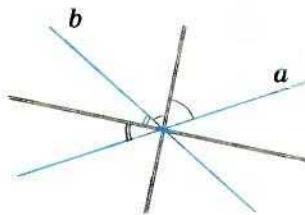
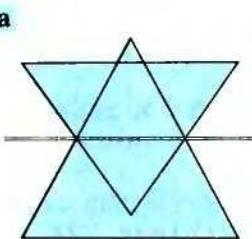
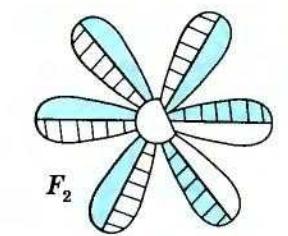
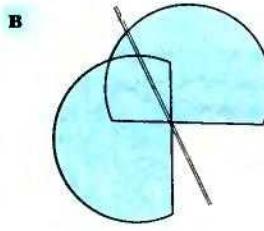
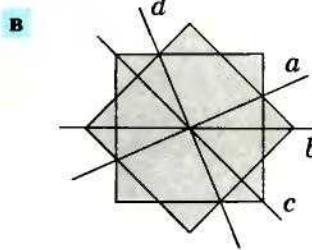
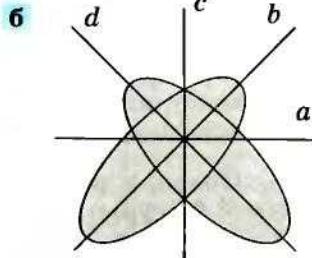
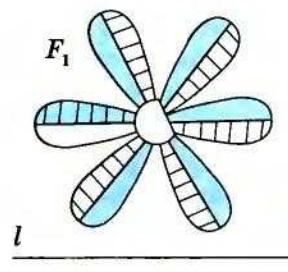
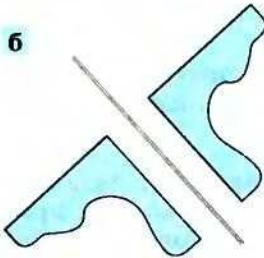


Рис. 221



в

Рис. 223

Рис. 220

Рис. 222

Этот факт нам может подсказать способ проверки симметричности двух фигур относительно некоторой прямой.

**16.3\***. Придумай и запиши алгоритм проверки с помощью кальки симметричности двух фигур относительно некоторой прямой.

**16.4.** Верно ли, что на рисунках (рис. 220) изображены пары фигур, симметричных друг другу относительно указанной прямой? Сначала попробуй угадать ответ, а затем проверь свой ответ с помощью кальки.

**16.5.** Построй две пересекающиеся прямые. Сколько осей симметрии они имеют? Построй эти оси. Проверь свои построения с помощью кальки.

**Проверь себя.** Осями симметрии пересекающихся прямых являются биссектрисы углов, образованных при пересечении этих прямых (рис. 221).

**16.6.** Ученик 6 класса решил сделать два рисунка, симметричных друг другу относительно некоторой прямой. Вот что у него получилось (рис. 222). Найди ошибки, которые он допустил при рисовании. Сколько таких ошибок ты нашёл?

**Совет.** Скопируй в тетрадь фигуру  $F_1$  и прямую  $l$  и построй фигуру, симметричную фигуре  $F_1$  относительно прямой  $l$ .

**16.7.** Симметрией относительно какой из указанных прямых связаны фигуры (рис. 223)?

**16.2. Как построить две фигуры, симметричные относительно прямой?** Отметь в тетради точку  $A$  и нарисуй прямую  $l$  (рис. 224, а). Как построить точку  $B$ , симметричную точке  $A$  относительно прямой  $l$ ?

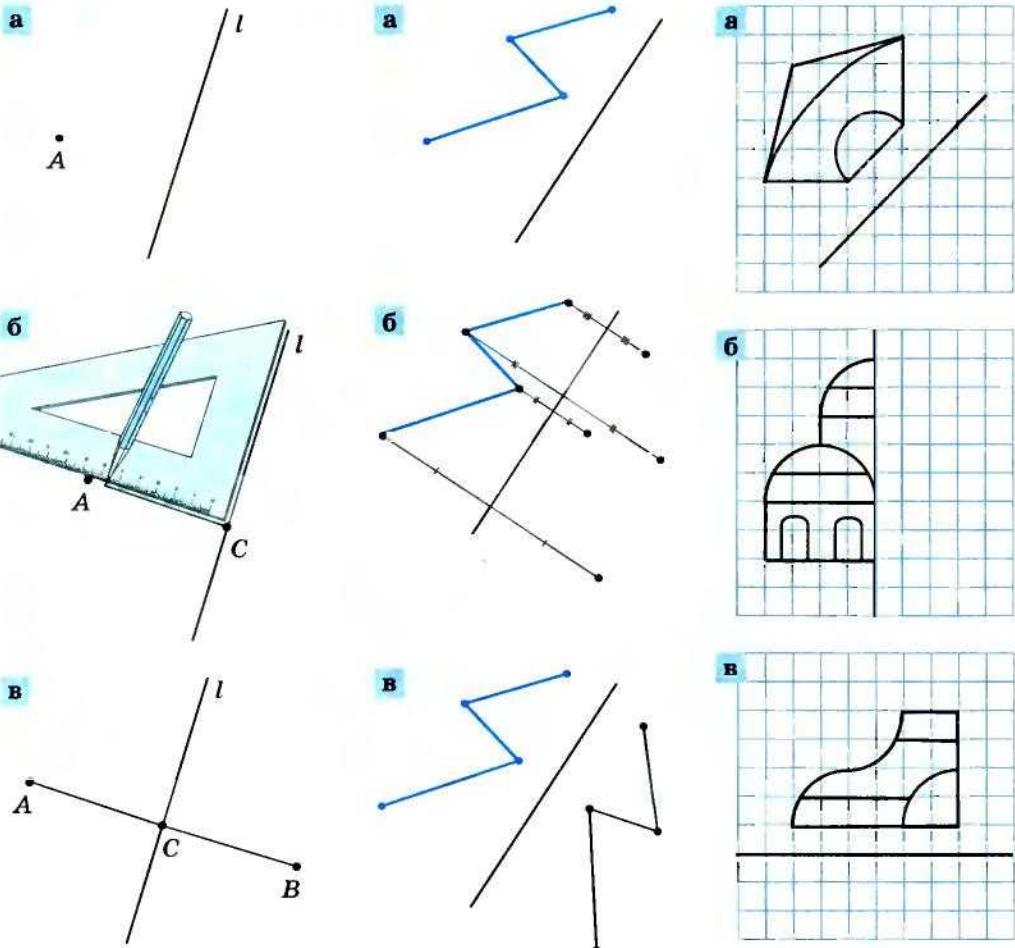
Отрезок  $AB$  должен быть перпендикулярен прямой  $l$  и делиться ею пополам. Поэтому построение может быть осуществлено следующим образом:

- из точки  $A$  опустим перпендикуляр на прямую  $l$ , отметим основание перпендикуляра и обозначим его, например, буквой  $C$  (рис. 224, б);
- продлим отрезок  $AC$  за точку  $C$  так, чтобы точка  $C$  оказалась серединой нового отрезка (рис. 224, в). Получим точку  $B$  — точку, симметричную точке  $A$  относительно прямой  $l$ .

Чтобы построить образ ломаной при осевой симметрии (рис. 225, а), достаточно построить образы вершин этой ломаной (рис. 225, б), а затем соединить их в нужном порядке (рис. 225, в).

**16.8. Повтори рисунки (рис. 226) и с помощью циркуля и линейки построй фигуры, симметричные данным относительно указанных прямых. Раскрась цветными карандашами получившиеся рисунки, сблюдая симметрию в цвете.**

**Проверь себя.** На рисунке 227 показано построение для рисунка 226, а.



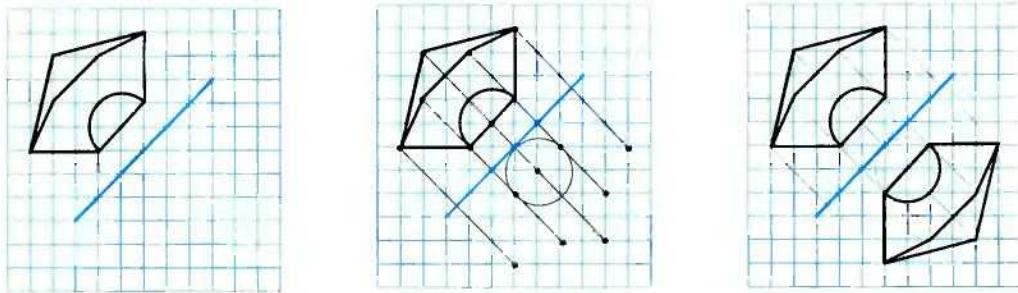


Рис. 227

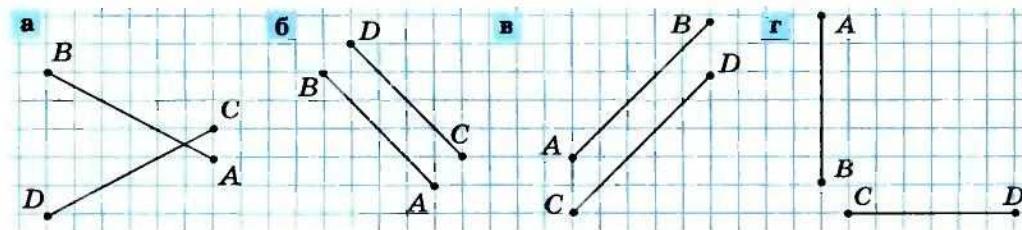


Рис. 228

**16.9.** Отметь точки  $A$  и  $B$ . Симметричны ли эти точки относительно какой-нибудь прямой? Если да, то построй их ось симметрии.

**16.10\***. На рисунках (рис. 228) изображены пары равных отрезков. Повтори эти рисунки и построй в каждом случае ось симметрии отрезков, если такая ось есть.

**16.11\***. На рисунке 229 изображены пары равных фигур. Скопируй этот рисунок и построй для каждой пары ось симметрии или объясни, почему ты считаешь, что её нет.

**16.12\***. Как ты думаешь, какие две пространственные фигуры называются симметричными относительно прямой? Можешь ли ты привести соответствующие примеры?

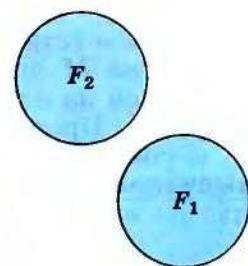
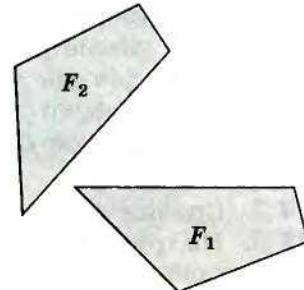


Рис. 229

## § 17 Центральная симметрия

### фигур

**17.1. Центральная симметрия** **фигур на плоскости.** Кроме симметрии относительно прямой существует ещё симметрия относительно точки, так называемая **центральная симметрия**.

Точки  $A$  и  $A'$  называются **симметричными относительно точки**  $O$  (или **центрально-симметричными**), если точка  $O$  является серединой отрезка  $AA'$  (рис. 230).

При этом точка  $O$  называется **центром симметрии** этих точек.

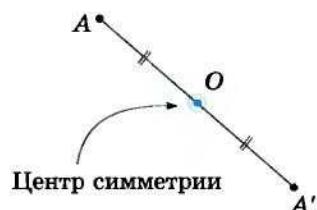


Рис. 230

A

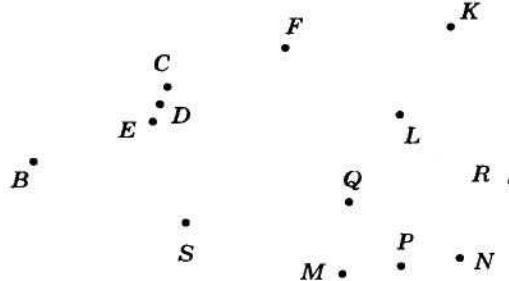


Рис. 231

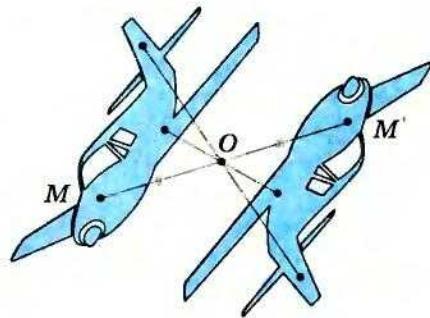


Рис. 232

Центр симметрии симметричен сам себе.

**17.1.** Найди на рисунке 231 пары центрально-симметричных точек. Для каждой пары таких точек назови их центр симметрии.

Центрально-симметричными могут быть и две фигуры. Говорят, что

Фигура  $F_1$ , преобразуется в фигуру  $F_2$  с помощью **симметрии относительно точки**  $O$ , если фигура  $F_2$  состоит из всех точек, симметричных точкам фигуры  $F_1$  относительно точки  $O$  (рис. 232).

Точка  $O$ , относительно которой совершается симметрия, называется **центром симметрии** этих фигур.

Если две фигуры связаны между собой центральной симметрией, то их называют **центрально-симметричными**. Говорят также, что одна фигура **симметрична** другой относительно точки  $O$ .

**17.2.** Сравни определения центральной и осевой симметрий фигур.

**17.3.** На рисунке 233 найди пары фигур, связанных центральной симметрией. Укажи в каждом случае центр симметрии этих фигур.

**Проверь себя.** Такими фигурами являются, например, фигуры 1 и 3. Их центр симметрии точка  $B$ . Найди остальные пары.

**17.4.** Отметь в тетради две точки  $M$  и  $N$  и построй точку  $P$ , симметричную точке  $M$  относительно точки  $N$ .

**17.5.** Построй на плоскости какие-нибудь два центрально-симметричных отрезка. Проверь с помощью кальки, что эти отрезки связаны также и поворотом. Каков угол этого поворота?

**Замечание.** Оказывается, любые две центрально-симметричные фигуры на плоскости связаны также и поворотом вокруг их центра

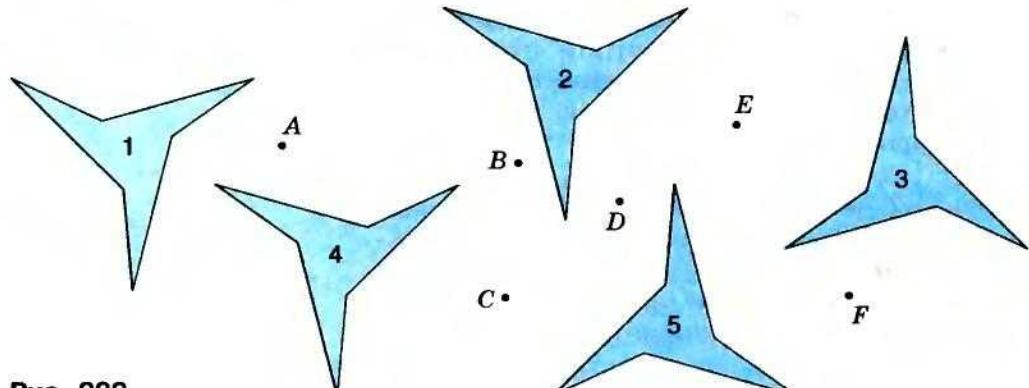


Рис. 233

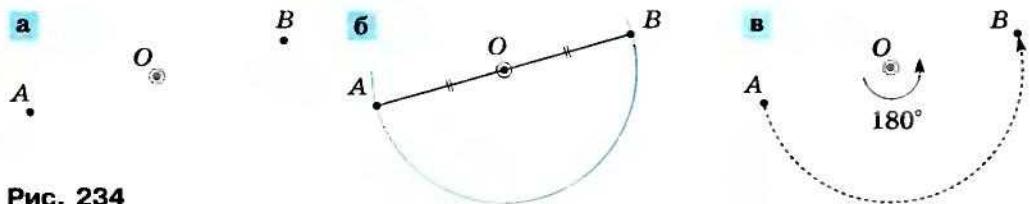


Рис. 234

симметрии на угол, равный  $180^\circ$  (рис. 234). Поэтому центральную симметрию относительно точки  $O$  на плоскости можно рассматривать как частный случай поворота вокруг этой точки — поворота на  $180^\circ$ .

**17.6.** Каково взаимное расположение прямых, которые содержат центрально-симметричные отрезки (см. предыдущую задачу)? Рассмотри разные случаи расположения центра симметрии относительно данного отрезка.

**▼ Проверь себя.** На рисунке 235 показаны два возможных случая: центр симметрии лежит на прямой, содержащей данный отрезок  $AB$  (рис. 235, а), и центр симметрии не лежит на этой прямой (рис. 235, б). В первом случае образ отрезка  $AB$  лежит на прямой  $AB$ , а во втором случае он параллелен прямой  $AB$  ( $CD \parallel AB$ ). Пока мы это не доказываем, но запомним:

**Центрально-симметричные отрезки либо лежат на одной прямой, либо параллельны.**

Доказать этот факт ты сможешь в седьмом классе. Мы будем в дальнейшем им пользоваться.

**17.7.** Построй треугольник  $MNP$  и отметь середину стороны  $MN$  — точку  $O$ . Построй треугольник, симметричный треугольнику  $MNP$  относительно точки  $O$ . Какую фигуру образуют эти два треугольника вместе? Почему? Какой треугольник нужно взять, чтобы в результате указанных построений получился: а) прямоугольник; б) ромб; в) квадрат?

**▼ Проверь себя.** Получился параллелограмм (рис. 236), так как его противоположные стороны попарно центрально-симметричны, а потому попарно параллельны.

**17.8.** Построй круг с центром в точке  $O$  и отметь какую-нибудь точку  $A$ . Построй круг, симметричный данному относительно точки  $A$ . Рассмотри разные случаи расположения точки  $A$  относительно данного круга.

**17.9.** На рисунке 237 изображены два равных полукруга. Найди точку, относительно которой они центрально-симметричны.

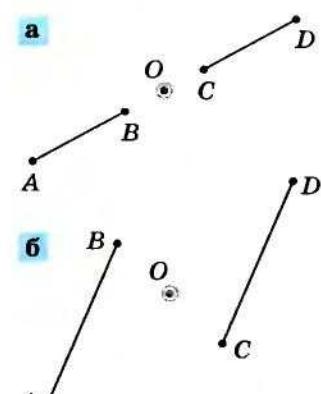


Рис. 235

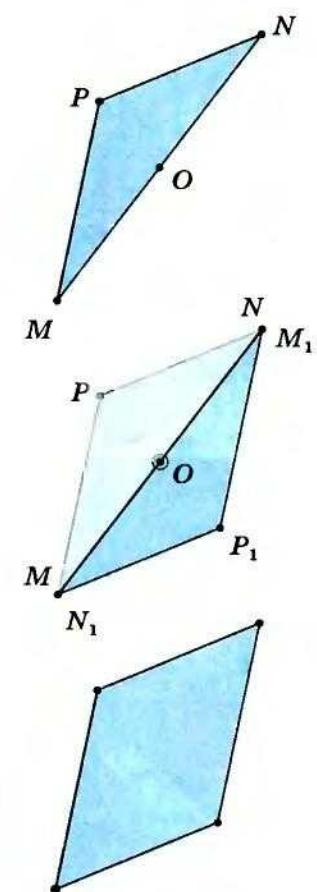


Рис. 236

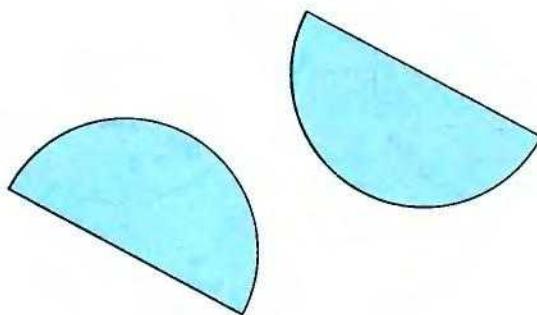


Рис. 237

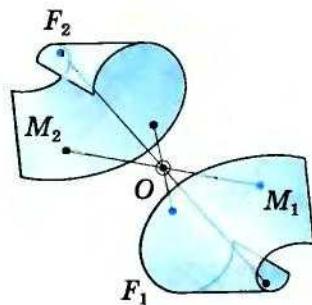


Рис. 238

## 17.2. Центральная симметрия пространственных фигур.

Определение, которое мы дали для центральной симметрии на плоскости, применимо и к пространственным фигурам: фигура  $F_1$  симметрична фигуре  $F_2$  относительно точки  $O$ , если фигура  $F_2$  состоит из всех точек, симметричных точкам фигуры  $F_1$  относительно точки  $O$  (рис. 238).

**17.10.** Выбери на рисунке 239 пары симметричных относительно точки  $O$  фигур.

**17.11.** Определи закономерность и запиши номера фигур, изображённых на рисунке 240, в порядке, соответствующем этой закономерности.

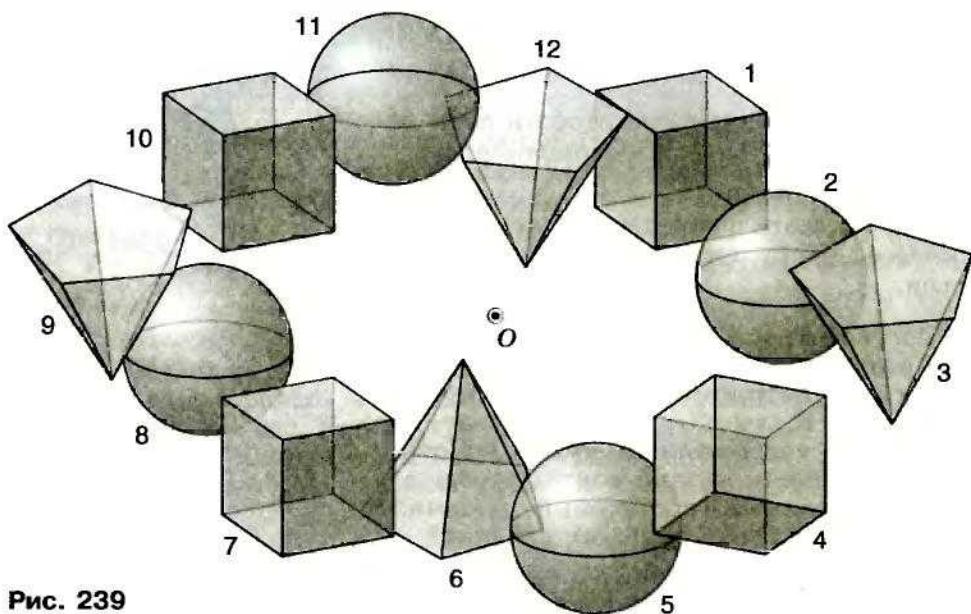


Рис. 239

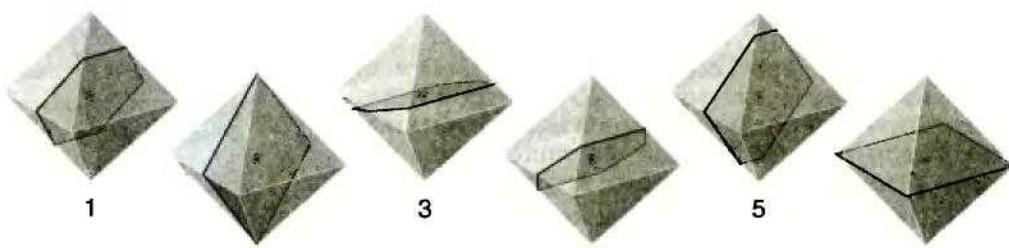


Рис. 240

**17.12\***. Нарисуй фигуру (рис. 241). Построй образ этой фигуры при центральной симметрии относительно: а) вершины  $A$ ; б) середины ребра  $BC$ ; в) точки  $O$  — середины диагонали верхней грани.

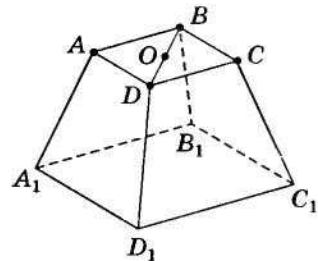


Рис. 241

## § 18\* Симметрия фигур относительно плоскости

Когда мы смотрим в зеркало, мы видим там образы окружающих нас предметов. Если поверхность зеркала ровная (геометрически — плоская), то в отражённых образах нет искажений: они точно повторяют форму и размеры реальных предметов. При этом у нас создаётся полное ощущение того, что отражённое пространство является продолжением реального пространства.

Отражающая поверхность может и не быть плоской, например поверхность автомобиля, поверхность стёкол с фактурой или дефектами, поверхность воды, поверхность кривого зеркала (рис. 242).

В этих случаях отражённые образы будут иметь искажения, иногда даже такие сильные, что нам трудно узнать в предмете-образе реальный предмет.

Наблюдать за такими искажениями очень интересно. Они служат предметом исследования для художников (рис. 243) и, конечно, для геометров.

Отражения предметов в различных поверхностях можно воспринимать как преобразования фигур.

При отражении в плоском зеркале получаются неискажённые образы предметов. В этом случае мы имеем дело с движением пространственных фигур, так как движение не меняет форм и размеров фигур.

Отражение в плоском зеркале в геометрии описывается с помощью пространственного преобразования, которое называется *зеркальной симметрией*.

Зеркальная симметрия фигур — это симметрия относительно плоскости. Её свойства очень похожи на свойства осевой симметрии. Симметрию фигур (в том числе и точек) относительно плоскости определяют почти так же, как осевую симметрию.

Попробуйте сами сформулировать определения точек, симметричных друг другу относительно плоскости, и определение зеркально-симметричных фигур.

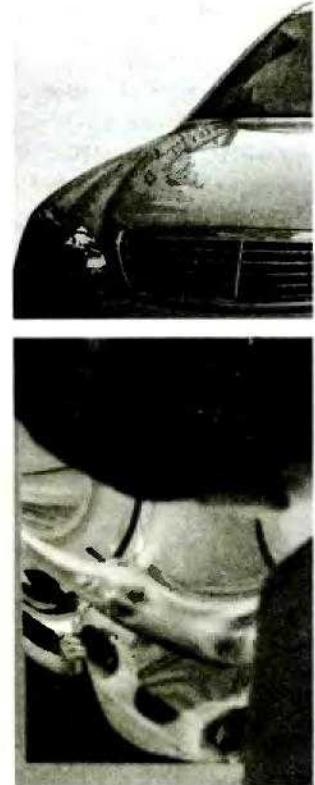


Рис. 242

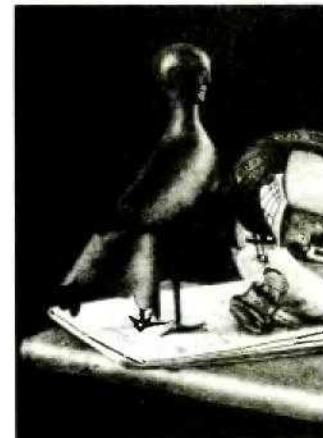


Рис. 243

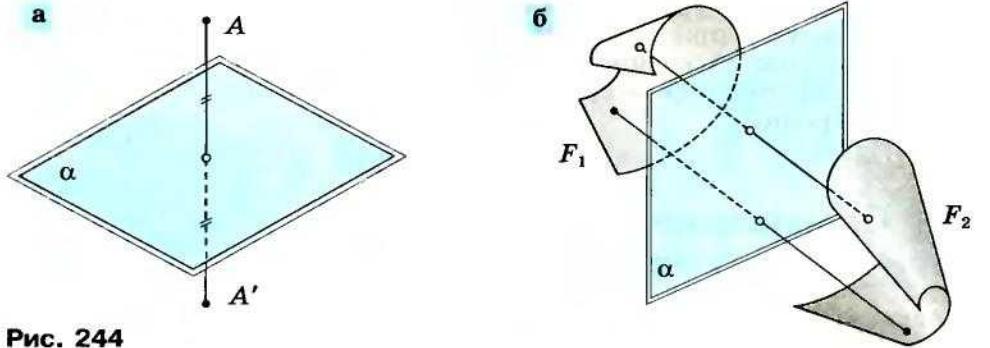


Рис. 244

Точки  $A$  и  $A'$  называются **симметричными относительно плоскости**  $\alpha$ , если отрезок, их соединяющий, перпендикулярен этой плоскости и делится ею пополам. При этом плоскость  $\alpha$  называется **плоскостью симметрии** этих точек (рис. 244, а).

Если же точка лежит на плоскости симметрии, то она симметрична самой себе.

Фигура  $F_1$  преобразуется в фигуру  $F_2$  с помощью **симметрии относительно плоскости**, если фигура  $F_2$  состоит из всех точек, симметричных точкам фигуры  $F_1$  относительно этой плоскости (рис. 244, б).



Рис. 245

При этом фигуры  $F_1$  и  $F_2$  называют симметричными относительно плоскости. Плоскость, относительно которой совершается симметрия, называется **плоскостью симметрии**.

Фигуры, связанные зеркальной симметрией, называются **зеркально-симметричными фигурами**.

С зеркальной симметрией мы часто встречаемся в архитектуре. Одним из ярких таких примеров является улица Зодчего Росси в Петербурге (рис. 245).

**18.1.** Две равные четырёхугольные пирамиды имеют общее основание  $ABCD$  (рис. 246). Среди отмеченных точек назови симметричные друг другу относительно плоскости  $ABC$ .

**18.2.** Назови фигуры (рис. 247), которые связаны какой-нибудь зеркальной симметрией.

**18.3.** Определи, как связаны между собой верхний и нижний рисунки в каждой паре (рис. 248), и нарисуй недостающую картинку для последней пары.

**18.4.** Какая картинка (рис. 249) лишняя?

**18.5.** Используя зеркало, прочти текст на рисунке 250.

**18.6.** Приведи примеры таких слов, которые можно прочитать в зеркале так же, как и без него.

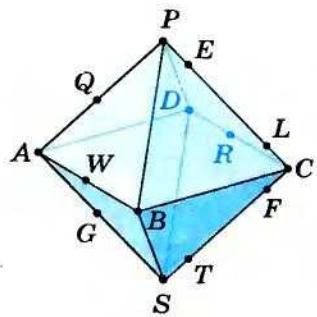


Рис. 246

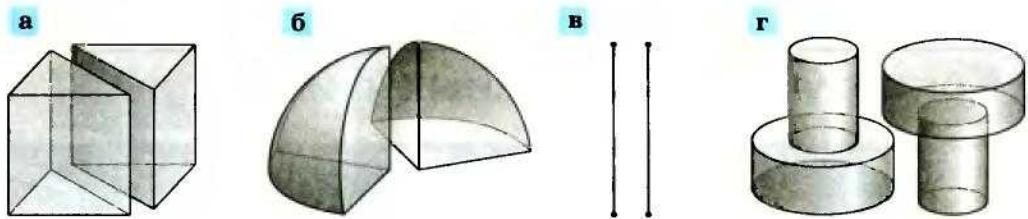


Рис. 247

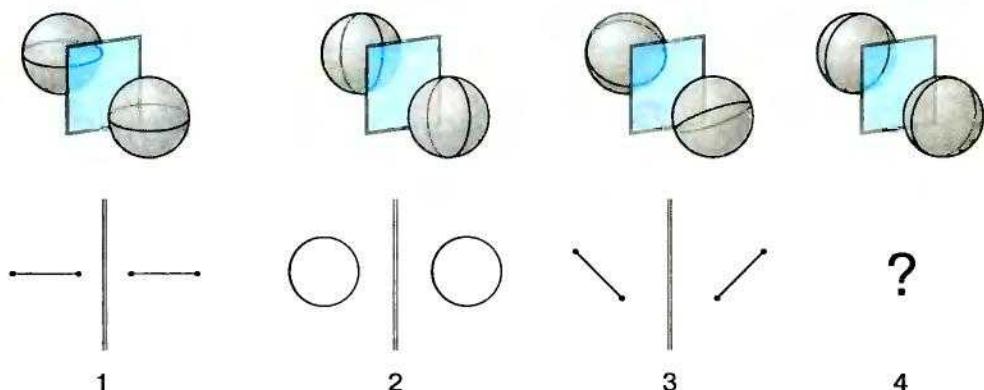


Рис. 248

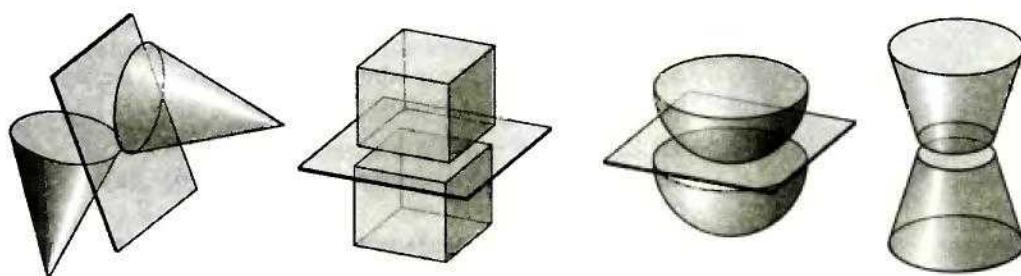


Рис. 249

ЭМОЙ ИУОСКОСИИ.  
НЕМОДЕЛЖНОЙ ИБИ СПУШАЕМЫИ ОШНОСТИИЕЧНО  
ЕСУИ МЛОДКА ЧЕЖЛИИ НА ИУОСКОСИИ, ИО ОНА ОСМАННЕМСЯ

Рис. 250

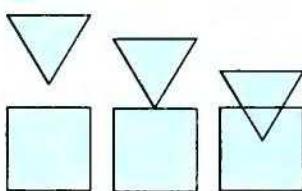
## Глава 4

### Конструкции из равных фигур

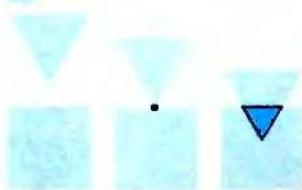


#### § 19 Использование движений для получения новых фигур

a



б



в

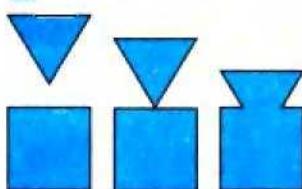


Рис. 251

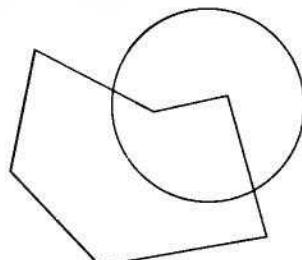


Рис. 252

**19.1. Пересечение фигур.** На рисунке 251, а изображены фигуры. При этом на рисунке 251, б выделены для каждой пары фигур их общая часть (расскажи какая). Подобно тому, как общая точка двух прямых называется их точкой пересечения, так и общая часть двух фигур называется *пересечением* этих фигур.

**19.1.** Расположи два треугольника так, чтобы в пересечении получились: а) точка; б) отрезок; в) треугольник; г) четырёхугольник. Могут ли в пересечении двух треугольников получиться другие фигуры? Какие? Если да, то сделай соответствующие рисунки.

**19.2.** Какие фигуры можно получить в пересечении: а) двух прямоугольников; б) двух кругов; в) двух кубов?

**19.2. Объединение фигур.** Вернёмся к рисунку 251. На рисунке 251, в для каждого случая представлена фигура, состоящая из всех таких точек, которые принадлежат либо треугольнику, либо квадрату, либо двум этим фигурам сразу. Про такую фигуру говорят, что она является *объединением* треугольника и квадрата. Понятно, что можно построить *объединение* любых фигур. Для этого достаточно рассмотреть такую фигуру, которая состоит из всех точек этих фигур.

**19.3.** Нарисуй рисунок 252. Выдели на нём объединение фигур.

**19.4.** Среди фигур (рис. 253, а) выбери такие, которые могут получиться при объединении фигур, изображённых на рисунке 253, б.

**19.5.** Определи закономерность (рис. 254) и выпиши номера рисунков в порядке, соответствующем этой закономерности.

**19.6.** Какая картинка лишняя (рис. 255)?

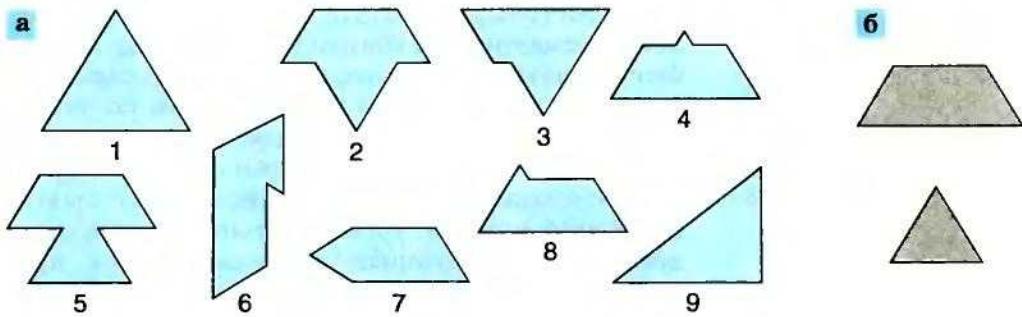


Рис. 253

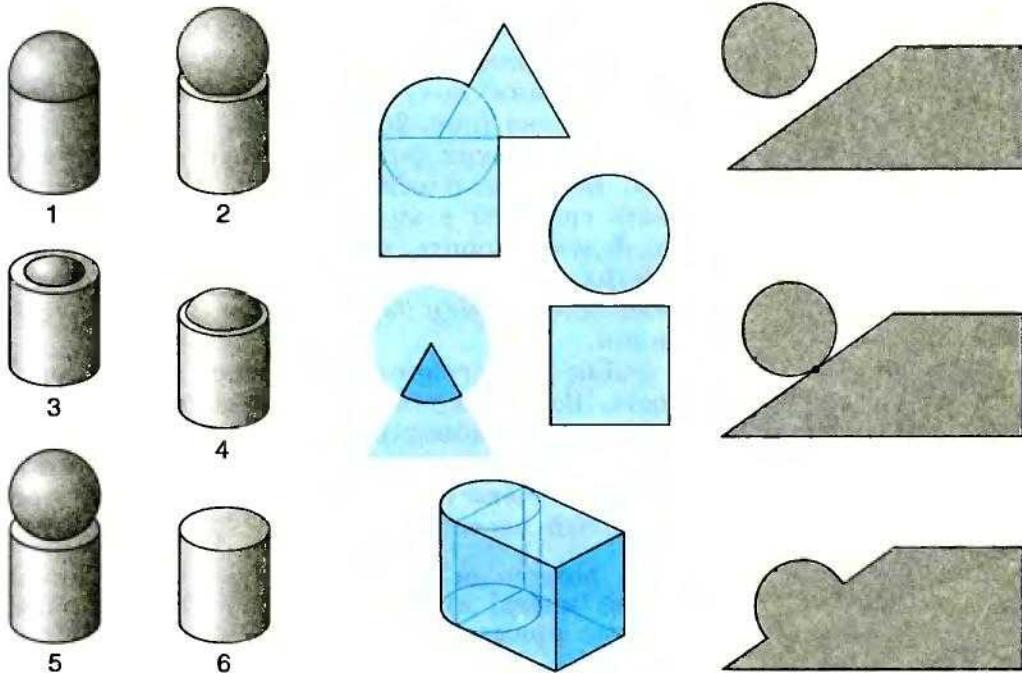


Рис. 254

Рис. 255

Рис. 256

**19.3. Склейивание фигур.** Новые геометрические фигуры могут получаться при *объединении* двух фигур. В зависимости от того, имеют фигуры общие точки или нет, новая фигура либо состоит из одной части, либо имеет две отдельные части (рис. 256). Будем считать, что если исходные плоские фигуры соприкасаются по отдельным точкам, а пространственные фигуры и по отдельным линиям (рис. 257), то «объединённая» фигура всё равно состоит из двух отдельных частей.

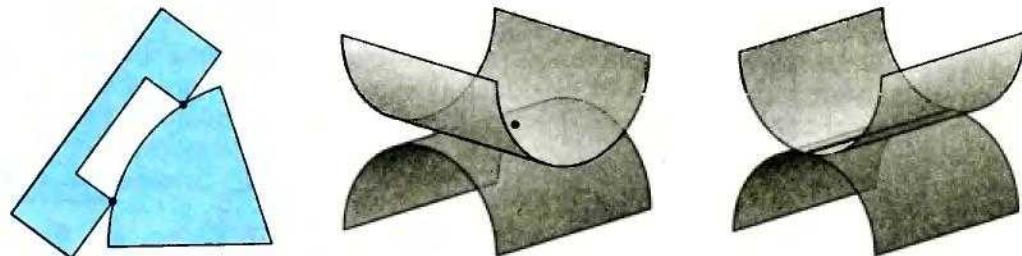


Рис. 257

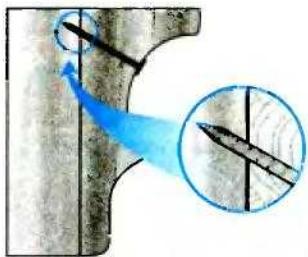


Рис. 258

Конструируя фигуру из двух частей, будем рассматривать только такие расположения фигур-частей, при которых они соприкасаются по части границы. На практике при составлении предметов из частей (объединении этих частей) мы никогда не сталкиваемся с таким их расположением, при котором части проникают друг в друга. Даже вбитый в деревянную деталь гвоздь, который, как нам кажется, проникает в неё (рис. 258), на самом деле соприкасается с деревом только поверхностью (границей).

Для линий границей являются их концы. Если две незамкнутые линии имеют общий конец, то будем говорить, что их объединение (новая линия) получено склеиванием двух линий в точке (рис. 259, а).

Для плоских фигур границей является линия. Если две плоские фигуры имеют общую часть границы в виде линии (рис. 259, б), то мы будем говорить, что их объединение (новая фигура, плоская или пространственная) получено склеиванием двух плоских фигур по этой линии.

Для тела границей является его поверхность. Если два тела имеют общую часть границы в виде поверхности (рис. 259, в), то мы будем говорить, что их объединение (новое тело) получено склеиванием двух тел по этой их общей части.

**19.7.** Можно ли склеить: а) два треугольника; б) два круга; в) две сферы; г) два квадрата; д) две прямые; е) две плоскости; ж) два луча?

**19.8.** Можно ли склеиванием трёх одинаковых треугольников получить: а) треугольник; б) квадрат?

**19.9.** Из каких двух равных фигур можно склеить: а) шар; б) куб; в) треугольную пирамиду с равными рёбрами?

**19.10.** Определи закономерность (рис. 260) и выпиши номера рисунков в соответствующем порядке.

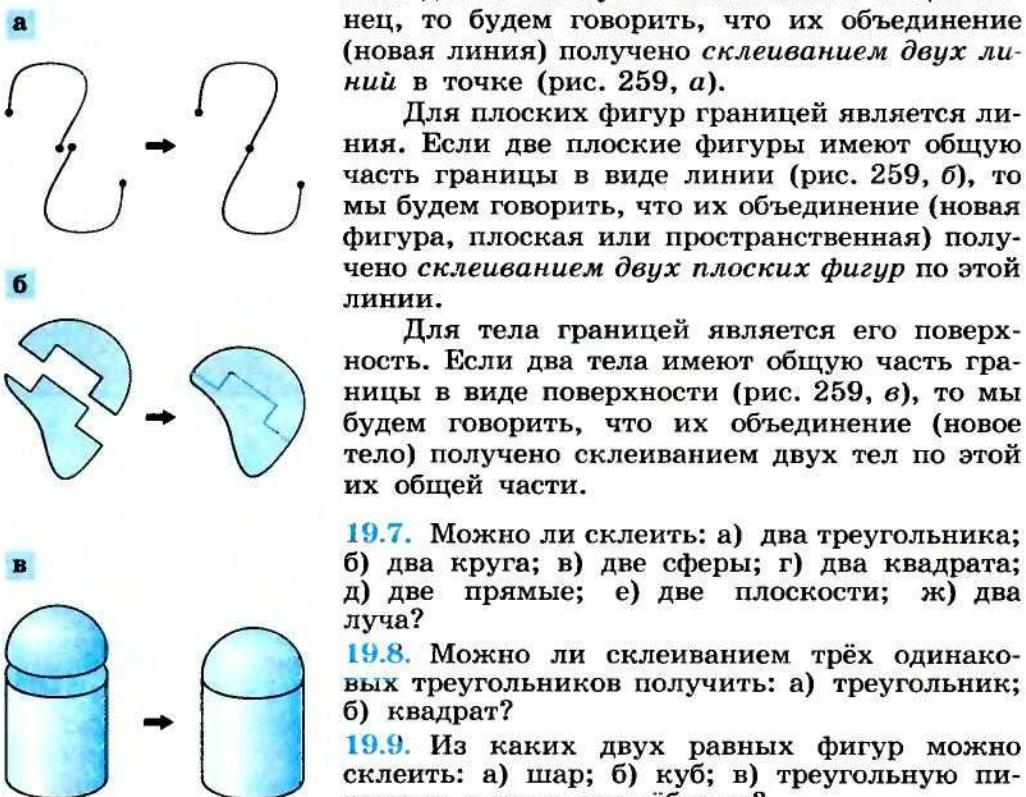


Рис. 259

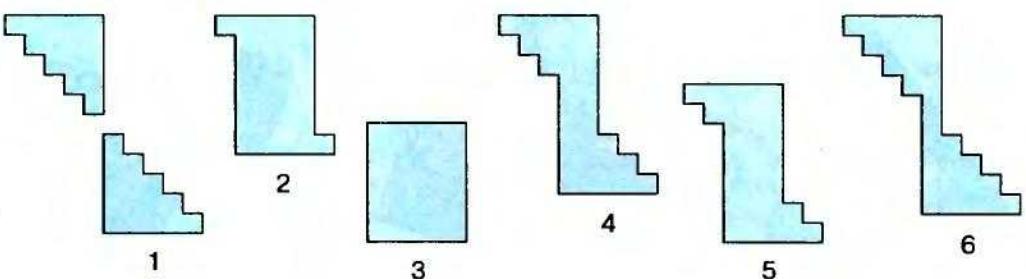


Рис. 260

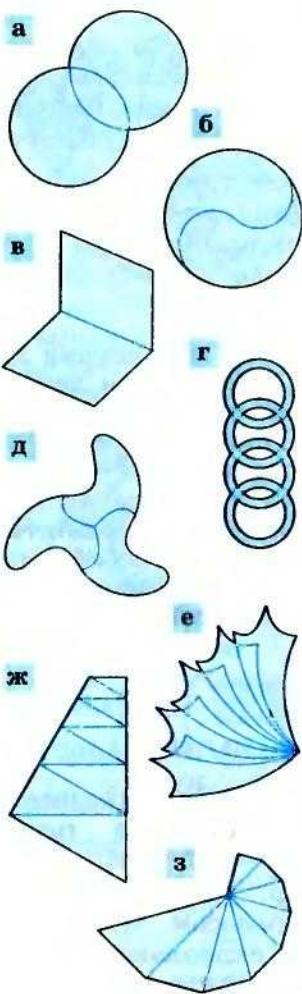
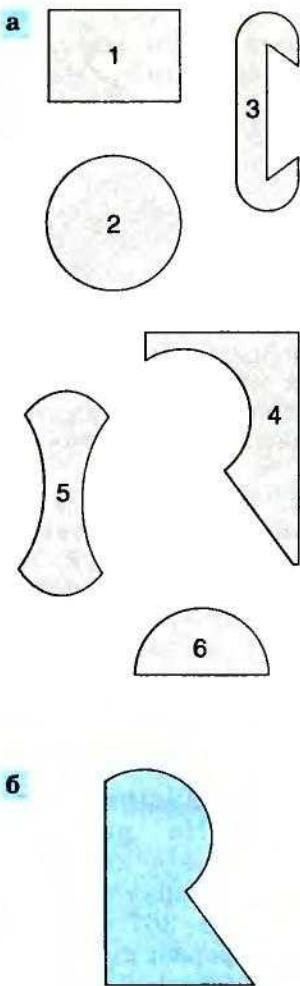


Рис. 261

Рис. 262

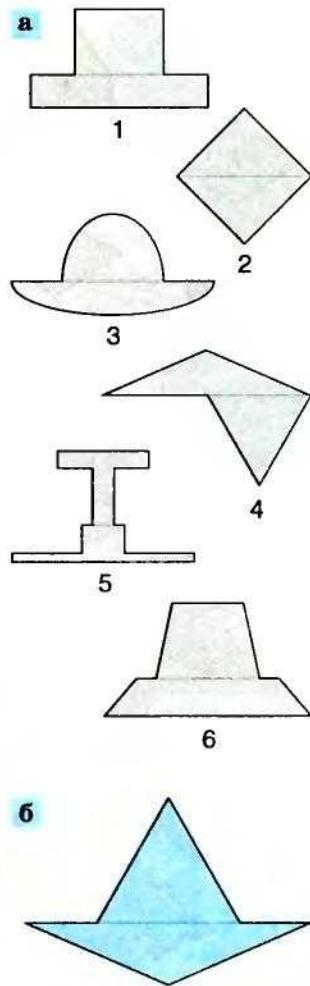


Рис. 263

**19.11.** Выбери из фигур (рис. 261, а) такие, которые можно склеить с фигурой, изображённой на рисунке 261, б.

**19.4. Склейивание фигур, связанных преобразованием.** Для конструирования новых фигур часто объединяют фигуры, связанные каким-нибудь преобразованием. Чаще всего подбирают фигуру и её преобразование так, чтобы эту фигуру можно было склеить с её образом. На рисунке 262 представлены объединения фигур, связанных разными преобразованиями. Некоторые из этих объединений получены склеиванием фигур и их образов (например, на рисунках б, в, д, ж, з). Обрати внимание на то, что на рисунках 262, а—в к фигуре применено одно преобразование, а на рисунках 262, г—з одно и то же преобразование применено несколько раз: сначала к самой фигуре, затем к её образу, затем к образу получившейся фигуры и так далее.

В дальнейшем мы будем для получения новой фигуры использовать движения.

**19.12.** Из фигур (рис. 263, а) выбери такие, части которых могут быть связаны тем же преобразованием, что и части фигуры, изображённой на рисунке 263, б.

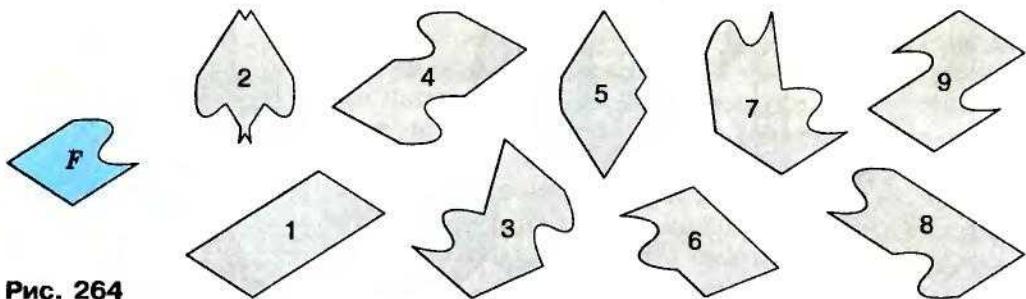


Рис. 264

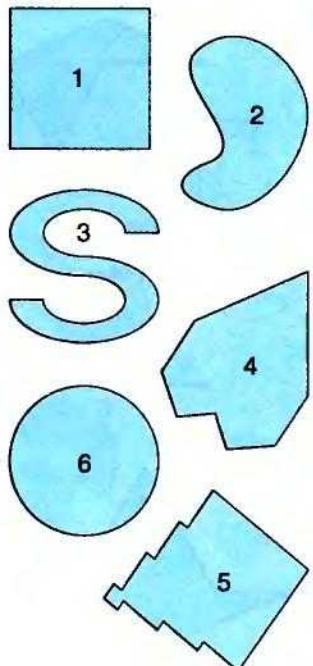


Рис. 265

**19.13.** На рисунке 264 изображены фигура *F* и объединения двух таких же фигур, связанных между собой различными движениями. В каком случае это объединение получено склеиванием?

**19.14.** Можно ли фигуры, изображённые на рисунке 265, разбить на части, которые связаны между собой движением? Перерисуй эти фигуры и приведи соответствующие примеры, если это возможно.

## § 20 Применение параллельного переноса

**20.1. Склейивание фигур, связанных параллельным переносом.** На рисунках 266—267 изображены объединения двух фигур, связанных между собой параллельным переносом. Фигуры на рисунке 267 получены склеиванием. Как видно, форма склеиваемых фигур может быть совершенно различной.

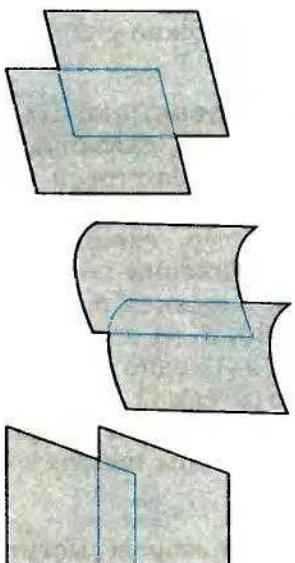


Рис. 266

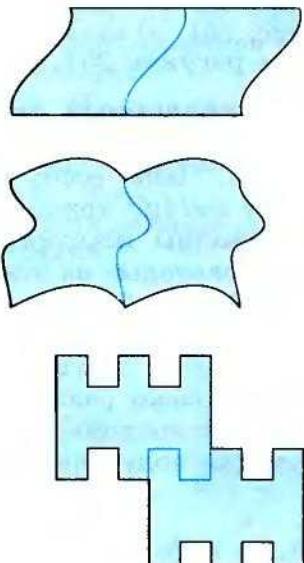


Рис. 267

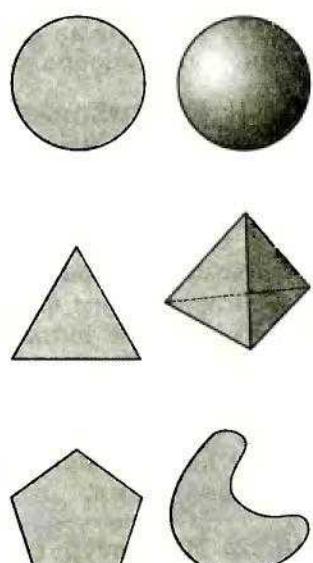


Рис. 268

**20.1.** Приведи пример фигуры, которую нельзя склеить с её образом ни при каком параллельном переносе. Объясни своё мнение.

**Проверь себя.** Возможные ответы представлены на рисунках (рис. 268).

Простейшая фигура, которая может быть использована для конструирования с помощью параллельного переноса, — параллелограмм. Объяснение этому простое: его противоположные стороны параллельны (рис. 269, а), а любые две параллельные прямые связаны параллельным переносом, и даже не одним. После такого переноса параллелограмм и его образ могут быть склеены, образуя при этом в объединении новую фигуру (рис. 269, б).

На основе параллелограмма (рис. 270, а) можно получить и другие фигуры, которые могут быть склеены со своими образами при переносе. Для этого достаточно две противоположные стороны параллелограмма искривить (но обязательно одинаково!) (рис. 270, б). Конечно, можно искривлять и две другие стороны (рис. 270, в).

**20.2.** Потренируйся в рисовании таких фигур, которые могут быть склеены со своими образами при параллельном переносе.

Ту фигуру, которую мы используем для конструирования новых фигур склеиванием с её образом при преобразовании, мы будем называть образующей фигурой.

**20.2. Последовательное применение параллельных переносов.** Для конструирования новых фигур можно воспользоваться несколькими разными переносами, которые позволяют склеивание фигуры с её образом. На рисунке 271 представлены фигуры, которые можно получить из частей, связанных различными параллельными переносами. Все эти фигуры образованы одним и тем же прямоугольником.

**20.3.** Многоугольник, изображённый на рисунке 272, получен склеиванием фигур, связанных

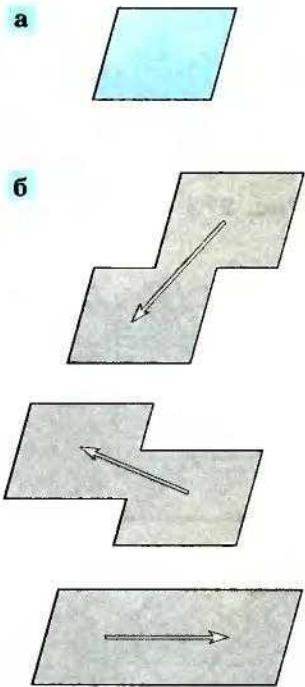


Рис. 269

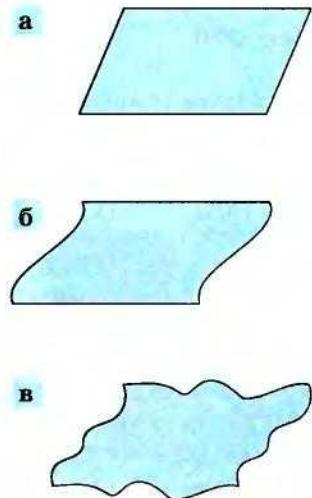


Рис. 270

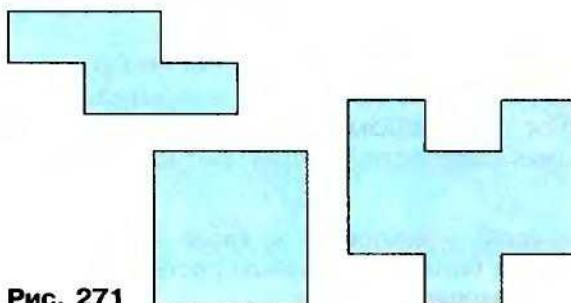


Рис. 271

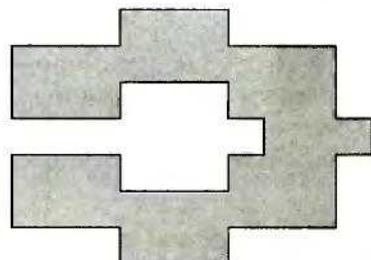


Рис. 272

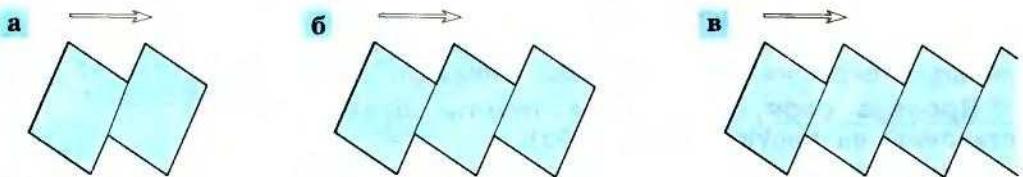


Рис. 273

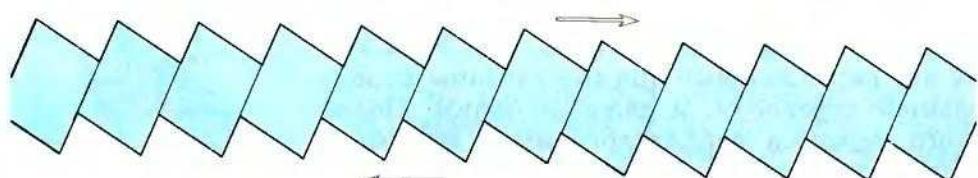


Рис. 274

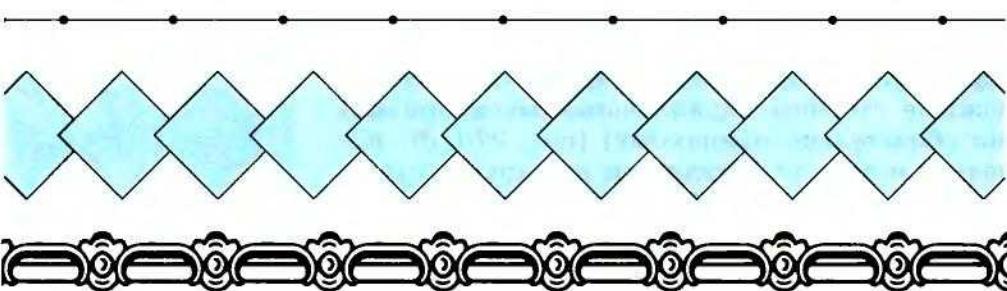


Рис. 275

ных параллельным переносом. Найди образующую фигуру и определи площадь многоугольника: а) приняв за единицу площадь образующей фигуры; б) в квадратных сантиметрах.

Воспользуемся теперь одним и тем же переносом несколько раз: сначала применим его к параллелограмму (рис. 273, а), затем к его образу (рис. 273, б) и так далее. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим конструкцию (рис. 273, в), начинающуюся в первом параллелограмме и неограниченную в одну сторону. Это похоже на построение числового луча. (Объясни почему.)

Можно с помощью параллельных переносов из данной фигуры получить конструкцию, неограниченную в обе стороны. Для этого, кроме рассмотренного переноса, нужно использовать ещё и противоположный ему (рис. 274). Такая конструкция является **бордюром**. Вообще бордюр может быть получен из любой фигуры (рис. 275). При этом может быть использовано не только склеивание, но и простое объединение фигур.

Конструкцию, полученную из фигуры *F* последовательным неограниченным применением двух параллельных переносов в противоположных направлениях, называют **бордюром**, образованным этой фигурой. При этом фигуру *F* называют **образующей** фигурой.

**Бордюр** (франц. *bordure*, от *bord* — край) — украшение по краям чего-нибудь; в декоративном садоводстве — посадка низких (бордюрных) растений по контуру клумбы, по краям дорожек или газонов.

К бордюру, например, из параллелограммов (рис. 276, а) можно применить последовательно новый параллельный перенос так, чтобы образ этого бордюра с ним склеился (рис. 276, б). Если применить ещё и перенос в противоположном направлении (рис. 276, в), то копиями параллелограмма заполнится вся плоскость. Получится конструкция, с которой ты уже встречался в пятом классе, — *паркет* (или *замощение*).

Паркеты являются специальным случаем орнаментов.

**Орнамент** — это объединение правильно повторяющихся равных фигур (рис. 277).

Среди всех орнаментов паркет выделяется тем, что он полностью покрывает плоскость (без пропусков и наложений частей). При этом плоскость оказывается склеенной из фигур, образующих паркет (рис. 277, в).

На рисунке 278, а, б показаны орнаменты, образованные шестиугольниками, а на рисунке 278, в — паркет, образованный теми же шестиугольниками.

**Орнамент** (от лат. *ornare* — снаряжать, украшать) — украшение из листьев, иногда перемешанных с плодами.

**Паркет** (от франц. *parquet* — штучный пол) — пол, набранный из деревянных деталей.

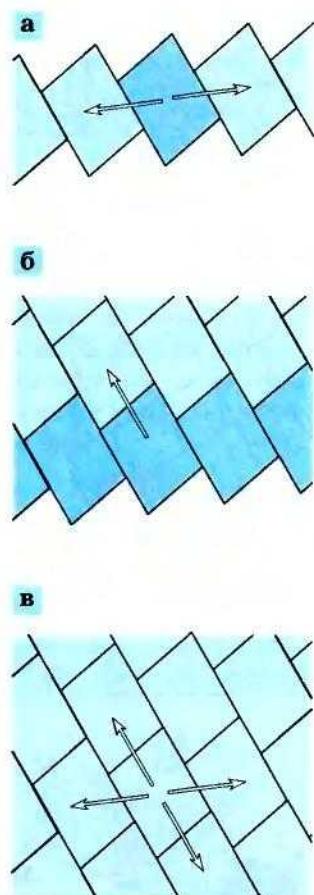


Рис. 276

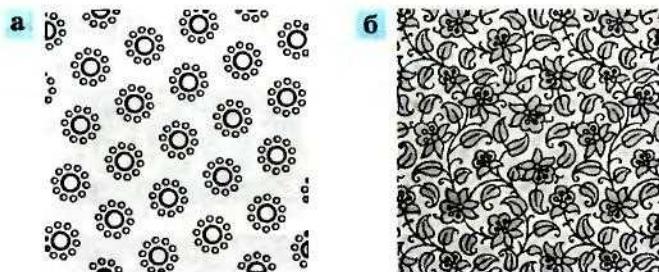


Рис. 277

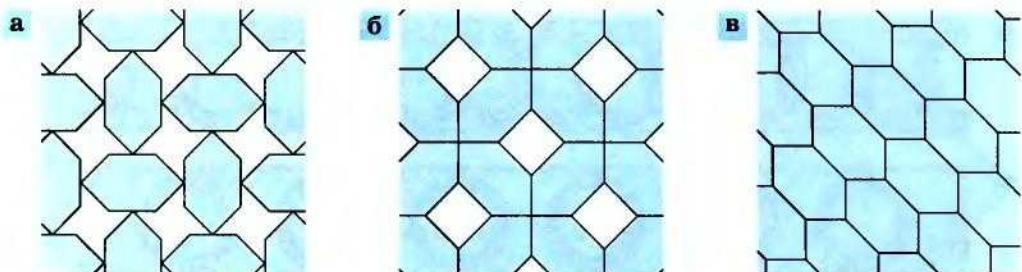


Рис. 278

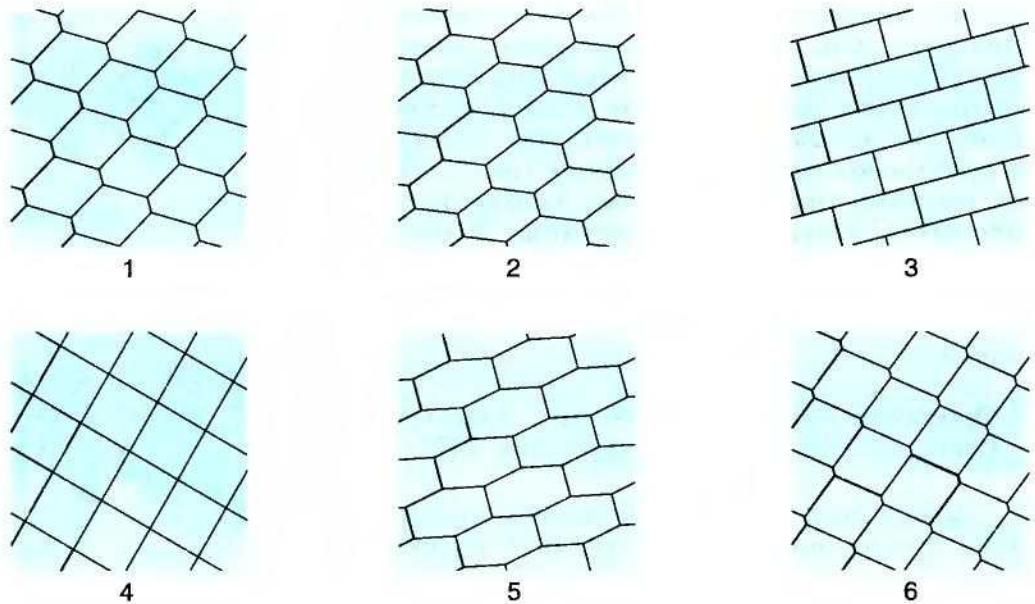


Рис. 279

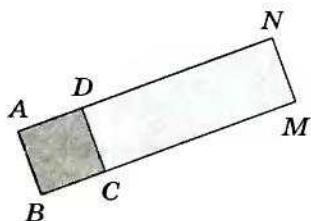


Рис. 280

**20.4.** Определи закономерность (рис. 279) и выпиши номера рисунков в соответствующем порядке.

**20.5.** Как из данного квадрата склеиванием получить квадрат, который имеет в 4 раза большую площадь, чем площадь исходного квадрата? А в 9 раз?

**20.6.** С помощью каких трёх параллельных переносов и склеивания можно получить из квадрата  $ABCD$  прямоугольник  $ABMN$  (рис. 280)?

**20.3. Бордюры.** Бордюры часто используются в архитектуре и декоративном искусстве.

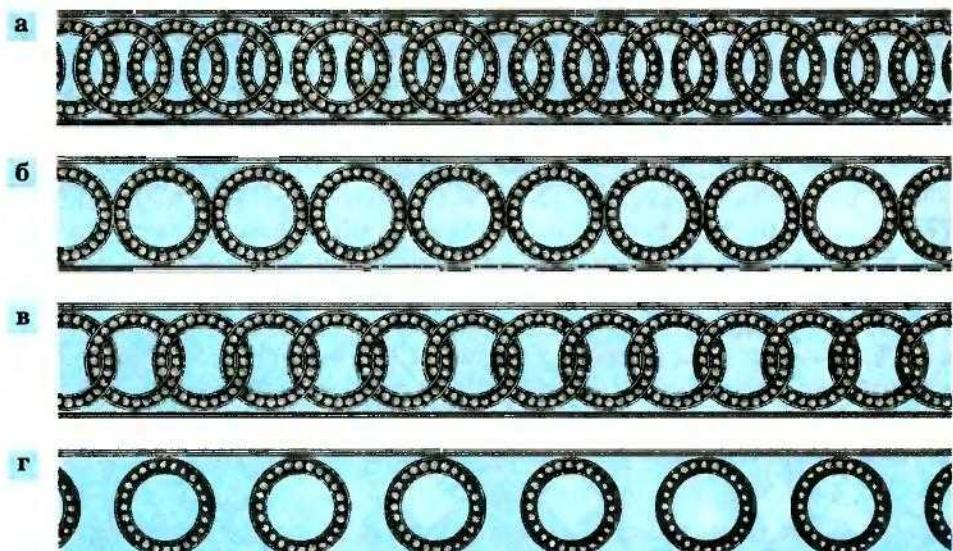


Рис. 281

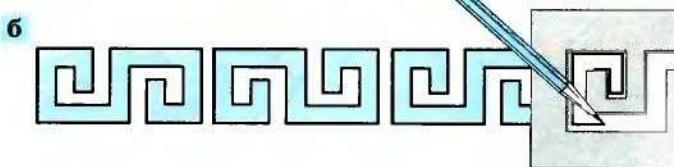
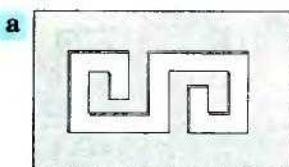


Рис. 282

В качестве образующей фигуры художники и архитекторы используют разнообразные мотивы растительной, животной и геометрической тематики. В декоративном искусстве используются всякие взаимные расположения фигур и их образов при параллельном переносе. Они могут накладываться (рис. 281, а), касаться (рис. 281, б), переплестись (рис. 281, в) и быть совсем разнесёнными (рис. 281, г). В реальной жизни мы имеем дело не со всем бордюром, а только с его частью, в которой использован параллельный перенос столько раз, сколько нужно. Для простоты речи её тоже называют бордюром.

Чтобы нарисовать бордюр, можно воспользоваться шаблоном, вырезанным из какого-нибудь плотного материала (рис. 282, а). Передвигая шаблон вдоль прямой каждый раз на одно и то же расстояние (рис. 282, б) и обводя его контур, ты получишь бордюр.

**20.7.** На рисунке 283 изображены различные бордюры и их образующие фигуры. Сделай шаблон каждой фигуры и нарисуй бордюр. Укажи вектор соответствующего параллельного переноса. Обрати внимание на то, что с помощью образующей фигуры может быть создан образующий фрагмент более сложной формы.

**20.8.** Сделай из картона шаблон какой-нибудь фигуры. Задавая различные векторы параллельного переноса, построй различные бордюры.

**20.9.** Скопируй шестиугольник (рис. 284) и, используя его в качестве шаблона, нарисуй три различных варианта бордюра, полученного параллельным переносом.

**20.10.** Нарисуй бордюры, которые получаются из фигур, изображённых на рисунке 285, при параллельном переносе на заданные векторы.



Рис. 283

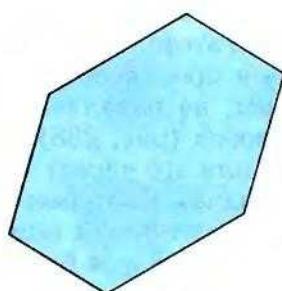


Рис. 284

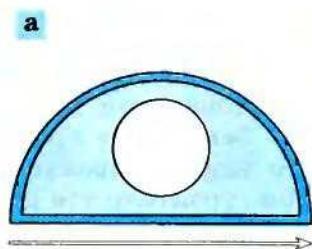
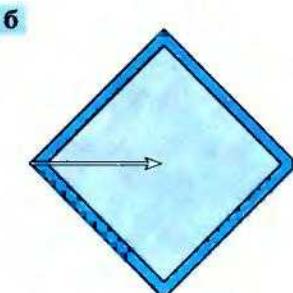


Рис. 285



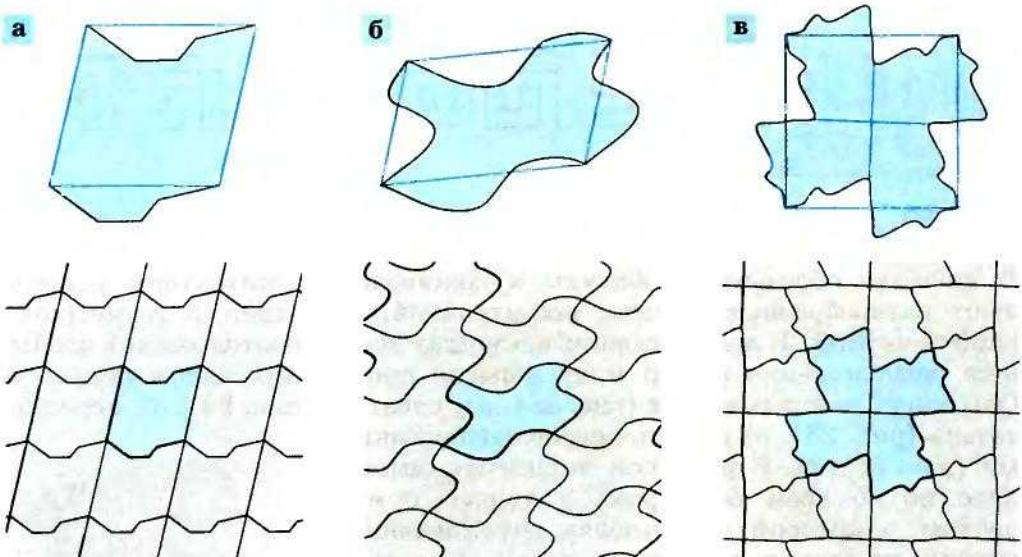


Рис. 286



Рис. 287

**20.4. Паркеты.** С помощью параллельных переносов можно получить паркет из параллелограммов одинаковым искривлением его параллельных сторон (рис. 286, а, б). При этом может получиться так, что эта фигура сама состоит из равных частей (рис. 286, в).

Если подобрать контуры каких-нибудь предметов, животных, растений для фигуры, образующей паркет, то геометрическая конструкция может превратиться в произведение искусства. Так, например, на рисунке 287 представлены три художественных замощения. Создавая их, художники среди фигур, образующих паркеты, нашли фигуры, по форме напоминающие контуры рыб. «Образующие» рыбы в этих паркетах разные, но их отличие зависит в большой степени от геометрических характеристик замощения, а не от фантазии художника.

Ты знаешь, что параллелограммом можно замостить плоскость, используя две пары переносов в двух противоположных направлениях. Так же параллелепипедом можно замостить пространство. Только для этого придётся добавить ещё пару переносов в противоположных направлениях на векторы, не параллельные плоскости первых переносов (рис. 288).

Замощение пространства (или его части) — это важная практическая задача. Например, при строительстве дома используют блоки или кирпичи. Понятно, что кирпич не может быть какой угодно формы. Его форма должна позволять соединять одинаковые кирпичи друг

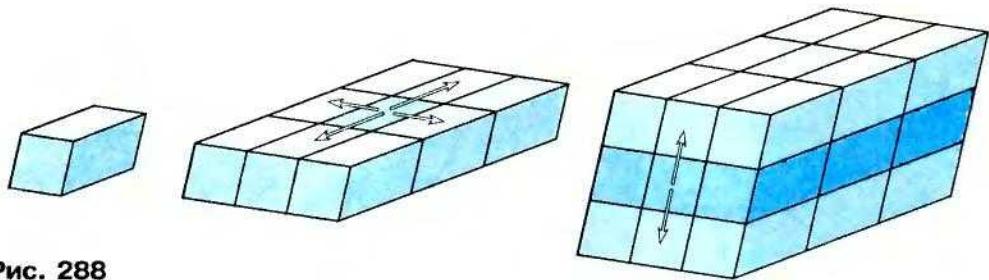


Рис. 288

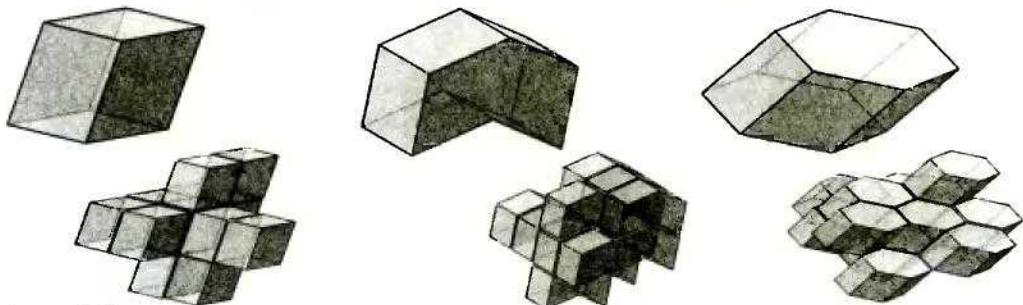


Рис. 289

с другом так, чтобы не оставалось пустот. Самая простая и удобная для производства и строительства форма кирпича — форма прямоугольного параллелепипеда.

Кирпичи могут быть и другой формы. Главное — это должны быть фигуры, которые могут без пустот заполнить пространство (рис. 289, 290). Большинство из них могут быть получены из параллелепипеда одинаковым изгибанием параллельных граней. Модели последних двух многогранников ты можешь сделать, используя развёртки из Приложения (с. 139, 140).

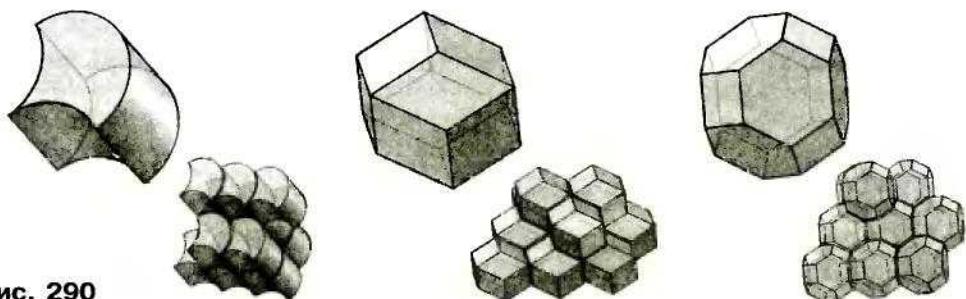


Рис. 290

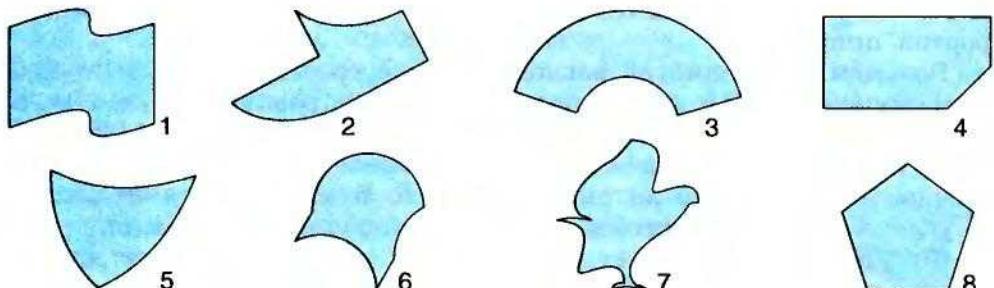
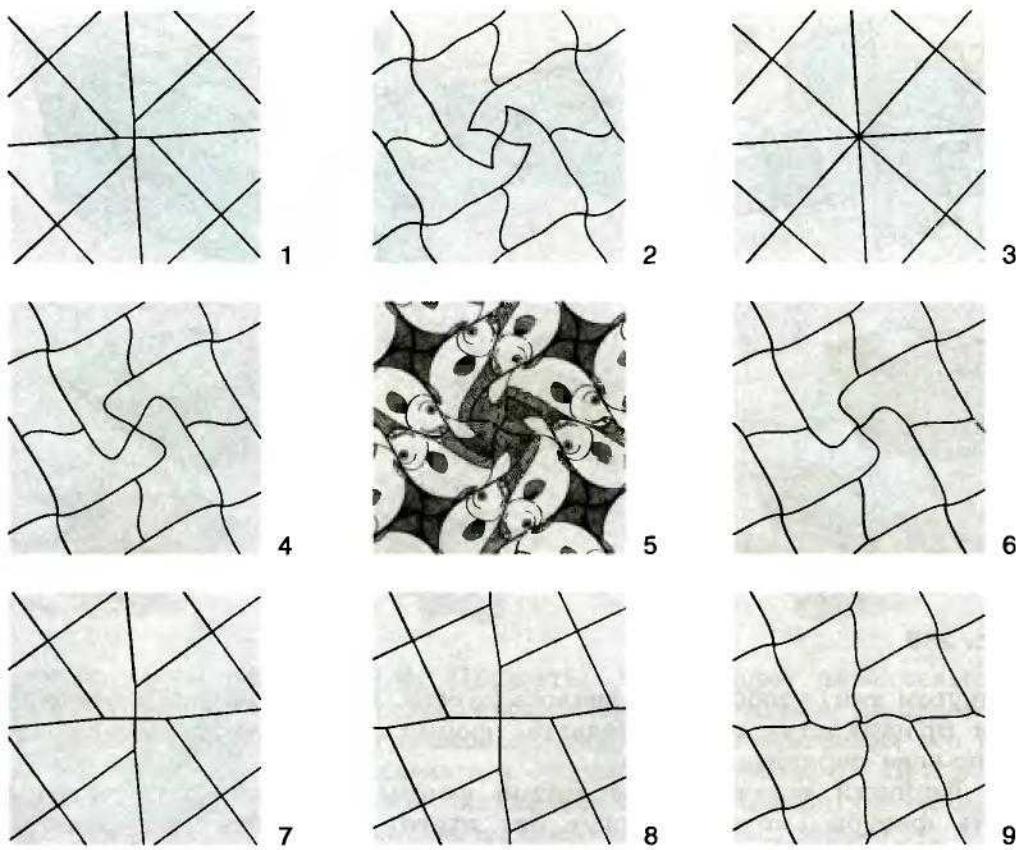


Рис. 291



**Рис. 292**

**20.11.** Из фигур (рис. 291) выбери те, которые могут быть использованы для получения паркета.

**Совет.** Можно воспользоваться калькой.

**20.12.** Определи закономерность (рис. 292) и выпиши номера рисунков в соответствующем порядке.

## § 21 Применение поворота

**21.1. Склейивание фигур, связанных поворотом.** На рисунке 293 изображены объединения двух фигур, связанных между собой поворотом. Выбери среди них те, которые получены склеиванием.

Конечно, это фигуры 2, 3, 5. Ты видишь, что форма склеиваемых фигур может быть различной. Мы опять сначала рассмотрим самый простой пример.

Возьмём какой-нибудь равнобедренный треугольник  $ABC$  с боковыми сторонами  $AB$  и  $AC$  и углом при вершине, равным  $\alpha$  (рис. 294, а), и повернём его вокруг вершины  $A$  на угол  $\alpha$ . При этом луч  $AB$  совместится с лучом  $AC$ . Объединение треугольника  $ABC$  и его образа  $AB'C'$  при повороте показано на рисунке 294, б. В зависимости от величины угла  $A$  могут получиться различные фигуры (рис. 294, в).

Фигура, которая может быть склеена со своим образом при повороте, не обязательно должна быть равнобедренным треугольником (рис. 295). На рисунках 295, б, г приведены фигуры, которые

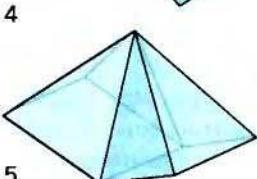
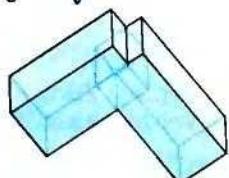
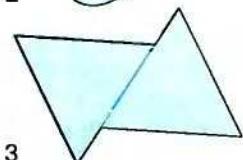
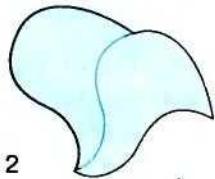
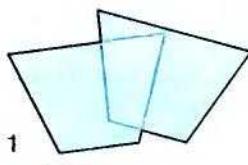


Рис. 293

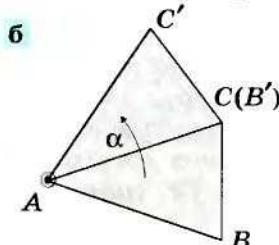
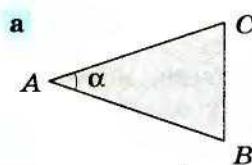


Рис. 294

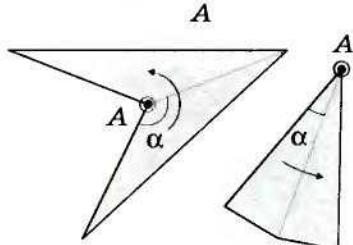
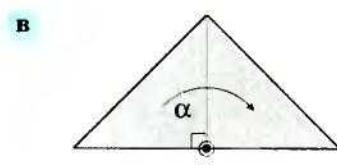


Рис. 294

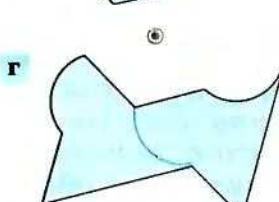
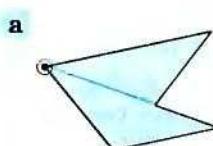


Рис. 295

получены из равнобедренных треугольников изгибанием их боковых сторон. Очень важно отметить, что те части границы фигуры, которые не участвуют в склейке, могут изгибаться независимо друг от друга. Но части, по которым склеиваются фигура и её образ, должны изгибаться одинаково (рис. 296).

**21.2. Последовательное применение поворота.** Так же как и в случае параллельного переноса, при последовательном применении одного и того же поворота можно получать новые фигуры.

Применим к треугольнику  $ABC$  такой поворот вокруг точки  $A$ , чтобы его образ мог приклеиться к нему. Это поворот на угол  $BAC$ . Применяя поворот «от образа к образу», мы получим фигуру (рис. 297), похожую на ежа. Она состоит из 6 равных частей. Подчеркнём, что соседние части получившейся фигуры связаны одним поворотом: вокруг одной точки на один и тот же угол.

Как ты думаешь, можно ли подобрать треугольник и его поворот так, чтобы последняя

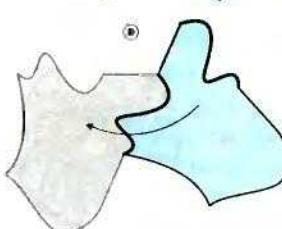
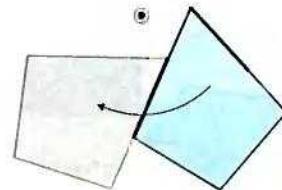


Рис. 296

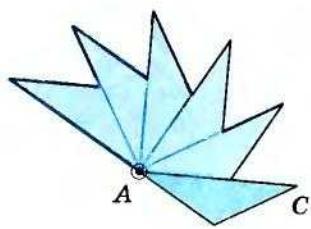


Рис. 297

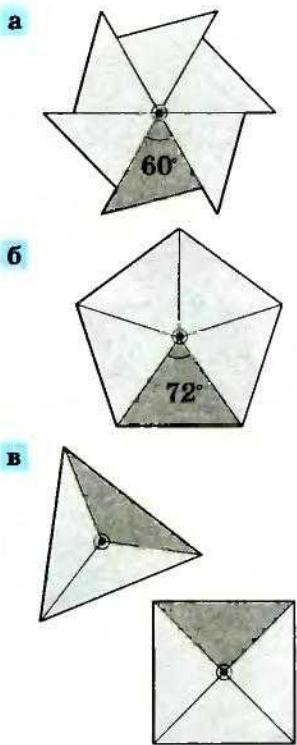


Рис. 298

часть фигуры (в нашем случае — шестая) склеилась с первой?

Конечно, можно. Для этого угол треугольника и угол поворота должны быть равными и такими, чтобы шесть одинаковых углов в сумме образовали полный угол (рис. 298, а). Таким углом является угол  $60^\circ$ .

Если же мы захотим получить аналогичную фигуру, состоящую из 5 равных равнобедренных треугольников, то угол при вершине этого треугольника должен быть равен  $360 : 5 = 72^\circ$  (рис. 298, б).

**21.1.** Определи, каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника, чтобы из него с помощью поворота вокруг вершины можно было получить многоугольник, состоящий из трёх, четырёх, десяти равных частей, последняя из которых склеилась бы с первой.

▼ **Проверь себя.** На рисунках (рис. 298, в) показаны соответствующие треугольники и полученные из них фигуры.

Мы получали из равнобедренных треугольников многоугольники с помощью последовательного применения одного и того же поворота (см. рис. 298, б, в). Такие многоугольники называются *правильными многоугольниками*, а общая вершина равнобедренных треугольников — его *центром*. В таких многоугольниках все углы равны и все стороны равны (почему?). Это свойство используют для определения правильных многоугольников.

**Многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и все углы равны.**

Правильные многоугольники можно получить склеиванием не только равнобедренных треугольников, но, например, и фигур, полученных из равнобедренных треугольников изгибанием их боковых сторон (рис. 299, а).

Если заменить треугольник, образующий правильный многоугольник, какой-нибудь другой фигурой и применить к ней те же повороты, то можно получить орнамент в круге — *розетку* (рис. 299, б).

Вернёмся к паркетам из рыб (см. рис. 292). Ты, наверное, заметил, что образующие фигуры для образования паркета параллельным переносом соединяются по-разному. В первом и третьем паркетах для этого были использованы повороты. На рисунке 300 показаны центры и углы этих поворотов.

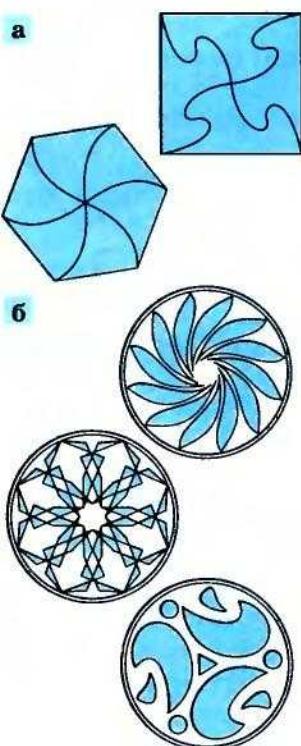


Рис. 299

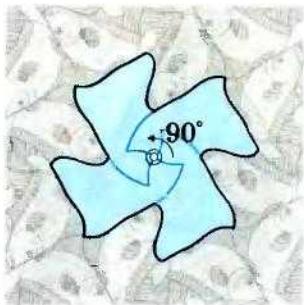


Рис. 300

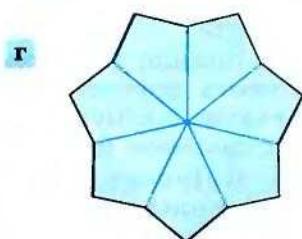
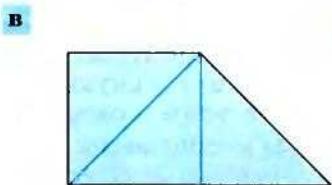
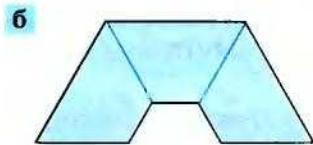
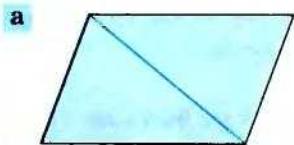


Рис. 301

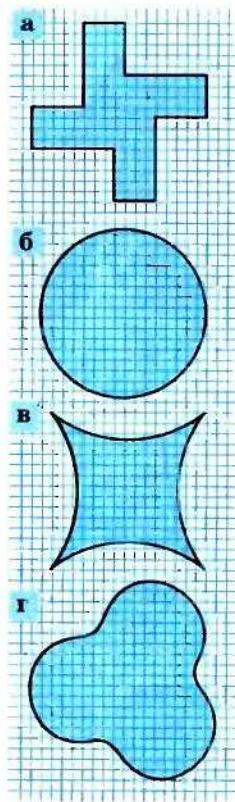


Рис. 302

**21.2.** Скопирай фигуры (рис. 301) и для каждой из них укажи центры и углы поворотов, связывающих их части.

**21.3.** Скопирай фигуры (рис. 302) и раздели каждую из них на равные части, связанные друг с другом поворотом.

**21.3. Правильные пирамиды.** С помощью поворота можно получить и пространственные фигуры.

Возьмём, например, треугольную пирамиду, у которой в основании — равнобедренный прямоугольный треугольник  $AOB$ , а высота  $PO$  проходит через вершину  $O$  прямого угла (рис. 303, а). Повернём в каком-нибудь направлении эту пирамиду вокруг прямой  $PO$  на угол, равный  $90^\circ$  (рис. 303, б), затем в том же направлении — ещё раз (рис. 303, в) и, наконец, — третий раз (рис. 303, г). При этом мы получим пирамиду, у которой в основании — квадрат  $ABCD$  (правильный четырёхугольник), а высота — отрезок  $PO$  — проходит через его центр. Такая пирамида называется правильной.

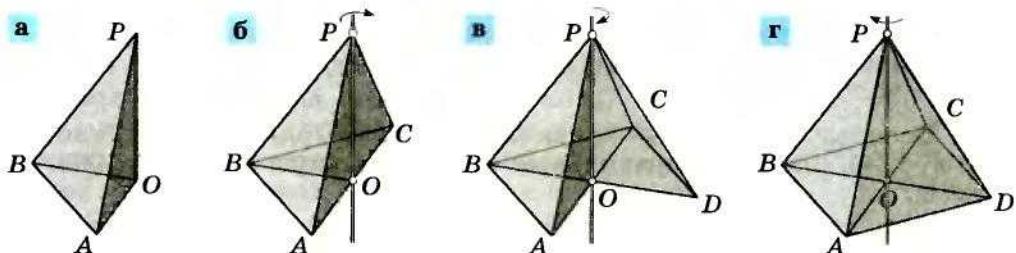


Рис. 303

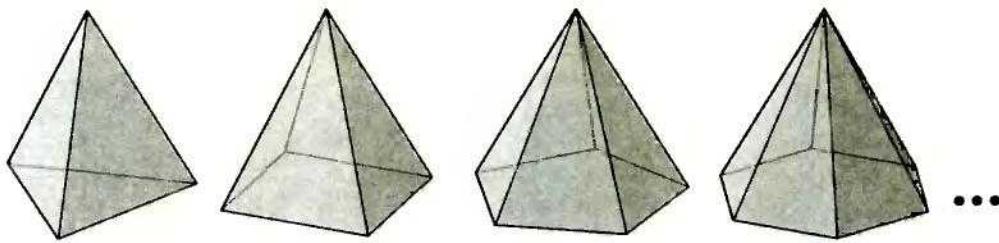


Рис. 304

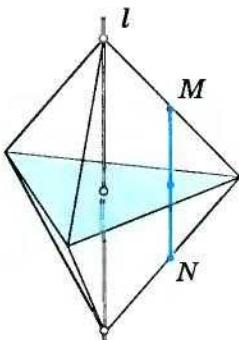


Рис. 305

**Правильной пирамидой** называют такую пирамиду, у которой основание — правильный многоугольник, а высота проходит через центр этого многоугольника.

Правильные пирамиды могут быть не только четырёхугольными, но и треугольными, пятиугольными... (рис. 304).

**21.4.** Опиши, как можно указанным способом получить другие правильные пирамиды: треугольную, пятиугольную, шестиугольную. Каковы должны быть при этом углы поворота?

**21.5.** В Приложении (с. 134) изображены шаблоны правильных многоугольников, по-разному расположенных по отношению к зрителю. Сделай эти шаблоны и потренируйся в изображении правильных пирамид в различных положениях.

**21.6.** Две правильные треугольные пирамиды совместили основаниями так, как показано на рисунке 305. Прямая  $l$  содержит высоты этих пирамид. Сделай такой же рисунок и изобрази на нём образ отрезка  $MN$  при повороте вокруг прямой  $l$  на угол  $120^\circ$ .

**21.7.** Сделай модели правильных пирамид, развёртки которых представлены в Приложении на с. 135—137.

**21.4. Правильные призмы.** Поворот вокруг прямой можно использовать и для получения призм.

**21.8.** Как с помощью поворотов можно получить призму, в основании которой лежит правильный шестиугольник?

◀ **Проверь себя.** Для получения шестиугольной призмы можно взять прямую треугольную призму  $AOB A_1O_1B_1$ , в основании которой — равнобедренный треугольник  $AOB$  с углом при вершине  $O$ , равным  $60^\circ$ , и пять раз повернуть её и её образ вокруг ребра  $OO_1$  (рис. 306) в одном направлении. При этом получится прямая призма, которая называется *правильной*.

**Правильной призмой** называется такая прямая призма, в основании которой лежит правильный многоугольник.

**21.9.** Используя шаблоны правильных многоугольников (Приложение, с. 134), нарисуй правильные шестиугольную и пятиугольную призмы.

**21.10.** Как с помощью поворота вокруг прямой можно получить правильные пятиугольную и восьмиугольную призмы? Каким должен быть при этом угол поворота?

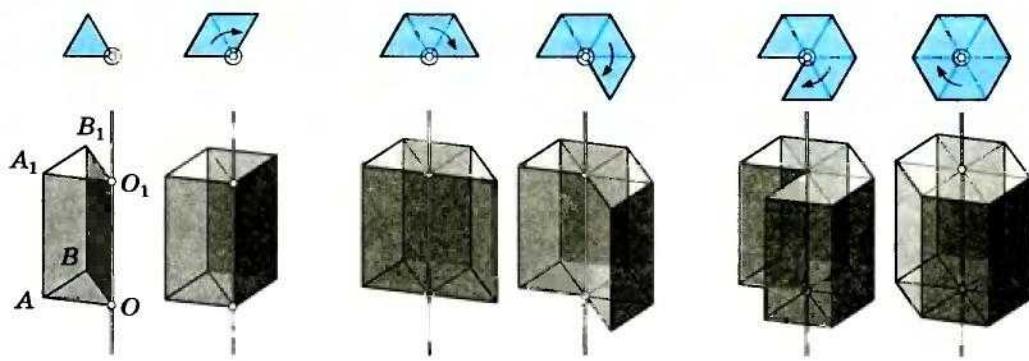


Рис. 306

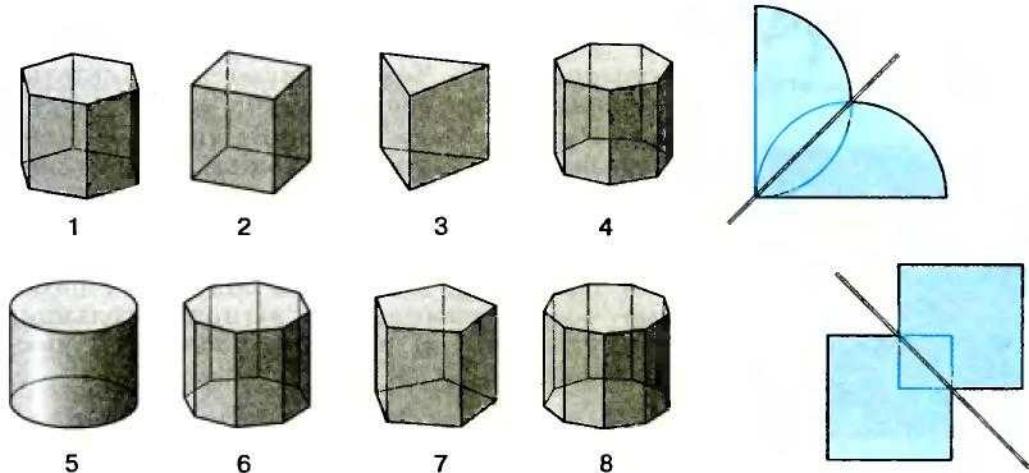


Рис. 307

Рис. 308

**21.11.** Определи закономерность (рис. 307) и расставь рисунки в порядке, соответствующем этой закономерности.

## § 22 Применение симметрии

Перейдём теперь к конструированию фигур с помощью осевой симметрии. Подумаем, как могут располагаться фигура и ось симметрии, чтобы новую фигуру можно было получить склеиванием. На рисунке 308 приведены примеры фигур, частей которых связаны осевой симметрией.

Видно, что склеивание фигуры со своим образом может быть произведено только в случае, если её граница содержит отрезок, луч или прямую (т. е. прямолинейный участок). Ось симметрии должна быть расположена так, чтобы на ней лежал этот участок границы (рис. 309). Форма оставшейся части фигуры значения не имеет. Важно только, чтобы вся фигура лежала по одну сторону от оси симмет-

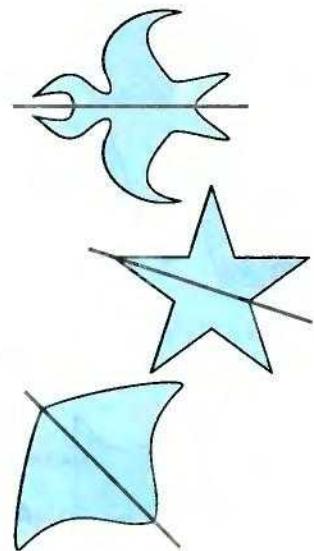
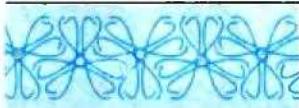
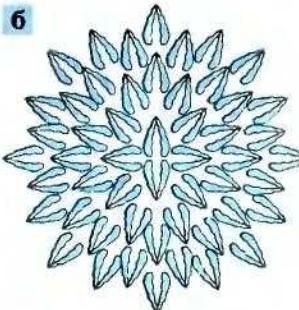


Рис. 309

а



б



в

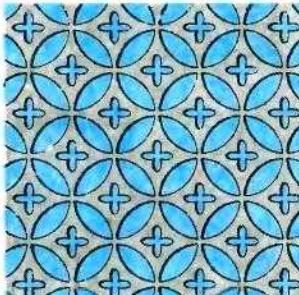


Рис. 310

рии. Осевую симметрию часто используют при создании орнаментов в полосе (рис. 310, а), в круге (рис. 310, б), на плоскости (рис. 310, в).

**22.1.** Нарисуй угол  $AOB$ . Используя осевую симметрию, построй такой угол, чтобы биссектрисой его был: а) луч  $OA$ ; б) луч  $OB$ .

**22.2.** Начерти прямоугольный треугольник  $ABC$ , в котором угол  $C$  прямой, а стороны  $AC$  и  $CB$  равны соответственно 3 см и 2 см. Построй треугольник, симметричный данному относительно: а) прямой  $AC$ ; б) прямой  $BC$ ; в) прямой  $AB$ . Какой фигурой в каждом случае является объединение данного треугольника и построенного?

**22.3.** Реши задачу, аналогичную предыдущей, для равнобедренного прямоугольного треугольника  $ABC$ . Чем отличаются результаты, полученные при решении этих задач?

**22.4.** Придумай ещё два каких-нибудь способа получения квадрата с помощью осевой симметрии.

**Замечание.** Можно применить не одну осевую симметрию.

**22.5.** Придумай, как можно получить с помощью осевой симметрии: а) прямоугольник; б) треугольник; в) ромб; г) правильный шестиугольник.

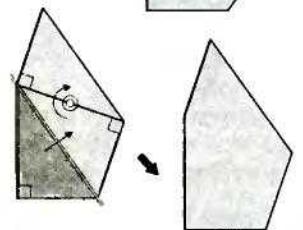
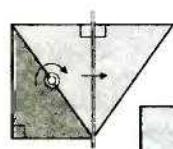


Рис. 311

## § 23 Использование разных видов движений для получения новой фигуры

**23.1. Склейивание фигур, связанных разными движениями.** На рисунке 311 представлены фигуры, равные части которых связаны разными движениями. Обрати внимание на то, что фигуры получены из одного и того же прямоугольного треугольника.

В обоих случаях были использованы симметрия относительно одной стороны треугольника и поворот вокруг середины другой стороны. Но преобразования были выполнены в разном порядке и относительно разных сторон, поэтому получились разные результаты.

**23.1.** Выдели лишнюю фигуру (рис. 312).

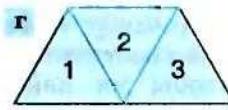
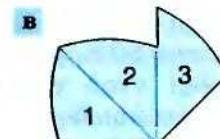
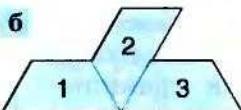
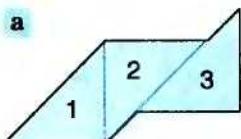


Рис. 312

Размышляя над задачей, ты мог обнаружить, что фигуры можно сравнивать по тому, в какой последовательности и какими движениями связаны части этих фигур. Другими словами, фигуры можно различать по *алгоритму склеивания частей*. (Чтобы вспомнить, что такое алгоритм, вернись к § 5.)

Фигуры на рисунках 312, б—г сконструированы по одной и той же схеме — одному алгоритму: а) части 1 и 2 связаны симметрией относительно их общей стороны; б) части 2 и 3 связаны поворотом вокруг вершины на угол между сторонами, сходящимися в этой вершине.

Процесс получения новых фигур из равных частей с помощью склеивания можно представлять в виде схемы. Надо только придумать понятную систему обозначения отдельных этапов этого процесса. Этапы конструирования фигуры можно представлять в виде рисунков (пиктограмм).

**Пиктограмма** (от лат. *picture* — рисунок, и греч. *gramma* — начертание, линия) — это запись информации в виде картинки.

Ещё в Древнем Египте существовала такая система передачи информации. На рисунке 313 приведены примеры пиктограмм. Подумай, где можно увидеть пиктограммы.



Наскальные изображения первобытных людей



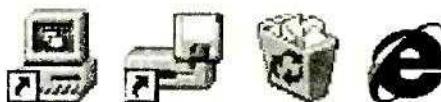
Иероглифы Древнего Египта



Гербы (геральдика)



Дорожные знаки



Компьютерные пиктограммы

Рис. 313

Обозначим пиктограммами следующие движения:

— параллельный перенос;

— поворот;

— осевая симметрия;

— центральная симметрия.

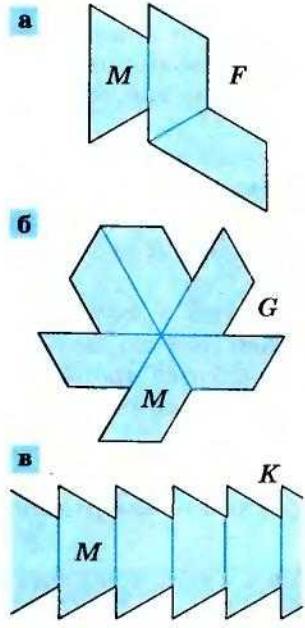


Рис. 314

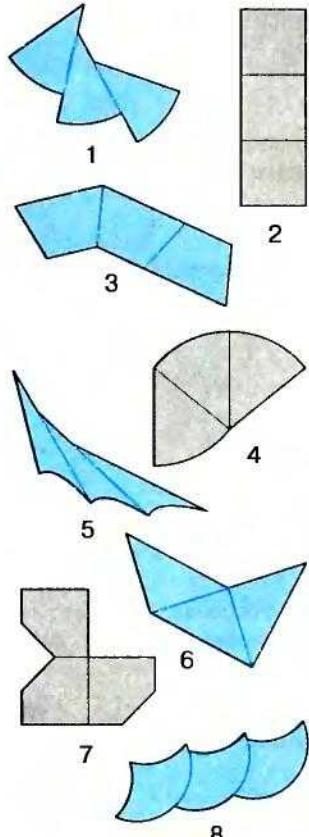


Рис. 315

Введём еще обозначения для более сложных операций:

— объединение образов фигур;

— неограниченный повтор переноса;

— неограниченный повтор двух взаимно противоположных переносов.

Запишем с помощью введённых пиктограмм алгоритмы конструирования фигур, изображённых на рисунке 314:

а) {фигура M} {фигура F};

б) {фигура M} {фигура G};

в) {фигура M} {фигура K}.

Конечно, для точного описания алгоритма мы должны указать векторы переносов, углы и центры поворотов, расположение осей симметрии. Однако мы ограничимся такими общими обозначениями, чтобы только дать представление о том, как придумать и организовать конструирование фигур из равных частей.

**23.2.** Какие из фигур (рис. 315) склеены по одному алгоритму? В каждом случае запиши схему этого алгоритма.

**23.3.** Построй фигуру из равностороннего треугольника по следующим алгоритмам:

а)  $\{\Delta ABC\}$  {фигура F};

б)  $\{\Delta ABC\}$  {фигура G}.

**23.2. Орнаменты.** Сочетание разных преобразований при конструировании орнаментов имеет большое значение. Чем больше разных преобразований использовано при изготовлении орнамента, тем более «запутанным», «загадочным» он становится.

Мы говорили, что образующая фигура может быть получена с помощью движений из другой, более простой фигуры. Простейшую образующую фигуру мы, вслед за художниками и архитекторами, будем называть *мотивом*.

Мотив, используемый в орнаментах, может быть различным: растительным, животным, геометрическим... (рис. 316).

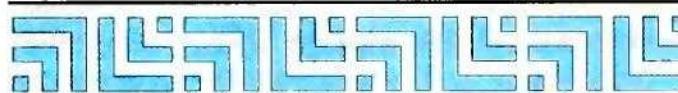
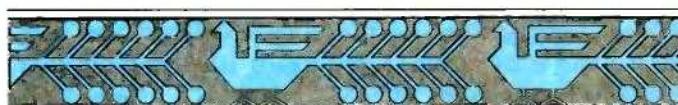
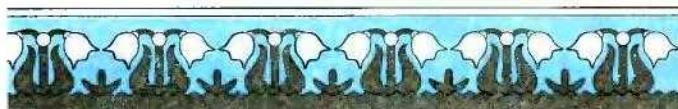


Рис. 316

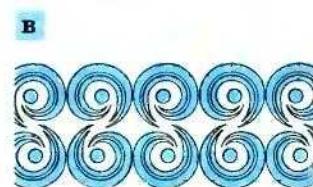
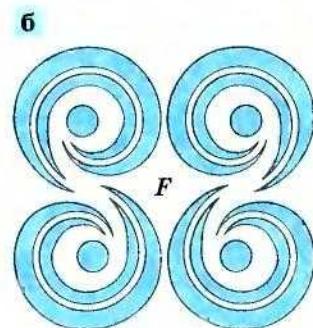
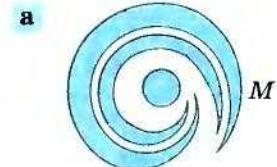


Рис. 317

Опишем наиболее распространённые схемы построения орнаментов.

Для получения орнамента в полосе обычно поступают так:

- определяют мотив (*M*) орнамента (рис. 317, *a*);
- конструируют из него фигуру (*F*), которая будет распространяться по полосе (рис. 317, *b*);
- распространяют по всей полосе полученную фигуру *F* переносами, симметриями, поворотом на  $180^\circ$  — центральной симметрией (рис. 317, *c*).

В общем виде такой наиболее распространённый способ построения бордюров можно представить с помощью пиктограмм так:

{мотив} \*\*\* {фигура *F*} {бортюр}.

Вместо звёздочек в каждом случае будут стоять пиктограммы, которые соответствуют движениям, связывающим части фигуры *F*.

Например, алгоритм, соответствующий бордюру, изображённому на рисунке 317, можно представить так:

{мотив} {фигура *F*} {бортюр}.

Для получения орнаментов в круге чаще всего применяют следующий способ:

- определяют, в какой части полного угла будет располагаться фигура, образующая орнамент (рис. 318, *a*);

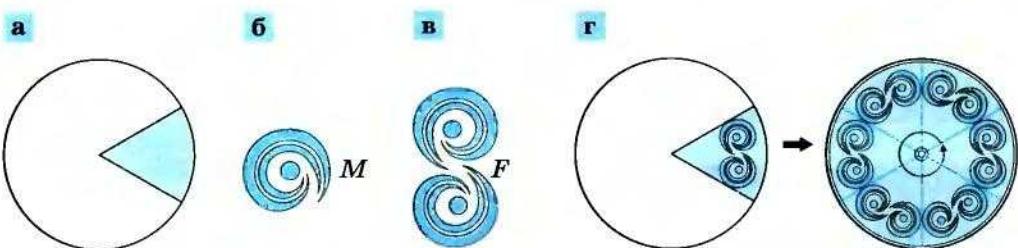


Рис. 318

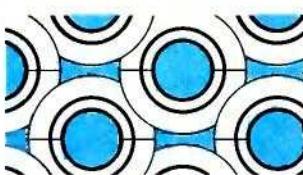
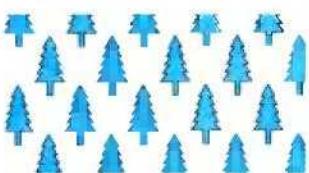


Рис. 319

- определяют мотив орнамента *M* (рис. 318, б);
- конструируют из мотива образующую фигуру (рис. 318, в);
- распространяют полученную фигуру на полный угол с помощью поворота или осевой симметрии (рис. 318, г).

Один из возможных алгоритмов, с помощью которого можно получить орнамент, изображённый на рисунке 318, г, выглядит так:

{мотив} {фигура *F*} {розетка}.

Схема получения орнаментов на плоскости (рис. 319) мало чем отличается от схемы получения бордюров. Здесь только добавляется ещё одна операция — склеивание полос для полного заполнения плоскости. Кроме того, орнамент на всей плоскости можно получить и на основе розетки. Если в качестве фигуры,

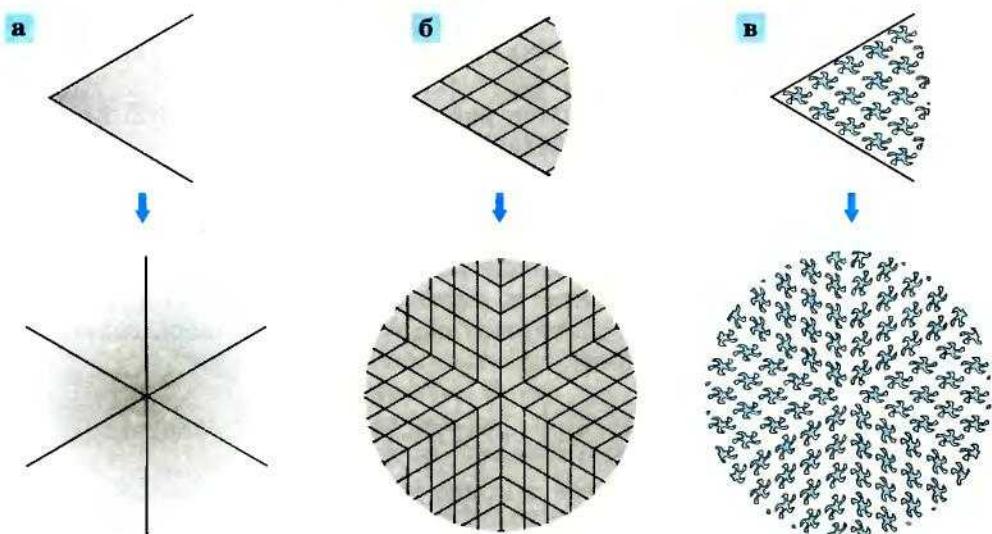


Рис. 320

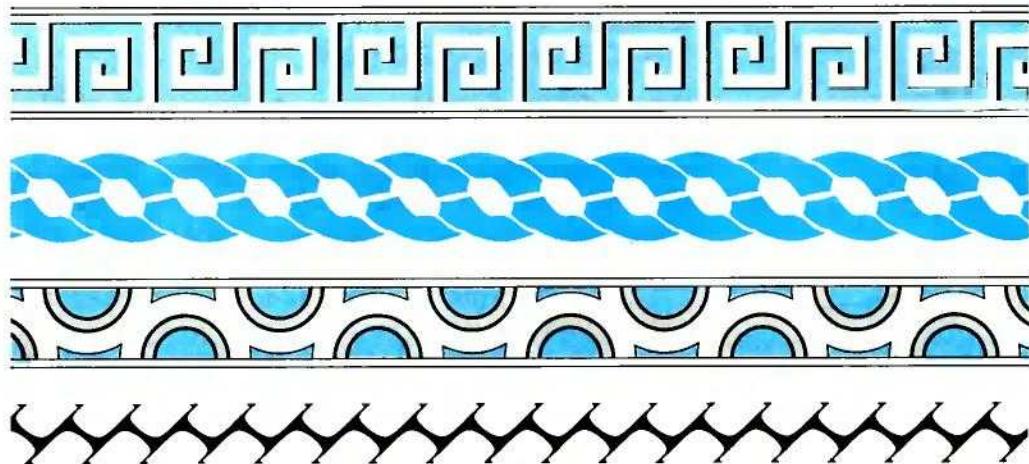


Рис. 321

образующей розетку, взять угол подходящей величины, то при последовательном применении нужного числа поворотов мы в объединении получим плоскость (рис. 320, а). Если угол разбить на равные части, то можно получить орнамент на плоскости (рис. 320, б), и даже весьма необычного вида (рис. 320, в).

**23.4.** Четыре бордюра (рис. 321) образованы по одному алгоритму. Зарисуй пиктограммами этот алгоритм.

**23.5.** Три розетки (рис. 322) образованы по одному алгоритму. Зарисуй пиктограммами этот алгоритм.

**23.6\*.** Какие из следующих алгоритмов при определённом выборе векторов переносов, осей симметрий и центров поворотов могут привести к одному результату:

- а) {мотив} {бордюр};
- б) {мотив} {бордюр};
- в) {мотив} {бордюр}?

**Совет.** Чтобы доказать правильность своего решения, приведи пример бордюра, к которому подходят эти алгоритмы.

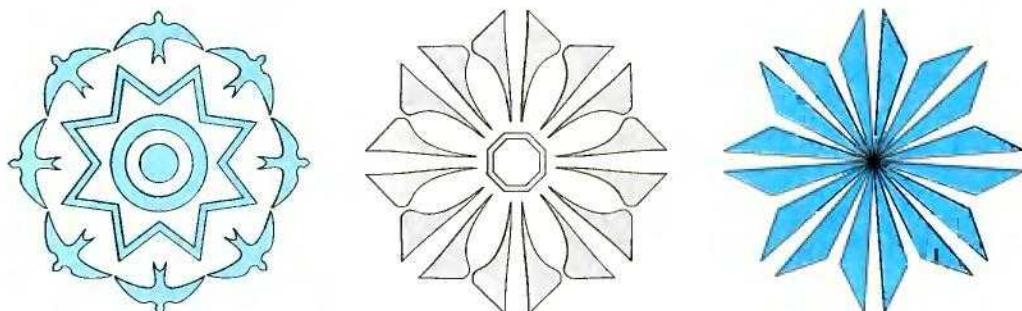


Рис. 322

## § 24 Фигуры, составленные из равных частей

**24.1. Самосовмещения фигуры.** Мы обратили внимание на то, что среди всех возможных преобразований какой-нибудь фигуры можно выделить те, которые приводят к особому (будем говорить — «замечательному») взаимному расположению фигуры и её образа.

Для фигуры  $F$  (рис. 323, а) «замечательным» можно назвать поворот на  $45^\circ$  вокруг точки  $A$  по часовой стрелке, который приводит к склеиванию фигуры  $F$  и её образа  $F'$  (рис. 323, б). Кроме этого, поворот на  $180^\circ$  вокруг точки  $D$  (рис. 323, в) приведёт к склеиванию фигур  $F$  и  $F'$ . При повороте фигуры  $F$  на  $360^\circ$  тоже произойдёт необычное взаимное расположение этой фигуры и её образа: они полностью совпадут (рис. 323, г).

Последнее расположение фигуры и её образа даже имеет специальное название — *совмещение фигуры с собой* или *самосовмещение фигуры*. Словом «самосовмещение» мы будем называть также и преобразование, при котором фигура совпадает со своим образом.

Однако самосовмещение некоторых фигур может произойти не только при повороте на  $360^\circ$ . Правильный треугольник, например, самосовмещается поворотами на  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $360^\circ$  и тремя осевыми симметриями (рис. 324).

**24.1.** Для каждой из фигур (рис. 325, а) назови преобразования, которые приводят к совмещению этой фигуры с собой.

**24.2.** Скопирай фигуру (рис. 325, б). Дорисуй её так, чтобы получившуюся фигуру можно было совмещать с собой: а) двумя разными движениями; б) тремя разными движениями.

**24.3\*.** Может ли плоская фигура самосовмещаться при параллельных переносах? Если да, то нарисуй пример такой фигуры.

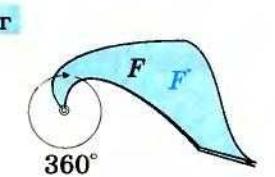
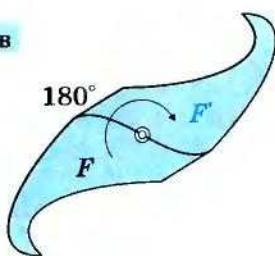
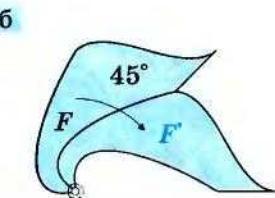
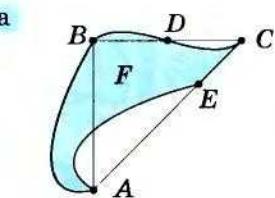


Рис. 323

самосовмещения  
правильного  
треугольника

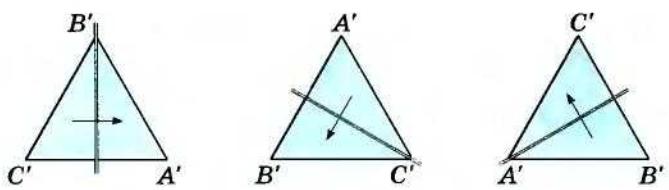
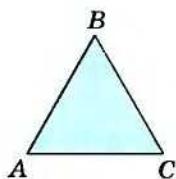
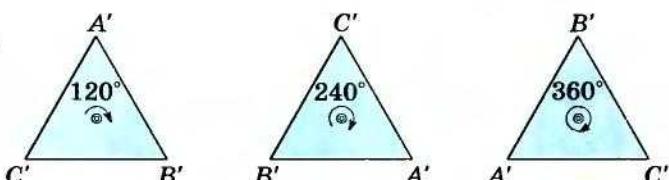


Рис. 324

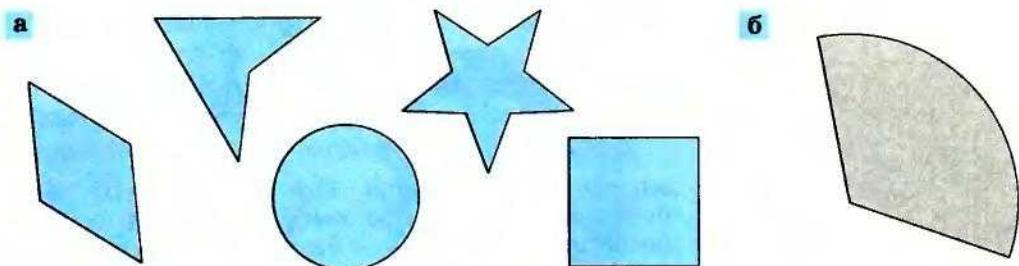


Рис. 325



Рис. 326

**Проверь себя.** Такой может быть только неограниченная фигура. На рисунке 326 приведен соответствующий пример.

Бордюры могут самосовмещаться также при поворотах на  $180^\circ$  и осевых симметриях (рис. 327).

Самое большое разнообразие преобразований, осуществляющих самосовмещение фигуры, можно наблюдать в орнаментах на плоскости.

**24.4\***. Посмотри на рисунки 328—330 и расскажи, какие преобразования приводят к самосовмещению изображённых паркетов.

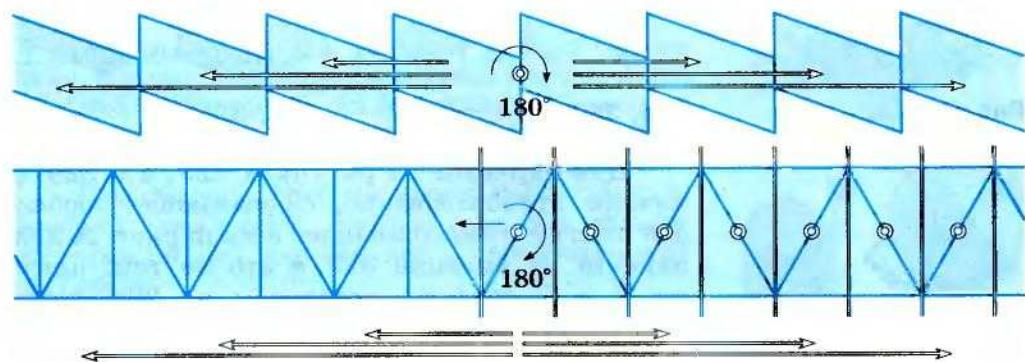


Рис. 327

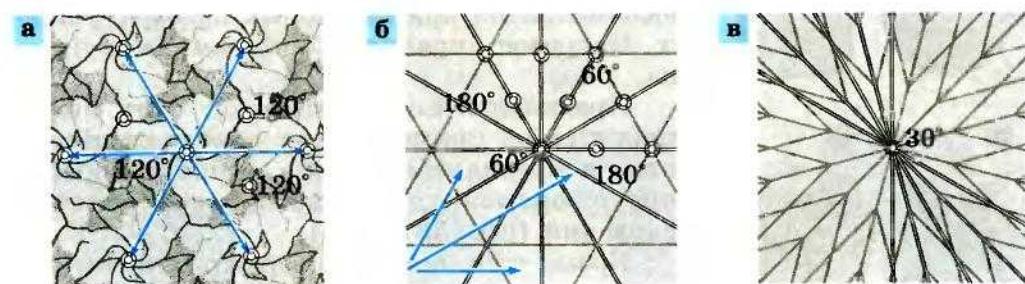


Рис. 328

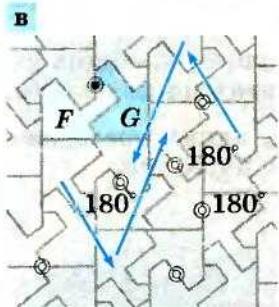
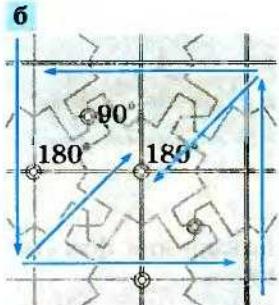
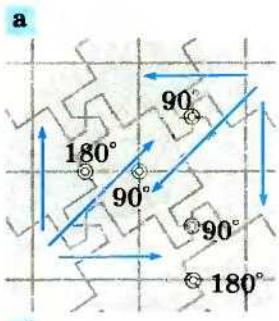


Рис. 329

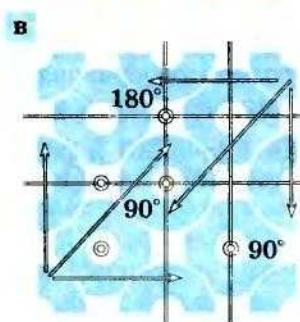
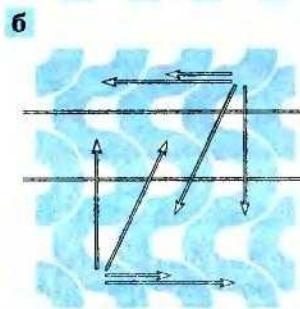
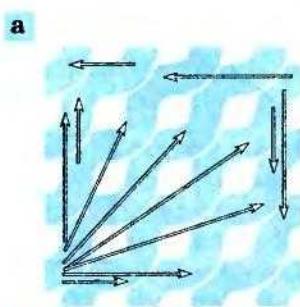
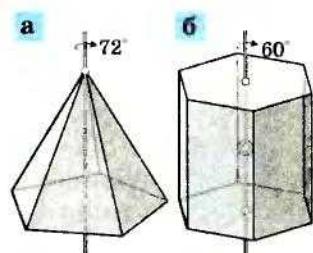
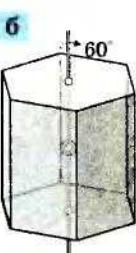


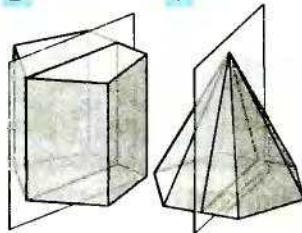
Рис. 330



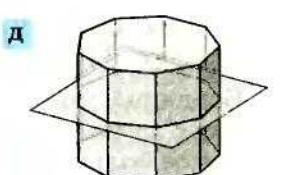
а



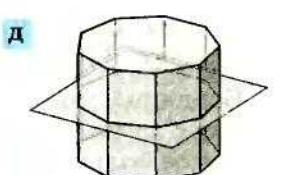
б



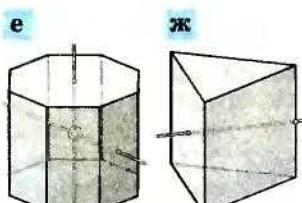
в



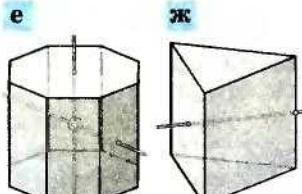
г



д

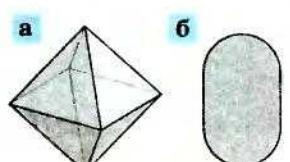


е

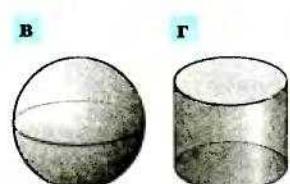


ж

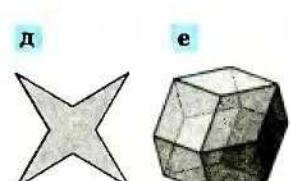
Рис. 331



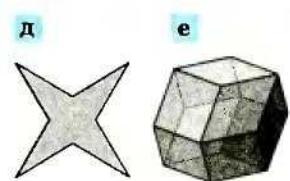
а



б



в



г

Для паркетов на рисунках 329, а и 329, б каждое преобразование, связывающее любые две плитки, самосовмещает весь паркет. А для паркета на рисунке 329, в это не так: плитки *F* и *G* связаны поворотом на 90°, который не приводит к самосовмещению всего паркета. Бывают такие паркеты, которые не могут самосовместиться параллельным переносом (рис. 328).

Пространственные фигуры тоже могут самосовмещаться при некоторых преобразованиях. Например, правильные пирамиды и призмы.

Правильная пирамида может быть совмещена с собой при поворотах вокруг своей высоты, а правильная призма — при поворотах вокруг прямой, проходящей через центры оснований (рис. 331, а, б).

Кроме того, есть ещё зеркальные симметрии, которые самосовмещают правильные пирамиды и призмы (рис. 331, в—д).

Рис. 332

Для правильной призмы, кроме перечисленных, есть и другие движения, самосовмещающие её. Это симметрии относительно некоторых прямых (рис. 331, е, ж), а иногда и центральная симметрия (рис. 331, б, е).

**24.5.** На рисунке 332 изображены фигуры, для каждой из которых есть несколько преобразований, приводящих к самосовмещению. Назови их.

## 24.2. Фигуры, обладающие симметрией.

Нетрудно заметить, что если есть движение, самосовмещающее фигуру (рис. 333, а), то эта фигура состоит из равных частей, одинаково расположенных по отношению друг к другу (рис. 333, б).

**24.6.** Найди фигуры на рисунке 334, которые можно разделить на равные части. Какими преобразованиями может быть совмещена одна из этих частей с другой? Происходит ли каждый раз при этом самосовмещение фигуры?

**24.7.** Нарисуй какую-нибудь фигуру, самосовмещающуюся при: а) повороте вокруг точки на  $90^\circ$ ; б) осевой симметрии; в) центральной симметрии. В каждом случае выдели разными цветами равные части, связанные друг с другом соответствующим движением. Можно ли эту фигуру как-нибудь иначе разбить на равные части, связанные друг с другом этим движением?

**Проверь себя.** На рисунке 335, а приведена фигура, которая самосовмещается центральной симметрией, на рисунках 335, б—г — соответствующие разбиения на две равные части.

Про фигуру, которая может быть самосовмещена движением, говорят, что она *обладает симметрией* или что она — *симметричная фигура*.

Слово *симметрия* происходит от греческого *symmetria* (*sym* — вместе и *metron* — мера) и означает соразмерность в расположении частей целого.

Сравни это слово со словом гармония (см. п. 11.3).

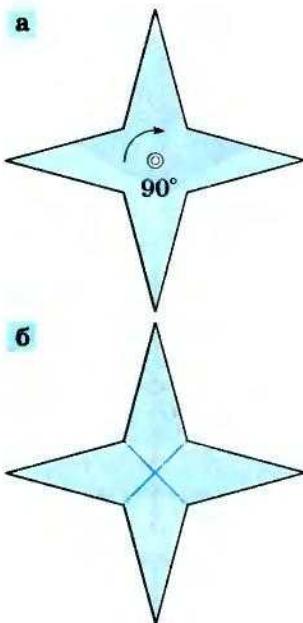


Рис. 333

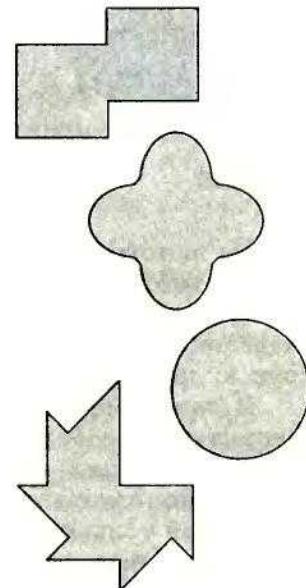


Рис. 334

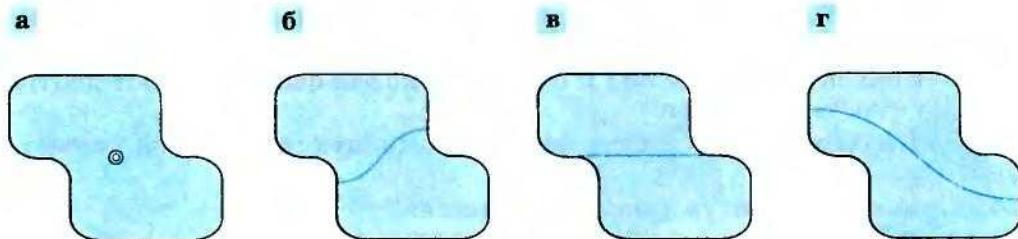


Рис. 335

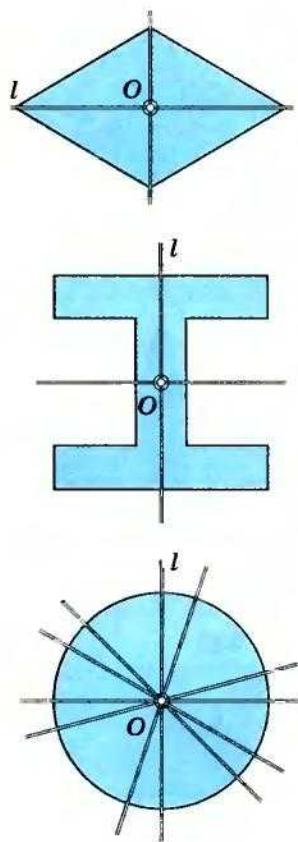


Рис. 336

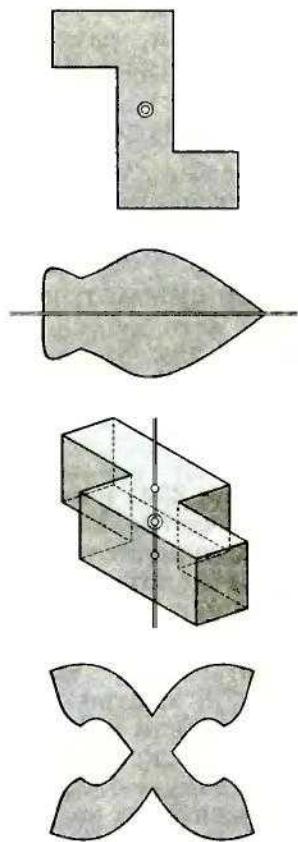


Рис. 337

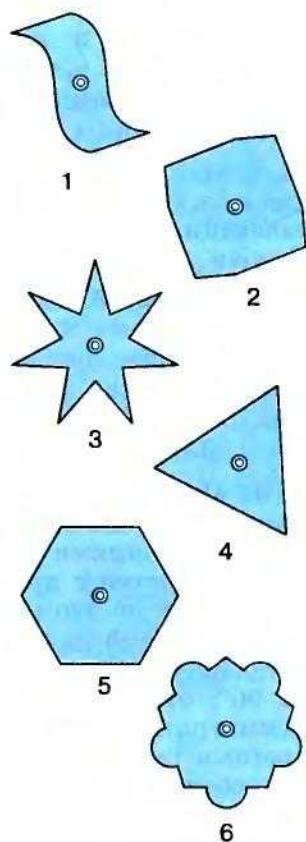


Рис. 338

Из самого смысла слова *симметрия* становится понятно, почему именно этот термин был взят для обозначения фигур, самосовмещаемых движением. Такие фигуры, как мы уже говорили, могут быть разделены на равные части, одинаково расположенные по отношению друг к другу.

В зависимости от того, какое движение самосовмещает фигуру, говорят *об осевой, центральной, зеркальной, поворотной или переносной симметриях фигуры*.

Мы понимаем, что параллельным переносом могут быть совмещены с собой только неограниченные фигуры, поэтому только они могут обладать переносной симметрией. На рисунке 336 приведены примеры фигур, обладающих центральной и осевой симметриями. При этом точка *O* называется *центром симметрии фигуры*, прямая *l* называется *осью симметрии фигуры*.

**24.8.** Объясни, что такое: а) центр симметрии фигуры; б) ось симметрии фигуры; в) плоскость симметрии фигуры.

**24.9.** Вернись к рисунку 332 и определи, какие фигуры имеют центр, ось, плоскость симметрии.

**24.10.** Нарисуй какую-нибудь фигуру, имеющую центр (ось) симметрии.

**24.11.** Какая из фигур (рис. 337) лишняя?

**24.12.** Определи закономерность (рис. 338) и расставь рисунки в соответствующем порядке.

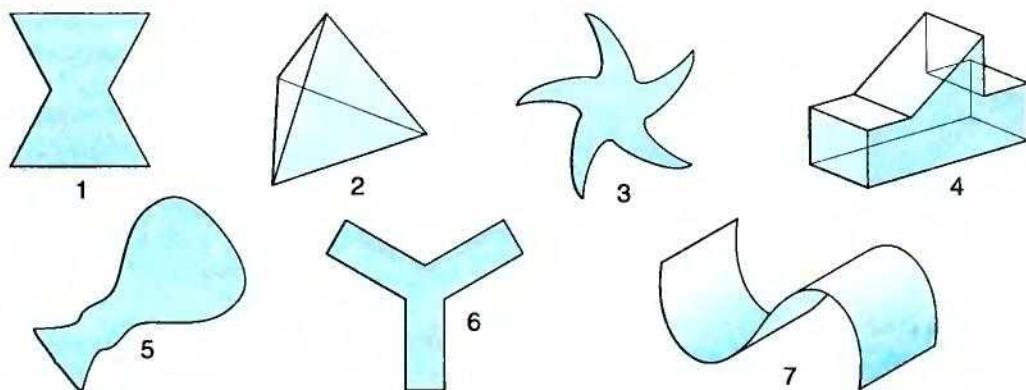


Рис. 339

Фигуры, изображённые на рисунке 338, отличаются количеством поворотов вокруг отмеченной точки, самосовмещающих фигуру. Для четвёртой фигуры их три, для второй — 4, для пятой — 6. В таком случае говорят, что для этих фигур отмеченная точка является центром поворотной симметрии соответственно третьего, четвёртого, шестого порядков.

**24.13.** Какой порядок поворотной симметрии имеют фигуры 1, 3, 6 (рис. 339)?

**24.14.** Нарисуй плоскую фигуру, имеющую центр поворотной симметрии пятого порядка.

Можно говорить и об оси поворотной симметрии пространственной фигуры. Вспомни, например, о правильных пирамидах и призмах (см. рис. 304 и 306).

**24.15.** Как ты понимаешь слова: «прямая является осью поворотной симметрии третьего порядка»?

Если фигура обладает центральной, зеркальной, осевой, поворотной или переносной симметриями, то центр, плоскость, ось соответствующих симметрий, а также вектор переноса называют элементами симметрии фигуры.

**24.16.** Назови все элементы симметрии фигур (рис. 339). Выбери ту фигуру, которая имеет наибольшее количество элементов симметрии.

**24.17.** Найди какие-нибудь элементы симметрии правильной: а) треугольной пирамиды; б) четырёхугольной пирамиды; в) треугольной призмы; г) четырёхугольной призмы.

**24.18\*.** Нарисуй куб. Изобрази какие-нибудь элементы симметрии куба.

**Проверь себя.** На рисунках 340—342 изображены элементы симметрии куба: плоскости симметрии (рис. 340), оси поворотной симметрии (рис. 341) и центр симметрии (рис. 342).

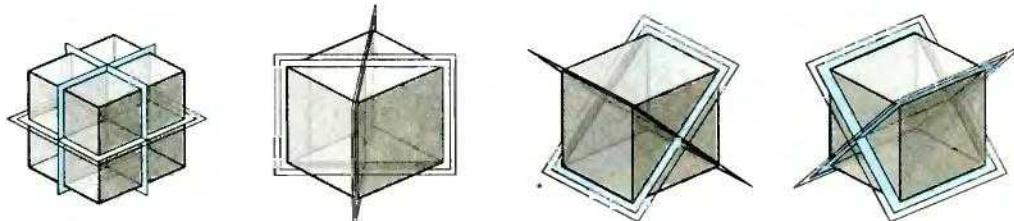


Рис. 340

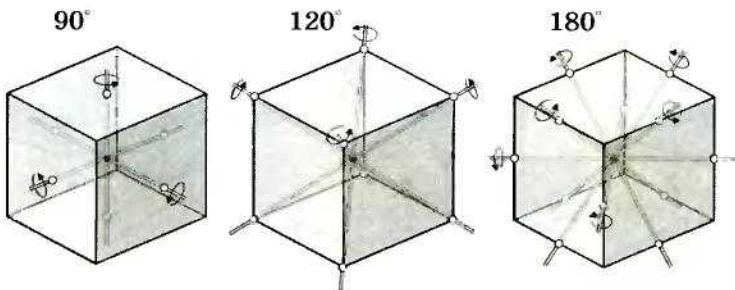


Рис. 341

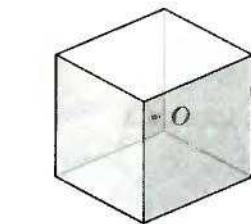


Рис. 342

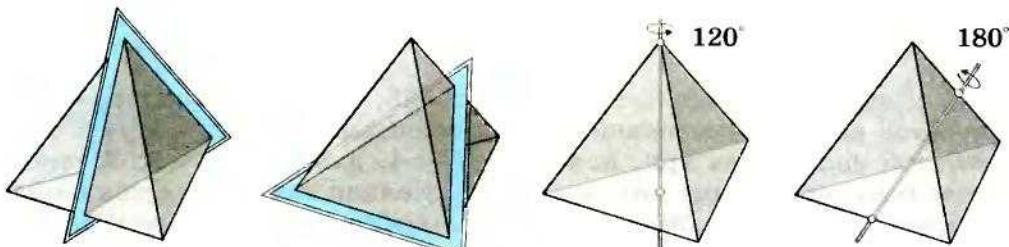


Рис. 343

Куб является «самой симметричной» из всех четырёхугольных призм: он имеет наибольшее количество элементов симметрии — 23. Все его грани — равные между собой квадраты (правильные четырёхугольники).

Среди треугольных пирамид тоже можно выделить «самую симметричную» фигуру: треугольную пирамиду, все грани которой — равные между собой правильные треугольники. Такая пирамида называется *правильным тетраэдром*. На рисунке 343 изображены некоторые элементы симметрии правильного тетраэдра. Всего их 13.

Из равных правильных треугольников можно составить поверхность ещё двух интересных многогранников — *правильного октаэдра* (рис. 344, а) и *правильного икосаэдра* (рис. 344, б).

Интересно, что правильный октаэдр можно получить, соединяя в определённом порядке центры граней куба (рис. 345). Число элементов симметрии правильного октаэдра такое же, как у куба, — 23. Если же соединить в определённом порядке центры граней правильного икосаэдра, то получится многогранник, все грани которого — равные между собой правильные пятиугольники (рис. 346, а).

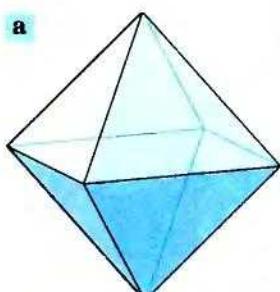


Рис. 344

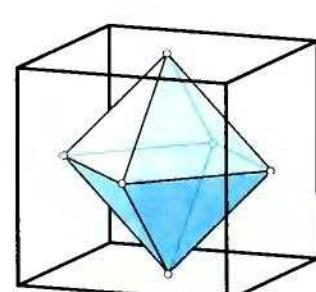
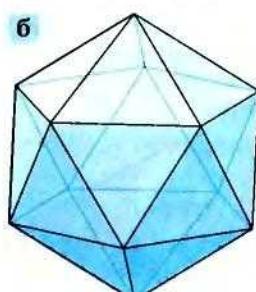


Рис. 345

Такой многогранник называется *правильным додекаэдром* (рис. 346, б).

На рисунке 347 изображены некоторые элементы симметрии правильного октаэдра, правильного икосаэдра и правильного додекаэдра.

Многогранники, с которыми ты только что познакомился, называются *правильными многогранниками*.

Все названия правильных многогранников имеют один корень: *hedra* (греч.) — опора, основание, грань. Первая часть каждого названия указывает на количество граней в многограннике: *tetra* — четыре; *okta* — восемь (сравни: октава — интервал, состоящий из восьми тонов); *dodeka* — двенадцать; *ikosa* — двадцать. Как ты знаешь, куб имеет 6 граней, и поэтому его иногда называют гексаэдр (*deka* — шесть).

В Приложении (с. 136—139) приведены развёртки правильных многогранников. Есть развёртки и других многогранников, обладаю-

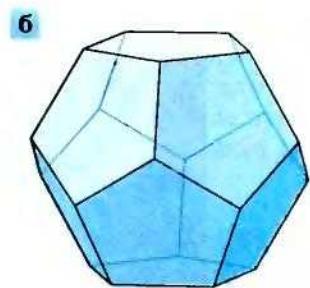
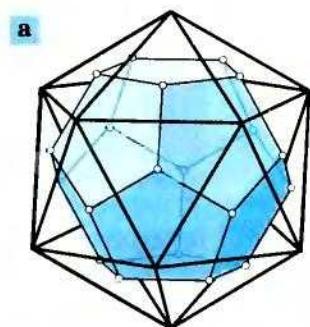


Рис. 346

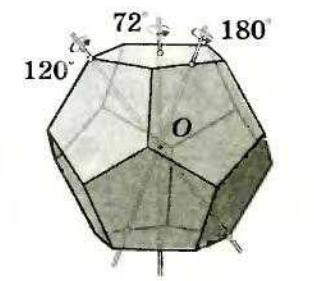
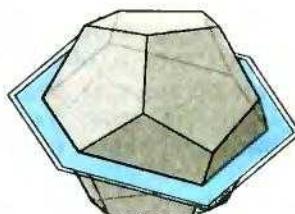
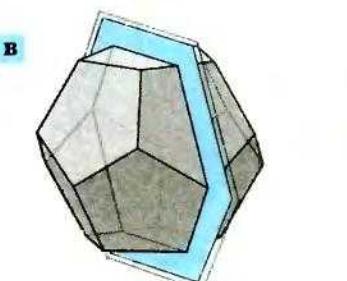
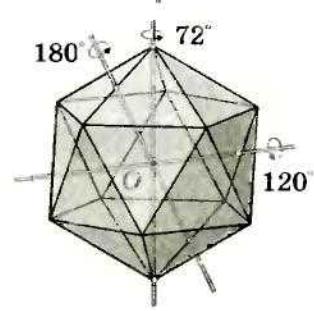
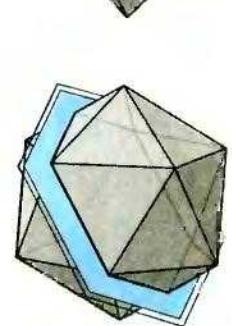
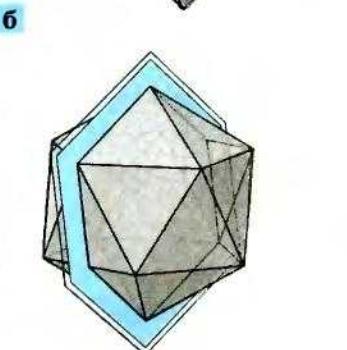
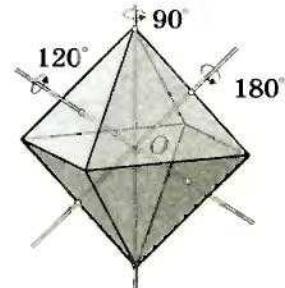
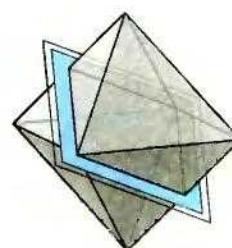
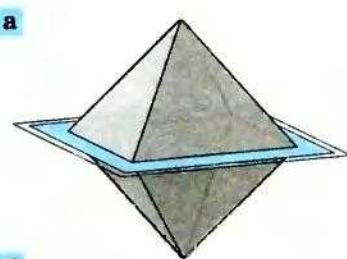
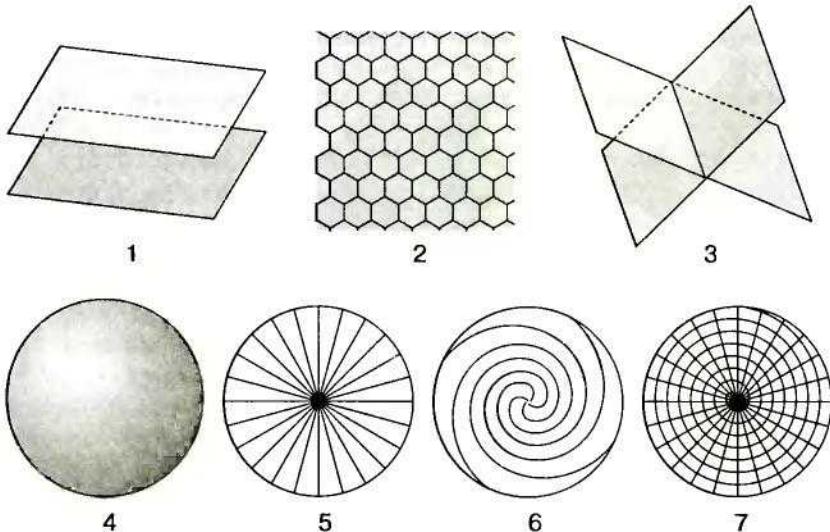
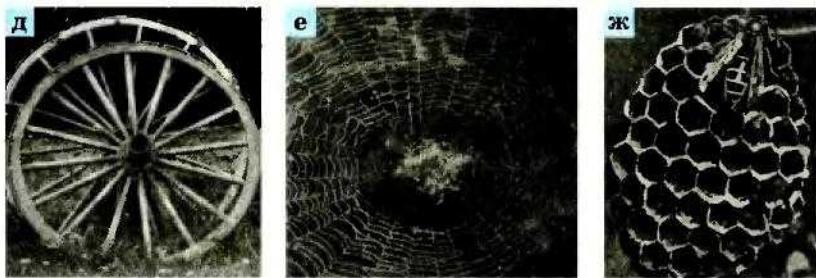
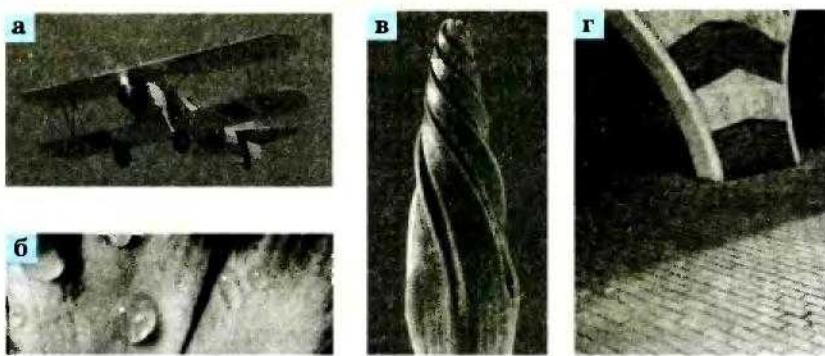


Рис. 347



**Рис. 348**

щих зеркальной, поворотной, осевой и центральной симметриями. Соглашайся с друзьями изготовить модели разных многогранников, которые смогут украсить ваш класс.

**24.19.** Приведи примеры симметричных предметов, встречающихся в быту, природе и строительстве, и объясни свой выбор.

**24.20\*.** На рисунке 348 представлены различные объекты окружающего мира и геометрические фигуры. Установи соответствие между этими двумя группами. Запиши ответ в виде набора пар букв-номер, например (д, 5).

**24.3. О привлекательности форм.** Самые разнообразные формы мы можем наблюдать у живых существ (растений, животных, бактерий...) и веществ (минералов, воды, огня...). Природа старается

создать их форму так, чтобы они тратили как можно меньше энергии и получали как можно больше пользы от взаимодействия с окружающей средой. Именно эти принципы определяют гармоничность природных форм. Природа редко создаёт формы, не являющиеся гармоничными. Такие исключения — это скорее результат разрушения, но не созидания.

Человек всегда старался замечать, изучать и использовать законы природы. Раньше от успешного изучения и понимания законов природы зависела жизнь человека. Теперь с развитием цивилизации окружённый многочисленными рукотворными вещами человек отдалился от непосредственного влияния природы. Однако он сохранил способность распознавать природные закономерности во встречаемых вещах. Он старается окружить себя предметами, которые создают комфорт, ощущение гармонии (рис. 349). Привлекательность предметов для каждого человека определяется не только «озвучием» этого предмета с личным опытом человека, но в первую очередь соответствием этих предметов природным закономерностям, которые человек не может не чувствовать, так как он сам является частью природы.



Рис. 349



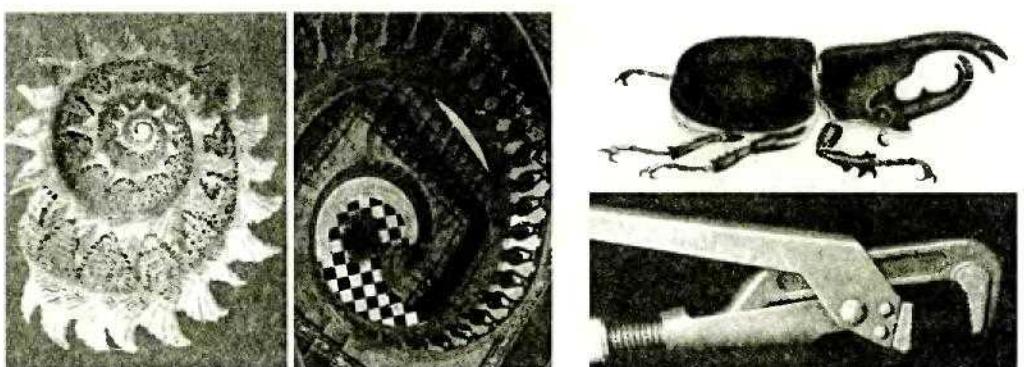
**Рис. 350**

**24.21.** Выбери из ряда объектов (рис. 350) те, формы которых кажутся тебе наиболее привлекательными. Попытайся объяснить свой выбор.

Можно объяснить причину привлекательности симметричных фигур. Всё дело в их простоте. В симметричной фигуре мы сразу различаем одинаковые (симметричные) взаимные отношения между её частями. Именно поэтому мы выделяем из ряда предложенных фигур в первую очередь такие фигуры. Другие же (не симметричные) фигуры нам труднее изучить и понять.

Симметричными должны быть также отношения между людьми. Это очень важно для того, чтобы все участники отношений были равноправными, не испытывали обиду. Об этом надо помнить всегда: и дома, общаясь со своими родными, и в школе при общении с одноклассниками и учителями.

Человек, изучив закономерности природных форм, стал воплощать свои знания в различных областях своего творчества: архитектуре, искусстве, технике и др. (рис. 351—356).



**Рис. 351**



Рис. 352

**24.22.** Найди одинаковые фрагменты на изображении Казанского собора в Петербурге (рис. 352). Каково их взаимное расположение?

**24.23.** Назови другие симметричные здания или архитектурные ансамбли. Какой симметрией они обладают?

**24.24.** Какие геометрические фигуры использованы в узоре решёток на рисунке 353? Выдели равные фрагменты узоров. Каково их взаимное расположение?

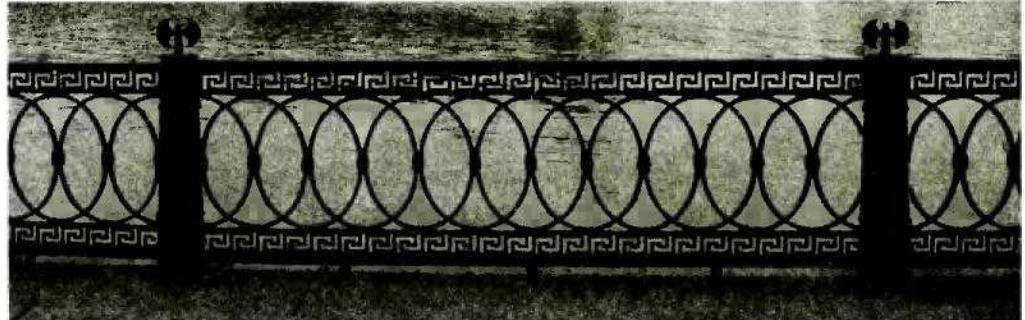


Рис. 353

**24.25.** На рисунке 355, 356 изображены паркеты из российских дворцов. Подчиняется ли расположение их деталей каким-либо закономерностям? Если да, то каким именно?

Мы порой не можем объяснить, почему нам нравится форма той или иной фигуры, но мы знаем, что красота и привлекательность формы фигуры, предмета или живого организма определяется их геометрическими свойствами. Получается, что мы можем заметить, почувствовать сложные геометрические свойства фигур, даже не зная законов геометрии, лежащих в основе этих свойств.

Наш мозг, откликаясь на закономерности, определяющие форму фигуры, сигнализирует нам о её привлекательности. Однако мозг может обманывать нас, делая на основании увиденного выводы, которые не соответствуют действительности. Примером тому могут служить

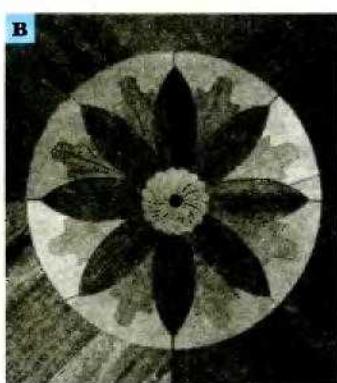
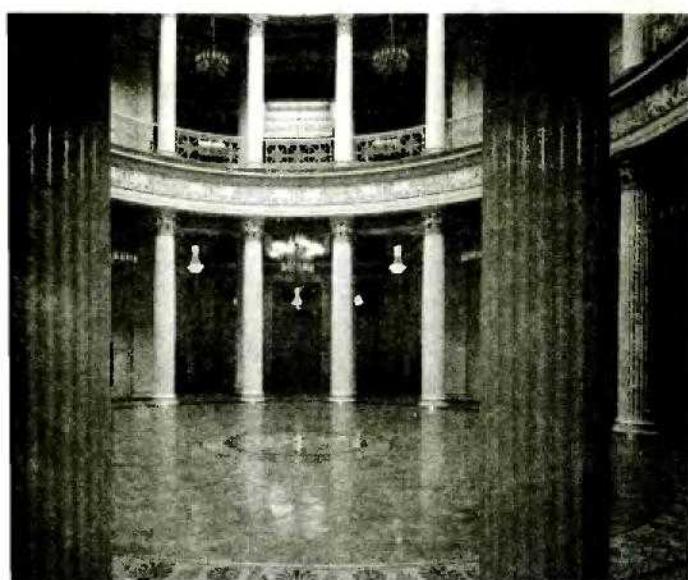
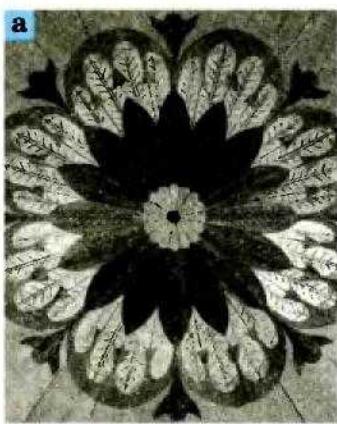
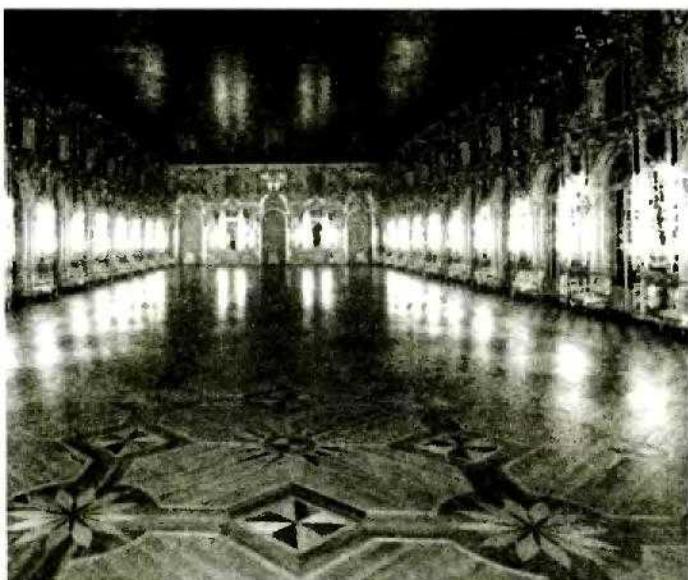
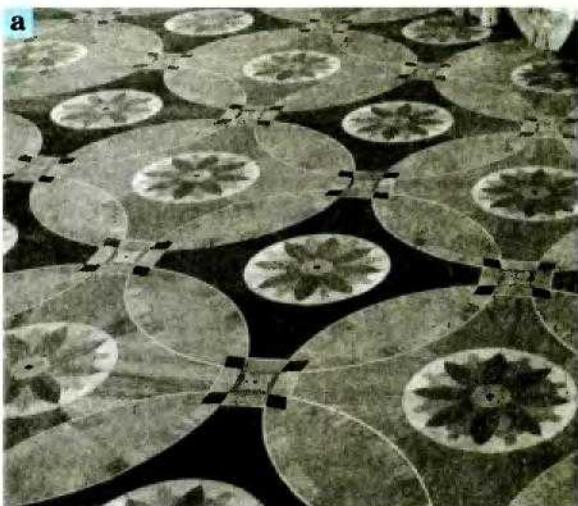
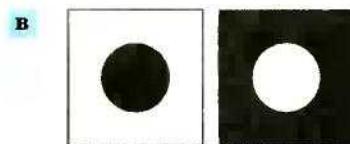
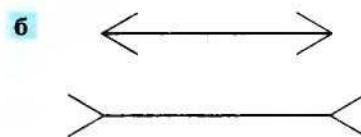
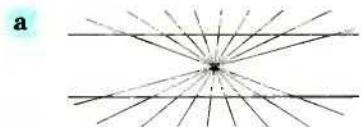


Рис. 354

Рис. 355



**Рис. 356**



**Рис. 357**

фигуры, вызывающие иллюзии, т. е. уверенность в том, чего нет на самом деле. На рисунке 357, а мы видим горизонтальные отрезки не прямолинейными, а на рисунке 357, б отрезки кажутся нам разными по длине, хотя на самом деле они равны. Окружности равного радиуса (рис. 357, в) кажутся нам разными по размеру.

Отделить существующие закономерности от иллюзий помогают человеку знания и опыт, в том числе приобретённые и на занятиях геометрией. Изучая законы геометрии, человек лучше понимает окружающий его мир, получает определённые знания, помогающие ему создавать предметы, гармонирующие с природой.

## ПОСЛЕСЛОВИЕ

Твое первое серьёзное знакомство с геометрией подошло к концу. За два года ты узнал многое об одной из самых замечательных наук — геометрии.

Ты знаешь, что геометрия изучает форму, размеры и взаимное расположение реальных предметов с помощью геометрических фигур, которые являются мысленными образами этих предметов. И поэтому геометрия помогает нам исследовать и понять окружающий мир. Ты и сам немного приобщился к этому исследованию, так как научился определять форму некоторых предметов, понял, как устроены геометрические фигуры, а значит, возможно, сумеешь сконструировать что-нибудь новое, т. е. применить свои геометрические знания к практической деятельности.

Ты продвинулся в овладении так называемым визуальным языком: решая задачи, ты научился по картинкам получать для себя информацию, анализировать её, передавать в своих картинках эту (или другую) информацию другим, так как довольно много времени и усилий ты уделил рисованию различных геометрических фигур и реальных предметов.

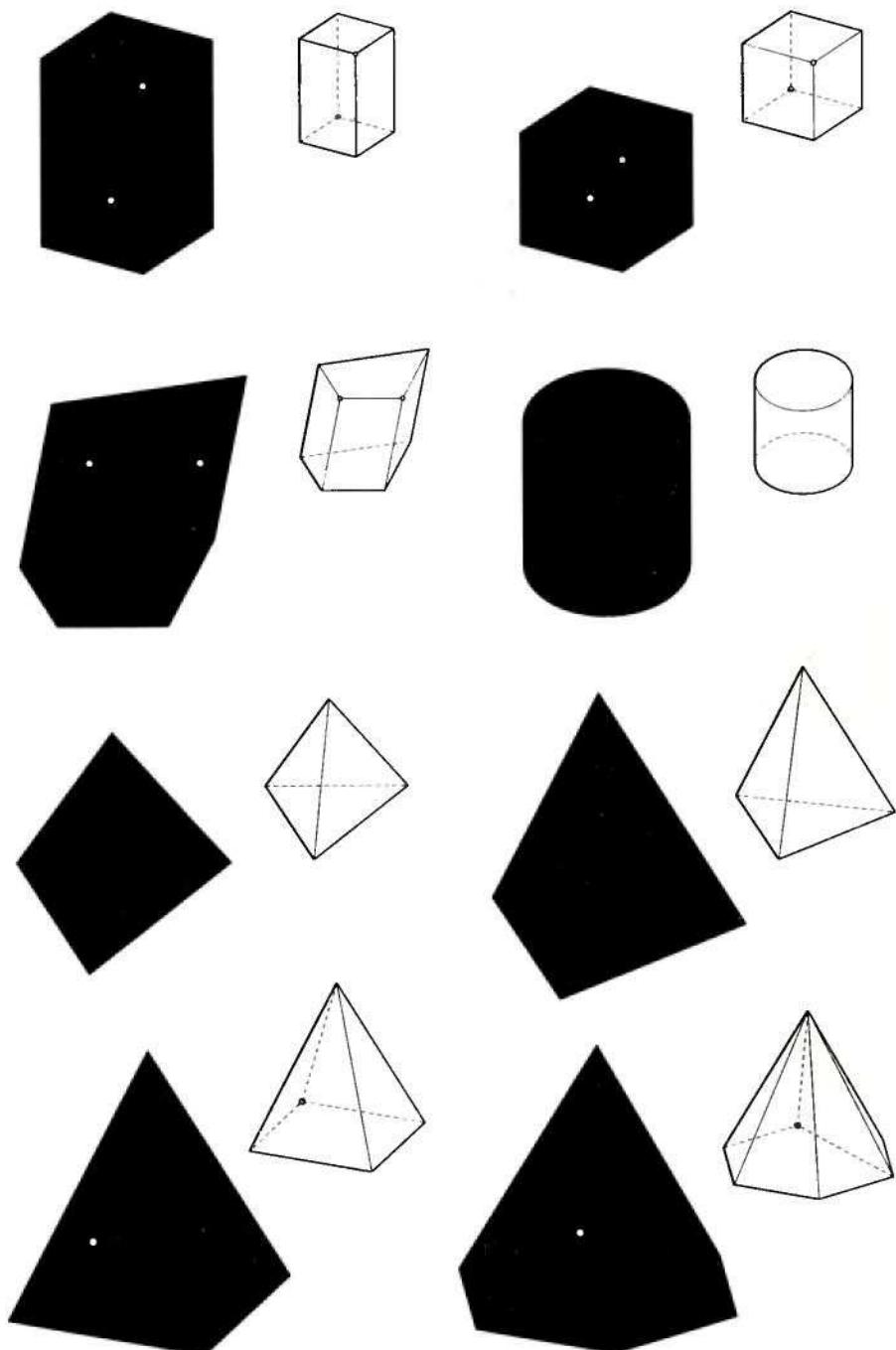
Одновременно ты познакомился с новым для тебя языком (не иностранным, но поначалу таким же непонятным) — геометрическим: узнал много новых слов-терминов, понял, откуда большинство из них происходит, даже немного научился говорить на этом, пока ещё не очень знакомом, языке.

Фактически ты познакомился со всеми геометрическими фигурами, которые в дальнейшем тебе будут встречаться. Но заметил ли ты, что все твои знания опираются лишь на четыре основных понятия: точка, отрезок, плоскость и число? И работая только с этими понятиями, ты узнал так много: научился строить лучи, прямые, многоугольники, углы, каркасы многогранников, другие пространственные фигуры. Ты шёл по пути, который давал тебе возможность познакомиться с геометрией на уровне конструирования и рисования.

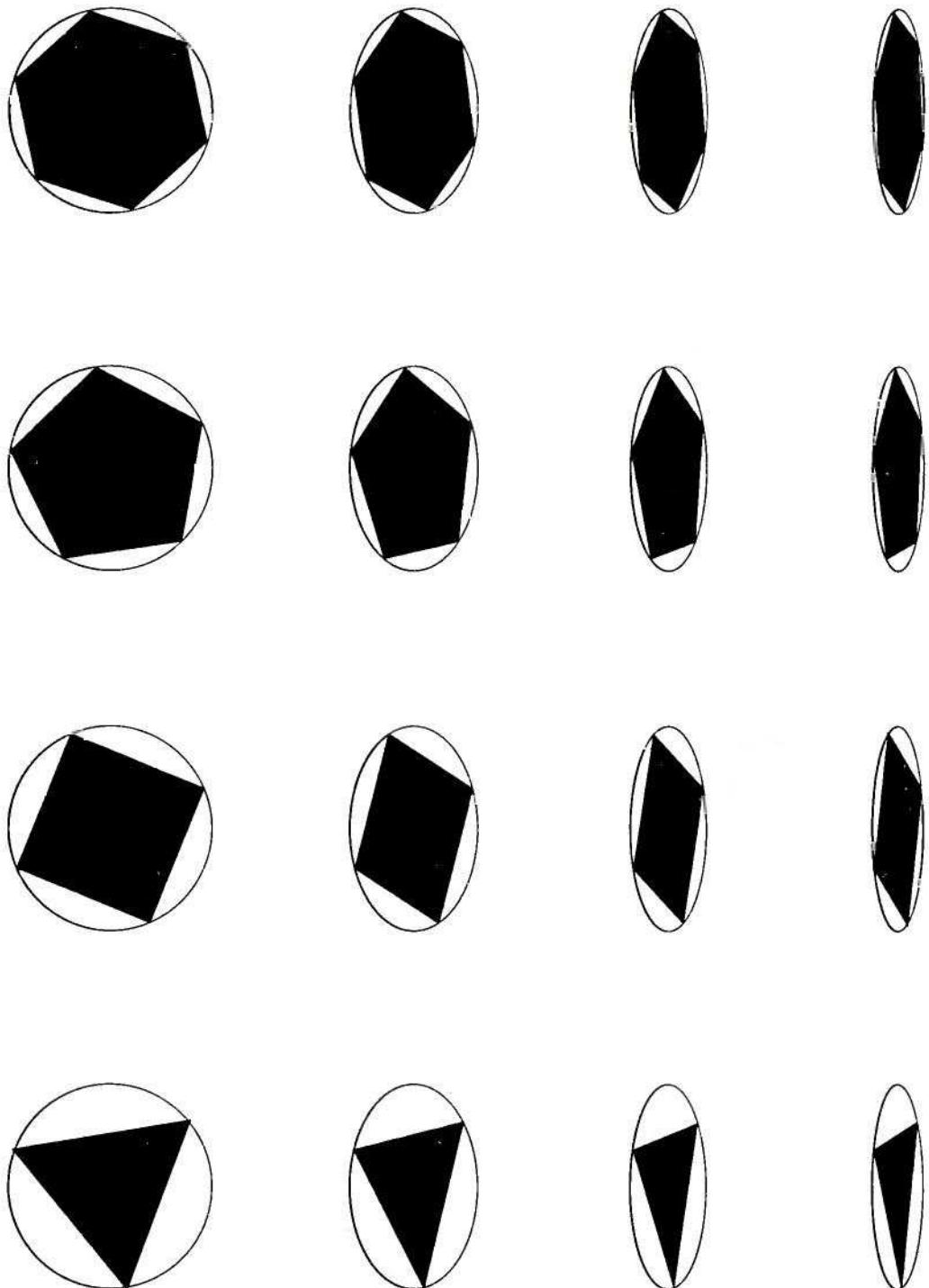
В целом ты *имеешь представление* обо всей геометрии, которая изучается в школе, и это станет базой для твоего дальнейшего успешного изучения этой науки. Многое осталось ещё пока за пределами твоего внимания. Думающий человек отличается тем, что у него возникают вопросы: не только «как?», но и «почему?». В 7 классе ты начнёшь систематическое изучение геометрии. То, что сегодня тебе известно на уровне «как», станет постепенно понятным и на уровне «почему». Опираясь на те представления, которые выработались у тебя за эти два года, и используя тот язык, с которым ты познакомился, ты сумеешь продвинуться в деле более или менее строгого обоснования многих геометрических фактов, а также решения всё более и более содержательных задач и тем самым научишься правильно думать и убедительно рассуждать. А в этом и есть одна из важнейших задач твоего обучения в школе.

Мы надеемся, что тебе было интересно заниматься геометрией, и желаем сохранить этот интерес на многие, многие годы.

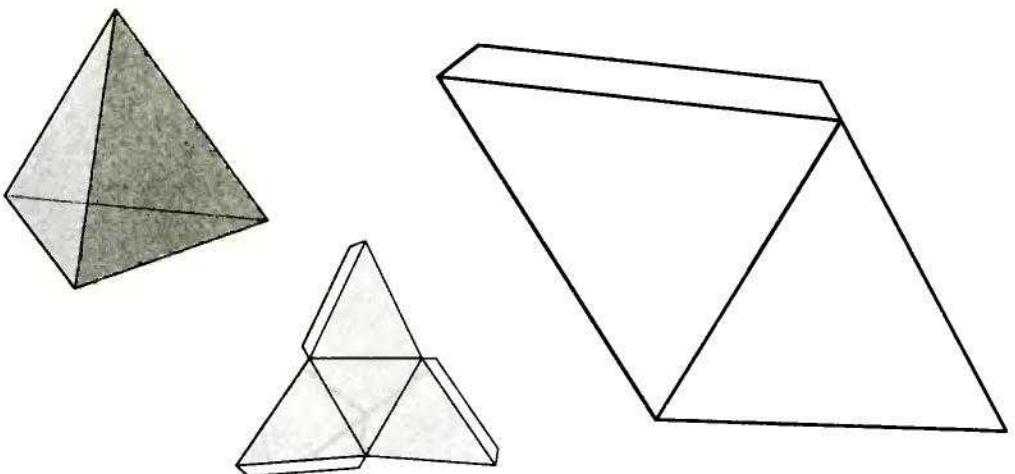
Авторы



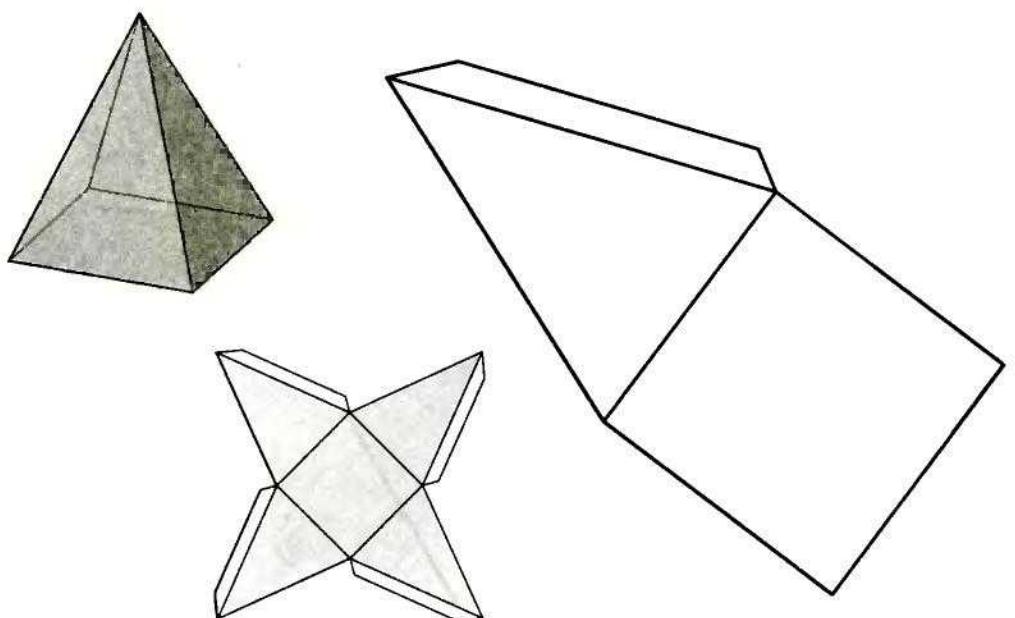
Шаблоны изображений тел



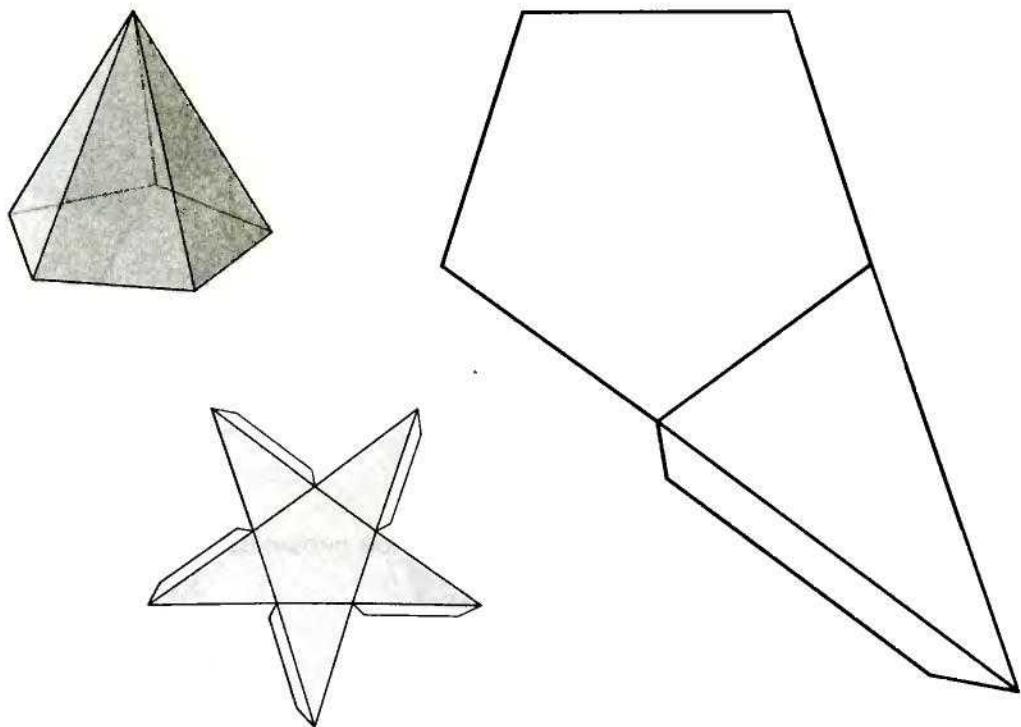
Шаблоны изображений правильных многоугольников



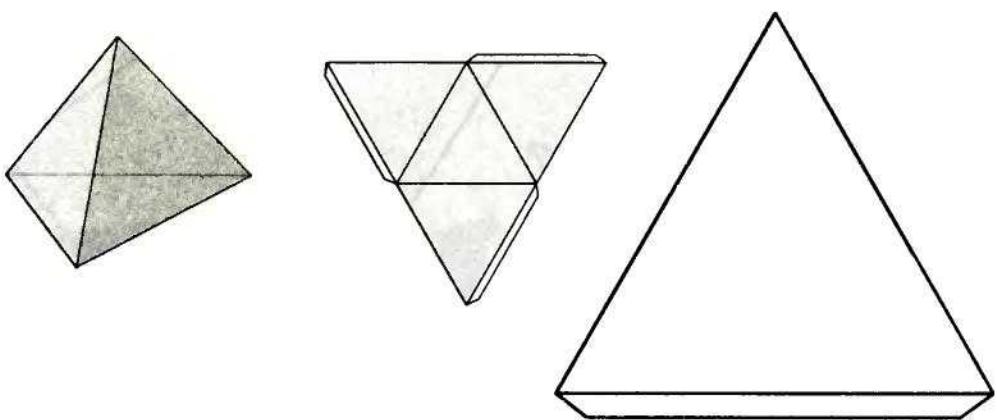
Развёртка правильной треугольной пирамиды



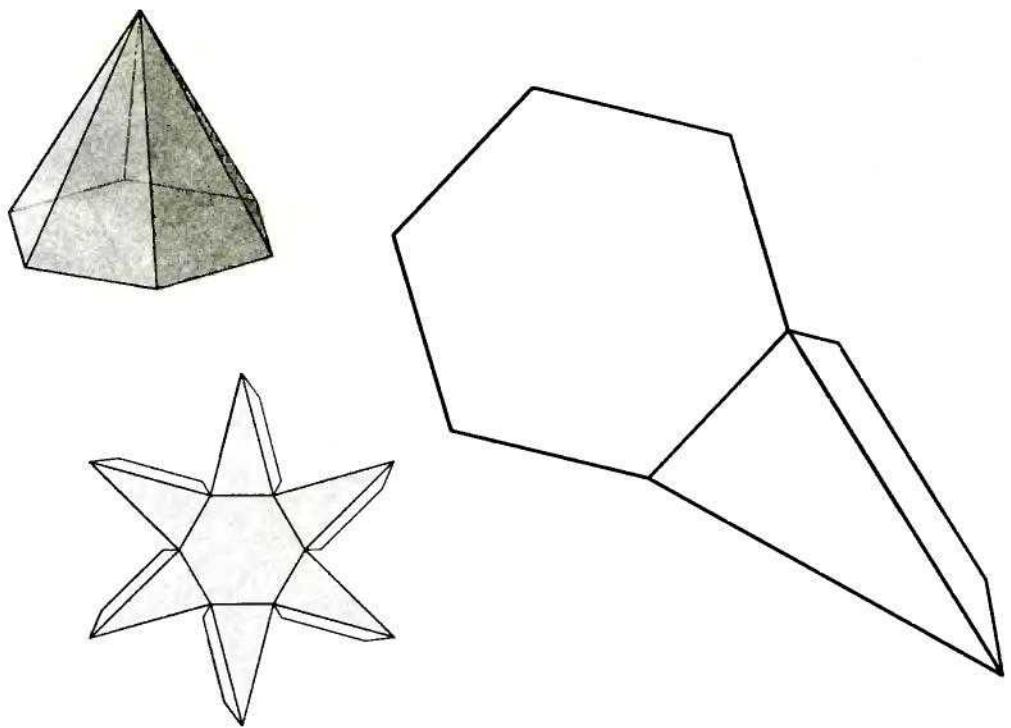
Развёртка правильной четырёхугольной пирамиды



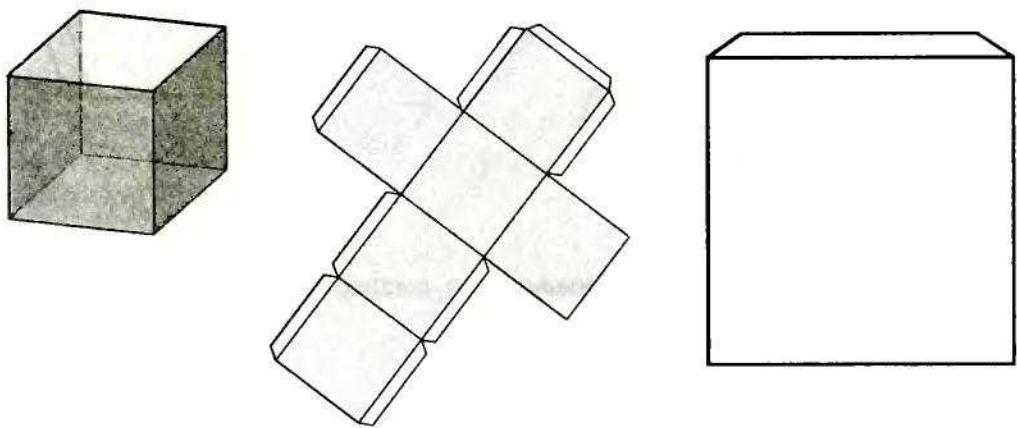
Развёртка правильной пятиугольной пирамиды



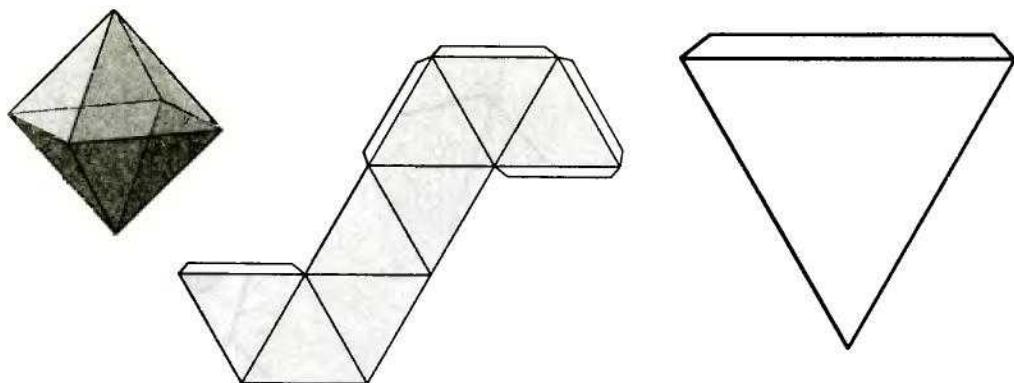
Развёртка правильного тетраэдра



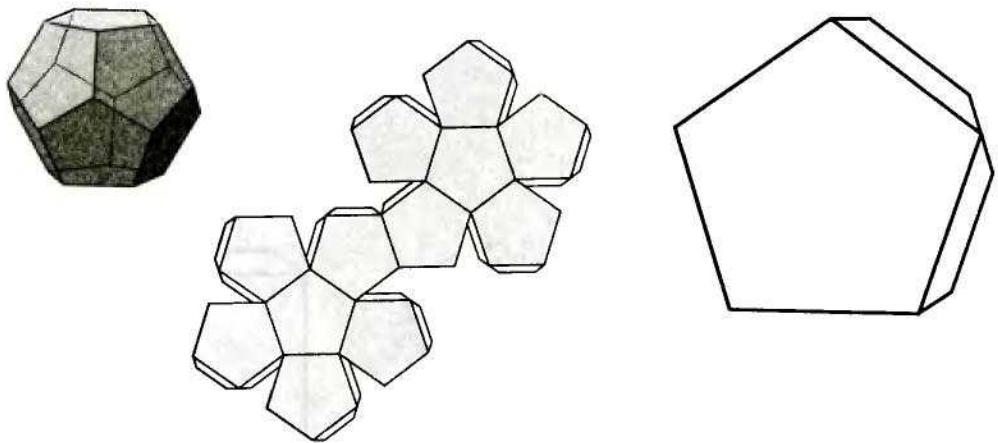
Развёртка правильной шестиугольной пирамиды



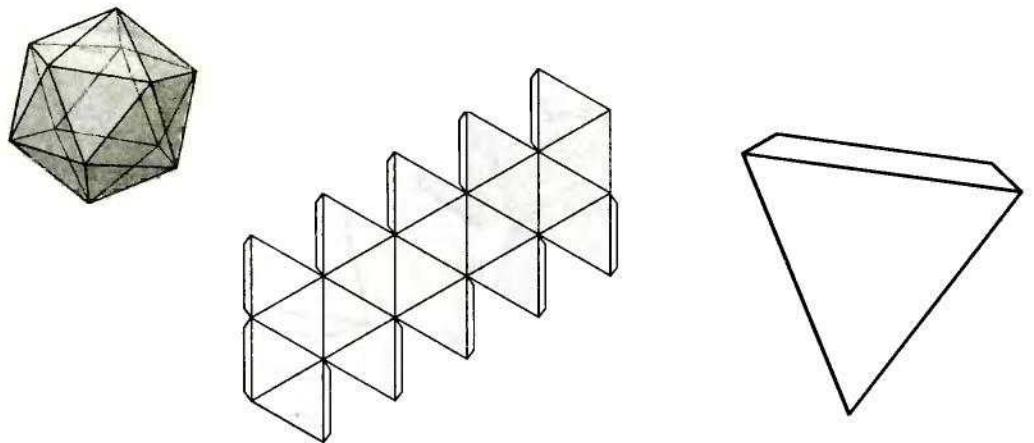
Развёртка правильного гексаэдра (куба)



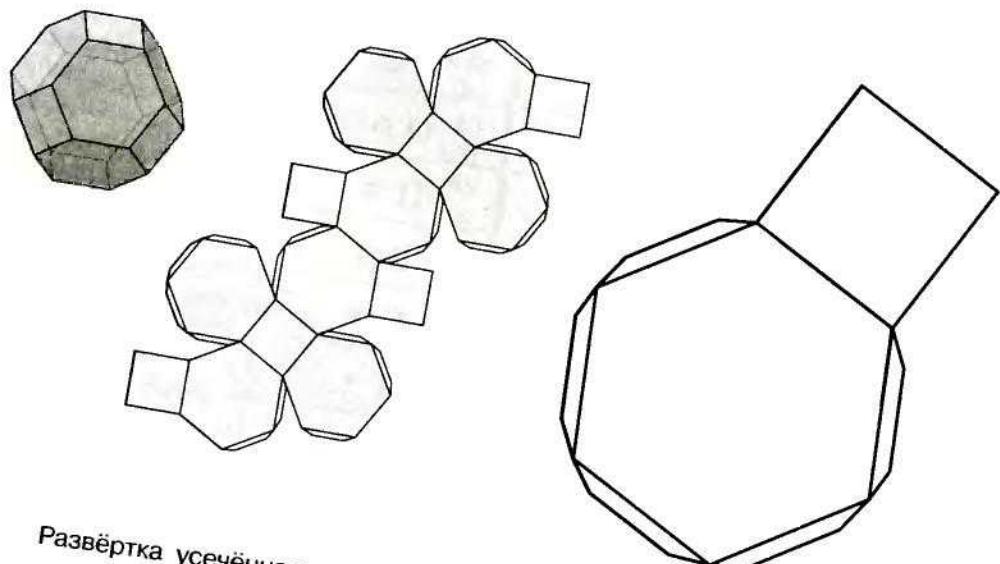
Развёртка правильного октаэдра



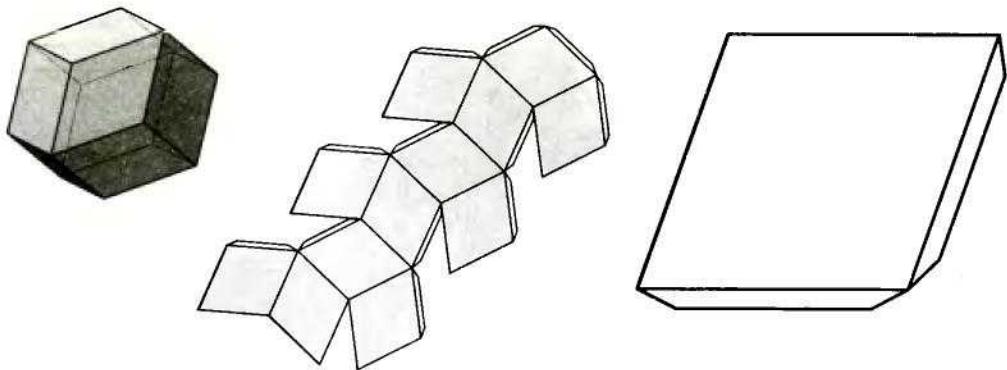
Развёртка правильного додекаэдра



Развёртка правильного икосаэдра



Развёртка усечённого октаэдра, имеющего «свойство кирпича»



Развёртка ромбоэдра, имеющего «свойство кирпича»

Греческие буквы	Названия букв	Греческие буквы	Названия букв
Α α	альфа	Ν ν	ню
Β β	бэтта	Ξ ξ	кси
Γ γ	гамма	Ο ο	омикрон
Δ δ	дельта	Π π	пи
Ε ε	эпсилон	Ρ ρ	ро
Ζ ζ	дзэтта	Σ σ	сигма
Η η	ета	Τ τ	тау
Θ θ	тета	Υ υ	эпсилон
Ι ι	йотта	Φ φ	фи
Κ κ	каппа	Χ χ	хи
Λ λ	лямбда	Ψ ψ	пси
Μ μ	мю	Ω ω	омега

Греческий алфавит

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

<b>Абсцисса</b>	61	поворот вокруг точки	74
алгоритм	16	— — прямой	78
<b>Бордюр</b>	100	подобные фигуры	21
<b>Вектор</b>	71	порядок поворотной симметрии	123
высота	36	правильная пирамида	110
<b>Гармоническая пропорция</b>	25	правильные многогранники	125
<b>Движение</b>	67	правильный многоугольник	108
<b>Замощение</b>	101	преобразование	64
золотое сечение	25	прямоугольник	45
золотой прямоугольник	27	<b>Равенство фигур</b>	67
<b>Коэффициент подобия</b>	21	расстояние между двумя	
<b>Масштаб</b>	23	точками	31
мотив	114	— от точки до фигуры	32
<b>Направляющая</b>	48	розетка	108
неподвижная точка	74	ромб	46
<b>Образ</b>	64	<b>Самосовмещение</b>	118
образующая	48	симметрия фигур	121
объединение фигур	94	— осевая, центральная,	122
ордината	61	— зеркальная	122
орнамент	101	— переносная, поворотная	122
ось симметрии фигуры	83	система координат	
отношение отрезков	18	— — косоугольная	61
<b>Параллелограмм</b>	45	— — прямоугольная	60
параллельные прямые	41	склеивание фигур	96
параллельный перенос	69	скрещивающиеся прямые	44
паркет	104	сфера	12
пентаграмма	29	<b>Трапеция</b>	44
пересечение фигур	94	<b>Усеченный конус</b>	81
перпендикулярность	15	<b>Фигуры вращения</b>	80
перспектива	52	<b>Хорда фигуры</b>	10
пиктограмма	113	<b>Шар</b>	12
плоскость симметрии фигуры	92		

## Оглавление

Дорогой шестиклассник! . . . . .	3
<b>Глава 1. Повторение.</b>	
<b>Знакомые и новые понятия</b>	
<b>§ 1. Какие геометрические фигуры бывают . . . . .</b>	4
1.1. Самые общие воспоминания . . . . .	4
1.2. Новые задачи . . . . .	5
<b>§ 2. Отрезки. Конструкции из отрезков . . . . .</b>	7
2.1. Отрезки, лучи, прямые . . . . .	7
2.2. Ломаные и многоугольники . . . . .	7
2.3. Цилиндры, конусы . . . . .	8
<b>§ 3. Круглые фигуры . . . . .</b>	10
3.1. Круг и окружность . . . . .	10
3.2. Хорда . . . . .	10
3.3. Круглые тела . . . . .	12
<b>§ 4. Углы . . . . .</b>	13
4.1. Общие воспоминания об углах . . . . .	13
4.2. Перпендикулярность . . . . .	15
<b>§ 5. Алгоритмы . . . . .</b>	16
<b>§ 6. Отношения в геометрии</b>	18
6.1. Отношение отрезков . . . . .	18
6.2. Подобные фигуры . . . . .	20
6.3. Масштаб . . . . .	23
6.4*. Некоторые замечательные отношения в геометрии . . . . .	24
6.5*. Гармоническая пропорция . . . . .	25
6.6.* Как построить отрезки, находящиеся в золотом отношении? . . . . .	26
<b>Глава 2. Взаимное расположение фигур</b>	
<b>§ 7. Расстояния . . . . .</b>	31
7.1. Расстояние между двумя точками . . . . .	31
7.2. Расстояние от точки до фигуры . . . . .	32
7.3. Расстояние от точки до прямой . . . . .	33
7.4. Расстояние от точки до плоскости . . . . .	35
7.5. Высоты геометрических фигур . . . . .	36
<b>§ 8. Взаимное расположение прямых и плоскостей</b>	38
8.1. Параллельность . . . . .	38
8.2. Параллельные прямые . . . . .	40
8.3. Как построить две параллельные прямые? . . . . .	42
8.4. Ещё один случай взаимного расположения двух прямых . . . . .	43
<b>§ 9. Фигуры, составленные из параллельных отрезков</b>	44
9.1. Четырёхугольники с параллельными сторонами . . . . .	44
9.2. Разные виды параллелограммов . . . . .	45
9.3*. Изготовление плоских фигур из параллельных отрезков . . . . .	47
9.4. Получение пространственных фигур из параллельных отрезков . . . . .	48
9.5*. Получение пространственных фигур из равных плоских фигур . . . . .	49
9.6*. Получение пространственных фигур из неравных плоских фигур . . . . .	51
9.7*. Как мы видим и рисуем параллельные отрезки	52
<b>§ 10. Известные примеры координат</b>	57
10.1. Несколько слов о знакомых играх . . . . .	57
10.2. Где мы встречаемся с координатами . . . . .	57
<b>§ 11. Разные системы координат</b>	59
11.1. Что такое система координат?	59

11.2. Прямоугольная система координат на плоскости . . . . .	60
--	----

### **Глава 3. Движения фигур**

<b>§ 12. Понятие преобразования фигуры . . . . .</b>	64
--	----

12.1. Что такое преобразование фигуры? . . . . .	64
--	----

12.2. Какие преобразования фигур бывают? . . . . .	66
--	----

<b>§ 13. Параллельный перенос 68</b>	
--------------------------------------	--

13.1. Знакомство с параллельным переносом фигур . . . . .	68
---	----

13.2. Построение образов фигур при параллельном переносе . . . . .	72
--	----

<b>§ 14. Поворот фигуры на плоскости . . . . .</b>	73
--	----

14.1. Поворот фигуры вокруг точки . . . . .	73
---	----

14.2. Построение образа фигуры при повороте вокруг точки . . . . .	76
--	----

14.3. Новый взгляд на поворот фигуры на плоскости . . . . .	76
---	----

<b>§ 15. Поворот фигуры в пространстве . . . . .</b>	78
--	----

15.1. Поворот фигуры вокруг прямой . . . . .	78
--	----

15.2. Фигуры вращения . . . . .	79
---------------------------------	----

<b>§ 16. Осевая симметрия фигур . . . . .</b>	83
---	----

16.1. Понятие осевой симметрии фигур на плоскости . . . . .	83
---	----

16.2. Как построить две фигуры, симметричные относительно прямой? . . . . .	86
---	----

<b>§ 17. Центральная симметрия фигур . . . . .</b>	87
--	----

17.1. Центральная симметрия фигур на плоскости . . . . .	87
--	----

17.2. Центральная симметрия пространственных фигур . . . . .	90
--	----

<b>§ 18*. Симметрия фигур относительно плоскости 91</b>	
---	--

### **Глава 4. Конструкции из равных фигур**

<b>§ 19. Использование движений для получения новых фигур . . . . .</b>	94
---	----

19.1. Пересечение фигур . . . . .	94
-----------------------------------	----

19.2. Объединение фигур . . . . .	94
-----------------------------------	----

19.3. Склейивание фигур . . . . .	95
-----------------------------------	----

19.4. Склейивание фигур, связанных преобразованием . . . . .	97
--	----

<b>§ 20. Применение параллельного переноса . . . . .</b>	98
--	----

20.1. Склейивание фигур, связанных параллельным переносом . . . . .	98
---	----

20.2. Последовательное применение параллельных переносов . . . . .	99
--	----

20.3. Бордюры . . . . .	102
-------------------------	-----

20.4. Паркеты . . . . .	104
-------------------------	-----

<b>§ 21. Применение поворота 106</b>	
--------------------------------------	--

21.1. Склейивание фигур, связанных поворотом . . . . .	106
--	-----

21.2. Последовательное применение поворота . . . . .	107
--	-----

21.3. Правильные пирамиды . . . . .	109
-------------------------------------	-----

21.4. Правильные призмы . . . . .	110
-----------------------------------	-----

<b>§ 22. Применение симметрии . . . . .</b>	111
---	-----

<b>§ 23. Использование разных видов движений для получения новой фигуры . . . . .</b>	112
---	-----

23.1. Склейивание фигур, связанных разными движениями . . . . .	112
---	-----

23.2. Орнаменты . . . . .	114
---------------------------	-----

<b>§ 24. Фигуры, составленные из равных частей . . . . .</b>	118
--	-----

24.1. Самосовмещения фигуры . . . . .	118
---------------------------------------	-----

24.2. Фигуры, обладающие симметрией . . . . .	121
---	-----

24.3. О привлекательности форм . . . . .	126
--	-----

<b>Послесловие . . . . .</b>	132
------------------------------	-----

<b>Приложение . . . . .</b>	133
-----------------------------	-----

<b>Предметный указатель . . . . .</b>	141
---------------------------------------	-----

Учебное издание  
Ходот Татьяна Георгиевна  
Ходот Александр Юрьевич

**МАТЕМАТИКА**  
**НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Учебник для 6 класса общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*

Редактор *Т. А. Бурмистрова*

Младший редактор *Н. В. Ноговицына*

Художники *О. П. Богомолова, А. Ю. Ходот*

Художественный редактор *О. П. Богомолова*

Компьютерная графика *А. Ю. Ходота*

Технический редактор *Е. В. Хомутова*

Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 06.03.07. Формат 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага писчая. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 11,65. Тираж 10 000 экз.

Заказ № 16459 « д.

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».

127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат».  
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Т. Г. Ходот А. Ю. Ходот

# МАТЕМАТИКА

## Наглядная геометрия

**Учебник**

для учащихся 6 классов  
общеобразовательных  
учреждений

Москва «Просвещение» 2007



Т. Г. Ходот  
А. Ю. Ходот

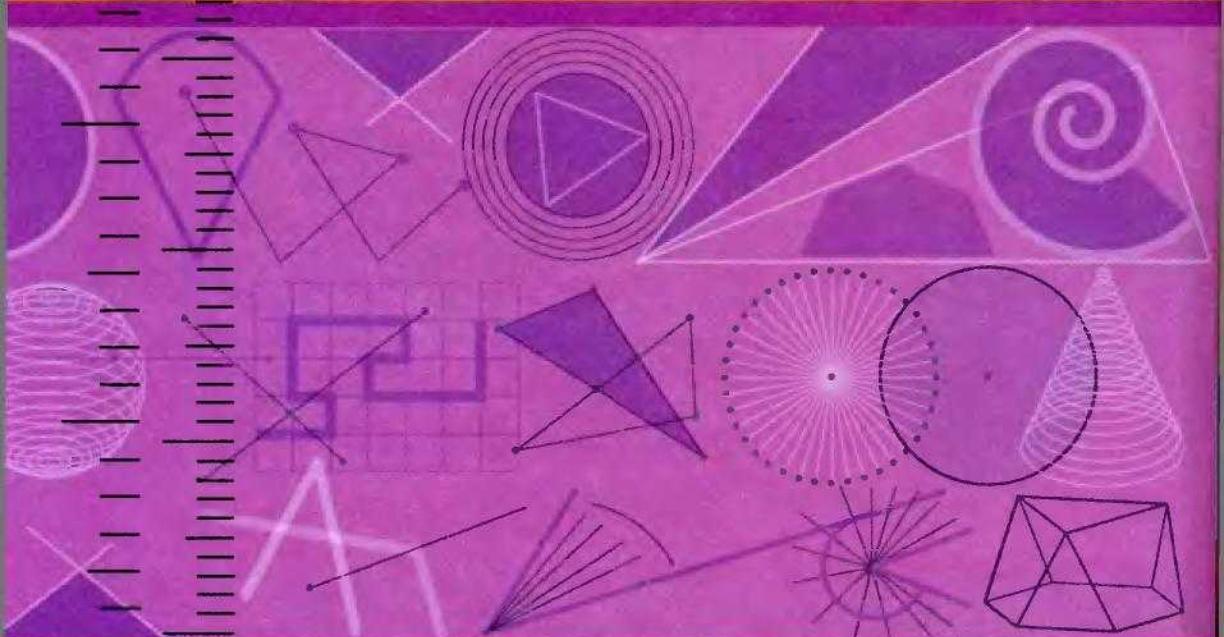
# МАТЕМАТИКА

6

## Наглядная геометрия



ПРОСВЕЩЕНИЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО



верста

дюйм

ISBN 978-5-09-015973-9

A standard linear barcode representing the ISBN number.

9 785090 159739



ПРОСВЕЩЕНИЕ  
ИЗДАТЕЛЬСТВО

**Учебное пособие предназначено**

для учащихся 6 класса базовой  
общеобразовательной школы.

Курс посвящен взаимному  
расположению фигур на плоскости  
и в пространстве.

На наглядном уровне обсуждаются  
вопросы, связанные с расстоянием,  
параллельностью, координатами.

Рассматриваются движения  
и элементы симметрии фигур,  
знания которых затем применяются  
к конструированию.

**Курс имеет цель:**

- развить пространственные представления
- выявить основы логического мышления
- подготовить учащихся к успешному усвоению систематического курса геометрии средней школы.

Для м

ISBN 978-5-09-015973-9



9 785090 159739