Т. Г. Ходот
А. Ю. Ходот
В. Л. Велиховская

Наглядная геометрия 5

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

Т. Г. Ходот А. Ю. Ходот В. Л. Велиховская

Наглядная геометрия

Учебник

для учащихся 5 классов общеобразовательных учреждений

Москва "Просвещение" 2006

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
Х69

Ходот Т. Г.

Х69 Наглядная геометрия : учеб. для учащихся 5 кл. общеобразоват. учреждений / Т. Г. Ходот, А. Ю. Ходот, В. Л. Велиховская. — М. : Просвещение, 2006. — 112 с. : ил. — ISBN 5-09-014596-2.

Предлагаемый учебник позволяет, кроме развития пространственных представлений и логического мышления, подготовить учащихся 5 классов к успешному усвоению систематического курса геометрии средней школы: создать целостные представления об этом курсе, на конструктивном уровне познакомить со всеми геометрическими фигурами, встречающимися в школьном курсе, способствовать развитию навыков изображения фигур, формированию правильной математической речи.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 5-09-014596-2

Дорогой читатель!

Перед тобой книга по геометрии. Но знаешь ли ты, чем занимается, что изучает геометрия?

Оглянись вокруг! Нас окружают разнообразные предметы: здания самой различной формы, машины, памятники, ажурные решётки парков и набережных, предметы быта... Все это является творением рук Человека. Многое создано и самой Природой: растения, животные, леса, поля, горы...

В мире так много разных предметов и явлений, что их все перечислить невозможно. Однако люди интересуются окружающим миром и, чтобы познакомиться с ним и тем более изучить, создали различные науки.

В каждой из этих наук изучаются предметы и явления с какой-нибудь одной точки зрения. При этом не обращают внимания на свойства, которые не существенны для этой науки. Так, например, изучая в биологии размножение растений, часто не учитывают цвет лепестков, форму листа, а обсуждают, как происходит опыление, как расположены в цветке разные его части. Рассматривая в физике различные виды движения, как правило, отвлекаются от того, что за предмет движется, а интересуются лишь тем, какова скорость его движения и сколько времени он перемещается.

Ты приступаешь к изучению нашего многообразного и прекрасного мира. На уроках биологии ты получишь знания о жизни растений и животных. На уроках географии ты постигнешь законы строения Земной поверхности. На уроках музыки и литературы познакомишься с произведениями, созданными великими музыкантами и писателями.

Подумай, какие вопросы вы обсуждаете на каждом из уроков и на что вы каждый раз обращаете внимание, а что считаете не существенным. Тебе нетрудно это будет сделать, посмотрев, например, в учебники математики, русского языка, литературы, истории...

А что же изучает геометрия? Чтобы это понять, сначала немного отвлечёмся. Представим себе, что нам нужно изготовить стол.

Сразу возникает много вопросов. Какими должны быть крышка стола и его ножки? Каких размеров должен быть стол? Надо понять, из какого материала его делать, какими инст-

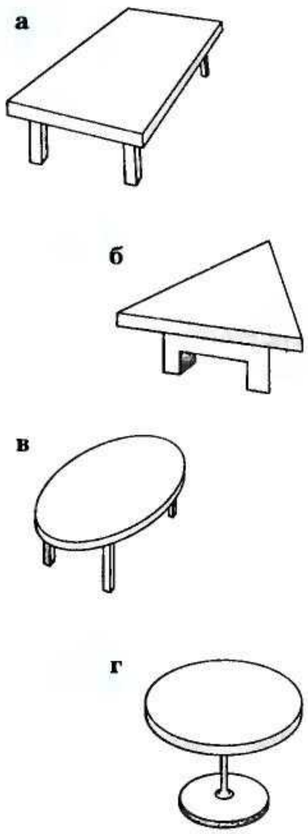


Рис. 1

рументами, в какой мастерской, однако эти вопросы сейчас нас не будут интересовать.

Какую крышку стола будем делать: прямоугольную (рис. 1, *а*), треугольную (рис. 1, *б*), овальную (рис. 1, *в*) или, может быть, круглую (рис. 1, *г*)? Выберем *форму* крышки стола. Пусть, например, мы выбрали стол с овальной крышкой. А какие ножки будем делать: прямоугольные (рис. 2, *а*), изогнутые (рис. 2, *б*), прямые круглые (рис. 2, *в*)? — Выберем и *форму* ножек стола.

Теперь нужно понять, сколько должно быть ножек и как они должны быть расположены по отношению друг к другу и к крышке стола. Здесь тоже возможны разные варианты (рис. 3). Какой из них выбрать? Иначе говоря, нужно определить *расположение* ножек *по отношению* к крышке стола и друг к другу.

И наконец, какой длины должны быть ножки? Зависит ли ответ на этот вопрос от того, какую крышку стола мы выбрали? — Нужно правильно выбрать *размеры* всех деталей стола.

Сейчас при обсуждении изготовления стола мы рассматривали только *форму*, *размеры и взаимное расположение* различных его деталей, не учитывая при этом ни материал, из которого он будет сделан, ни цвет, ни стоимость будущего стола. Иначе говоря, нас интересовали только *геометрические свойства* предмета. Мы обдумывали его *геометрию*.

Вообще, слово *геометрия* возникло в глубокой древности, когда знания о форме, размерах и взаимном расположении предметов только начинали складываться в науку. Первый профессиональный геометр — это землемер (от *ге* — земля, *метрио* — измерять). В его задачи входила разметка земельных участков для земледелия и строительства.

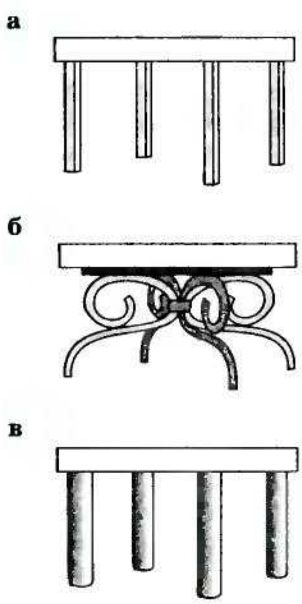


Рис. 2

Однако геометрия развивалась не только благодаря земледелию, но и при решении различных практических задач в строительстве, кораблестроении, военном деле, искусстве, астрономии... Знания передавались от мастера к подмастерью, составляя основу профессионального мастерства. При этом они редко рас-

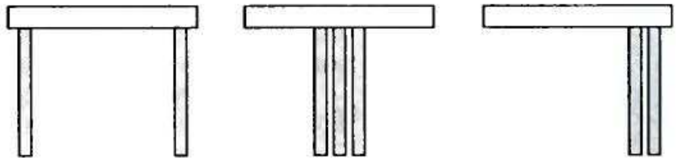


Рис. 3

пространялись за пределы мастерских, так как не существовало ещё общего, понятного всем *геометрического языка*, не связанного с какой-либо профессией. Со временем такой язык появился. Это позволило собрать вместе, обобщить геометрический опыт разных профессий. Так, благодаря усилиям многих людей, накопленные тысячелетиями знания и образы превратились в науку геометрию.

Мы уже поняли, что геометрия изучает форму предметов, их размеры и взаимное расположение. При этом она изучает не предметы, а так называемые *геометрические фигуры*.

Что такое геометрическая фигура? Сравнивая окружающие нас предметы (рис. 4), даже имеющие совершенно разное происхождение, мы стремимся обнаружить, чем они похожи друг на друга или чем различаются. Мы замечаем сходство не только в том, что предметы сделаны из одного материала или имеют одинаковый цвет. Нам заметны и более сложные сходства, например, такие, как общее назначение предметов (рис. 4, *а*), их общее происхождение (рис. 4, *б*), форма (рис. 4, *в*). Чтобы выявить общие свойства в формах, мы воображаем

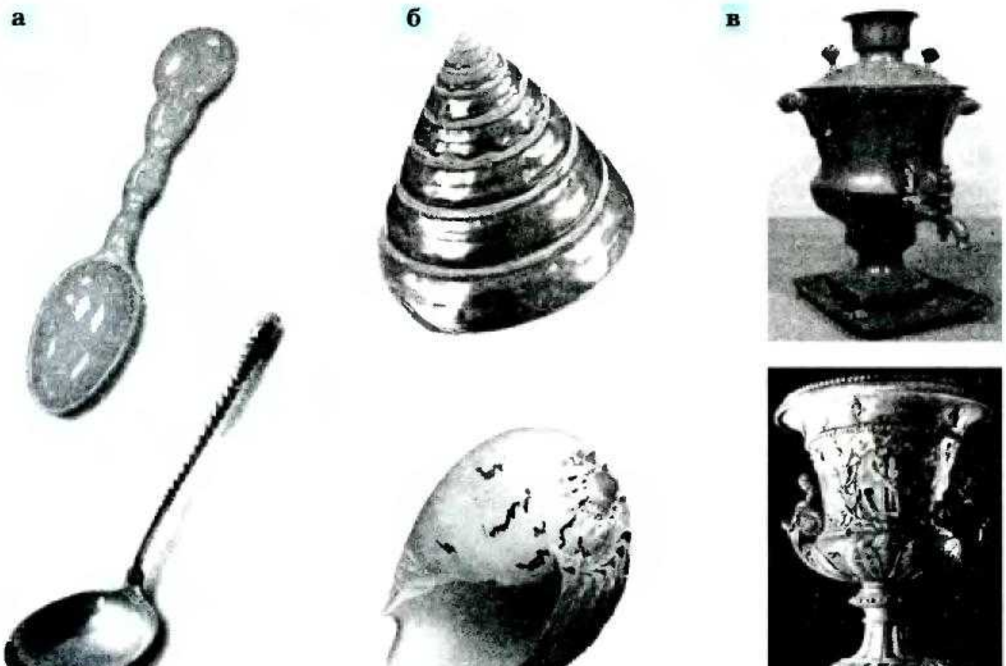


Рис. 4

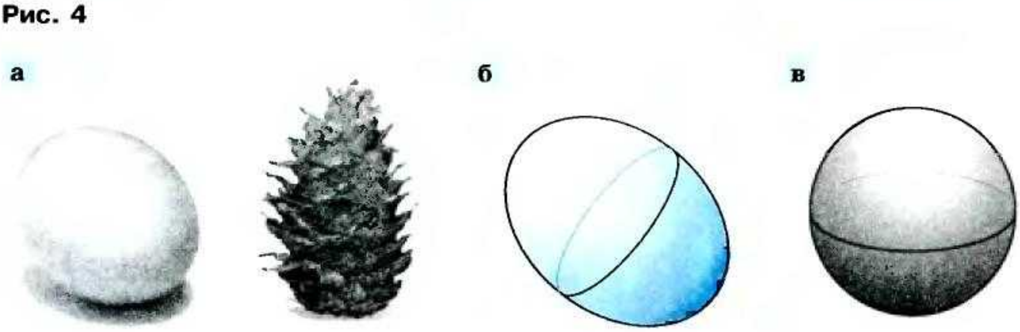


Рис. 5

идеальный предмет без лишних свойств и деталей, наделённый замеченной формой. Этот «очищенный» мысленный образ реальных предметов с похожей формой и является *геометрической фигурой*.

На рисунке 5, *а* предметы имеют одинаковую форму. Мы можем представить себе геометрическую фигуру (рис. 5, *б*), которая описывает эти формы. Мы ещё не знаем, как называется такая фигура, но можем сказать, что это — «близкая родственница» хорошо знакомого нам шара (рис. 5, *в*).

Геометрическая фигура — это мысленный образ предмета, лишённый всех свойств этого предмета, кроме формы, размеров и взаимного расположения его деталей.

Определим теперь, какую форму имеет Дворец Петра I, изображённый на рисунке 6, *а*. Чтобы это сделать, надо отвлечься от архитектурных деталей здания, окон и предметов, окружающих его (рис. 6, *б*). Тогда становится понятно, что здание имеет форму, которую можно представить конструкцией из прямоугольного параллелепипеда, на котором наклонно стоят два четырёхугольника и два треугольника, приложенные друг к другу сторонами (рис. 6, *в*).

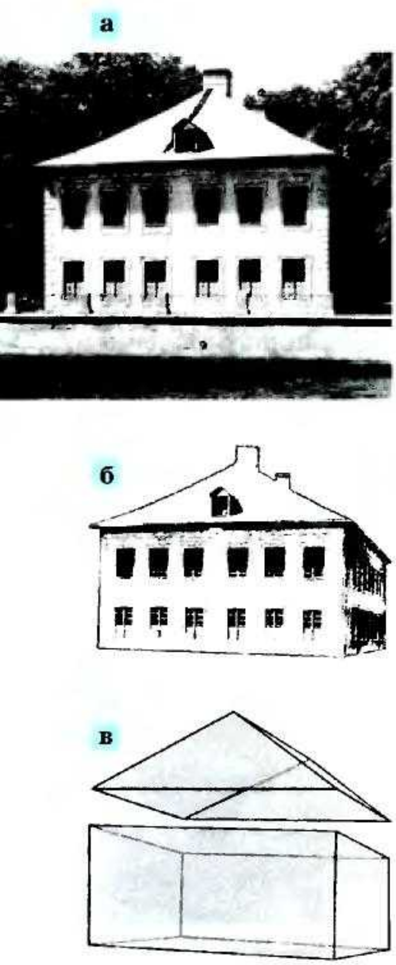


Рис. 6

1. Вообрази и нарисуй формы предметов или их частей, изображённых на рисунке 7.

Рис. 7

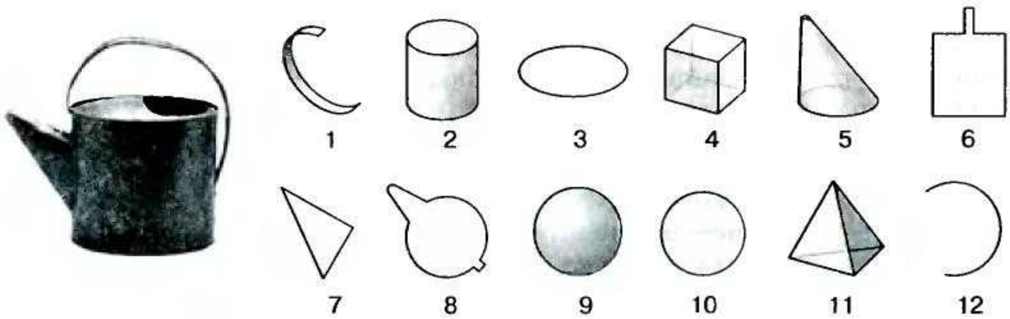


Рис. 8

2. Придумай какие-нибудь другие предметы, имеющие те же формы. Объясни, какие свойства предметов ты не учитывал при выполнении этого задания, а какие отразил в своём рисунке.

3. Назови номера геометрических фигур, которые могут быть использованы при описании формы лейки (рис. 8).

Если в предмете (столбе, шпале, карандаше) нас не интересует толщина, и мы хотим подчеркнуть его протяжённость, то мы изобразим его в виде *отрезка*; а если не существенными для нас являются все размеры предмета, то мы изобразим его *точкой* (так точками нам кажутся звёзды на тёмном небе, с вертолёта точками кажутся дети, играющие в саду, с самолёта — дома, со спутника — небольшие селения).

Геометрические фигуры — это основные «кирпичики» геометрических знаний, они напоминают нам детали детского конструктора: из самых простых деталей с простейшими или изученными свойствами конструируются новые фигуры с более сложными свойствами. (Так же происходит, например, в языке: из самых простых «кирпичиков»-букв складываются слоги, слова, предложения и, наконец, увлекательнейшие истории, сказки, литературные произведения.)

Так складывается НАУКА ГЕОМЕТРИЯ.

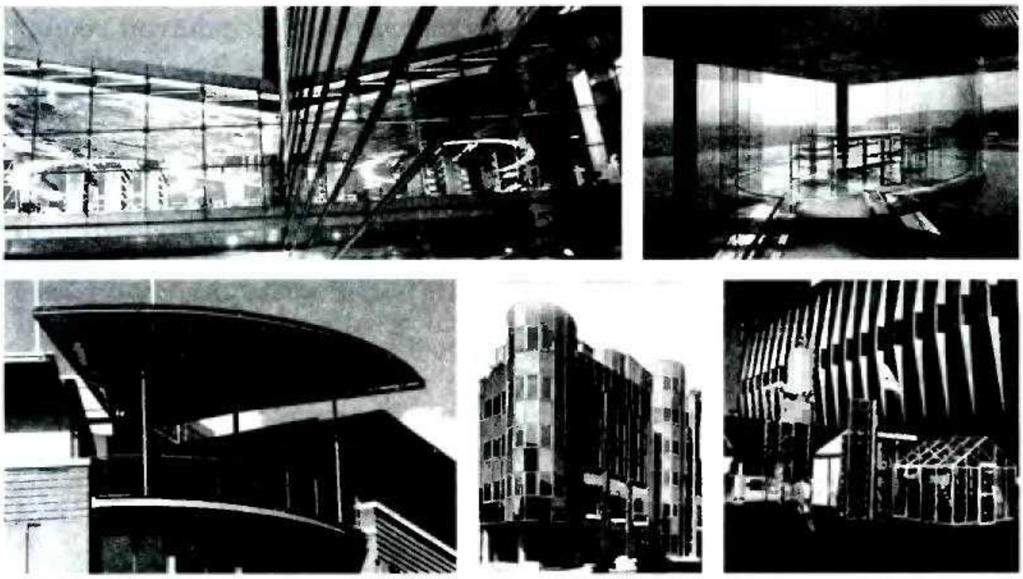


Рис. 9

Знание геометрии необходимо любому человеку, который придумывает и создаёт новые предметы и формы, — модельеру и портному, конструктору и дизайнеру, строителю и архитектору. Современные архитекторы используют очень сложные геометрические конструкции в своих произведениях (рис. 9). Такая архитектура поражает воображение, меняет представления зрителей об окружающем мире. А достигается это благодаря тому, что архитекторы умело используют сложные геометрические знания, достижения современной науки.

Геометрия является также рабочим инструментом учёных: физиков, химиков, астрономов, географов, биологов.

А самое главное: занятия геометрией позволяют развить воображение, учат думать, правильно говорить и убедительно (доказательно) отстаивать свою точку зрения. Всему этому ты научишься со временем. Изучая наглядную геометрию, ты будешь знакомиться с различными фигурами и их комбинациями, рисовать их, конструировать модели и играть в разные геометрические игры.

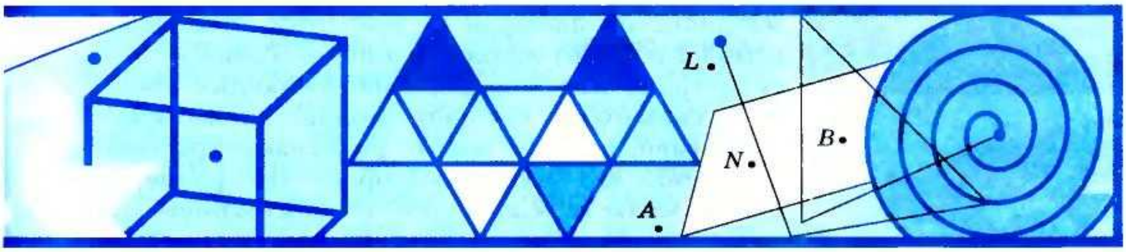
СОВЕТЫ

1. Запасись тетрадкой, остро отточенными простым и цветными карандашами, линейкой, циркулем, резинкой.
2. Читай текст с карандашом в руках и старайся последовательно выполнять все упражнения, помещённые в тексте.
3. Большую помощь в занятиях геометрией окажут тебе упражнения, в которых требуется изготовить какую-нибудь модель. При этом могут пригодиться счётные палочки или спички, картон, цветная бумага, пластилин, ниточки.
4. В случае, если у тебя не получается какое-нибудь задание, отложи его выполнение и вернись к нему через некоторое время.
5. Имей в виду, что некоторые задания имеют несколько решений. Решая задачи, старайся найти все эти решения.

Мы надеемся, что ты получишь удовольствие от занятий геометрией.

Глава 1

Начальные понятия



§ 1 Итак, мы начинаем...

А начнём мы с геометрических игр.

1.1. Попроси кого-нибудь из взрослых зачистить головки у 10 спичек или сделай это сам. Придумай и сложи какую-нибудь фигуру из спичек, не ломая и не накладывая их друг на друга.

1.2. Переведи на кальку квадрат (рис. 10, *а*), а затем — на картон; вырежи его и разрежь по указанным линиям. Назови известные тебе получившиеся фигуры.

Проверь себя. Здесь имеются 5 треугольников и квадрат. Есть также и незнакомая фигура — *параллелограмм* (рис. 11).

Ты сделал геометрическую головоломку, которая называется «Танграм». Это старинная китайская игра. Её название возникло в Европе от слов *«тань»* (китаец) и *«грамма»* (в переводе с греческого — черта, линия). Игроки составляют фигуры (рис. 10, *б*) из 7 частей квадрата (рис. 10, *а*). При этом нужно использовать все части квадрата и располагать их так, чтобы они плотно прилегали друг к другу, но не накладывались друг на друга.

1.3. Придумай и предложи ребятам различные задания на складывание интересных фигур из всех частей танграма.

Используя спички, танграм, а также кубики, можно в классе устраивать конкурсы по конструированию самых замысловатых геометрических фигур. Для этих целей подойдут детские кубики. Можно изготовить их из картона, используя развёртку (см. Приложение, с. 107). Вместе с одноклассниками вы легко справитесь с такой задачей.

Для организации геометрических игр, кроме своей фантазии, можно использовать различные книги, например: А. Т. Улицкий, Л. А. Улицкий. «Игры со спичками», А. П. Доморяд. «Математические игры и развлечения». В этих книгах есть и другие геометрические игры.

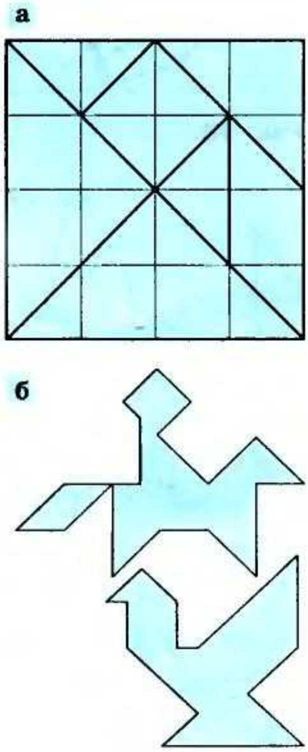


Рис. 10

Рис. 11

§ 2 Как можно получить геометрические фигуры

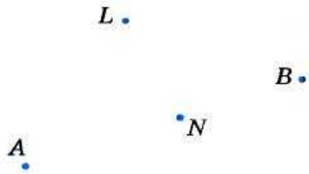


Рис. 12

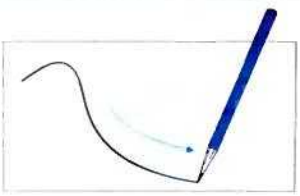


Рис. 13

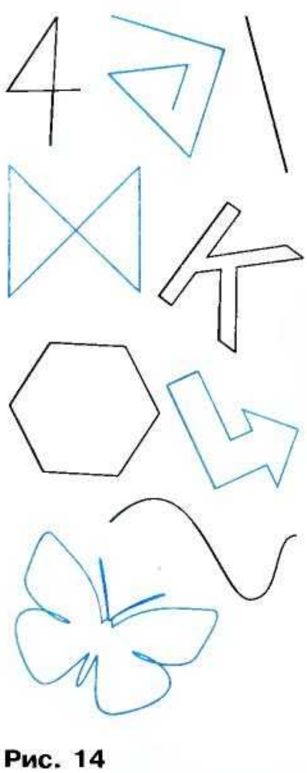


Рис. 14

2.1. Точка. Линия. Самой маленькой геометрической фигурой (и при этом, наверное, самой главной!) является *точка*. Точка — это геометрическая фигура, изображающая предмет, размерами которого можно пренебречь. Например, с земли мы не различаем крыльев самолёта, его иллюминаторов, его размеры очень малы в сравнении с расстоянием до него, и поэтому мы можем считать его точкой.

Точка не имеет ни длины, ни ширины, она — самая маленькая фигура.

Изображают (ставят) точку с помощью остро отточенного карандаша. Не случайно слово «точка» имеет тот же корень, что «точить», «точность». Договорились называть точки заглавными латинскими буквами A, B, F, K... Например, рассмотрев рисунок 12, можно сказать: «Точка N лежит между точками A и B».

2.1. Нарисуй и обозначь две точки A и B. Поставь точку C так, чтобы она была между ними и на одинаковых расстояниях от них. Отметь ещё точки D и E так, чтобы точка D была между A и C, точка E между C и B.

2.2. На нелинованном листе бумаги поставь четыре точки M, N, P, Q так, чтобы, соединив их, можно было бы получить квадрат. Проверь, хорошо ли ты поставил точки. Отметь точку, которая лежит между точками M и P и между точками N и Q. Зависит ли результат от того, как ты обозначил точки?

Подобно тому как самолёт «чертит» *линию* в дневном небе в результате своего плавного перемещения, мы можем нарисовать линию, плавно перемещая карандаш по бумаге (не отрывая его от листа) (рис. 13).

Линией называют фигуру, которую можно нарисовать, не отрывая карандаш от бумаги (рис. 14).

Если же мы понаблюдаем за полётом самолёта в ночном небе, то такой линии не увидим, а судить о перемещении самолёта мы сможем по светящейся точке, которая через определённые промежутки времени появляется в небе, — это мигает сигнальная лампа на самолёте. Такая точка не описывает линию, хотя мы и получаем представление о пути следования самолёта по отдельным светящимся точкам.

Вокруг мы видим различные фигуры, в том числе и линии. Легче всего увидеть линию в упавшей на пол верёвке. А можно представить себе, что летишь на воздушном шаре и поднялся настолько, что дороги и реки кажутся тебе линиями (рис. 15). Линию можно увидеть также в стволе дерева, если отойти от него достаточно далеко. Очень часто линии, нарисованные нами, напоминают очертания, контуры каких-нибудь предметов (см. рис. 15).

«Пощупать» реальную линию можно, например, проводя пальцем по краю чашки, стакана или другого предмета посуды (рис. 16).

Для рисования линии можно воспользоваться разными инструментами: линейкой, чертёжным треугольником, каким-нибудь трафаретом, лекалом (рис. 17, *а*); можно провести линию просто, как говорят, от руки.

На рисунке 17, *б* изображена линия. Можно сказать, что точка B *лежит на* линии или что линия *проходит через* точку B.

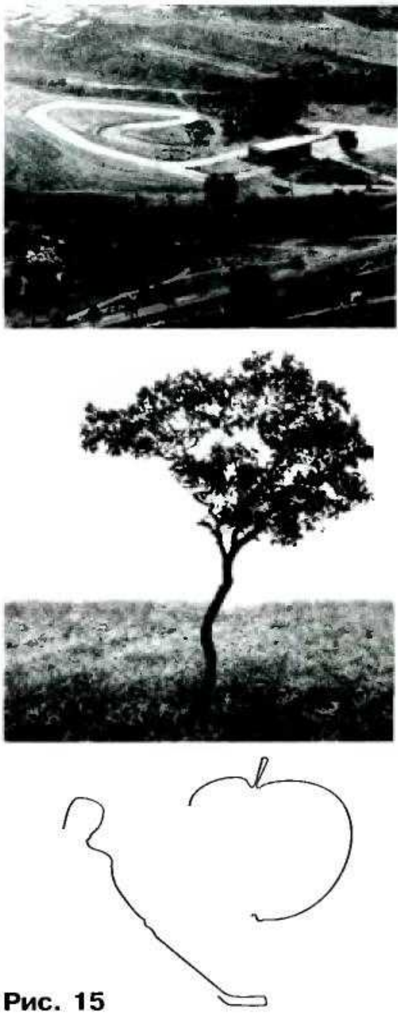


Рис. 15

Рис. 16

2.3. Приведи свои примеры реальных линий.

2.4. Отметь и обозначь какую-нибудь точку и проведи: а) зелёным карандашом линию, начинающуюся в этой точке; б) синим карандашом линию, проходящую через эту точку; в) чёрным карандашом линию, не проходящую через эту точку.

2.5. Отметь в тетради две точки, обозначь и соедини их какой-нибудь линией. Сколько линий, соединяющих эти точки, ты можешь нарисовать? Можно ли нарисовать самую короткую (самую длинную) линию?

2.2. Какие линии бывают?

Модели линий легко получить, используя верёвку или нить. Если туго натянуть нить, то получится модель *прямой* линии (рис. 18, *а*); если бросить небрежно верёвку на пол — модель *кривой* линии (рис. 18, *б*). Если, решая задачи 2.4—2.5, ты использовал линейку или чертёжный треугольник, то у тебя могли получиться прямая (рис. 19, *а*) или ломаная (рис. 19, *б*) линии.

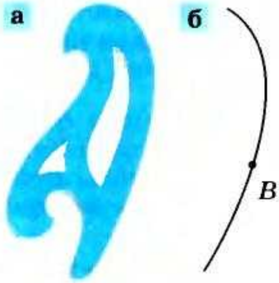


Рис. 17

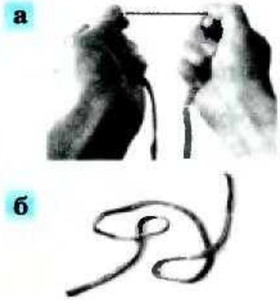


Рис. 18

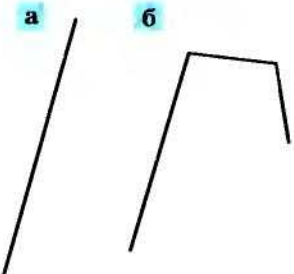


Рис. 19

Рис. 20

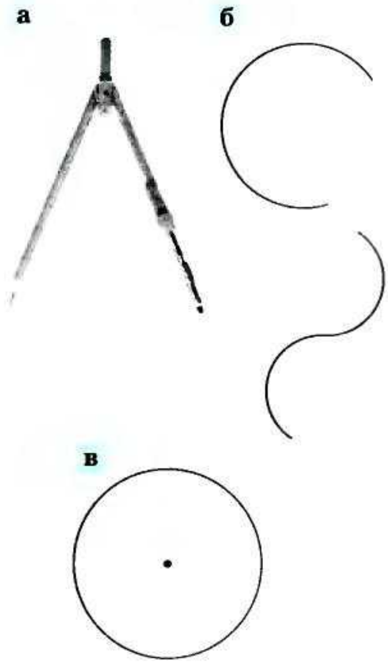


Рис. 21

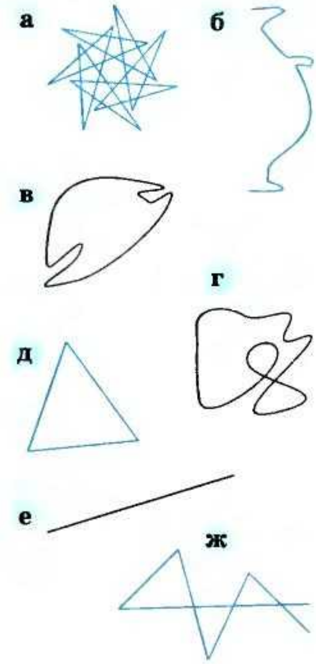


Рис. 22

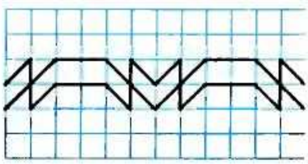


Рис. 23

(Интересное название — правда? Как будто она получилась после того, как «сломали» прямую!) Есть люди, которые умеют рисовать прямые линии от руки, без линейки. Это трудно. Мы будем рисовать прямые и ломаные линии только с помощью линейки или чертёжного треугольника.

Те линии, которые нельзя нарисовать с помощью линейки, являются *кривыми* линиями (рис. 20). Некоторые кривые линии можно также провести и с помощью специального инструмента — циркуля (рис. 21, *а*). Эти линии (рис. 21, *б*) можно получить как след на листе бумаги, который оставляет при своём вращении вокруг одной ножки циркуля грифель, расположенный на другой ножке.

Среди кривых, которые можно начертить циркулем, особое значение имеет линия, изображённая на рисунке 21, *в*. Эта линия называется *окружностью*. Комбинируя прямые, кривые и ломаные линии, можно получать новые линии.

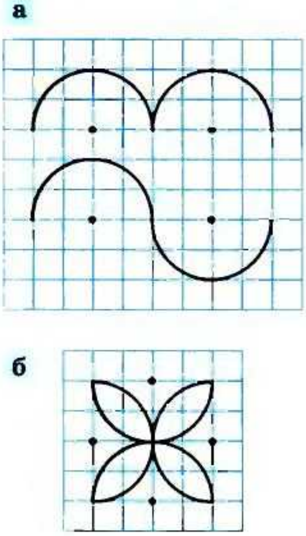


Рис. 24

2.6. В русских народных сказках часто богатырь оказывается на распутье трёх дорог. Как, по-твоему, выглядят эти дороги с высоты птичьего полёта? Нарисуй их. Получилась ли при этом у тебя линия?

2.7. Напиши, какие из линий, изображённых на рисунке 22, прямые, какие — кривые, какие — ломаные.

2.8. Нарисуй прямую, ломаную и кривую линии, проходящие через одну точку.

Замечание. Про линии, которые проходят через одну точку, говорят, что они *пересекаются* в этой точке.

2.9. Две линии на рисунке 23 составляют орнамент. Перерисуй этот орнамент по клеточкам в тетрадь. Придумай и нарисуй две другие линии так, чтобы они образовали какой-нибудь орнамент.

2.10. Воспользуйся циркулем и начерти линии, изображённые на рисунке 24.

Совет. Обрати внимание на то, что расстояние между ножками циркуля равно двум клеточкам. Точками на рисунке отмечены места установки иголки циркуля.

2.11. Нарисуй с помощью циркуля какой-нибудь узор. Выдели в нём цветом части, которые являются линиями.

2.12. С помощью одной линии, не проходя дважды один и тот же её участок, нарисуй открытый конверт (рис. 25).

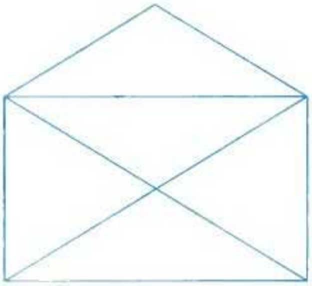


Рис. 25

2.3. Замкнутые и незамкнутые линии.

На рисунке 26 изображены линии, которые разделены на две группы.

В одной группе — линии, у которых нет ни начала, ни конца: если ты захочешь их обвести, то, с какой бы точки ни начал, обязательно придёшь в ту же точку. Это *замкнутые* линии (рис. 26, *а*). Окружность — простейший пример замкнутой линии. Если ты возьмёшь круглую резинку, то, растягивая её в разные стороны, получишь примеры разных замкнутых линий.

Линии из второй группы не такие: у каждой из них есть начало и конец. Это *незамкнутые* линии (рис. 26, *б*). Простейшим примером незамкнутой линии является отрезок. Искривляя его различными способами, можно получить разные незамкнутые линии, кривые и ломаные.

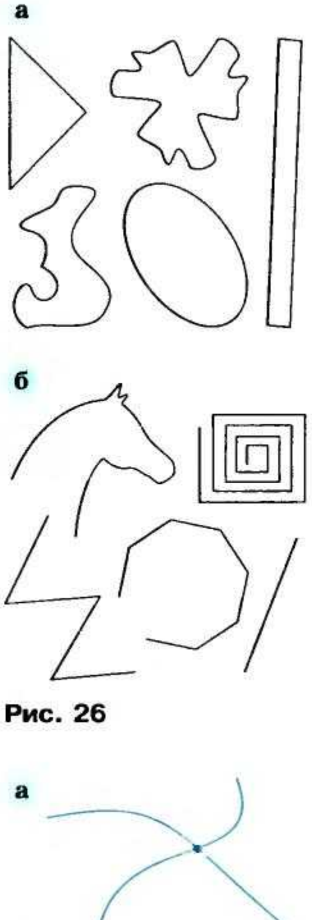


Рис. 26

Разные линии могут располагаться так, что они пересекают друг друга (рис. 27, *а*). Место их пересечения называется *точкой пересечения*. В одной точке могут пересекаться не только две, но и несколько линий (рис. 27, *б*).

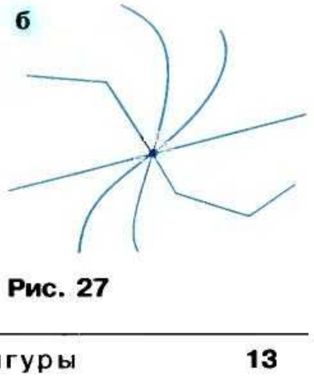
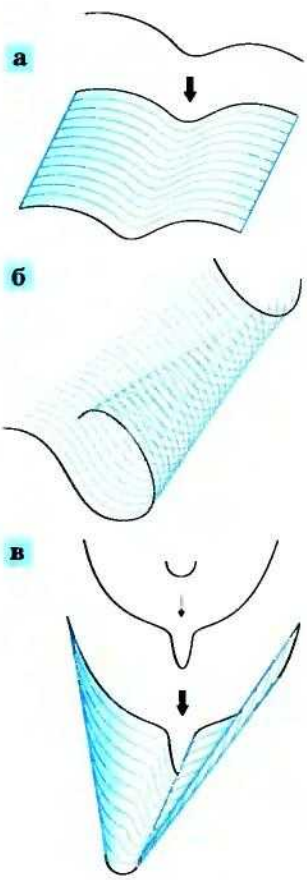


Рис. 27

2.13. Отметь в тетради две точки и нарисуй самую короткую незамкнутую линию с концами в этих точках. Удалось ли тебе это сделать без инструмента?

2.14. Нарисуй разными цветами: а) три прямые линии, имеющие одну общую точку; б) незамкнутую ломаную линию и прямую линию, которая её пересекает.



а

б

в

Рис. 28

2.4. Поверхность. Тело.

Точка при своём непрерывном перемещении «рисует» линию, линия, непрерывно перемещаясь, может образовывать фигуру, которая называется *поверхностью* (рис. 28, *а*). При этом линия, образующая поверхность, может тоже изменяться (рис. 28, *б*).

Представление о поверхности может дать бутон цветка (рис. 29), поверхность мяча (шара), поверхность дерева — его кора. Приведи и ты свои примеры. «Пощупать» реальную поверхность можно, проводя по предмету ладошкой (рис. 30, *а*). Создать представления о поверхностях нам помогают изделия из картона, стекла, ткани, полиэтилена, бумаги и т. д. (рис. 30, *б*).

Среди всех поверхностей особенную роль играют плоские поверхности. Поверхности стены, школьной доски, оконного стекла, стола (рис. 31, *а*) дают представление о такой поверхности. Если стол накрыть не очень хорошо отглаженной скатертью, то она послужит моделью поверхности, которая не является плоской (рис. 31, *б*). Но даже и хорошо отглаженная скатерть может создать представление о неплоской поверхности, если её края свисают со стола (рис. 31, *в*). Приведи другие примеры плоских и неплоских поверхностей.

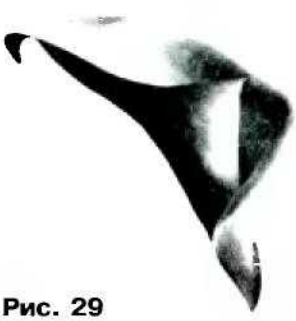


Рис. 29

Плоскую поверхность можно получить так: возьмём две прямые, проходящие через одну точку (рис. 32, *а*), а затем начнём непрерывно перемещать третью прямую так, чтобы она всё время пересекала первые две (рис. 32, *б*). Эта третья прямая «зарисует» поверхность, которая называется *плоскостью* (рис. 32, *в*).

Чтобы проверить, является ли поверхность плоской, берут линейку, прикладывают её ребром к поверхности и двигают во всех направлениях так, чтобы её концы лежали на поверхности. Если линейка каждый раз плотно прилегает к поверхности, то эта поверхность плоская.

а

б

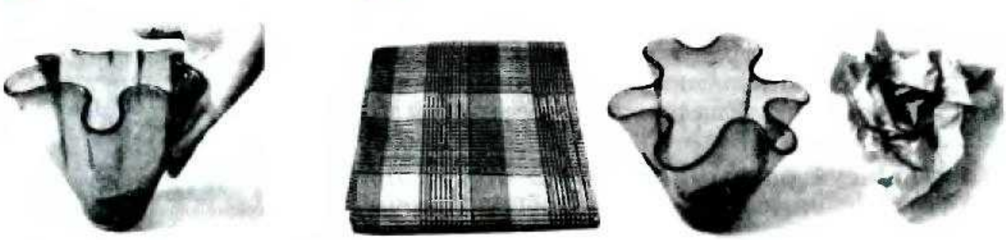


Рис. 30

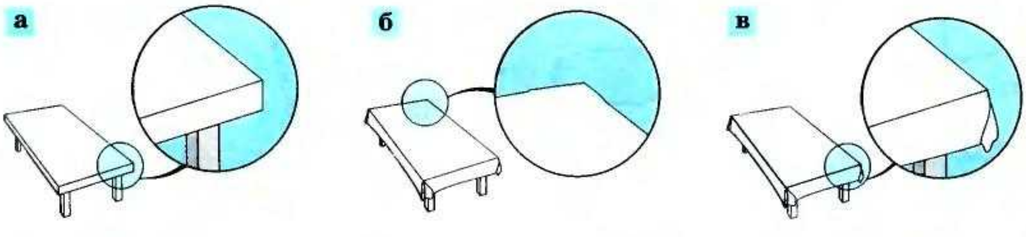


Рис. 31

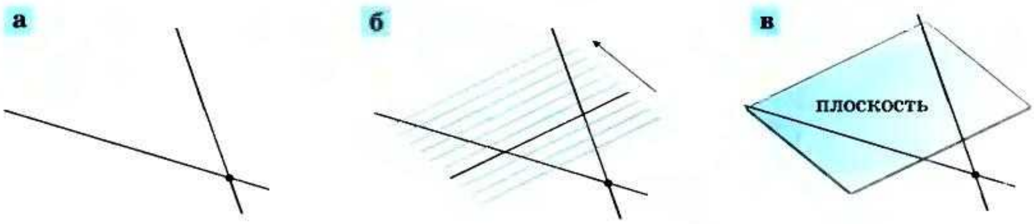


Рис. 32

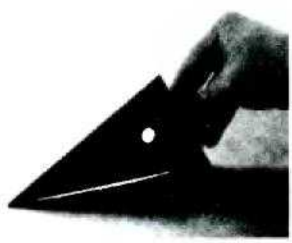


Рис. 33

Рис. 34

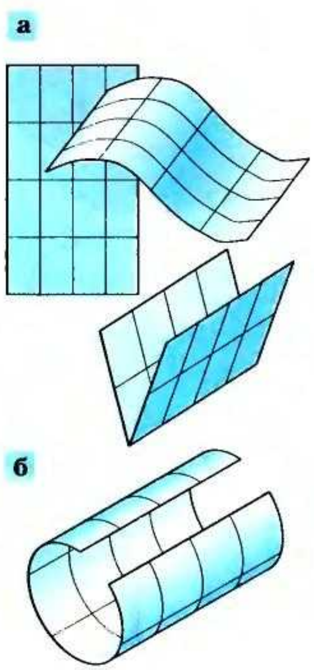


Рис. 35

Если же в какой-то момент образовалась щель между поверхностью и линейкой, то поверхность — неплоская (рис. 33).

Удобно в качестве модели плоскости представлять себе лист картона или ткань, натянутую на пяльцы (рис. 34). Если плоскую поверхность изогнуть чуть-чуть или очень сильно (рис. 35, *а*), то можно получить очень много разных поверхностей, в том числе и *цилиндрическую* (рис. 35, *б*).

Все реальные плоские поверхности имеют края, у геометрической фигуры — плоскости — края нет. Она безгранично простирается во все стороны. Представить себе это ты смог бы, если бы оказался в лодке в безбрежном море (рис. 36): в тихую погоду — в штиль — оно напоминает плоскость, а при ветре и волнах — неограниченную неплоскую поверхность.

А что получится, если начать непрерывно перемещать поверхность? Реально такую ситуацию можно себе представить, глядя на аквариум, который заполняется водой. Поверхность воды, непрерывно поднимаясь, заполняет («зарисовывает») весь аквариум (рис. 37).

Рис. 36

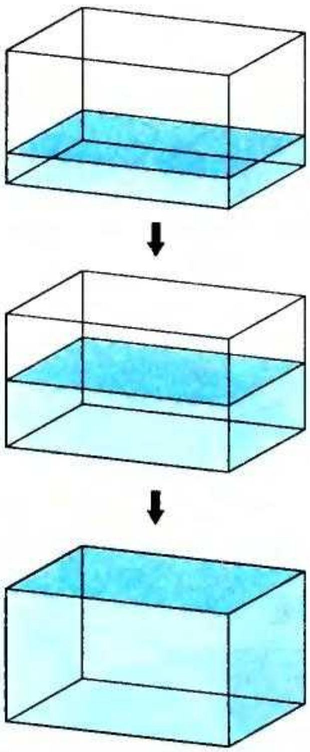


Рис. 37

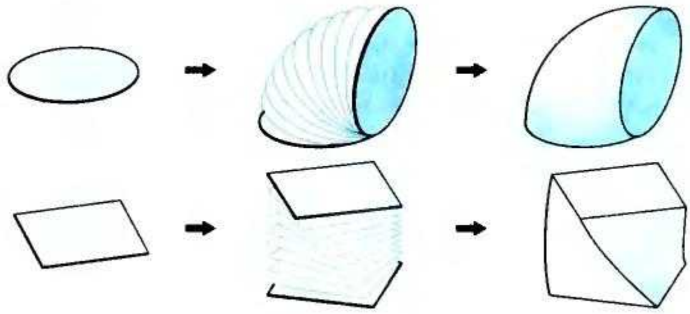


Рис. 38

Получается модель *геометрического тела*. Примеры получения геометрических тел при перемещении поверхности приведены на рисунке 38. Обрати внимание на то, что поверхность, образующая тело, может непрерывно менять свою форму или размеры.

Сделать модель геометрического тела можно из пластилина, теста, мокрого песка. Приведи свои примеры.

2.15. Вылепи из пластилина модель какой-нибудь фигуры. Определи, есть ли у этой фигуры плоские части поверхности.

2.16. Рассмотри различные предметы домашнего обихода. Определи, какие части поверхностей каждого из этих предметов плоские и какие нет. Нарисуй эти предметы и соответствующие им геометрические фигуры.

2.5. Разные виды фигур. На рисунке 39 фигуры распределены в две группы. Подумай, чем отличаются фигуры этих групп.

По-видимому, ты заметил, что в первую группу собраны фигуры (круг, прямоугольники, треугольник), которые целиком могут быть расположены в плоскости (например, в плоскости стола), каждая из них является частью плоскости. Такие фигуры называются *плоскими* фигурами. Модель каждой такой фигуры легко изготовить, вырезав её из картона.

Плоскими фигурами можно представлять разные предметы, толщина которых для нас

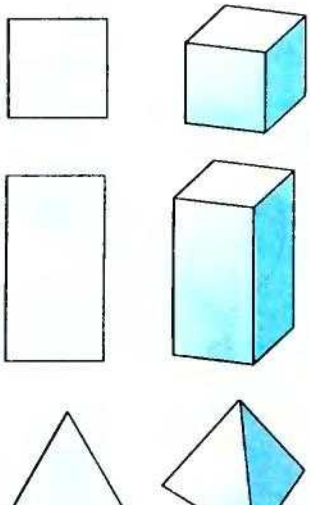


Рис. 39

Рис. 40

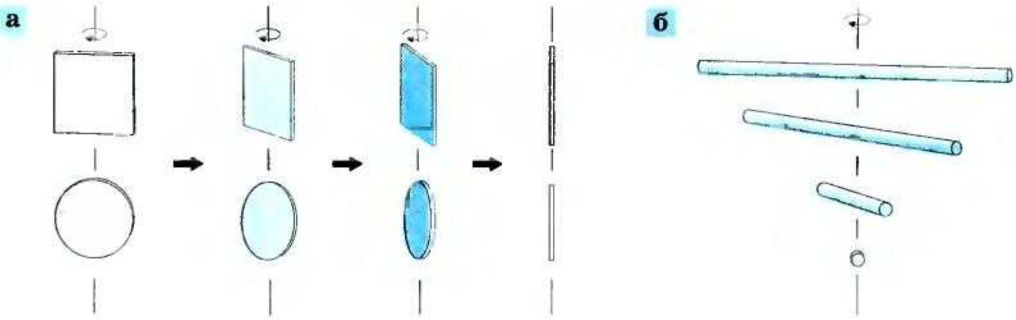


Рис. 41

не является существенной: лист дерева, бабочку, камбалу (рис. 40) и другие.

Возьми сделанные из картона модели каких-нибудь плоских фигур (например, круг, прямоугольник) и посмотри на них с разных сторон. Обрати внимание на то, что каждую из них можно так повернуть, что вместо прямоугольника или круга ты увидишь отрезок (рис. 41, *а*): плоская фигура не имеет толщины. А теперь сделай то же самое с каким-нибудь отрезком (вернее, его моделью), например, со спицей. Ты заметишь, что если на отрезок посмотреть с торца (рис. 41, *б*), то и увидишь только этот торец — точку. У отрезка нет не только толщины (высоты), но и ширины, а есть только длина, которую мы не видим, если смотрим на отрезок с торца.

Фигуры второй группы на рисунке 39 имеют некоторую толщину (высоту), и потому они не могут быть целиком помещены в плоскость. Такие фигуры называются *пространственными*. Пространственными могут быть и линии, и поверхности, и тела (рис. 42).

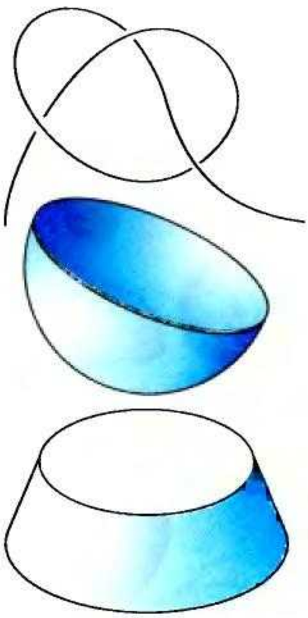


Рис. 42

2.17. На модели прямоугольного параллелепипеда нарисуй разными цветами: а) плоскую линию; б) пространственную замкнутую линию; в) незамкнутую пространственную ломаную; г)* плоскую ломаную, не лежащую ни в какой грани параллелепипеда.

2.18. Из 6 спичек попробуй составить четыре треугольника.

Если тебе это не удалось, давай решим задачу вместе. Сложим один треугольник (рис. 43, *а*) и приложим к нему второй (рис. 43, *б*). У нас осталась всего одна спичка, и непонятно, как можно получить 4 треугольника. А может быть, не класть на стол, а «поднять» последние три спички?

Получилось! Мы составили четыре треугольника из 6 спичек. Но при этом мы распо-

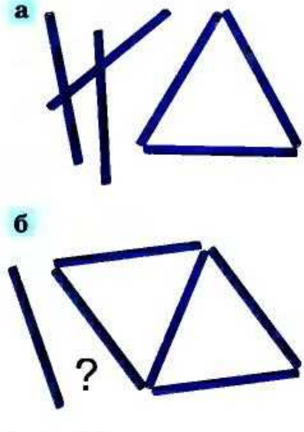


Рис. 43

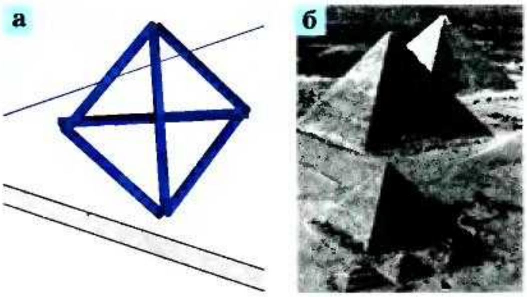


Рис. 44

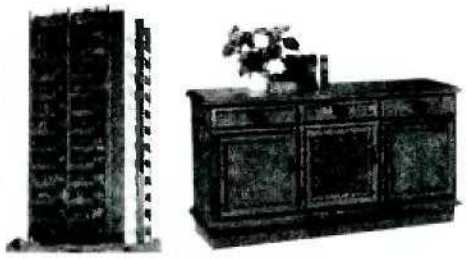


Рис. 45

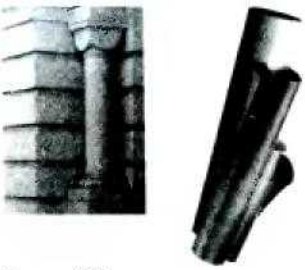


Рис. 46

Рис. 47

Рис. 48

ложили спички не на плоскости стола, а *в пространстве* (рис. 44, *а*). Мы получили фигуру, напоминающую *пирамиду*. На уроках истории ты узнаешь о египетских пирамидах — древних усыпальницах фараонов (рис. 44, *б*).

Жилой дом, комод (рис. 45) имеют форму *прямоугольного параллелепипеда*, и с геометрической точки зрения, они отличаются лишь размерами.

Кубики, в которые ты играл, когда был маленький, — тоже прямоугольные параллелепипеды, только у каждого из них все рёбра одинаковой длины. Говорят, что такие параллелепипеды имеют форму *куба*.

2.19. Вспомни ещё предметы, которые имеют форму прямоугольного параллелепипеда.

Консервная банка, монета, рулон бумаги, трубочка для коктейля или колонна имеют форму, которая в геометрии называется *цилиндр* (рис. 46). В зависимости от того, что в рассматриваемой фигуре для нас существенно и что не существенно, мы можем считать колонну моделью отрезка или цилиндра. Так же и по отношению к монете: если нас не интересует толщина монеты, то мы можем этой толщиной пренебречь и считать монету моделью круга, а если толщина монеты для нас существенна, то мы её принимаем за модель цилиндра.

2.20. Есть ли среди окружающих тебя предметов такие, которые имеют форму цилиндра?

Помидор, глобус, мяч имеют форму, называемую *шаром* (рис. 47). Шляпка некоторых грибов, сложенный зонт и рупор имеют форму *конуса* (рис. 48).

2.21. Какие ещё предметы имеют форму шара или конуса?

2.22. Определи, какая из фигур (рис. 49) лишняя. (В некоторых случаях возможны разные варианты ответа.)

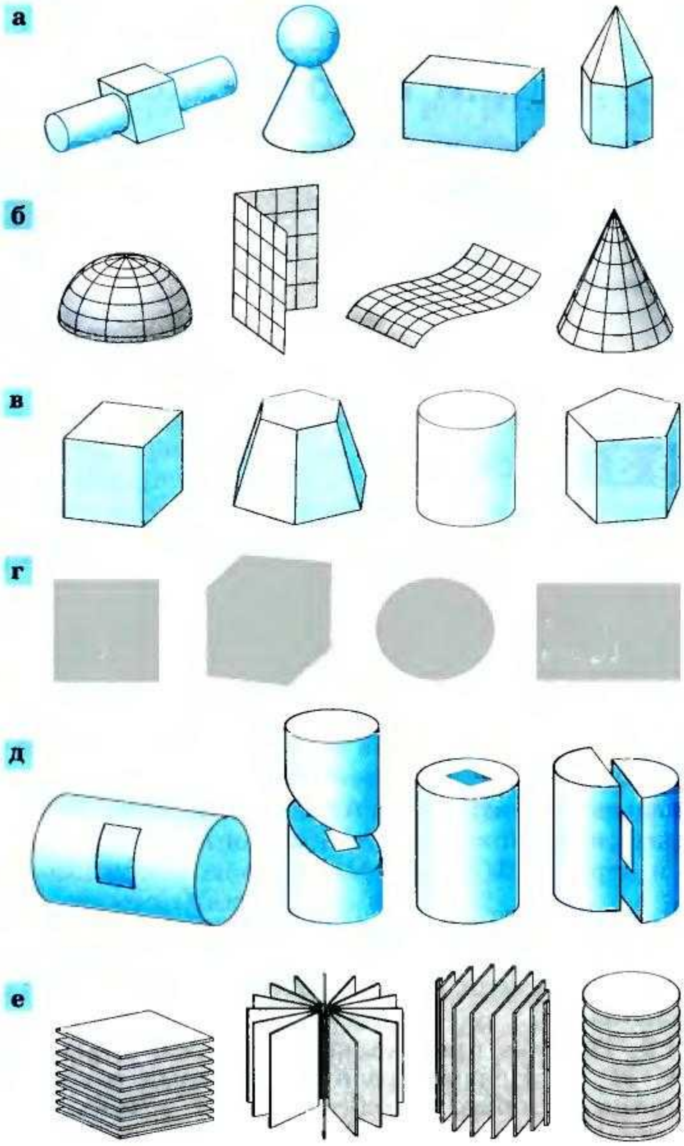


Рис. 49

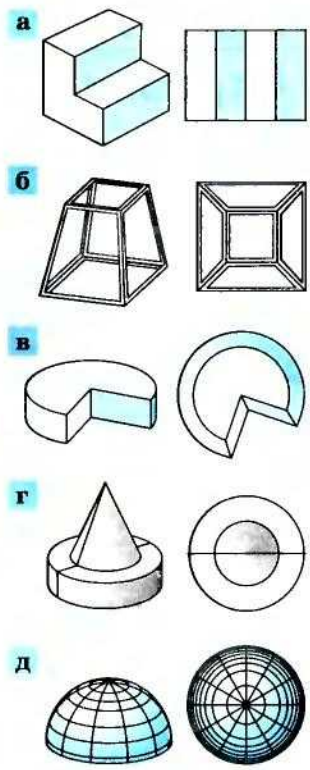


Рис. 50

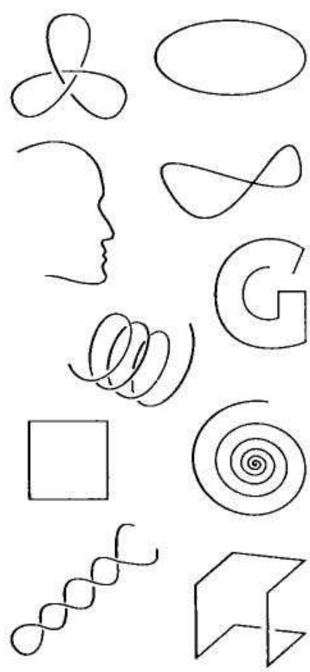


Рис. 51

2.23. Из фигур, изображённых в Приложении (с. 107, 108), сделай модели куба, прямоугольного параллелепипеда и пирамиды.

2.24. Верно ли, что на рисунках 50, *а* — *д* изображены фигура и ее вид сверху? Если есть ошибка, сделай правильный рисунок.

2.25. Определи, какие из линий на рисунке 51 пространственные, какие — плоские.

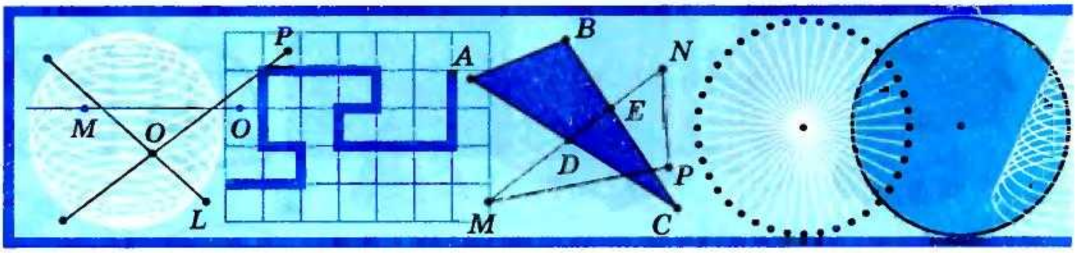
2.26. Является ли нитка, смотанная в клубок, моделью плоской линии? Ответ обоснуй.

2.27. На листе бумаги нарисовали линию. После этого лист смяли. Осталась ли изображённая линия плоской?

2.28*. Нарисуй на смятом листе бумаги плоскую линию.

Глава 2

Отрезки. Конструкции из отрезков



§ 3 Отрезки

Рис. 52

3.1. Понятие отрезка. Отрезок можно назвать самой главной фигурой в геометрии, так как из отрезков можно сконструировать почти все фигуры, которые мы будем изучать.

Поставь точки A и B. С помощью линейки проведи от точки A к точке B прямую линию. Это — *отрезок*, а точки A и B — его концы (рис. 52). Имя отрезка составляют из букв, которыми обозначают его концы. Этот отрезок называется отрезком AB или BA. Если соединить прямой линией точки M и N, то получится отрезок MN или NM.

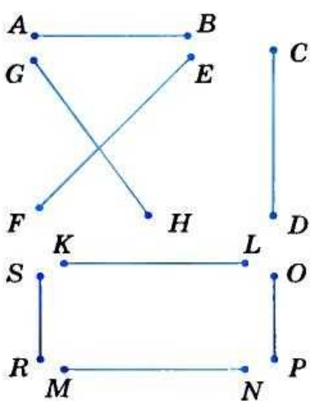


Рис. 53

3.1. Какие предметы можно считать реальными отрезками?

3.2. Перечисли отрезки (рис. 53) и назови их концы.

3.3. Поставь произвольным образом точки T, S, M, N. Начерти разными цветами отрезки, концы которых находятся в этих точках. Назови получившиеся отрезки. Сколько их?

3.4. Сколько отрезков содержится в каркасах: а) куба, б) пирамиды, в) прямоугольного параллелепипеда?

3.2. Взаимное расположение точек и отрезков. На рисунке 54 точка M принадлежит отрезку CE.

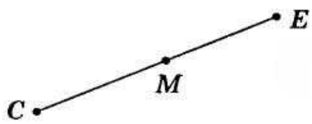


Рис. 54

3.5. Назови отрезок, изображённый на рисунке 55. Какие точки принадлежат этому отрезку? Какие точки не принадлежат ему? Запиши ответ.

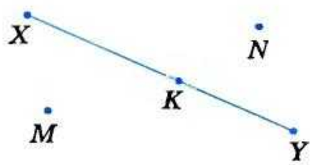


Рис. 55

3.6. Построй отрезок. Обозначь его KL и отметь на нём точки C и E. На сколько отрезков разделился отрезок KL? Сколько отрезков с концами в точках C, E, K, L получилось?

На рисунке 56 отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Точка O принадлежит отрезку AB и отрезку CD. Можно сказать так: «Отрезки пересекаются в точке O» или так: «Отрезки имеют общую точку O».

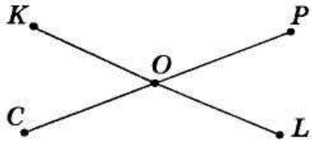


Рис. 56

3.7. Начерти отрезки MN и PQ, которые пересекаются в точке A. Принадлежит ли точка A отрезку NP; отрезку MQ?

3.8*. На рисунке 57 отрезки KL и CP и отрезки KO и OC имеют общую точку O. Есть ли на этом рисунке ещё пары отрезков, для которых точка O является общей? Если есть, то перечисли их. Сколько отрезков с концами в точках K, P и C можно построить так, чтобы они не проходили через точку O?

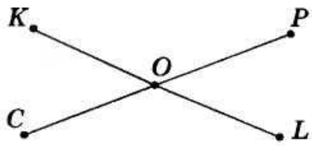


Рис. 57

3.3. Сравнение отрезков. Нам часто приходится сравнивать размеры разных предметов. Например, мы говорим: «Вася выше Кати», «эта дорога короче, чем та», «у Наташи косички длиннее, чем у Марины» и т. д. Говоря геометрическим языком, мы сравниваем в этих случаях отрезки.

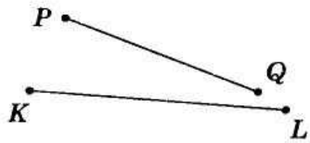


Рис. 58

> Сравнить два отрезка — значит определить, какой из них больше (меньше), или установить их равенство.

Иногда отрезки можно сравнить на глаз: видно, что отрезок KL больше (или длиннее) отрезка PQ (рис. 58). Но сравнить на глаз отрезки, изображённые на рисунке 59, *а*, уже не так просто. Как же это сделать?

Можно применить кальку: перевести на неё отрезок AB (рис. 59, *б*), а затем сравнить отрезки, приложив кальку с копией отрезка AB на отрезок MN (рис. 59, *в*). Но можно прибегнуть к помощи какого-нибудь предмета, например верёвки или нитки.

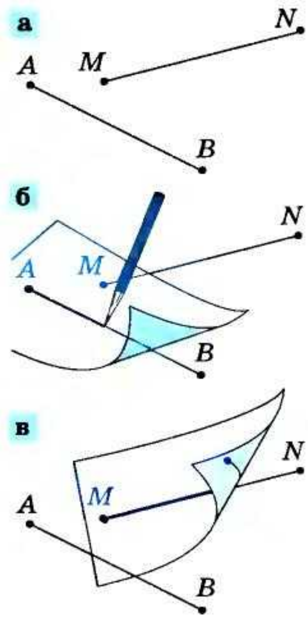


Рис. 59

3.9. Сравни отрезки AB и MN с помощью нитки и расскажи, как ты это сделал. Придумай ещё способы сравнения этих отрезков.

3.10. Сравни свой рост с ростом друзей. Кто из твоих друзей самый высокий? Сколько твоих друзей выше (ниже) тебя?

3.11. На рисунке 60 изображены отрезки AB, LM, SE, OP и NC. Назови самый маленький и самый большой отрезки. Какие из этих отрезков равны между собой?

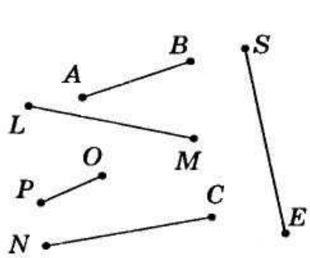


Рис. 60

3.12*. Сравнивая с помощью верёвки все размеры (высоту, длину, ширину) стола с размерами двери в комнате, определи, надо ли разбирать стол для того, чтобы вынести его из комнаты. Реши ту же задачу для шкафа.

Сравнить отрезки можно также с помощью циркуля. Пусть, например, нужно сравнить отрезки PQ и KL (рис. 61, *а*).

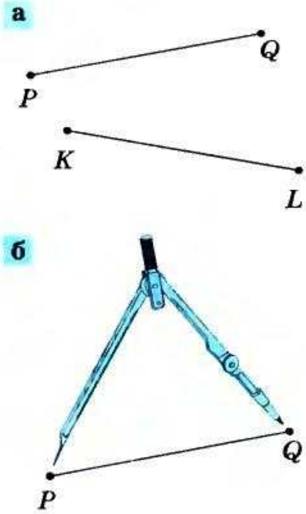


Рис. 61

Установим ножку циркуля с иглой в какой-нибудь конец отрезка PQ, например в точку Q. Раздвинем ножки циркуля так, чтобы грифель второй ножки попал во второй конец отрезка PQ — в точку P (рис. 61, *б*). (Передвигая ножку циркуля с грифелем, мы как бы протягиваем верёвочку вдоль отрезка PQ.)

Теперь, не изменяя расстояние между ножками циркуля, устанавливаем иглу циркуля в один конец отрезка KL, например в точку K, и смотрим, попал ли грифель в точку L (рис. 62, *а*). В нашем случае грифель попал в точку L, значит, отрезки PQ и KL ***равны*** (как были бы равны верёвочки, если бы мы их натягивали между точками P и Q, K и L).

Но могло так получиться, что ножку грифеля невозможно было бы совместить с точкой L. Тогда отрезки не были бы равными. И если грифель можно поместить на отрезок KL, то этот отрезок ***больше***, чем отрезок PQ (рис. 62, *б*). В противном случае (рис. 62, *в*) отрезок KL ***меньше*** отрезка PQ.

3.13. С помощью циркуля найди на рисунке 63 равные отрезки.

3.14. Воспользуйся циркулем и убедись, что на рисунке 64: а) отрезки AB и OH равны между собой; б) отрезок KP больше отрезка OH; в) отрезок OS меньше отрезка AB.

3.15. Сравни отрезки AB и CD (рис. 65) на глаз. Проверь ответ, используя циркуль.

3.16. Нарисуй произвольные отрезки CD, PS, FD. Построй отрезок: а) равный отрезку CD; б) больше отрезка PS; в) меньше отрезка FD.

3.17. Нарисуй отрезок AB и отметь точку M. Построй пять отрезков, равных AB, так, чтобы у каждого из них один конец был точка M.

Есть ещё один способ сравнения отрезков. Можно измерить их длину с помощью одной и той же единицы измерения (ты умеешь это делать с помощью линейки — рис. 66). Тот отрезок больше, у которого длина больше.

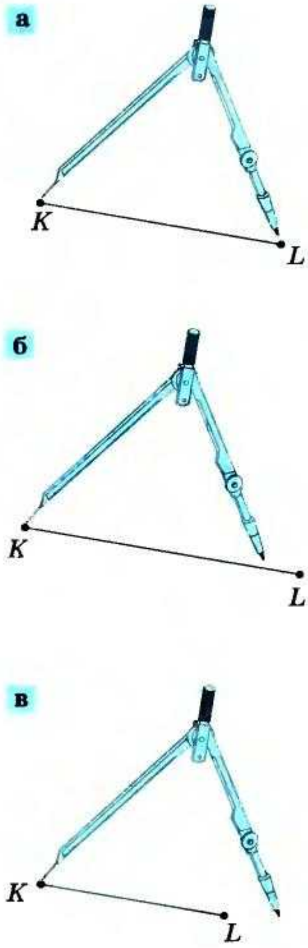


Рис. 62

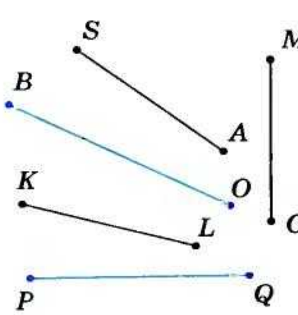


Рис. 63

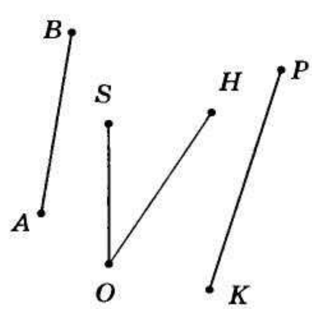


Рис. 64

3.18. Измерь длины отрезков MN и KL (рис. 67). Сравни числа, которые ты получил, измеряя эти отрезки. Какое из них больше? Сравни отрезки MN и KL.

3.19. Сравни разными способами отрезки PQ и SY, AC и EC (рис. 68). Сравни результаты. Какой способ даёт более точный результат?

3.20. Построй отрезки, длины которых: 1 дм, 12 см, 112 мм. Назови их и выпиши в порядке возрастания. Обязательно ли для сравнения этих отрезков нужно было их строить?

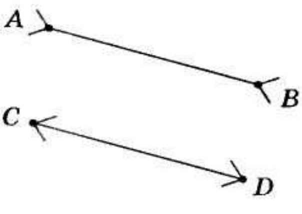


Рис. 65

Длина отрезка AB — 5 см

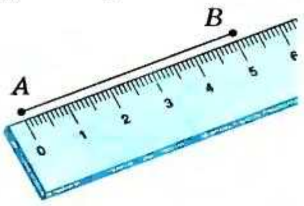


Рис. 66

§ 4 Луч

4.1. Что такое луч? Возьмём модель отрезка (палочку или карандаш) и пометим один его конец (рис. 69), приложим к нему ещё один — с той стороны, где не помечен конец, так, чтобы они составили новый отрезок. Проверить, составляют ли эти отрезки новый отрезок, можно, например, с помощью линейки. Если совершать эту операцию бесконечно и не с палочками, а с отрезками, то мы построим геометрическую фигуру, которая называется *лучом*.

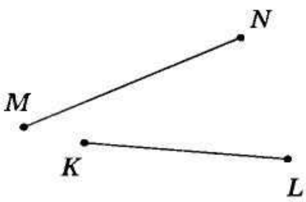


Рис. 67

Лучом называют геометрическую фигуру, которая получается из отрезка неограниченным продолжением его за один из концов.

Начерти отрезок AB и продолжи его в одну сторону — за точку B, ты нарисовал луч AB (рис. 70). Он начинается в точке A, проходит через точку B и дальше идёт без конца. Однако на бумаге изобразить неограниченный луч мы не можем, поэтому рисуем не весь луч AB, а лишь его часть.

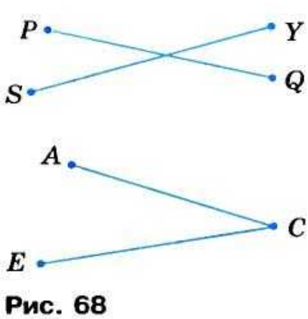


Рис. 68

У луча, в отличие от отрезка, только один конец — точка, из которой луч выходит. Эта точка называется ***началом луча***.

Луч обозначают двумя большими буквами латинского алфавита, при этом на первое

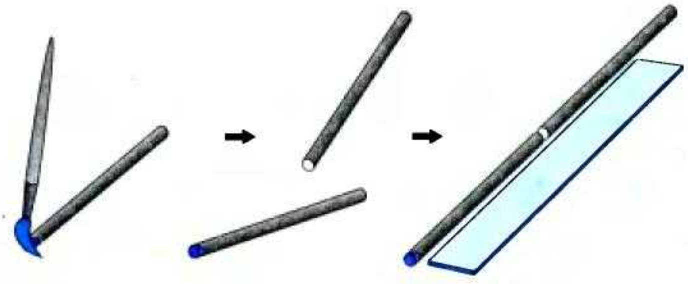


Рис. 69

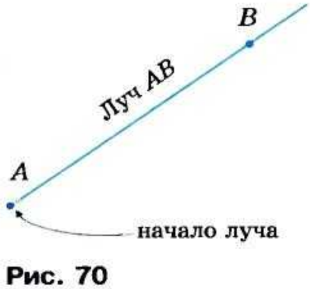


Рис. 70

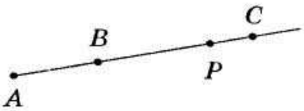


Рис. 71

место ставится обозначение начала луча, а на второе место — название любой точки луча. Например, луч на рисунке 71 можно назвать AB, или AC, или AP. Иногда луч обозначают одной маленькой буквой латинского алфавита, если понятно, какое начало луча.

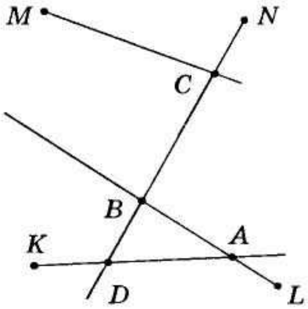


Рис. 72

4.1. Назови лучи, изображённые на рисунке 72. Назови начало каждого луча.

4.2. Отметь точки M, N, P. Начерти лучи MN, PM, NP.

4.3. На рисунке 73 точки N и P принадлежат лучу OC. Какие ещё точки принадлежат этому лучу? Какие точки не лежат на луче OC?

4.4. На рисунке 74 лучи AC и DE пересекаются в точке P. Определи, пересекаются ли: а) отрезок PD и луч OM; б) лучи OM и DE; в) лучи SQ и OM; г) лучи PE и OM.

4.5. На рисунке 75 отмечены четыре точки A, B, C и D. Определи, не производя построений, пересекаются ли лучи: а) DA и BC; б) AD и BC; в) DA и CB; г) AB и DC; д) AC и BD; е) CA и DB. Проверь ответы с помощью линейки.

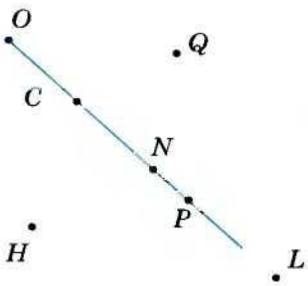


Рис. 73

4.2. Числовой луч.

Отрезки AB, BC, CD..., из которых построен луч (рис. 76, *а*), имеют одинаковые длины. Если считать длину отрезка AB равной единице (т. е. отрезок AB считать единичным) (рис. 76, *б*), а точки B, C, D... обозначить числами, равными длинам отрезков AB, AC, AD: 1, 2, 3 и т. д. (рис. 76, *в*), то получим луч, который называют *числовым лучом*. Начало этого луча — точку A — называют *началом отсчёта*.

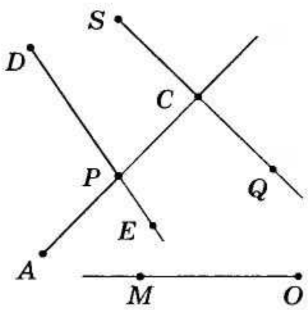


Рис. 74

Числовой луч — это луч, на котором отмечен единичный отрезок.

Каждое натуральное число можно изобразить на этом луче точкой, удалённой от начала луча на соответствующее расстояние. Например, на рисунке 77 число 3 изображено точкой M, а число 5 — точкой P. Говорят ещё и так: точка M *соответствует* числу 3; числу 5 *соответствует* точка P.

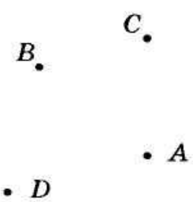


Рис. 75

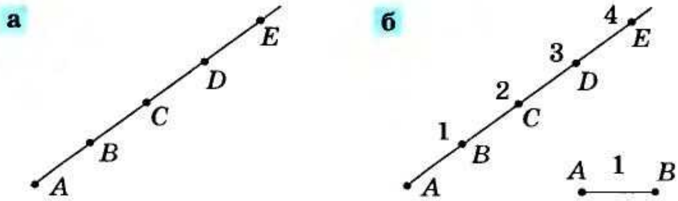


Рис. 76

4.6. Определи, каким числам соответствуют точки C, X, H, O (см. рис. 77).

4.7. Начерти числовой луч и отметь на нём точки, соответствующие числам 2, 6, 7, 12.

4.8. Есть ли на числовом луче такие точки, которые соответствуют числам 17, 120, 1000? Есть ли такие числа, которым на числовом луче не соответствует никакая точка?

4.9. Известно, что точки A, B, C числового луча соответствуют числам a, b, c, причем точка B лежит между точками A и C. Какое из данных чисел может быть самым большим? самым маленьким? Какое не может быть ни самым большим, ни самым маленьким? Почему?

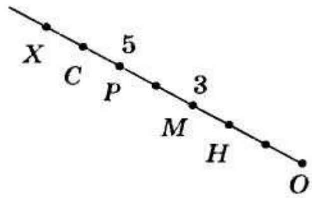


Рис. 77

Решая последнюю задачу, ты, наверное, сделал важное наблюдение:

Чем больше число, тем дальше от начала отсчёта расположена точка, изображающая это число на числовом луче.

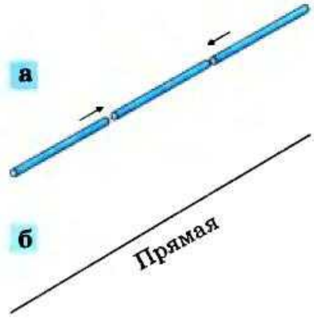


Рис. 78

§ 5 Прямая

5.1. Построение прямой. Если каждый раз отрезок мы будем продлевать не в одну сторону, а в обе (рис. 78, *а*) и эти действия будем производить бесконечно, то получится геометрическая фигура, которая называется *прямой* (рис. 78, *б*).

Прямой называют геометрическую фигуру, которая получается из отрезка неограниченным продолжением за оба его конца.

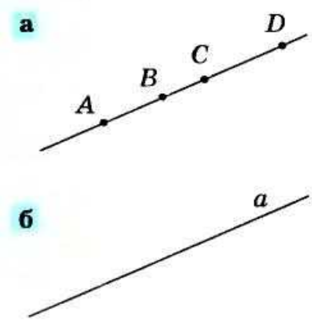


Рис. 79

Начерти отрезок AB и продли его по линейке в обе стороны.

Конечно, ты не можешь неограниченно продолжать его, поэтому ты построил не всю прямую, а только её часть.

Прямую, так же как отрезок или луч, называют двумя заглавными латинскими буквами. Например, прямую на рисунке 79, *а* можно обозначить AB, CD (а как ещё?). Но можно назвать прямую одной строчной латинской буквой: «прямая m» или «прямая a» (рис. 79, *б*).

На рисунке 80, *а* изображена прямая PQ и на ней две точки A и B. Интересно, что если из прямой PQ убрать отрезок AB, а лучи AP и BQ подтянуть друг к другу (рис. 80, *б*), то снова получится прямая.

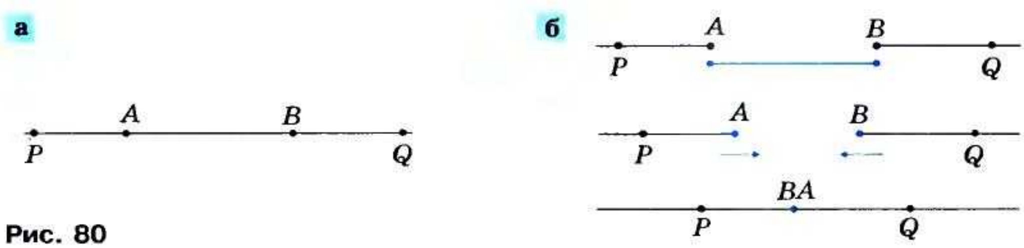


Рис. 80

И сколько бы раз мы ни вырезали отрезок из прямой, каждый раз будем получать прямую, подтягивая оставшиеся лучи друг к другу. Вот это и означает бесконечность прямой.

Получить на бумаге прямую можно и без карандаша и линейки: достаточно перегнуть лист бумаги и расправить его (рис. 81).

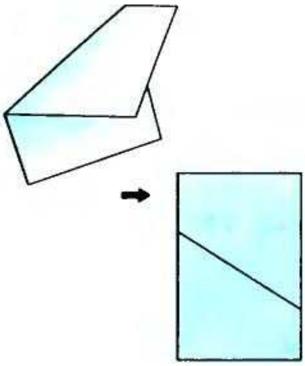


Рис. 81

На рисунке 82 изображена прямая MN. Говорят, что точка A *лежит на* прямой MN или точка A *принадлежит* этой прямой.

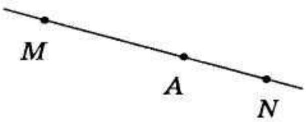


Рис. 82

5.1. Какие из точек (рис. 83) лежат на прямой MN, а какие не лежат?

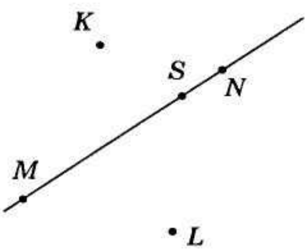


Рис. 83

5.2. Назови изображённую на рисунке 84 прямую четырьмя различными способами.

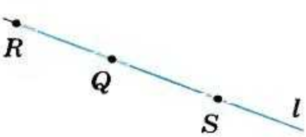


Рис. 84

5.3. Отметь три точки M, N, P так, чтобы они не лежали на одной прямой. Сколько отрезков на чертеже? Назови их. Проведи через эти точки все возможные прямые. Обозначь каждую из них.

5.4*. Всегда ли можно провести прямую, на которой лежат: а) данный отрезок; б) данные точка и отрезок; в) два данных отрезка? Приведи примеры.

Имя, составленное из двух заглавных латинских букв (например, AN на рисунке 82), может определять отрезок, прямую, а также луч. Поэтому для того, чтобы тебя понимали другие, произноси всегда имена фигур вместе с их названиями: «отрезок AN», «прямая AN», «луч AN».

Про прямые (так же как и про отрезки) говорят, что они пересекаются в точке O, если O — их общая точка. В таком случае прямые называют *пересекающимися* (рис. 85), а точку O — их *точкой пересечения*.

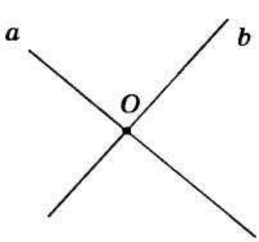


Рис. 85

Однако не всякие прямые пересекаются. Например, в известной тебе фигуре — квадрате (рис. 86, *а*) — противоположные стороны AB и CD лежат на прямых, которые не пересекаются. В кубе на рисунке 86, *б*, прямые, содержащие его рёбра AB и DD_1, тоже не имеют общих точек.

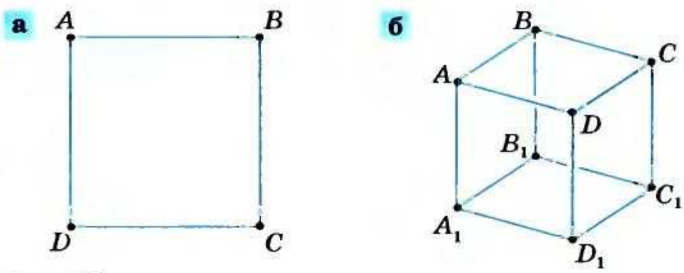


Рис. 86

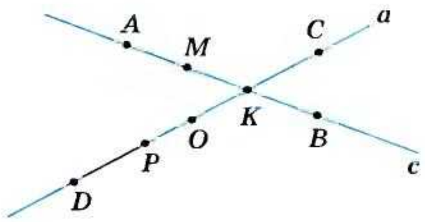


Рис. 87

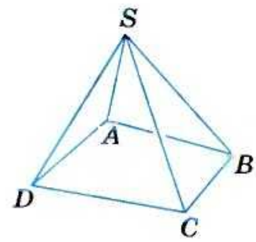


Рис. 88

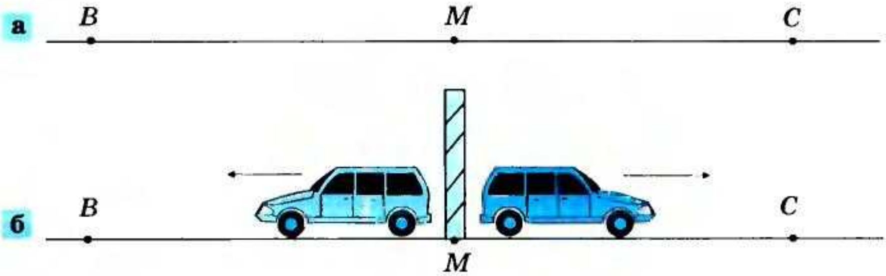


Рис. 89

5.5. Пересекаются ли (рис. 87): а) прямые AB и c; б) отрезки MB и PO; в) прямая BA и отрезок CD; г) прямые CD и a; д) прямая CD и луч MA?

5.6*. На рисунке 88 изображена пирамида. Какие прямые, содержащие её рёбра: а) пересекают; б) не пересекают прямую AB?

5.2. Противоположные лучи. На рисунке 89, *а* изображены прямая BC и на ней точка M. При этом образовались два луча MB и MC. Они называются противоположными друг другу. Такое название естественно. Представь себе, что так мы изобразили шоссе и находящийся у его обочины километровый столб. Если от этого столба отправляются по шоссе в разные стороны два автомобиля (рис. 89, *б*), то говорят, что они поехали в противоположных направлениях.

Лучи MB и MC, которые образовались на прямой, когда на ней отметили точку M, называют *противоположными лучами*.

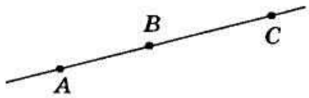


Рис. 90

5.7. Назови пары противоположных лучей, изображённых на рисунке 90.

5.8. Сколько получится лучей, если на прямой отметить: а) две точки; б) три точки? Выпиши все пары противоположных лучей.

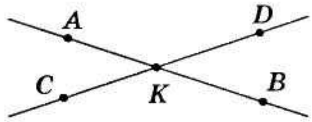


Рис. 91

5.9. Прямые AB и CD имеют общую точку K (рис. 91). Сколько лучей с началом в точке K при этом получилось? Есть ли среди них пары противоположных лучей?

5.10. На прямой AD отмечены три точки B, C, E (рис. 92). Верно ли, что лучи: а) BA и CD; б) BC и EA; в) CA и CD — являются противоположными? Назови все пары противоположных лучей, изображённых на рисунке.

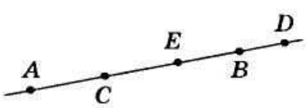


Рис. 92

5.11. Поставь четыре раза две точки M и L и построй: а) отрезок ML; б) луч ML; в) луч LM; г) прямую ML.

§ 6 Ломаная

6.1. Что такое ломаная? Мы уже встречались с ломаными, когда рассматривали разнообразные линии. Сейчас поговорим о них подробнее.

Ломаные — это линии, которые составляются из отрезков так, что один из концов первого отрезка служит концом второго отрезка, другой конец второго отрезка служит концом третьего отрезка и т. д. (рис. 93); при этом соседние отрезки, из которых состоит ломаная, не должны составлять нового отрезка.

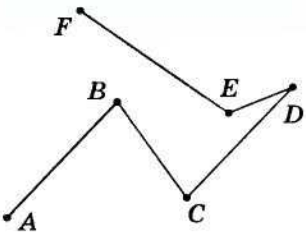


Рис. 93

Рис. 94

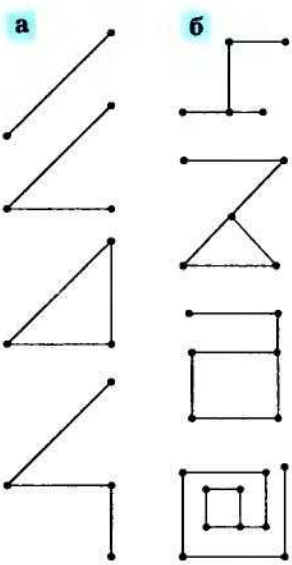


Рис. 95

Отрезки, из которых составлена ломаная, называются её *звеньями*, а концы этих отрезков — *вершинами ломаной*. Имя ломаной составляется из имён её вершин, взятых в последовательности, соответствующей их расположению. Например, на рисунке 94 изображена ломаная $ABCD$.

6.1. Нарисуй какую-нибудь ломаную линию и фигуру, составленную из отрезков, не являющуюся ломаной.

6.2. Назови лишнюю фигуру (рис. 95).

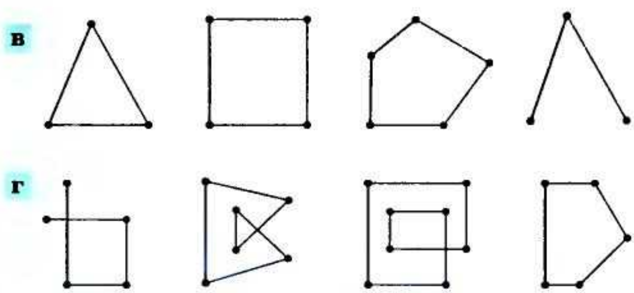
6.3. Построй трёхзвенную, четырёхзвенную и шестизвенную ломаные. Сколько вершин у каждой из них? Назови их вершины. Выпиши названия ломаных.

6.4. Нарисуй какие-нибудь ломаные (замкнутую и незамкнутую): а) трёхзвенные; б) четырёхзвенные; в) шестизвенные. Получились ли при этом знакомые фигуры? Назови их.

6.5. а) Какое наименьшее число звеньев может иметь ломаная? б) Может ли ломаная быть стозвенной? в) Может ли у ломаной быть вершин больше, чем звеньев (меньше, столько же)?

6.6. Какое наименьшее число вершин может быть у замкнутой ломаной? Как называется такая ломаная?

6.7. На рисунке 96 изображены ломаные, принадлежащие каркасам многогранников. Какие из них плоские, какие пространственные? Какие ломаные замкнутые, какие незамкнутые?



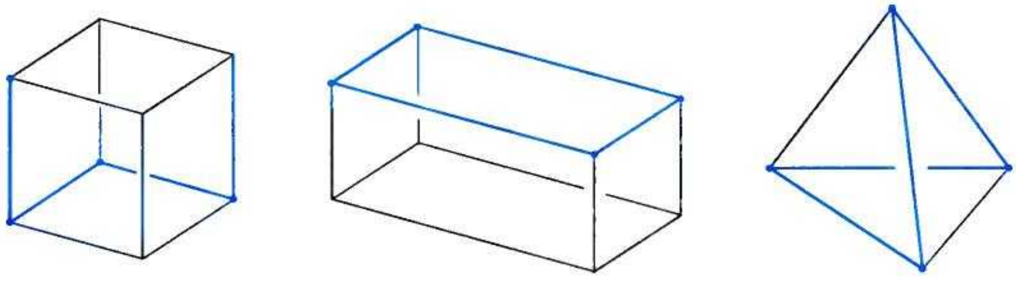


Рис. 96

6.2. Длина ломаной. На рисунке 97, *а* изображён план местности. Найди на нем автобусную остановку (A), водонапорную башню (P), родник (K), магазин (B), озеро (C). Ты видишь, что от автобусной остановки до стоянки у озера можно идти разными путями. Сколько разных маршрутов ты нашёл на этом плане? Измерь длину каждого из этих путей, считая, что отрезок длиной 1 см изображает путь длиной 1 км. Найди среди этих путей самый короткий.

Четыре различные дороги, ведущие от автобусной станции к стоянке у озера, можно изобразить геометрическими фигурами (рис. 97, *б*): ломаными ABC и $ABPKC$, отрезком AC и кривой. Конечно, проще всего определить длину третьего пути: она равна 5 км, так как длина отрезка AC равна 5 см (проверь это!). Длину первого пути тоже нетрудно найти: она складывается из длин прямолинейных участков AB и BC ($AB = 2$ см, $BC = 4$ см — проверь это!). Точно так же определяется длина второго пути: она равна 8 км. Самым коротким является путь, изображённый отрезком AC.

Обсуждая вопрос о нахождении длин первого и второго маршрутов, ты, конечно, обнаружил важное свойство ломаной:

Длина ломаной равна сумме длин всех её звеньев.

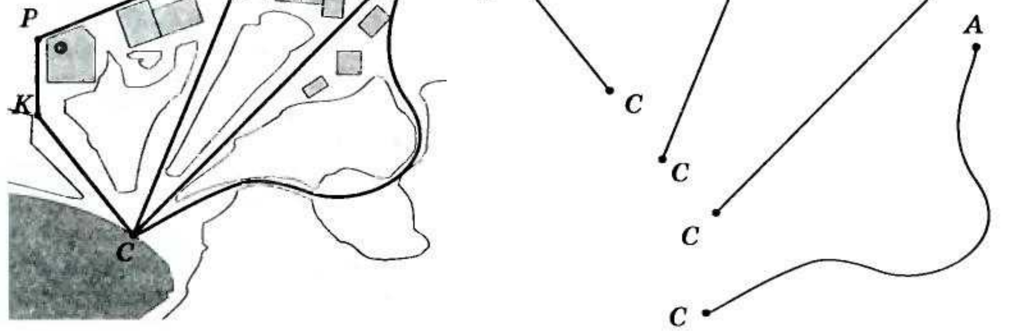


Рис. 97

Как найти длину последнего маршрута, пока непонятно: маршрут изображается кривой линией. Мы вернёмся к этому вопросу позже.

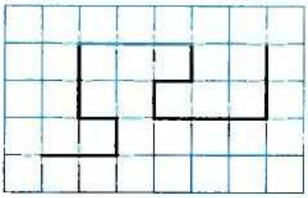


Рис. 98

6.8. Не пользуясь линейкой, найди длину ломаной (рис. 98), если известно, что длина стороны одной клеточки равна 5 мм.

6.9. Нарисуй четырёхзвенную незамкнутую ломаную. Обозначь её $AMPKB$. Определи её длину. Сравни результат с длиной отрезка AB. Построй другую ломаную, соединяющую точки A и B. Сравни длину этой ломаной с длиной отрезка AB.

Можно сформулировать ещё одно важное свойство отрезка и ломаной:

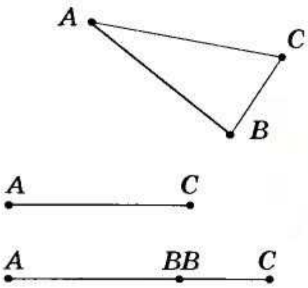


Рис. 99

> Длина отрезка, соединяющего две точки, меньше длины любой ломаной, соединяющей эти точки.

6.10. Нарисуй трёхзвенную замкнутую ломаную $ABCA$ и проверь измерением, что для неё выполняется это свойство. Как иначе можно его сформулировать?

Можно сказать так: каждое звено трёхзвенной замкнутой ломаной меньше суммы двух других её звеньев (рис. 99).

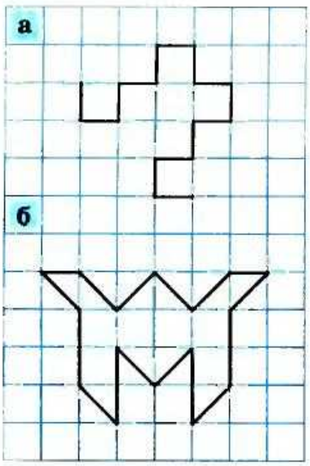


Рис. 100

6.11. Верно ли сформулированное утверждение для незамкнутой трёхзвенной ломаной? Рассмотри различные примеры.

6.12. а) Нарисуй в тетради по клеткам ломаную той же формы, что и ломаная на рисунке 100, *а*, но вдвое длиннее её. б) Найди длину ломаной на рисунке 100, *б*. Начерти по клеткам ломаную той же длины, но другой формы.

6.13. Перед приездом короля на лестнице дворца нужно постелить ковровую дорожку. Хватит ли длины дорожки, если известно, что её длина равняется длине перил?

6.14*. Из проволоки, длина которой 60 см, сделали каркас куба (рис. 101). Поместится ли эта модель в коробку высотой 5 см? Проверь себя, сделав такую модель.

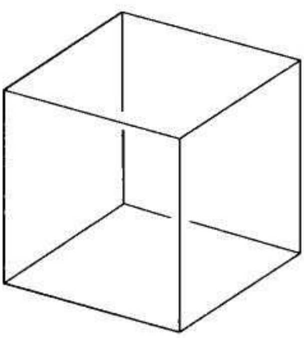


Рис. 101

6.3*. Длина кривой. Вернёмся ещё раз к задаче (см. рис. 97). Нам не удалось определить длину четвёртого маршрута, который изображался кривой линией (рис. 102, *а*). Теперь, когда мы умеем измерять длину ломаной, мы можем приблизительно определить и длину последнего маршрута.

Отметим на кривой несколько точек и построим ломаную с вершинами в этих точках (рис. 102, *б*). Длину этой ломаной определить легко (она равна 40 мм). Понятно, что она

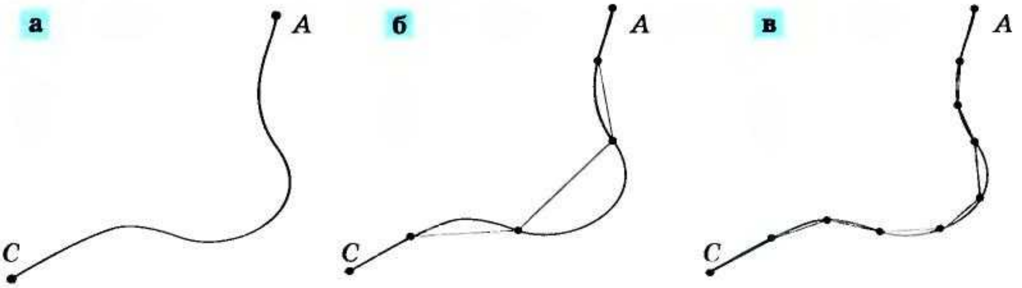


Рис. 102

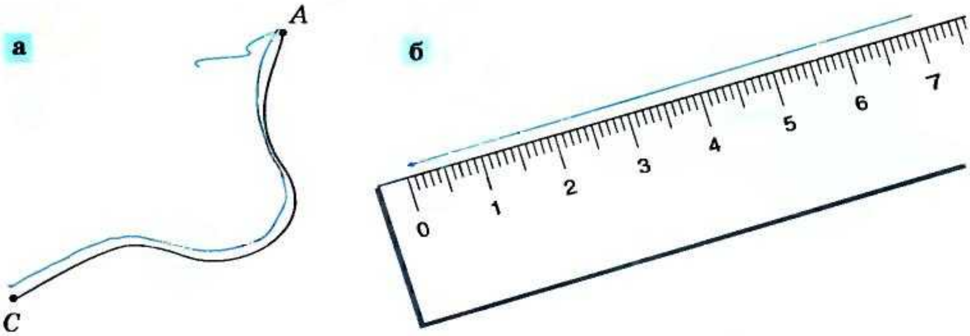


Рис. 103

меньше длины кривой. Но если мы поставим на кривой точки почаще и построим новую ломаную (рис. 102, *в*), то длина новой ломаной (60 мм) окажется больше длины первой ломаной, хотя и меньше длины кривой. Так можно продолжать много раз. И чем ближе друг к другу мы будем ставить на кривой точки, тем более точное значение длины кривой будем получать. В нашем случае длина последнего пути приближённо равна 7 км.

Можно измерить кривую и с помощью нитки или веревки: достаточно вдоль этой линии положить нитку (рис. 103, *а*), а затем измерить её с помощью линейки (рис. 103, *б*).

§ 7 Треугольник

7.1. Что такое треугольник? На рисунке 104, *а* изображена пятизвенная простая замкнутая ломаная. Эта ломаная разбивает всю плоскость на две части (рис. 104, *б*), одна из которых простирается неограниченно. Меньшая из этих двух частей плоскости называется *многоугольником*. На рисунке 104, *в* изображён пятиугольник. Но можно нарисовать четырёхзвенную ломаную, тогда получится *четырёхугольник*. Можно построить и другие многоугольники: шестиугольник, семиугольник и т. д.

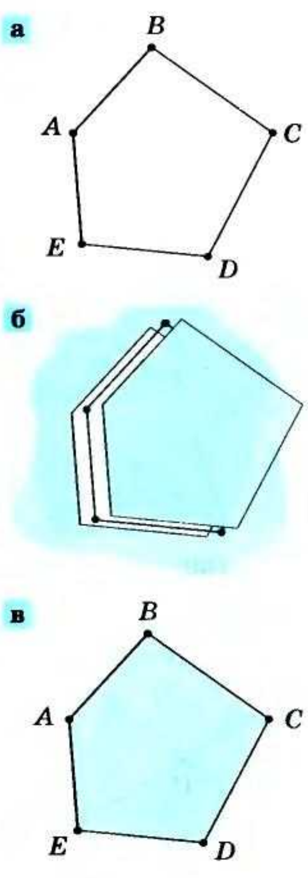


Рис. 104

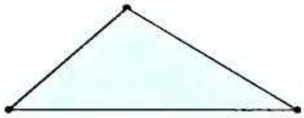


Рис. 105

Если построенная замкнутая ломаная трёхзвенная, мы получаем *треугольник* (рис. 105).

Треугольником называется меньшая часть плоскости, ограниченная трёхзвенной замкнутой ломаной. Так же называют и саму эту ломаную (рис. 106).

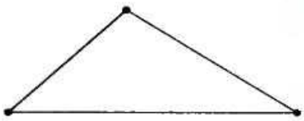


Рис. 106

7.2. Элементы треугольника. На рисунке 107 изображена замкнутая трёхзвенная ломаная — треугольник ABC. Звенья этой ломаной называются *сторонами* треугольника: AB, BC и AC — стороны треугольника ABC. Концы сторон называются *вершинами* треугольника: точки A, B и C — вершины треугольника ABC. Длина ломаной, ограничивающей треугольник (сумма длин всех её звеньев или сумма всех сторон треугольника), называется *периметром* треугольника.

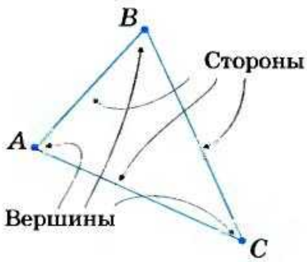


Рис. 107

Обрати внимание: слово *периметр* — сложное слово. Оно имеет две части греческого происхождения: одна — *метр* — измеряю, вторая — *пери* — вокруг. Тебе, конечно, известны слова *пери*ферия, *пери*од, *пери*скоп. Они имеют одну приставку со словом *периметр*. Найди в словаре или вспомни ещё какие-нибудь слова с приставкой *пери-*.

Для упрощения записи треугольник в математике обозначается значком «△» и указанием его вершин, например, $\triangle ABC$ (читается: «треугольник ABC»).

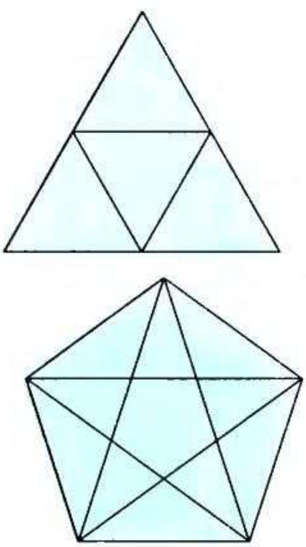


Рис. 108

7.1. Проверь свою геометрическую наблюдательность: сосчитай, сколько треугольников на рисунке 108.

7.2. Используя значок △, выпиши все треугольники, изображённые на рисунке 109, их стороны и вершины.

7.3. Отметь три какие-нибудь точки B, C и D так, чтобы они не лежали на одной прямой, и соедини их попарно. Назови треугольник, который ты построил. Перечисли его вершины и стороны. Сравни на глаз стороны треугольника. Проверь свой глазомер с помощью циркуля или линейки.

7.4*. Начерти какой-нибудь треугольник. Проведи два отрезка так, чтобы на чертеже образовалось 2 (3, 4, 6, 8) треугольника.

7.5*. Можно ли провести прямую так, чтобы она пересекала: а) все стороны треугольника; б) 3 (2, 1) прямые, содержащие стороны треугольника?

7.6. Периметр треугольника 20 см, одна сторона 7 см, другая 9 см. Найдите третью сторону.

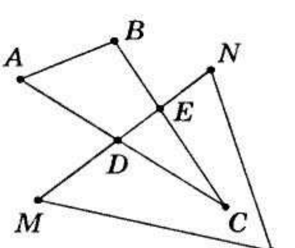


Рис. 109

7.7. Как из проволоки длиной 20 см сделать два треугольника, у которых каждая сторона равна 4 см?

7.3. Виды треугольников. Построим из 3 спичек треугольник (рис. 110). Конечно, все стороны этого треугольника равны между собой, так как все спички, из которых он построен, одинаковой длины.

Рис. 110

Треугольник, у которого все стороны равны между собой, называется **равносторонним**.

7.8. С помощью линейки или циркуля убедись в том, что на рисунке 111 изображён равносторонний треугольник ABC.

7.9. На рисунке 112 изображены треугольники. На глаз определи, есть ли среди них равносторонние. Проверь свой ответ с помощью циркуля.

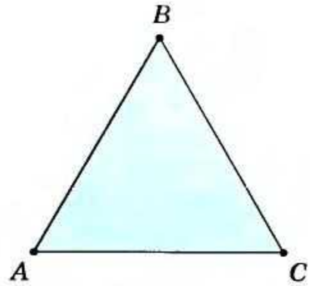


Рис. 111

Проверяя решение задачи 7.9, ты, наверное, заметил, что у каждого из треугольников 3, 4, 5 на рисунке 112 нет равных сторон.

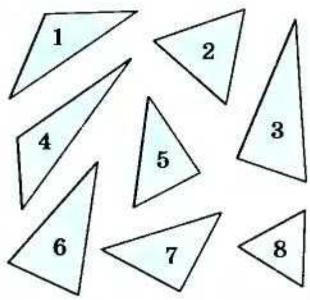


Рис. 112

Треугольник, у которого нет равных сторон, называется **разносторонним**.

7.10*. Возьми 9 спичек и построй из них разносторонний треугольник. Сколько различных разносторонних треугольников ты можешь сложить из 9 спичек?

7.11. А теперь возьми 5 спичек и построй из них какой-нибудь треугольник. Сравни длины сторон этого треугольника.

Проверь себя. В треугольнике, построенном из 5 спичек, две стороны равны: обе они состоят из 2 спичек (рис. 113, *а*).

Треугольник, в котором есть две равные стороны, называется **равнобедренным**.

Таким образом, треугольник, сделанный из 5 спичек, *равнобедренный*. Равные стороны равнобедренного треугольника называются *боковыми сторонами*, а третья сторона — *основанием*. На рисунке 113, *б* изображён равнобедренный треугольник MNP; MN и NP — боковые стороны этого треугольника, а MP — его основание.

7.12. Нарисуй какой-нибудь равнобедренный треугольник. Обозначь его вершины. Назови боковые стороны и основание.

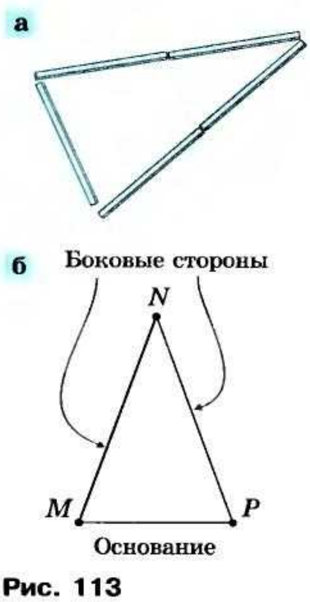


Рис. 113

3–13844 Ходот.

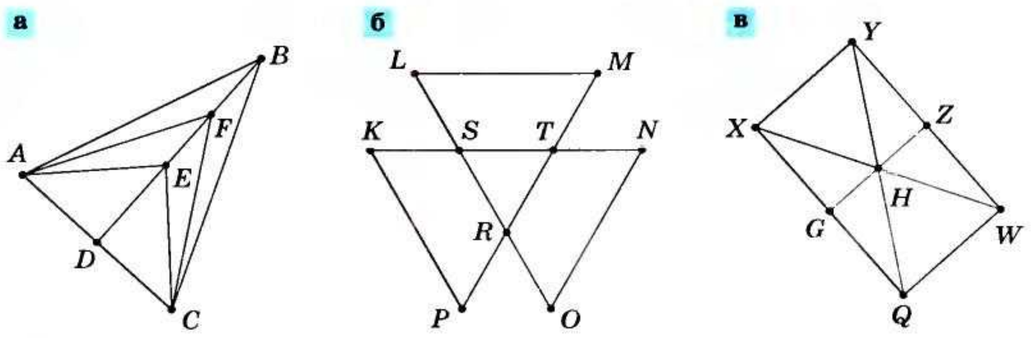


Рис. 114

7.13. Найди на рисунке 114 равнобедренные треугольники. Назови в каждом из них основание и боковые стороны.

7.14. Как ты думаешь, является ли равнобедренным равносторонний треугольник?

Проверь себя. Конечно, равносторонний треугольник является равнобедренным, так как в нём любые две стороны имеют равные длины. При этом в равностороннем треугольнике каждую сторону можно считать основанием и любые две стороны — боковыми.

Рис. 115

Подведём небольшой итог (рис. 115).

Сравнивая стороны треугольника, мы можем разделить все треугольники на два вида: треугольники, в которых нет равных сторон, — *разносторонние* треугольники, и треугольники, у которых есть две равные стороны, — *равнобедренные* треугольники. Из равнобедренных же треугольников можно выделить такие треугольники, у которых не только две, а все три стороны имеют равные длины — равносторонние треугольники.

7.15. Среди семи частей танграма есть треугольники (см. рис. 10). Есть ли среди них: а) равносторонние; б) равнобедренные; в) разносторонние? Ответ обоснуй.

7.16. Составь треугольник из следующих частей танграма: а) параллелограмма и двух маленьких треугольников; б) большого, среднего и двух маленьких треугольников; в) из четырёх каких-нибудь частей; г) из всех семи частей танграма. Какого вида треугольники получились?

7.17*. Можно ли из каких-нибудь частей танграма составить: а) равносторонний; б) разносторонний треугольник?

7.18. Построй из 9 спичек равнобедренный треугольник. Сколько разных равнобедренных треугольников можно построить из 9 спичек?

7.19. Периметр равнобедренного треугольника 25 см. Боковая сторона 10 см. Найди длину основания.

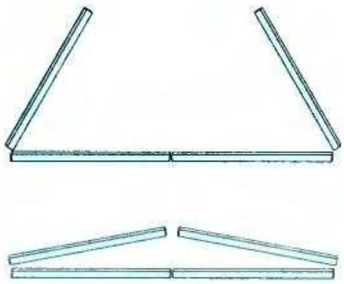


Рис. 116

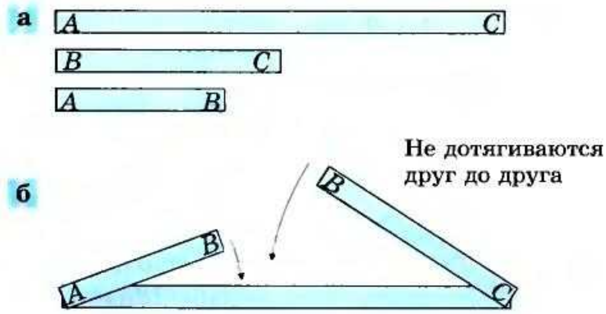


Рис. 117

7.20. Периметр равнобедренного треугольника 30 см. Одна из его сторон 12 см. Какой длины может быть его боковая сторона?

7.21*. В равностороннем треугольнике сторона на 16 см меньше периметра. Найди сторону треугольника и его периметр. Придумай разные способы решения задачи.

7.22*. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна a, а основание b. Чему равен периметр треугольника? Вычисли периметр треугольника, если $a = 10$ см, $b = 2$ см.

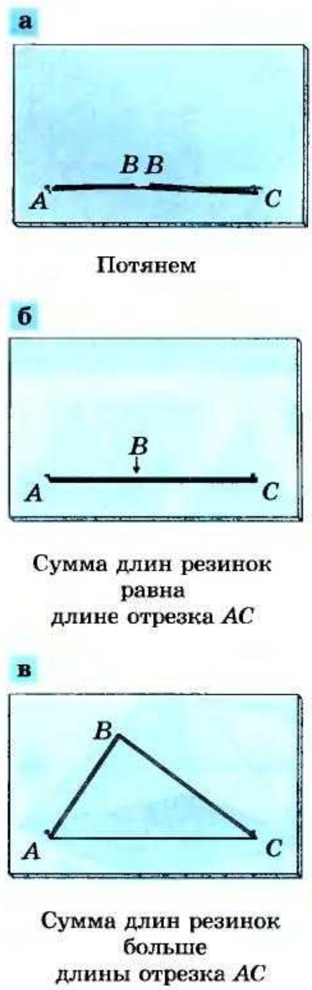


Рис. 118

7.4. Неравенство треугольника. Складывая треугольники из спичек, можно увидеть, что сложить треугольник можно из 3, 5, 6, 7, 8, 9 спичек. А можно ли построить какой-нибудь треугольник из 4 спичек?

Давай поразмышляем вместе. Сторон у треугольника 3, а спичек 4. Спички ломать нельзя, поэтому одна сторона треугольника должна быть из 2 спичек, а каждая из остальных — из 1. Составим из 2 спичек большую сторону треугольника и приложим к обоим её концам по спичке (рис. 116). Как бы мы ни прикладывали две спички, их концы не дотянутся друг до друга (сторона, состоящая из 2 спичек, слишком длинная), поэтому построить треугольник из 4 спичек нам не удастся.

7.23. Из отрезков AB, BC и AC, длины которых 3 см, 4 см и 8 см, сконструируй треугольник, взяв в качестве моделей отрезков соответствующие полоски бумаги (рис. 117, *а*).

Проверь себя. Такой треугольник построить не удаётся: отрезок AC длиннее, чем отрезки AB и BC вместе взятые (рис. 117, *б*).

Мы смогли бы решить задачу, если бы взяли тонкие резинки. Тогда можно было бы непрерывно изменять длины отрезков AB и BC (рис. 118, *а*). Как только сумма длин отрезков AB и BC окажется равной длине отрезка AC, свободные концы резинок смогут совместиться, но при этом треугольника ещё не получится: точка B окажется на отрезке AC (рис. 118, *б*). Снова увеличив длины отрезков AB и BC, мы, наконец, получим треугольник (рис. 118, *в*), потому что при этом увеличится сумма отрезков AB и BC, которая становится теперь больше отрезка AC.

Мы заметили: чтобы из трёх отрезков можно было составить треугольник, нужно, чтобы самый большой отрезок был меньше суммы двух других.

Иначе говоря,

Во всяком треугольнике длина каждой стороны (даже самой большой!) меньше суммы длин двух других его сторон.

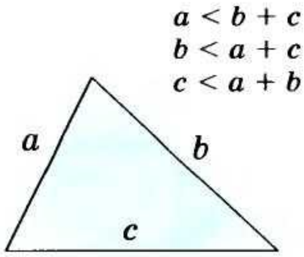


Рис. 119

Это важное свойство длин сторон каждого треугольника (рис. 119) называется *неравенством треугольника*.

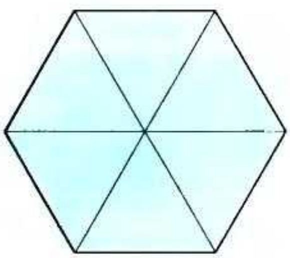


Рис. 120

7.24. Может ли треугольник иметь такие стороны: а) 4 дм, 4 дм, 4 дм; б) 12 м, 3 м, 9 м; в) 5 см, 8 см, 12 см; г) 6 см, 14 см, 23 см; д) 3 см, 5 дм, 4 см? Объясни почему.

7.25. Можно ли из проволоки длиной 20 см сделать треугольник, одна сторона которого: а) 8 см; б) 10 см; в) 12 см?

7.26. Периметр треугольника 18 см, одна сторона 5 см, а другая a см ($a = 5$ см, 6 см, 7 см, 8 см, 9 см). Найди третью сторону. В каждом ли случае задача имеет решение?

7.27*. В равнобедренном треугольнике одна сторона равна 25 см, а другая 10 см. Какая из них является основанием?

7.5*. Конструкции из треугольников.

Треугольники, соединяясь друг с другом, могут образовывать другие фигуры. Например, шесть равносторонних треугольников, имеющих общую вершину, образуют шестиугольник, который называют *правильным шестиугольником* (рис. 120).

Шестиугольник, как и треугольник, — плоская геометрическая фигура. Но можно из треугольников сконструировать и пространственные геометрические фигуры. Например, можно убрать два из шести рассмотренных треугольников (рис. 121, *а*), а стороны двух крайних приложить друг к другу. Тогда получится пространственная фигура (рис. 121, *б*).

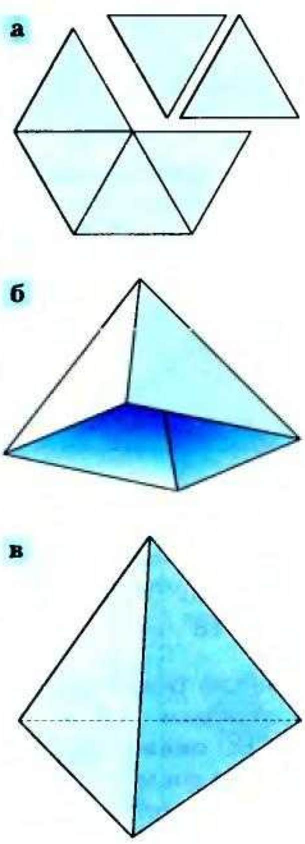


Рис. 121

Из четырёх треугольников можно сделать пирамиду, приставив к сторонам лежащего равностороннего треугольника три таких же треугольника так, чтобы они имели общую вершину (рис. 121, *в*).

Треугольник лежит в основе разнообразных строительных и архитектурных сооружений (рис. 122). Роль треугольников в строительстве велика, потому что треугольник обла-

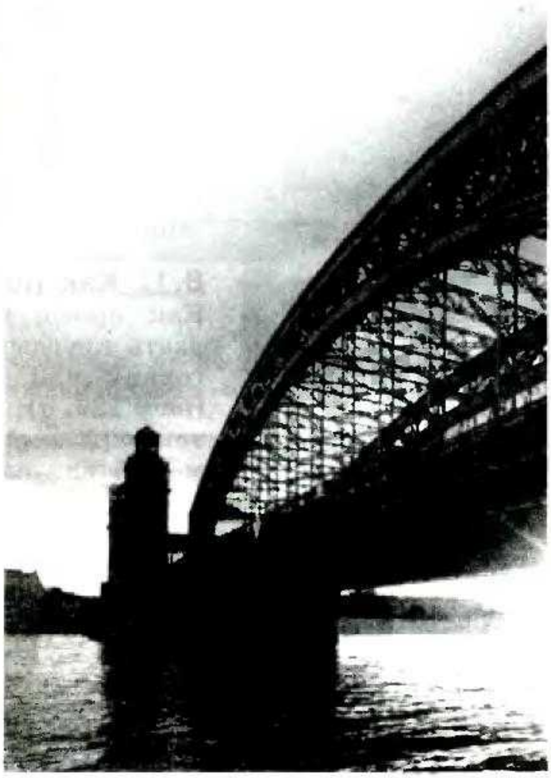


Рис. 122

дает важным свойством, которое называется *жёсткостью*. Оно состоит в следующем. Если взять 3 рейки и соединить их попарно, то получится треугольник (рис. 123, *а*), изменить форму которого можно, лишь сломав рейку.

Другие многоугольники (четырёхугольники, пятиугольники и т. д.) жёсткими не являются: можно, например, сохраняя длины сторон данного четырёхугольника, изменить его форму (рис. 123, *б*, *в*). Изготовь каркас какого-нибудь многоугольника и убедись сам в том, что многоугольник не жёсткий.

7.28. Назови те строительные сооружения, находящиеся на твоём пути в школу, в которых используются треугольники.

7.29. Нарисуй какую-нибудь конструкцию из треугольников.

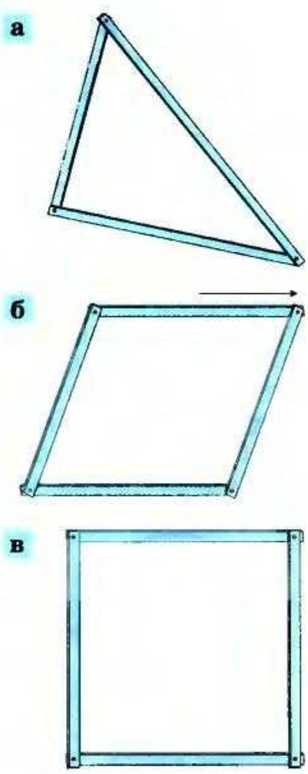


Рис. 123

§ 8 Круг и окружность

Среди окружающих нас предметов много таких, которые мы называем круглыми: чашка и блюдце, ваза и часы, трубы парового отопления и ножки стула, колёса машин, клумбы, дорожные знаки... (рис. 124) (что ещё?).

Рис. 124

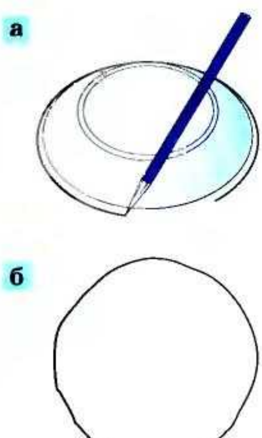


Рис. 125

Природа тоже богата круглыми формами. Например, диск Луны в полнолуние, круги на воде от брошенного в неё камня и т. д. Для этих форм мы используем геометрические фигуры: круг, цилиндр, конус, шар. Конечно, ты знаком с самой простой плоской круглой фигурой — кругом. О ней-то мы и поговорим сейчас более подробно.

8.1. Как построить круг и окружность?

Как проще всего нарисовать круг? Можно взять круглый предмет: монету, тарелку, пуговицу или что-нибудь ещё и обвести его (рис. 125, *а*). В этом случае получится круг таких размеров, какие имеет выбранный предмет. А как нарисовать круг других размеров? Это сделать от руки очень трудно (смотри, например, рисунок 125, *б*), поэтому большинство людей рисуют круг с помощью различных приспособлений, и в первую очередь с помощью циркуля.

8.1. Отметь в тетради точку O и поставь в неё иголку циркуля. Перемещая непрерывно по бумаге ножку циркуля, в которой находится грифель, построй окружность.

Построив окружность (рис. 126, *а*), ты получил и круг, так как круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью (рис. 126, *б*). Окружность потому так называется, что она круг *окружает*, т. е. ограничивает.

С помощью циркуля можно начертить лишь небольшую окружность. А как поступить, если нужно построить окружность больших размеров, например нарисовать на участке земли будущую круглую клумбу? Один из способов — воспользоваться двумя колышками и верёвкой (рис. 127).

8.2. Какие точки, отмеченные на рисунке 128: а) лежат на окружности; б) принадлежат кругу; в) не лежат на окружности; г) лежат вне круга?

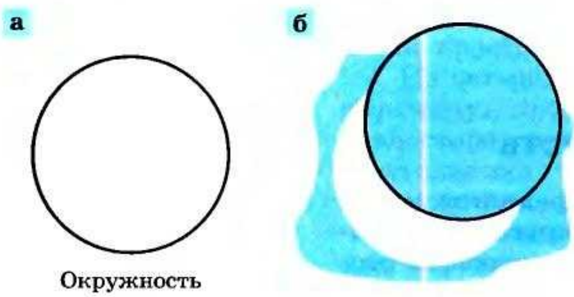


Рис. 126

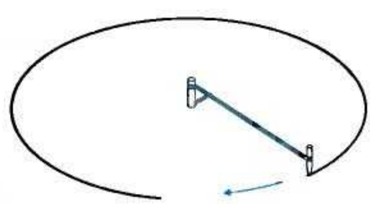


Рис. 127

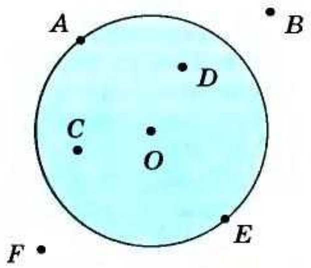


Рис. 128

Рис. 129

8.3. Нарисуй такие два круга, чтобы они: а) не имели общих точек; б) имели одну общую точку; в) имели больше одной общей точки.

Художники и архитекторы используют окружность для создания узоров, например, на оградах парков, перилах мостов (рис. 129).

8.2. Что такое окружность и круг?

8.4. Построй с помощью циркуля окружность. Отметь буквой O точку, в которой была расположена неподвижная ножка циркуля, и буквами A и B две точки окружности. Сравни длины отрезков AO и BO.

Проверь себя. Расстояние между концами ножек циркуля при построении окружности не менялось, поэтому все точки построенной замкнутой линии одинаково удалены от точки O, в том числе и точки A и B.

Это свойство настолько важно, что так и определяют окружность:

Окружность — это плоская замкнутая линия, все точки которой находятся на одинаковом расстоянии от некоторой точки (в нашем случае, точки O), которая называется *центром* окружности.
Круг — это часть плоскости, ограниченная окружностью. Точка O называется также и центром круга.

8.5. Обозначена ли на рисунке 128 точка, которая является центром изображённой окружности?

Проверь себя. Такой точкой является точка O. (Проверь это!)

Итак, все точки окружности (например, A и E) одинаково удалены от её центра (см. рис. 128), а все точки круга (например, D, C, E) либо ближе к центру, чем точки окружности, либо лежат на ней.

Расстояние от точки окружности до её центра, а также отрезок, соединяющий центр окружности с её точкой, называется **радиусом** окружности. Этот же отрезок является радиусом круга, который ограничен данной окружностью.

Латинское слово *radius* в переводе на русский язык означает *луч* или *спица в колесе*. Ты знаешь слова, однокоренные со словом *радиус*: *радио*, *радар*.

8.6. Отметь точку C. Построй окружность с центром в точке C и радиусом 3 см. Закрась получившийся круг. Отметь: а) точку A на окружности; б) точку B внутри круга; в) две точки E, F вне окружности (могут ли они быть внутри круга?); г) точку K вне круга.

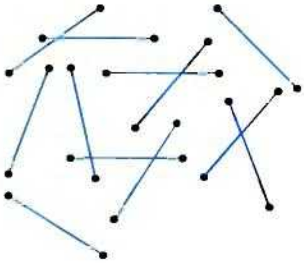


Рис. 130

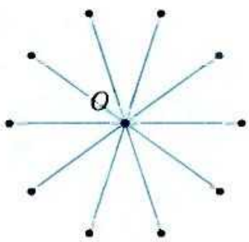


Рис. 131

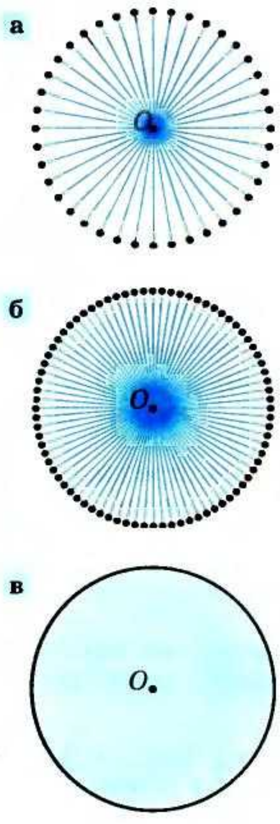


Рис. 132

8.7. Начерти отрезок CD, равный 5 см. Проведи окружность с центром C и радиусом 3 см и другую окружность с центром D и радиусом 4 см. Обозначь точки пересечения окружностей буквами A и B. Не измеряя, определи длины отрезков AC, CB, DA и BD.

8.8. Нарисуй две окружности: с центром в точке A радиусом 2 см и с центром в точке B радиусом 3 см, выбрав точки A и B так, чтобы расстояние между ними было равно 4 см. Отметь точки M, N, P так, чтобы выполнялись следующие условия: а) $AM > 2$ см и $BM > 3$ см; б) $AN > 2$ см и $BN < 3$ см; в) $AP < 2$ см и $BP < 3$ см.

8.9. Начерти отрезок MP, равный 6 см. Найди точки, которые находятся на расстоянии 4 см от точки M и 5 см от точки P. Сколько таких точек тебе удалось найти?

8.3. Построение круга из отрезков. Луч и прямую, ломаную и многоугольник мы получали, прикладывая отрезки друг к другу концами.

А можно ли так расположить отрезки на плоскости, чтобы из них получился круг?

С первого взгляда может показаться, что сконструировать круг из отрезков нельзя. Но это не так! Давай построим круг из отрезков одной длины — 15 мм (рис. 130). Поставь не очень близко к краю листа точку и обозначь её O. С помощью линейки отложи от неё в разных направлениях десять отрезков по 15 мм (рис. 131). У тебя получилась «звезда», составленная из десяти отрезков с общим началом — точкой O.

Будем увеличивать число отрезков в «звезде». На рисунке 132, *а*, их уже сорок, а на рисунке 132, *б* — восемьдесят. При увеличении числа отрезков «звезда» по своей форме начинает напоминать круг, в котором сделаны прорези. Если от точки O отложить бесконечно много отрезков одной и той же длины (15 мм) так, чтобы эти прорези заполнились, то из «звезды» получится круг (рис. 132, *в*).

Вместо того чтобы проводить по линейке бесконечное количество близких друг к другу отрезков, имеющих один общий конец, удобно воспользоваться широкой плоской кистью. Будем перемещать кисть, которую обмакнули в краску, так, чтобы один её край был неподвижен и располагался над точкой O (рис. 133). При этом на бумаге она оставит след, который после полного оборота окажется кругом (рис. 134).

Яркими примерами получения круга или его части из отрезков является вращение вело-

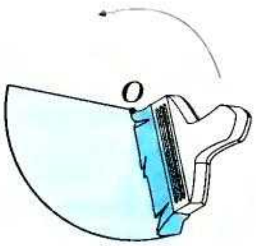


Рис. 133

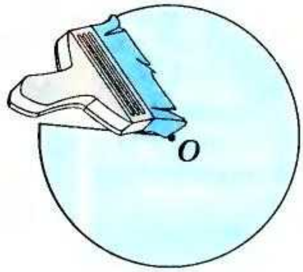


Рис. 134

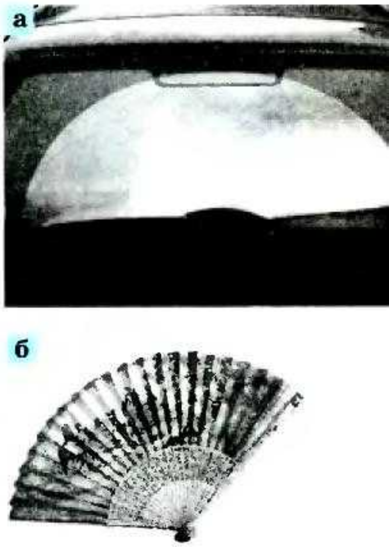


Рис. 135

сипедного колеса (при вращении его спицы «рисуют» в пространстве круг), очищение стекла в автомобиле дворниками (рис. 135, *а*), процесс раскрытия веера (рис. 135, *б*).

8.4. Элементы круга и окружности

8.10. Построй окружность с центром в точке O и произвольным радиусом. Отметь на ней точки M и N (рис. 136, *а*). На сколько частей делят окружность эти точки?

Точки M и N делят окружность на две части (рис. 136, *б*). Каждая из этих частей называется *дугой* окружности с концами в точках M и N. Обведи у себя эти дуги разными цветами.

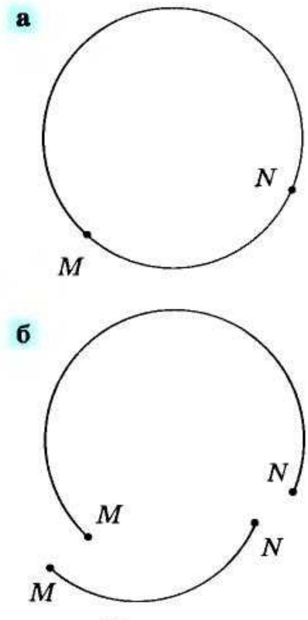


Рис. 136

8.11. На рисунке 137, *а* изображена окружность, на которой отмечены три точки: A, B и C. Сделай такой же рисунок. Покажи все дуги, на которые эти точки делят окружность. Сколько всего на рисунке дуг? Соедини концы дуги — точки A и B — отрезком.

Отрезок AB называется *хордой* окружности.

Хорда окружности (или круга) — это отрезок, соединяющий какие-нибудь две точки окружности (рис. 137, *б*).

Хорда — греческое слово, в переводе на русский язык *струна*. Посмотри, хорда *MN* действительно похожа на струну, натянутую на дугу лука (рис. 138).

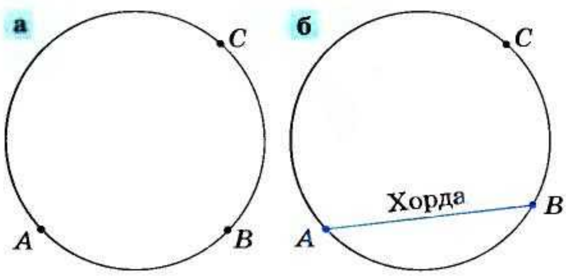


Рис. 137

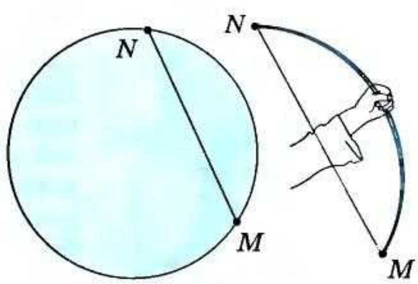


Рис. 138

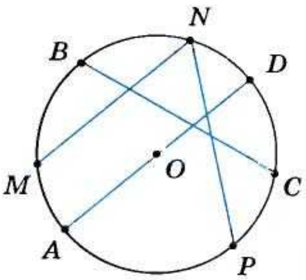


Рис. 139

8.12. На рисунке 139 проведены четыре хорды. Назови их. Чем хорда AD отличается от других хорд?

Хорда AD проходит через центр окружности — точку O. Эта хорда называется *диаметром* окружности.

Диаметром окружности (круга) называется хорда, проходящая через её (его) центр.

Слово *диаметр* пришло к нам из греческого языка. Оно состоит из двух частей: *диа* (насквозь) и *метр* (мерить). Значит, в переводе с греческого *диаметр* означает *измерять насквозь*. Тебе уже известны некоторые слова с приставкой *диа*, например, *диалог*, *диафильм*, *диалект*, *диапроектор*. Объясни их смысл и найди в словаре ещё такие слова.

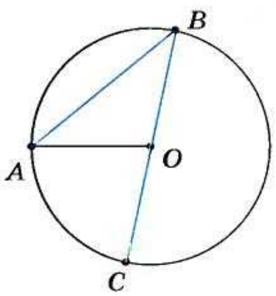


Рис. 140

8.13. Построй произвольную окружность и проведи разными цветами: а) две пересекающиеся хорды; б) две непересекающиеся хорды; в) диаметр, не пересекающий одну из построенных хорд.

8.14. Построй окружность с центром в точке O и радиусом 32 мм. Проведи в ней диаметр и обозначь его, например, AB. С помощью линейки измерь длину диаметра AB построенной окружности. Сравни его длину с радиусом.

Проверь себя. Длина диаметра равна двум радиусам.

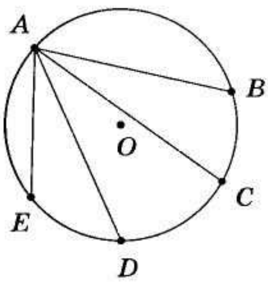


Рис. 141

8.15. а) Чему равен диаметр окружности с радиусом 43 мм? б) Чему равен радиус окружности с диаметром 72 мм? в) Определи диаметр окружности с радиусом a см.

8.16. Даша измерила диаметры HT и VF одной окружности. Получилось 15 см и 17 см. Как ты думаешь, не ошиблась ли Даша? Почему?

8.17. Построй какую-нибудь окружность и обозначь её центр буквой O. Проведи в окружности произвольную хорду AB, не проходящую через точку O. Из точки A проведи в окружности радиус, а из точки B — диаметр BC (рис. 140). Сравни диаметр BC и хорду AB.

Проверь себя. Диаметр BC равен двум радиусам, а так как все радиусы одной окружности равны, то можно считать, что отрезок BC равен сумме отрезков OA и OB: $BC = OA + OB$. Но в треугольнике AOB сумма сторон OA и OB больше стороны AB (объясни почему): $OA + OB > AB$. Значит, $BC > AB$.

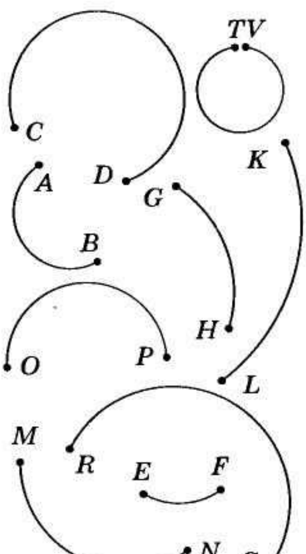


Рис. 142

8.18. Измерь длины хорд AB, AC, AD и AE (рис. 141). Какая из этих хорд самая длинная? Верно ли, что эта хорда — диаметр?

8.19. Какая из дуг (рис. 142) является частью окружности большего радиуса?

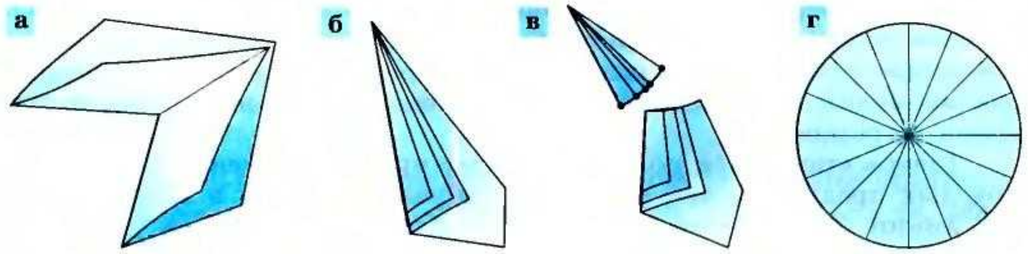


Рис. 143

8.20*. Начерти отрезок, длина которого равна 4 см. Построй окружность так, чтобы она прошла через концы этого отрезка. Сколько таких окружностей можно построить? Может ли одна из таких окружностей иметь радиус: а) 2 см; б) 4 см; в) 1 см? Почему?

8.21. Имея вырезанный из бумаги круг, сгибанием легко определить его диаметр. А как можно определить его центр?

8.22. Вырежи из бумаги круг с радиусом 4 см. Сгибанием раздели его на две равные части. А как разделить его на 4 (8, 32) равные части?

Ты, конечно, понял, что при сгибании по любому диаметру круг делится на две равные части. Это свойство круга может быть использовано для изготовления его из бумаги.

Вырежем, например, круг, радиус которого равен 4 см. Возьмём лист бумаги. Сложим его пополам, затем ещё раз пополам (рис. 143, *а*). Назовём точку пересечения линий сгиба буквой *O*. Будем так складывать лист дальше, чтобы линии сгиба всё время проходили через точку *O*, столько раз, сколько позволит толщина бумаги (рис. 143, *б*).

В результате мы получим угол. Отметим на его сторонах и внутри него несколько точек, удалённых от точки *O* на 4 см, на глаз или по линейке. Аккуратно разрежем бумагу так, чтобы линия разреза была кривой и проходила через все отмеченные точки (рис. 143, *в*). Развернём теперь бумагу. Получился круг (рис. 143, *г*).

8.23. С помощью перегибаний бумаги и двух криволинейных разрезов вырежи кольцо.

8.24*. Вырежи одним прямолинейным разрезом квадрат, используя: а) одно перегибание листа; б) два (три) перегибания листа.

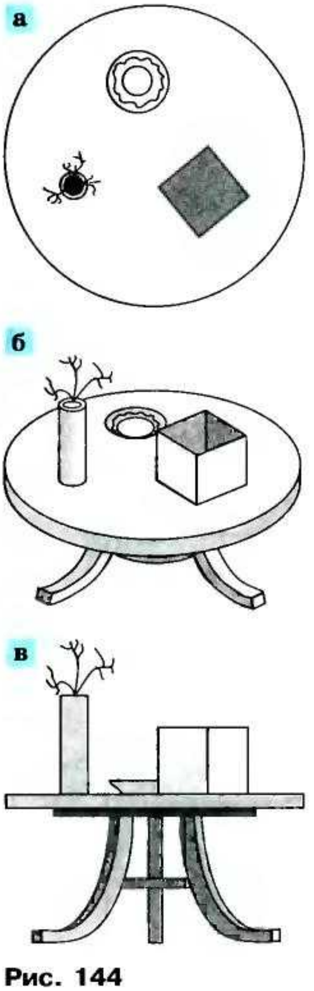


Рис. 144

8.5*. Как мы видим и рисуем круг.

Круглые предметы, с которыми мы сталкиваемся повсеместно, мы можем видеть по-разному в зависимости от того, как мы на них смотрим. На рисунке 144, например, помещены три изображения одного и того же круглого стола. На рисунке 144, *а* изображён стол, когда фотокамера находилась прямо над ним. Затем фотограф отошёл от стола и немного опустил камеру (рис. 144, *б*), и наконец, он поставил камеру на уровень стола (рис. 144, *в*).

Если бы фотограф работал с кинокамерой, то на плёнке получилась бы последовательность кадров, изображённая на рисунке 145. На первом кадре столешница (крышка стола) круглая. На следующих кадрах мы видим столешницу овалом, постепенно сжимающимся, и, наконец, отрезком.

Теперь становится понятно, почему при изображении различных круглых предметов, как правило, изображают круги в виде замкнутой линии. Так делают для того, чтобы рисунок создавал у зрителя правильное представление о предмете и о его положении в пространстве. Эта линия называется *эллипсом* (рис. 146, *а*).

Если нам нужно изобразить поворачивающийся круг, то разные его положения мы изобразим эллипсами разной ширины (рис. 146, *б*).

8.25. Поставь перед собой и нарисуй какой-нибудь круглый предмет. Получилось ли у тебя правдоподобное изображение?

Нарисовать эллипс можно, используя вспомогательный прямоугольник (рис. 147, *а*). Достаточно последовательно плавной линией соединить середины его сторон (рис. 147, *б*), а затем стереть этот прямоугольник (рис. 147, *в*). Но можно изготовить трафарет или воспользоваться специальной линейкой. В Приложении (с. 110) представлена таблица. В её строках расположены эллипсы, которые могут быть

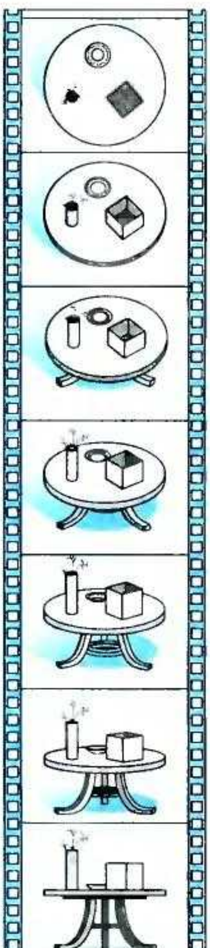


Рис. 145

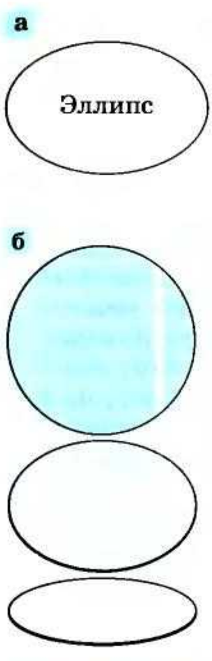


Рис. 146

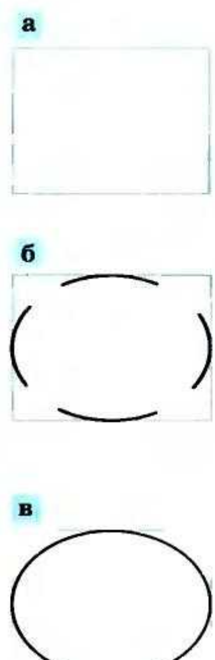


Рис. 147

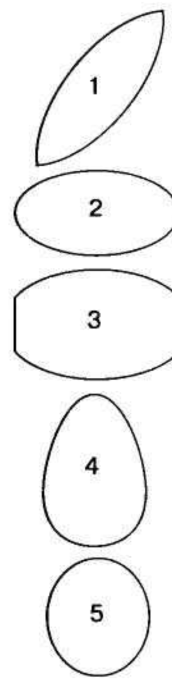


Рис. 148

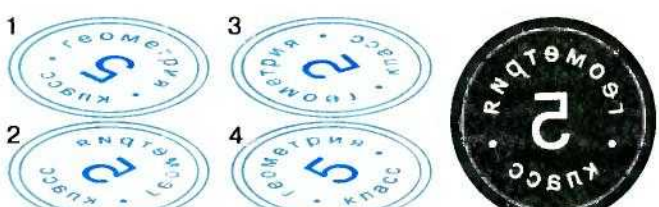


Рис. 149

использованы для изображения одного круга, видимого с разных точек зрения. В каждом столбце — эллипсы, которые могут быть использованы для изображения кругов разных размеров, видимых с одной точки зрения. Используя кальку, изготовь себе из картона трафареты этих эллипсов.

8.26. С помощью трафаретов нарисуй различные круглые предметы.

8.27. Из кривых, представленных на рисунке 148, выбери те, которые могут быть изображением окружности.

8.28. Какой оттиск сделан печатью (рис. 149)?

8.29. На рисунке 150, *а* изображён след от велосипеда, который разделён на участки, отмеченные цифрами. Какое из изображений велосипеда (рис. 150, *б*) соответствует каждому участку?

8.30. Можно ли прокатиться на этих роликовых коньках (рис. 151)?

8.31. Используя трафареты, нарисуй комбинации эллипсов, которые изображены на рисунке 152. Напоминают ли они тебе какие-нибудь предметы или геометрические фигуры? Составь из эллипсов другие картинки, в которых можно увидеть круглые предметы.

8.32. Из набора картинок (рис. 153) исключи лишнюю.

8.33. С помощью циркуля или линейки определи, какая из крышек подходит к банке (рис. 154).

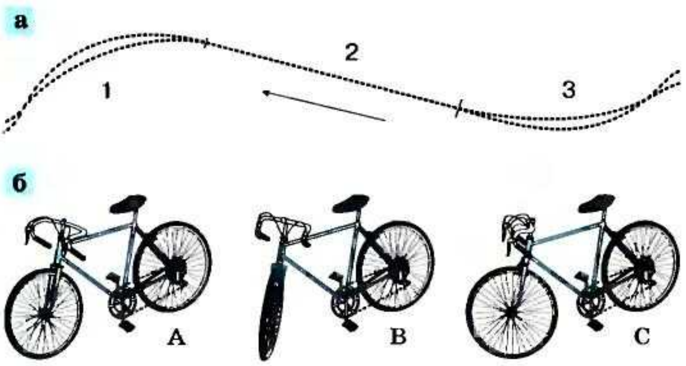


Рис. 150

Рис. 151

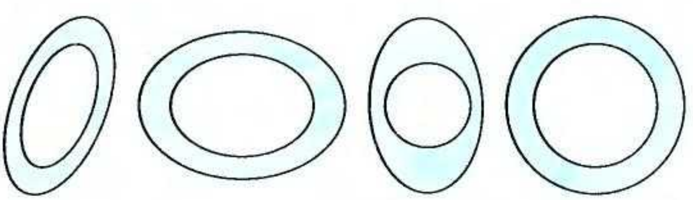


Рис. 153

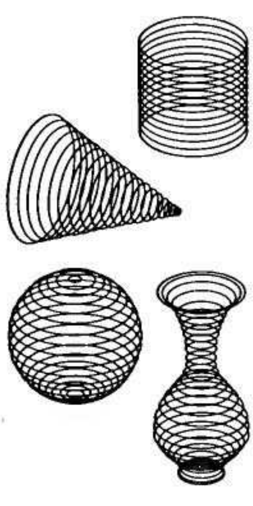


Рис. 152

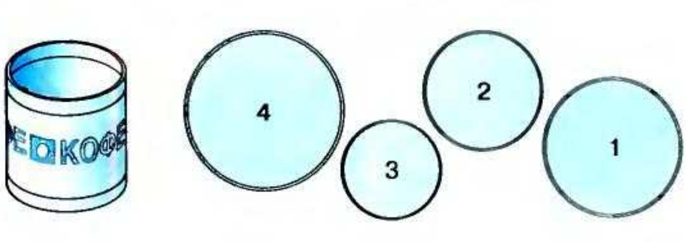


Рис. 154

§ 9 Цилиндры

9.1. Построение цилиндров. Мы уже говорили, что колонна, труба, трубочка для коктейля имеют одинаковую форму, и назвали эту форму *цилиндрической*.

На рисунке 155 изображён «Римский фонтан» в Петродворце недалеко от Петербурга. Посмотрев на рисунок, ты, возможно, сообразишь, как изготовить модель цилиндра.

Рис. 155

Для этого сделай следующее (рис. 156):

- вырежи из картона две равные фигуры, похожие на те, что изображены на рисунке;
- отрежь 12 ниток длиной 10 см каждая, на одном конце нитки завяжи узелок;
- наложи друг на друга вырезанные из картона фигуры, проколи иглой в отмеченных точках и продень нитки в полученные дырочки;
- завяжи на свободных концах ниток узелки, следя при этом за тем, чтобы все ниточки имели равные длины;
- и наконец, раздвинь картонные фигуры так, чтобы ниточки туго натянулись.

Если ты всё сделал правильно, то у тебя получилась модель фигуры, по которой можно представить, что такое цилиндр. Если бы ты взял больше, чем 12 ниток, и поступил бы с ними точно так же, ты получил бы фигуру, ещё больше похожую на цилиндр (рис. 157).

Модель цилиндра можно изготовить из бумаги (рис. 158). Цилиндр ограничивают две равные плоские фигуры (*основания цилиндра*) и кривая поверхность (*боковая поверхность цилиндра*). Можно представлять себе эту поверхность образованной равными между собой отрезками с концами на границах оснований, которые имеют одно и то же направление.

Когда цилиндр можно расположить так, чтобы одно его основание было строго над вторым, мы получим *прямой цилиндр*. Проверить, является ли цилиндр прямым, можно с помощью отвеса — верёвки с грузом (рис. 159, *а*). Если же так сделать нельзя, то получается

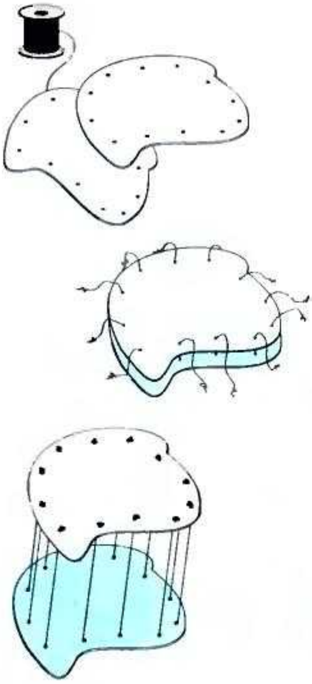


Рис. 156

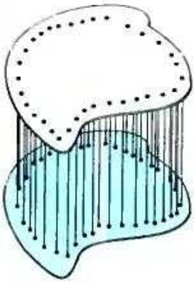


Рис. 157

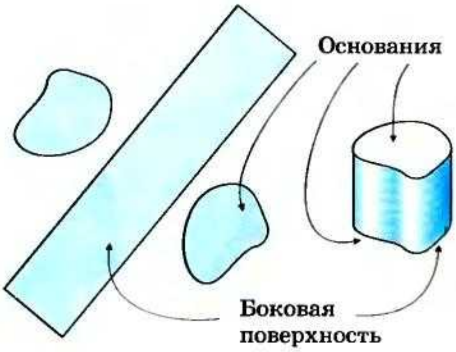


Рис. 158

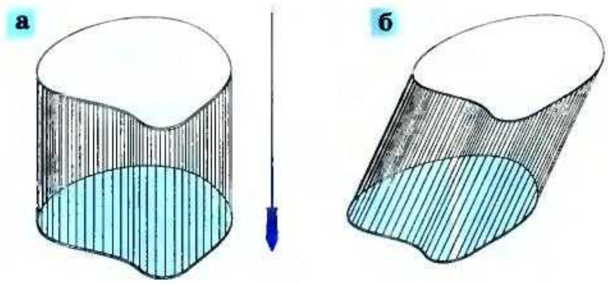


Рис. 159

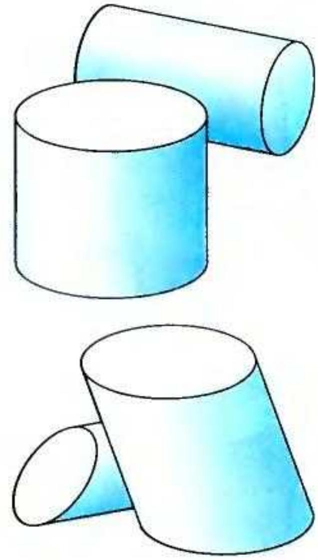


Рис. 160

наклонный цилиндр (рис. 159, *б*). Эти названия понятны: первый цилиндр «стоит прямо», а второй как будто наклонился.

9.2. Круговые цилиндры. Цилиндры различаются не только по расположению оснований друг относительно друга, но и по виду оснований.

Если основанием цилиндра является круг, то цилиндр называют *круговым*. Конечно, и круговые цилиндры могут быть прямыми или наклонными (рис. 160). Именно прямой круговой цилиндр мы обычно имеем в виду, говоря о цилиндрах (вспомни хоккейную шайбу, круглый карандаш и прочее). Наклонные же круговые цилиндры в жизни встречаются редко.

Вырезав из картона два одинаковых круга, ты сконструируешь фигуру, напоминающую круговой цилиндр, если будешь действовать так, как описано в пункте 9.1 (см. рис. 156).

Для изготовления модели прямого кругового цилиндра из картона нужно взять два равных круга и прямоугольник, длина одной стороны которого равна длине окружности. В Приложении на с. 109 изображены такие фигуры. Сделай соответствующую модель, используя эти фигуры и кальку.

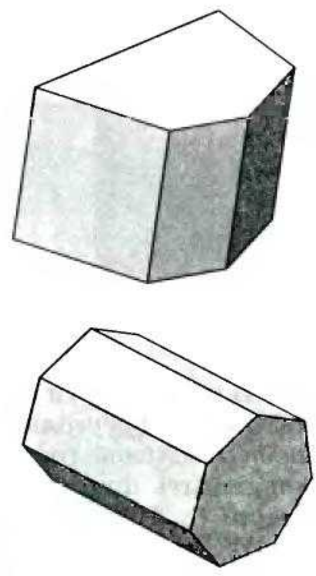


Рис. 161

9.3. Многоугольные цилиндры — призмы. В основании цилиндра могут быть произвольные фигуры, в том числе и многоугольники.

Цилиндры, основаниями которых являются многоугольники, называются ***призмами*** (рис. 161).

Плоские геометрические фигуры, которые являются основаниями или составляют боковую поверхность призмы, называются *гранями* призмы (рис. 162). Отрезки, соединяющие вершины оснований призмы, называются *боковыми рёбрами* призмы, а их концы — её *вершинами*. Боковые рёбра призмы и стороны её оснований называются *рёбрами призмы*.

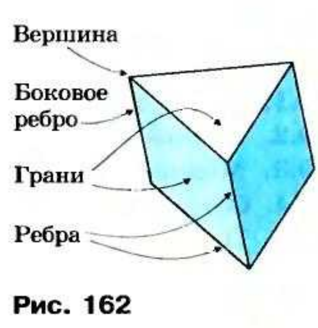


Рис. 162

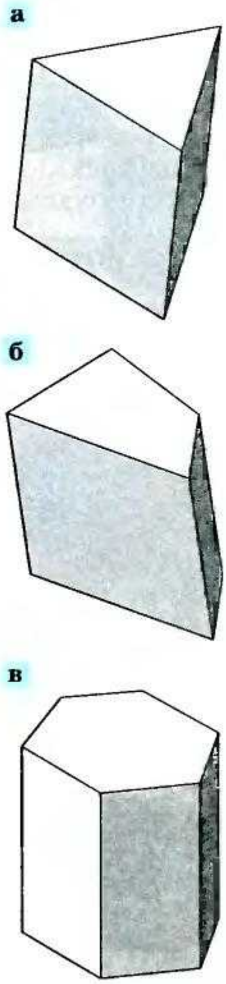


Рис. 163

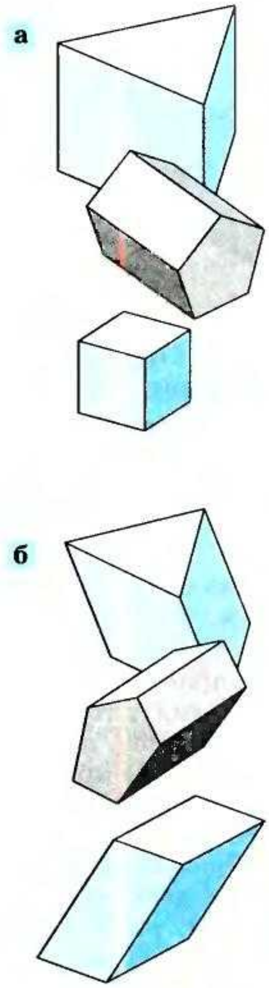


Рис. 164

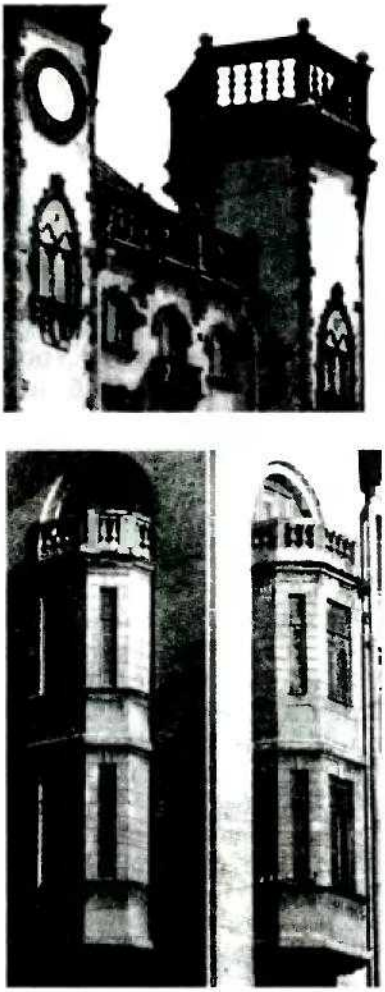


Рис. 165

В зависимости от того, сколько сторон имеет основание призмы, её называют *треугольной* (рис. 163, *а*), *четырёхугольной* (рис. 163, *б*), *шестиугольной* (рис. 163, *в*) и т. д. Как и всякие цилиндры, призмы могут быть прямые (рис. 164, *а*) и наклонные (рис. 164, *б*). В Приложении (с. 109) дана развертка треугольной призмы.

В основе форм почти всех архитектурных сооружений лежит призма. Форму призмы имеют также различные архитектурные детали, например башни, крыши, эркеры — полукруглые или многогранные выступы в стене здания, имеющие окна (рис. 165). Конструкции из призм и круговых цилиндров, поставленных друг на друга, часто встречаются в архитектуре храмов. Приведи свои примеры архитектурных сооружений, в которых использованы призмы.

9.1. Какие предметы имеют форму призмы? Нарисуй их.

9.2. Сколько вершин, рёбер, граней имеет пятиугольная призма?

9.3. Можно ли сконструировать призму, в которой 11 (20) вершин?

9.4. Объясни, почему прямоугольный параллелепипед является призмой.

9.5. Подумай, является ли куб: а) цилиндром; б) призмой.

9.6. Сделай из картона и ниток модель прямоугольного параллелепипеда (рис. 166, *а*).

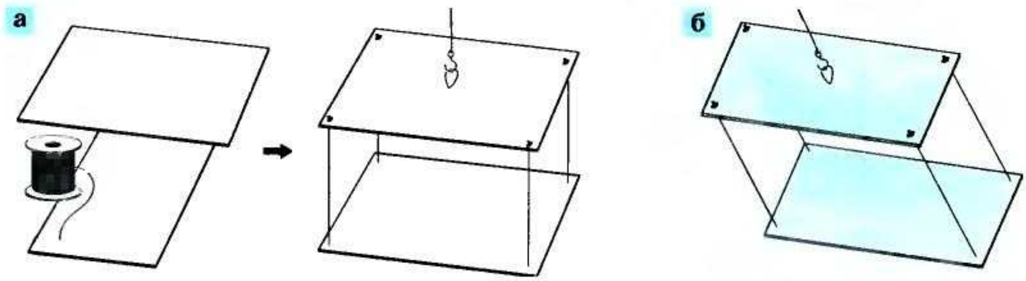


Рис. 166

Обрати внимание на то, что из твоей модели легко получается модель наклонной призмы, в основании которой лежит прямоугольник. Такую призму можно назвать ещё *наклонным параллелепипедом* (рис. 166, *б*).

9.4. Прямоугольный параллелепипед.

Прямоугольный параллелепипед — одна из наиболее часто встречающихся геометрических форм (приведи примеры), и поэтому поговорим о нём подробнее.

Модель прямоугольного параллелепипеда можно сделать не только из ниток, но и из бумаги или картона. Найди в Приложении (с. 107) фигуру, изображённую на рисунке 167, *а*. Переведи её на кальку и полученный рисунок используй как трафарет: вырежи из бумаги такую же фигуру. Согни её по линиям, как на рисунке 167, *б*, и получишь модель прямоугольного параллелепипеда. Фигура, из которой ты сделал прямоугольный параллелепипед, называется его *развёрткой*.

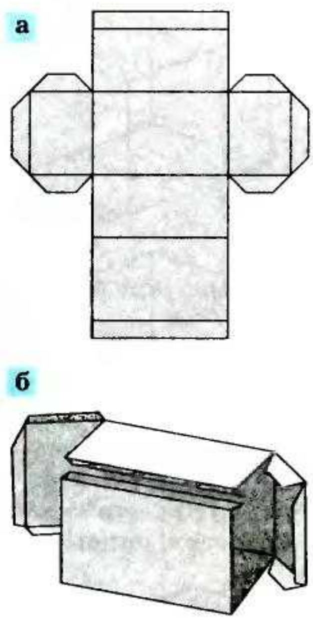


Рис. 167

9.7. Посмотри на модель прямоугольного параллелепипеда и расскажи, из чего состоит поверхность прямоугольного параллелепипеда.

9.8. Сколько граней, рёбер, вершин у прямоугольного параллелепипеда? Сравни его рёбра. Сколько пар равных рёбер есть на твоей модели прямоугольного параллелепипеда? Сколько равных рёбер есть у куба?

9.9. Придумай, как из деревянной модели прямоугольного параллелепипеда сделать куб. Сколько распилов может при этом понадобиться?

Проверь себя. Вариант решения задачи представлен на рисунке 168. Объясни, почему прямоугольник, отмеченный знаком вопроса, является квадратом.

Напомним:

Куб — это такой прямоугольный параллелепипед, в котором все рёбра равны между собой.

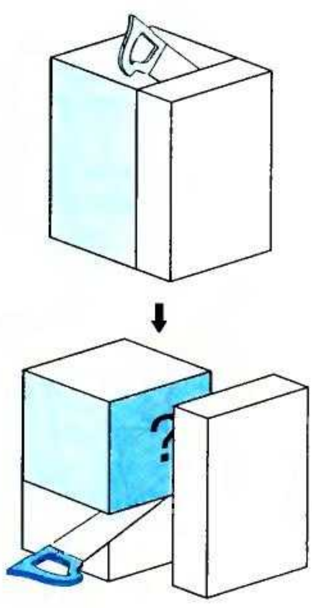


Рис. 168

4-13844 Ходот.

9.5. Как рисуют цилиндры?

Из всех цилиндров чаще всего мы будем работать с прямоугольным параллелепипедом, и поэтому остановимся подробно на том, как его изображают. Посмотри на рисунок 169.

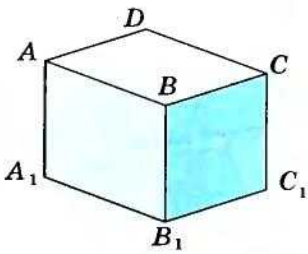


Рис. 169

Если бы мы не знали, что это прямоугольный параллелепипед, мы не смогли бы понять, что находится за видимыми гранями. Так могут быть изображены разные фигуры (придумай, какие). Чтобы получить полное представление о том, какая фигура изображена, конечно, надо нарисовать то, что находится за этими гранями, то, что не видно нам. На рисунке 170, *а*, нарисованы все рёбра параллелепипеда. Но теперь стало непонятно, как расположен этот параллелепипед по отношению к нам: какие грани и рёбра спереди, а какие — сзади. Для того чтобы получить полное представление об изображаемой фигуре и её расположении по отношению к зрителю, договорились те рёбра, которые не видны, изображать штриховой линией (рис. 170, *б*).

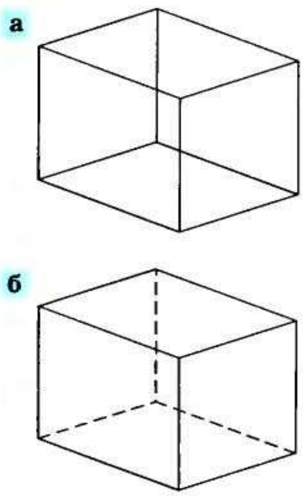


Рис. 170

Иногда бывает полезно изобразить каркас какого-нибудь многогранника, т. е. только его рёбра. В таком случае штриховые линии не используют. Посмотри на рисунок 171. Обрати внимание на то, что, изображая два отрезка, один (дальний) мы рисуем с разрывом в том месте, где его заслоняет другой (ближний).

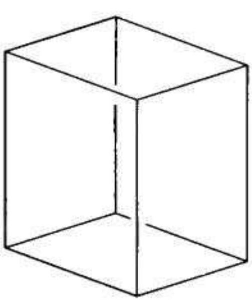


Рис. 171

Эти правила верны и при рисовании призм и круговых цилиндров (рис. 172). Основания кругового цилиндра изображаются эллипсами. При этом форма этих эллипсов может меняться в зависимости от того, как мы смотрим на цилиндр.

Изображения различных цилиндров можно рисовать от руки, но можно воспользоваться шаблоном или трафаретом. На рисунке 173 показан шаблон для изображения прямоугольного параллелепипеда. Он имеет форму контура изображения параллелепипеда. В нём

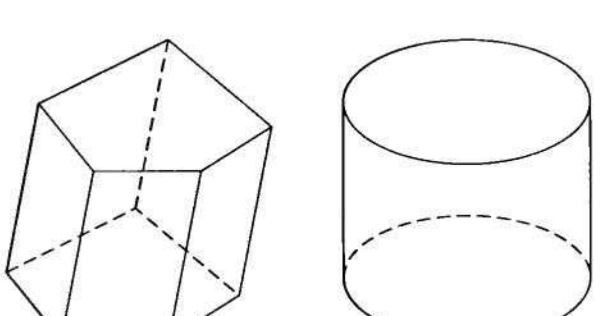


Рис. 172

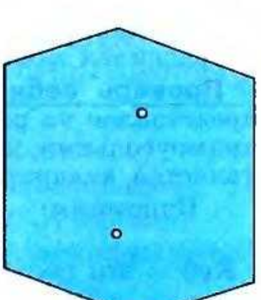


Рис. 173

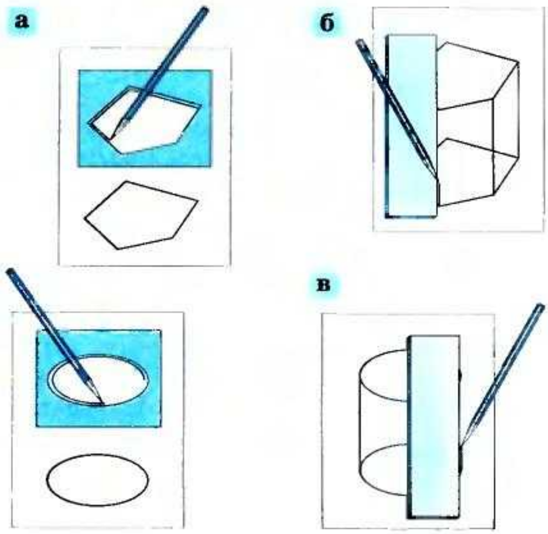


Рис. 174

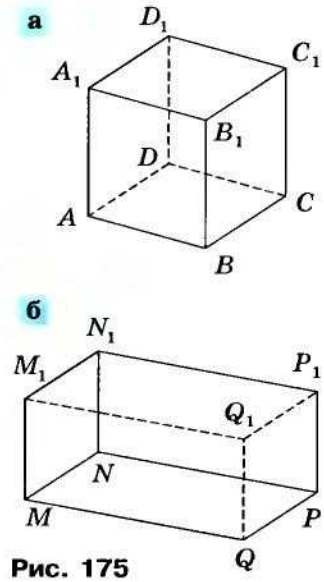


Рис. 175

сделаны две дырочки в местах изображения вершин, не лежащих на контуре.

Можно изобразить призму и круговой цилиндр, имея трафареты их оснований. Для этого надо нарисовать по трафарету одно основание фигуры, далее переместить трафарет, не поворачивая его, и нарисовать второе основание фигуры (рис. 174, *а*). При изображении призмы нужно соединить отрезками соответственные вершины верхнего и нижнего оснований (рис. 174, *б*). При изображении кругового цилиндра нужно провести отрезки, которые одновременно касаются верхнего и нижнего основания (рис. 174, *в*).

9.10. Найди в Приложении (с. 109) шаблоны для рисования куба и прямоугольного параллелепипеда, скопируй их и нарисуй эти многогранники, используя при этом, где нужно, штриховые линии.

9.11. Выпиши для куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 175, *а*) и прямоугольного параллелепипеда $MNPQM_1N_1P_1Q_1$ (рис. 175, *б*): а) все его видимые грани, рёбра, вершины; б) все его невидимые грани, рёбра, вершины; в) все пары равных между собой рёбер.

9.12. Посмотри на куб с различных сторон и из предложенных изображений многогранников (рис. 176) выбери те, которые могут являться изображениями куба.

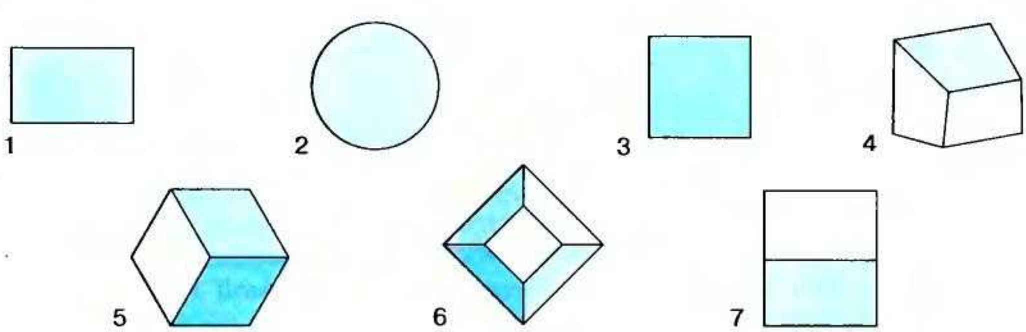


Рис. 176

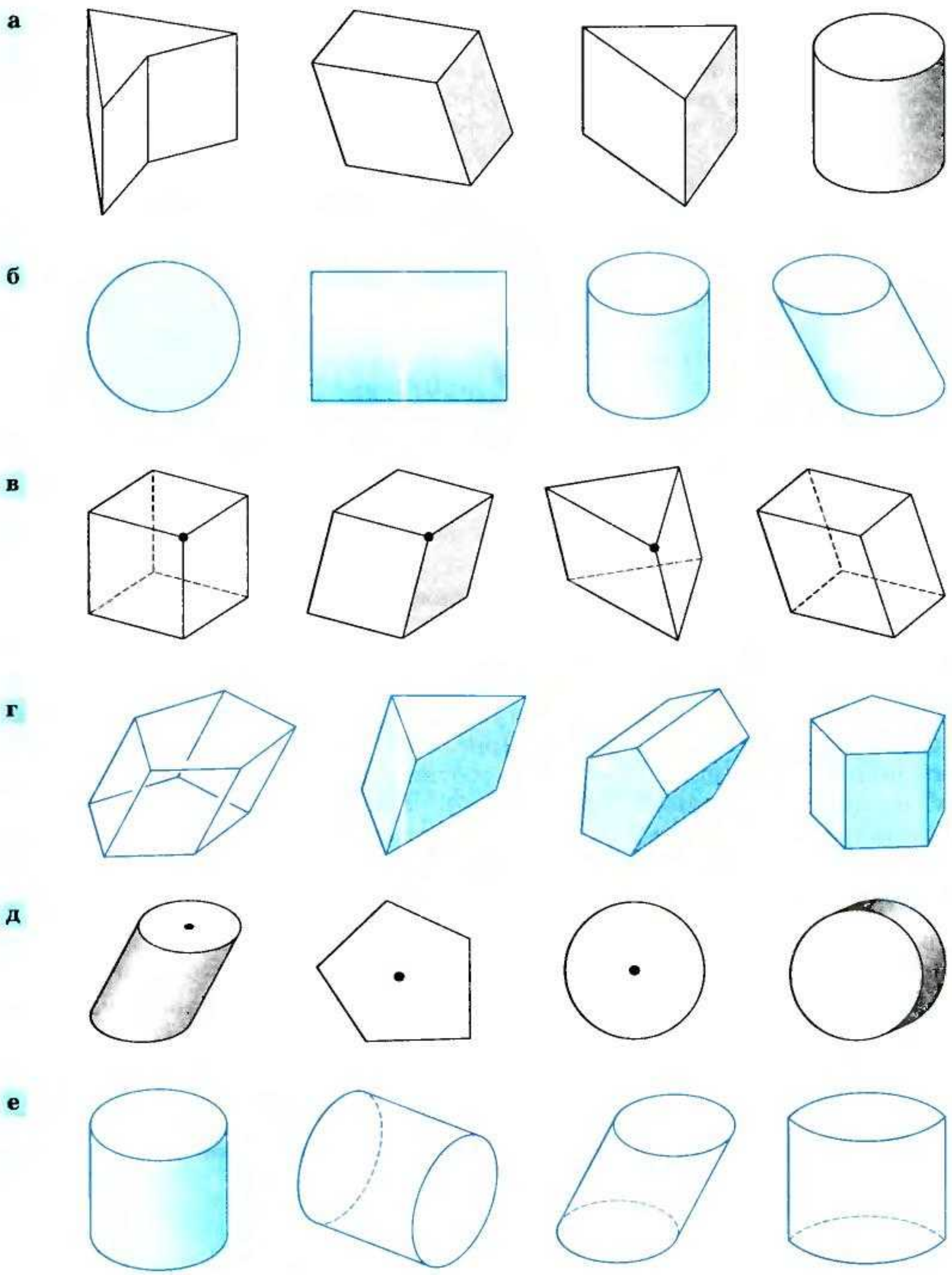


Рис. 177

9.13. Сделай из картона трафарет какого-нибудь пятиугольника и нарисуй призму, в основании которой лежит такой пятиугольник. Обозначь эту призму. Сколько невидимых рёбер, граней, вершин имеет изображённая призма? Перечисли их.

9.14. Используя трафареты эллипсов, нарисуй прямой круговой цилиндр в различных положениях.

9.15. Исключи лишние картинки (рис. 177).

§ 10 Конусы

На рисунках 178, *а — в* изображены части некоторых зданий. Обрати внимание на форму крыш, башен, шпилей. Они имеют *форму конуса*.

Архитекторы часто используют такие формы для создания эффекта устремлённости здания вверх. Кроме того, в архитектуре часто встречается сочетание конуса и цилиндра. Такое сочетание можно увидеть, например, в крепостных башнях. На рисунке 178, *г* изображена часть стены Псково-Печорского монастыря.

10.1. Построение конуса. На рисунке 179 показано, как можно сделать модель конуса. При этом нитки следует натянуть, и тогда получится фигура, которая даёт представление о конической поверхности (или просто о конусе). Увеличивая количество ниток, мы создадим себе более

а

б

в

г

Рис. 178

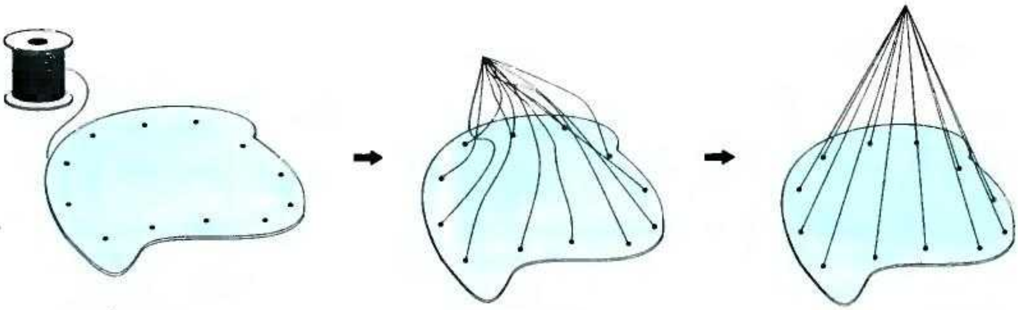


Рис. 179

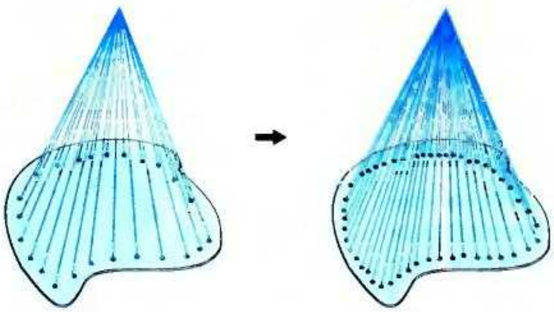


Рис. 181

Рис. 182

полное представление о конусе (рис. 180). Та плоская фигура, которая была использована для построения конуса, называется *основанием*, остальная часть конуса называется его *боковой поверхностью*, а общий конец всех отрезков, которые образуют боковую поверхность, называется *вершиной* конуса (рис. 181).

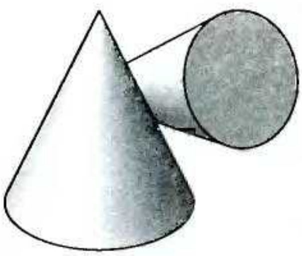


Рис. 183

10.2. Круговые конусы. Так же как и среди цилиндров, в семействе конусов выделяют те, в основании которых лежат круги. Такие конусы называют *круговыми* (рис. 182, 183). Круговые конусы, как и цилиндры, могут быть прямыми. Круговой конус называют *прямым*, если его вершина находится строго над центром основания (рис. 182). Остальные круговые конусы прямыми не являются (рис. 183).

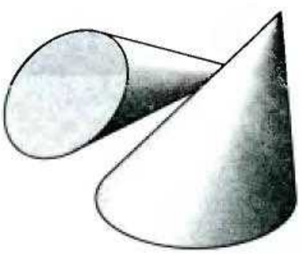


Рис. 184

Если модель конуса сделана из ниток, то проверить, является ли этот конус прямым, как и в случае цилиндра, можно с помощью отвеса.

Для изготовления модели прямого кругового конуса нужно взять нитки одинаковой длины. Модель прямого кругового конуса может быть сделана и из бумаги (рис. 184). Развёртка такого конуса приведена в Приложении (с. 108).

Рис. 180

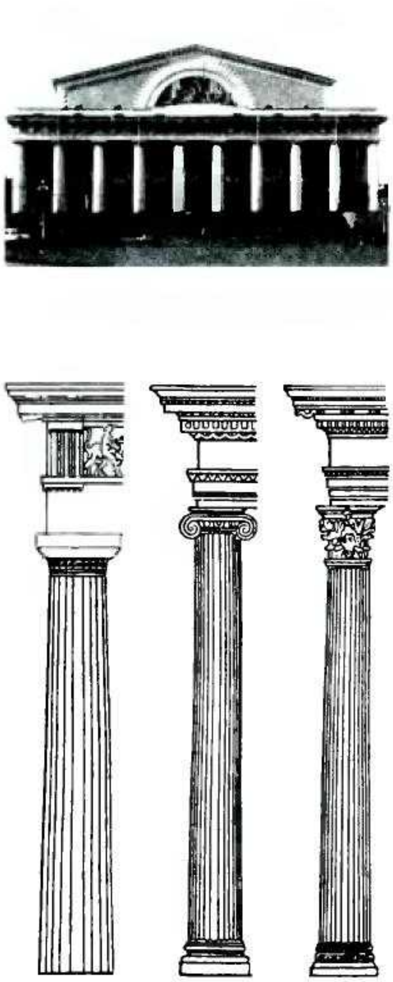


Рис. 185

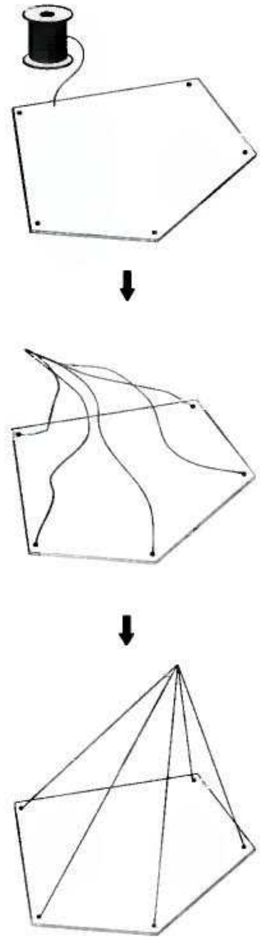


Рис. 186

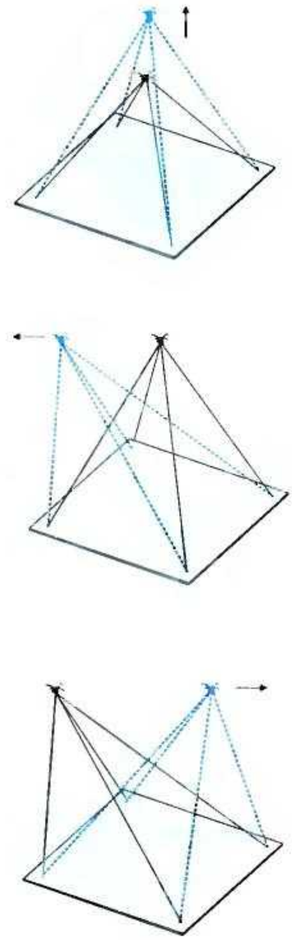


Рис. 187

Среди архитектурных элементов, украшающих фасады зданий, особое место занимают различные колонны. Нам часто кажется, что колонны имеют форму цилиндра. Однако это не так. Как правило, колонны кверху сужаются, а потому имеют форму части конуса (так называемого усечённого конуса). Колонны служат вертикальной поддержкой (опорой) здания или отдельных его частей и, сужаясь кверху, придают конструкции впечатление устремлённости вверх (рис. 185).

10.3. Многогранные конусы — пирамиды. Если при построении конуса в качестве основания взять какой-нибудь многоугольник, а дырочки для ниток сделать около его вершин, то получится модель конуса с рёбрами, который называют *пирамидой* (рис. 186).

Пирамидой называется конус, в основании которого лежит многоугольник.

Можно вместо ниток использовать резинки. Если прижать пальцем к поверхности стола основание и узел, в который связаны резинки, перемещать в разных направлениях, мы будем получать разные пирамиды с одним и тем же основанием (рис. 187).

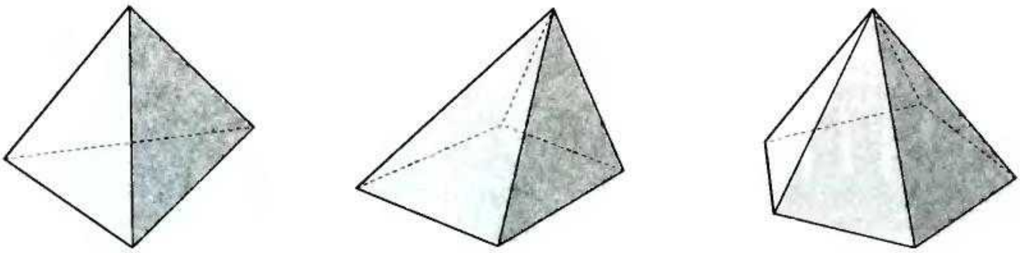


Рис. 188

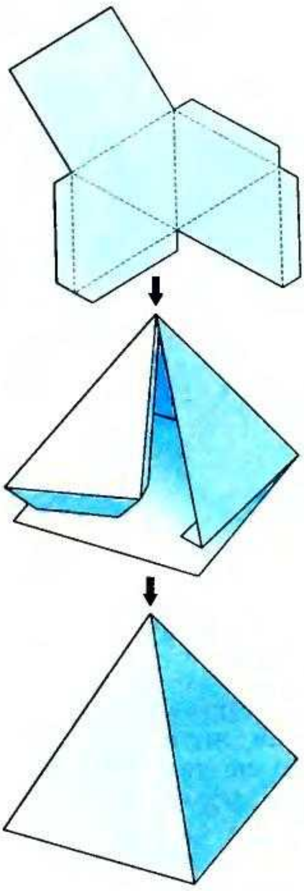


Рис. 189

В зависимости от того, какой многоугольник лежит в основании: треугольник, четырёхугольник, пятиугольник и т. д., пирамида (как и призма) называется соответственно *треугольной*, *четырёхугольной*, *пятиугольной* и т. д. (рис. 188).

Можно сделать и сплошную модель пирамиды (рис. 189). Найди развёртку пирамиды в Приложении (с. 108), скопируй её на картон, вырежи, согни по штриховым линиям и склей, используя клапаны. У тебя получится модель четырёхугольной пирамиды.

Где и когда ты уже встречался с пирамидами? — Каркас одной из них ты строил из 6 спичек (см. рис. 44), а вторая тебе известна из уроков истории — это египетская пирамида.

10.4. Элементы пирамиды. Поверхность пирамиды состоит из *граней*: одного многоугольника и треугольников, имеющих общую вершину. Эти треугольники называют *боковыми гранями* пирамиды, а многоугольник, на который опираются боковые грани, *основанием* пирамиды. Стороны граней называют *рёбрами* пирамиды, а вершины граней — *вершинами* пирамиды.

Например, в пирамиде (рис. 190) ASB, BSC, CSD, ASD — боковые грани; основание — $ABCD$. В этой пирамиде рёбра AS, BS, CS, DS, AB, BC, CD, DA, а вершины A, B, C, D, S. Обозначают пирамиду по её вершинам $SABCD$.

Рис. 190

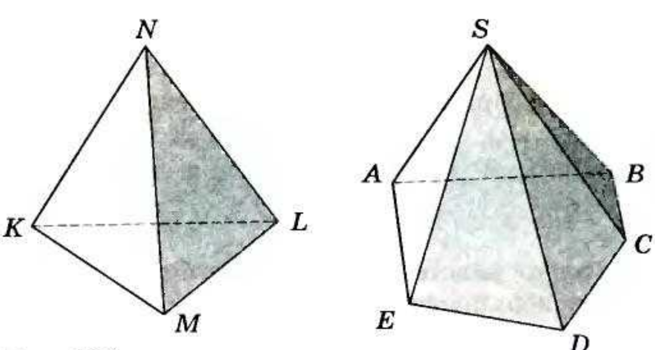


Рис. 191

10.1. Назови боковые грани и основания каждой из пирамид, нарисованных на рисунке 191. Сосчитай, сколько граней, боковых граней, рёбер у каждой пирамиды. Как зависит число рёбер пирамиды от числа её граней?

10.2. Какой многоугольник лежит в основании пирамиды, имеющей: а) семь вершин; б) восемь рёбер?

10.3. Все грани многогранника, кроме одной, — треугольники. Верно ли, что такой многогранник обязательно пирамида?

Проверь себя. Нет, неверно. На рисунке 192 приведён соответствующий пример. Придумай и ты свои примеры.

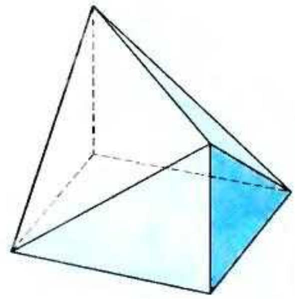


Рис. 192

10.4. На рисунке 193 изображена пирамида. Назови: а) какую-нибудь вершину, принадлежащую одной невидимой и двум видимым граням; б) ребро, содержащееся в видимой и невидимой гранях.

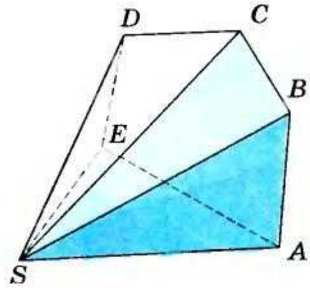


Рис. 193

10.5. Нарисуй модель четырехугольной пирамиды и обозначь её (см. рис. 189). Выпиши видимые и невидимые рёбра и грани пирамиды.

10.6*. Можно ли так посмотреть на пирамиду с треугольным основанием, чтобы у неё были: а) два невидимых ребра; б) три невидимых ребра; в) все рёбра видимые?

Из всех пирамид выделяют пирамиду, в основании которой лежит треугольник, — треугольную пирамиду. Такую пирамиду называют ещё *тетраэдр* (рис. 194).

Слово *тетраэдр* греческого происхождения и в переводе означает *четырёхгранник* (*tetras* — четыре, *hedra* — грань, опора).

Среди всех пирамид тетраэдр имеет наименьшее число граней — четыре. И все они — треугольники, поэтому любая его грань может быть принята за основание, тогда все остальные грани станут боковыми (рис. 195).

Тетраэдр не только простейшая пирамида, но и вообще самый простой из всех многогранников (подобно тому, как треугольник самый простой из всех многоугольников).

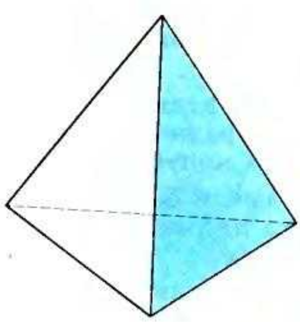


Рис. 194

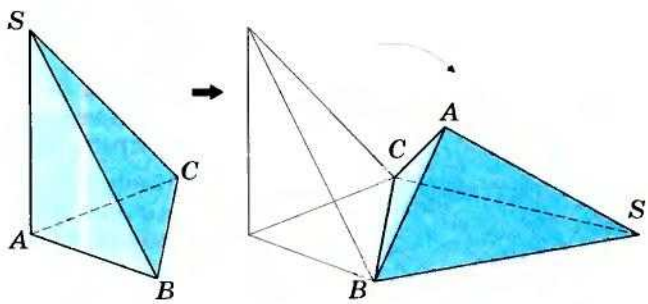


Рис. 195

Подобно тому, как любой многоугольник можно разделить на треугольники (рис. 196, *а*), так и любой многогранник — на тетраэдры (рис. 196, *б*).

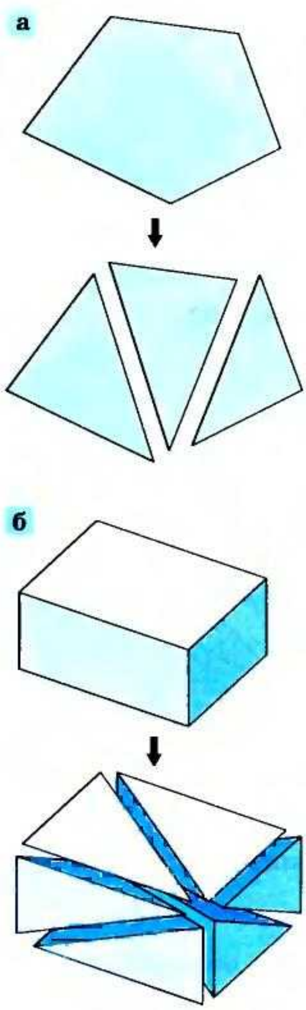


Рис. 196

10.7. У многогранника 4 вершины. Сколько у него рёбер?

10.8. Может ли пирамида иметь: а) только 2 треугольные грани; б) только 3 треугольные грани; в) 25 боковых граней; г) 100 граней?

10.9. Может ли пирамида иметь: а) 6 рёбер; б) 8 рёбер; в) 15 рёбер; г) какое-нибудь нечётное число рёбер? Ответ объясни. Приведи примеры.

10.10. Как разрезать треугольную призму на 2 (3) пирамиды?

10.5. Как рисуют конусы? Для изображения конусов не существует каких-нибудь особых правил. Нужно лишь помнить, что линии, которые мы не видим, договорились рисовать штриховой линией. Если конус круговой, то его основание (как у цилиндра) изображается эллипсом (рис. 197).

При изображении пирамид невидимыми могут быть не только стороны основания, но и некоторые рёбра. Для упрощения рисования конусов, в том числе и пирамид, можно пользоваться шаблоном.

10.11. Найди в Приложении (с. 109) шаблоны для изображения различных пирамид и, используя их, нарисуй четырёхугольную, пятиугольную, шестиугольную пирамиды. Попробуй то же сделать без шаблона.

10.12. Нарисуй тетраэдр $ABCD$. Назови его видимые и невидимые рёбра и грани. Изобрази два отрезка, один из которых лежит в видимой грани, а другой — в невидимой.

10.13. Можно ли из деревянного прямого кругового конуса с диаметром основания 5 см выпилить прямой круговой цилиндр с диаметром основания: а) 6 см; б) 5 см; в) 3 см?

10.14. В каждом из наборов картинок (рис. 198) найди лишнюю.

10.15. Продолжи каждый из рядов картинок (рис. 199).

10.16. Нарисуй (с трафаретами эллипсов и без них) различные варианты изображения одного и того же прямого кругового конуса.

10.17. Нарисуй (с трафаретами и без них) какую-нибудь конструкцию из цилиндров и конусов, необязательно круговых.

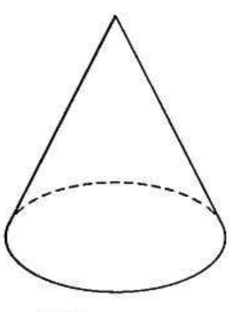


Рис. 197

10.18. Как ты думаешь, почему для покраски стены используют цилиндрические валики (рис. 200, *а*)? Нарисуй, какой след на стене

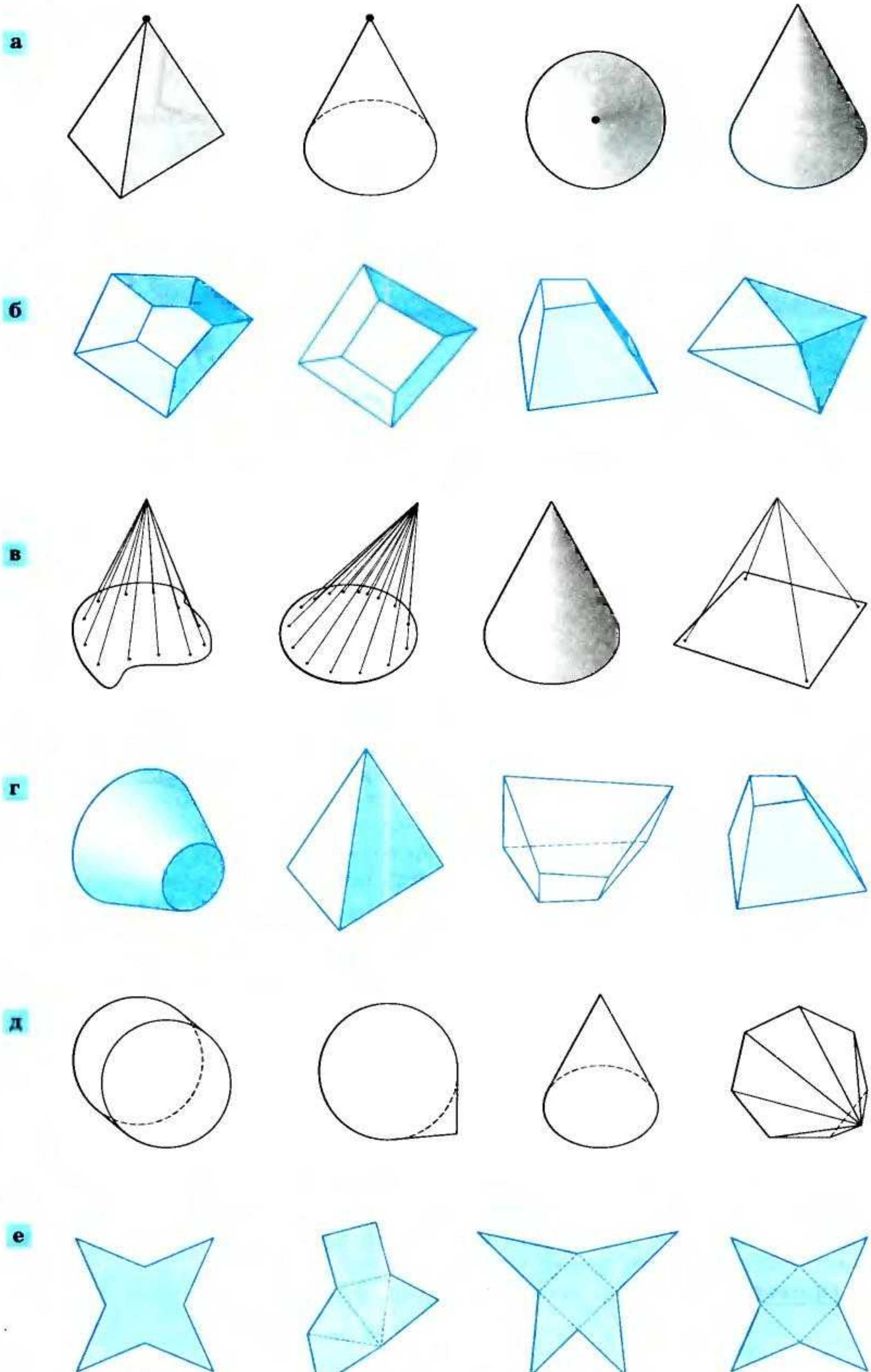


Рис. 198

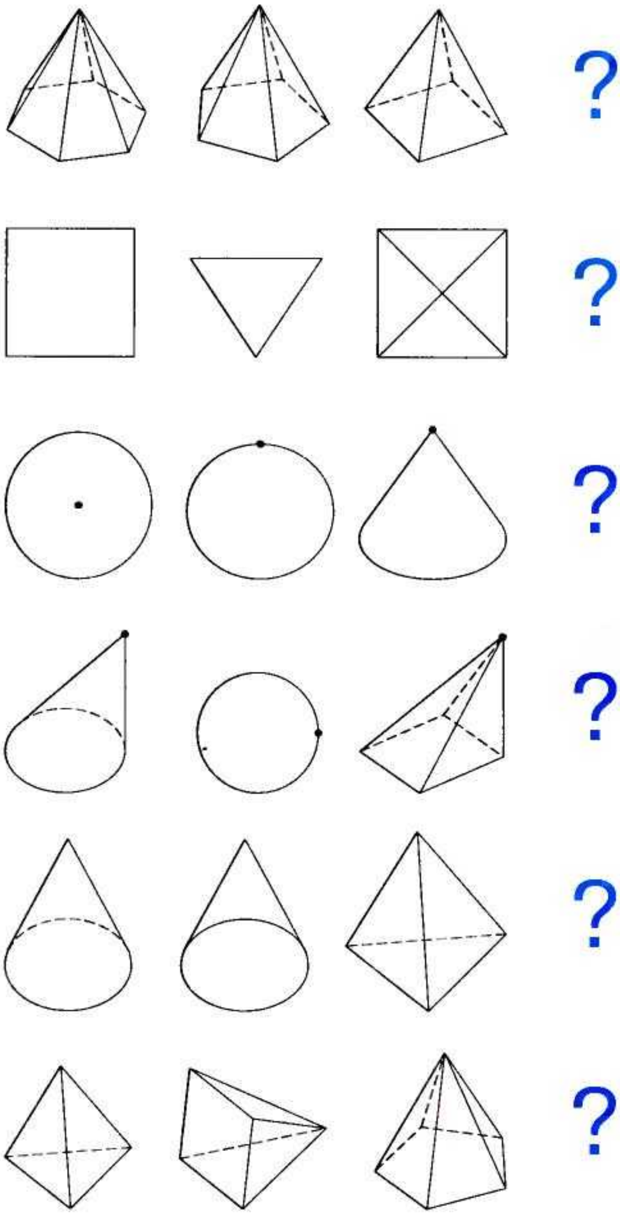


Рис. 199

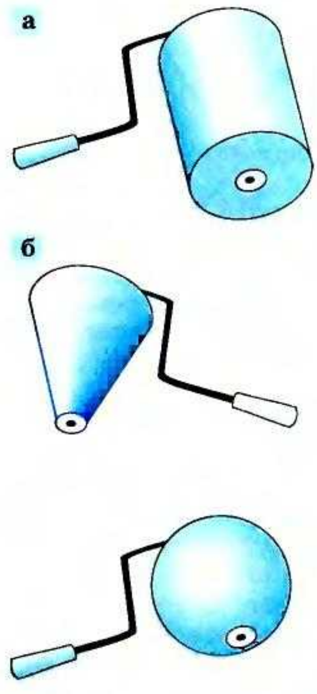


Рис. 200

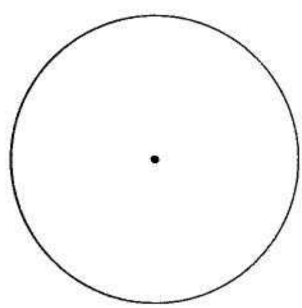


Рис. 201

мог бы оставить валик, имеющий форму прямого кругового конуса или шара (рис. 200, *б*).

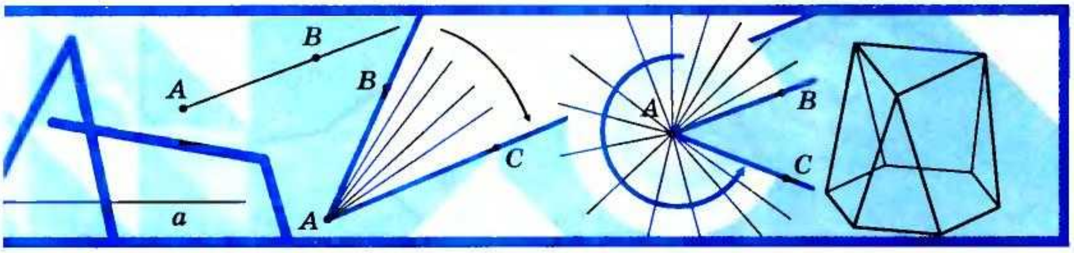
10.19*. Нарисуй цилиндр и конус и на каждом из них плоскую и неплоскую замкнутые линии.

10.20. Можно ли посмотреть на прямой круговой конус так, чтобы была видна вся его боковая поверхность?

Проверь себя. Да, можно. Смотри, например, рисунок 201.

Глава 3

Углы. Конструкции из углов



§ 11 Угол

11.1. Что такое двугранный угол? Слово «угол» мы употребляем в речи довольно часто, и ты, без сомнения, найдёшь на рисунке 202 различные углы. Один из них образован двумя страницами книги. С геометрической точки зрения, это два прямоугольника, имеющие общую сторону (рис. 203). Такую фигуру в геометрии называют *двугранным углом*, так как он образован двумя гранями-прямоугольниками.

Рис. 202

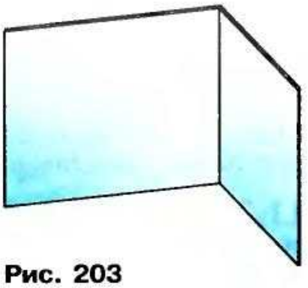


Рис. 203

11.1. Сделай модель двугранного угла из картона.

Проверь себя. Посмотри на рисунок 204.

Если картон рассматривать как модель плоскости, то те части, на которые разделилась эта плоскость, естественно назвать *полуплоскостями*, а прямую, по которой мы сгибали плоскость, — её *границей* (рис. 205).

> **Двугранный угол** — это геометрическая фигура, составленная из двух полуплоскостей, имеющих общую границу.

Полуплоскости, которые образуют двугранный угол, называют *гранями* этого угла, а линию пересечения граней — *ребром* дву-

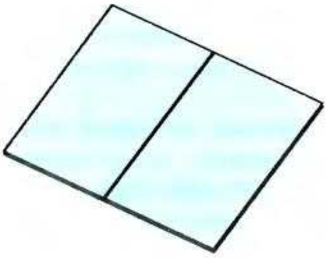


Рис. 204

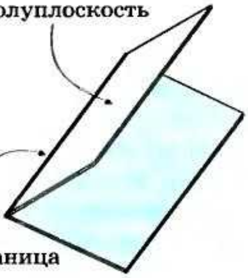


Рис. 205

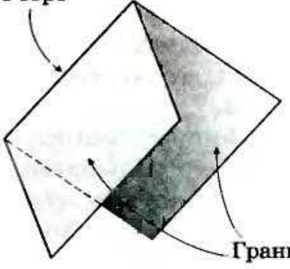


Рис. 206

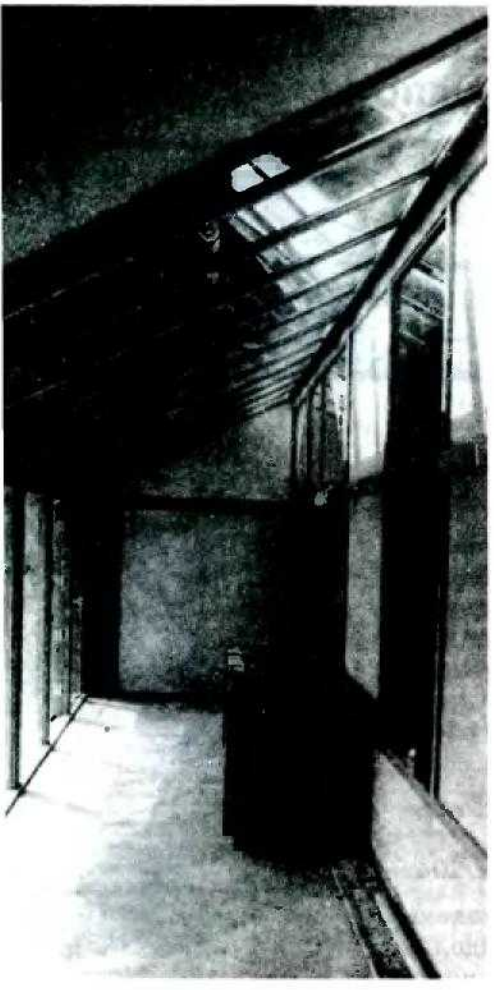


Рис. 207

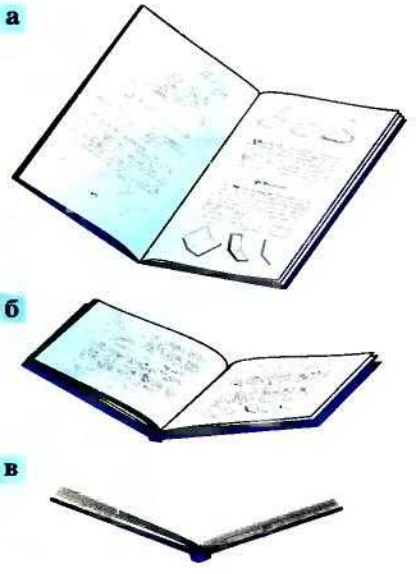


Рис. 208

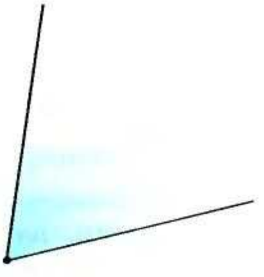


Рис. 209

гранного угла (рис. 206). (Вспомни, где в геометрии мы использовали слова *грань* и *ребро*.)

11.2. На рисунке 207 изображена веранда. Посоревнуйся с другом: кто из вас найдёт на этой фотографии больше двугранных углов.

11.2. Что такое плоский угол? Посмотрим теперь с разных сторон на модель двугранного угла, например на открытую книгу. Как мы можем её увидеть? На рисунке 208 показаны разные случаи. Меняя положение модели двугранного угла, мы в какой-то момент увидим два отрезка, имеющих общую вершину (когда будем смотреть на двугранный угол с торца — рисунок 208, *в*). Если бы мы могли продлить страницы книги неограниченно, оставив прежним её корешок, то «с торца» мы увидели бы два луча, исходящие из одной точки.

Фигуру, которая состоит из двух лучей, исходящих из одной точки, тоже называют углом, но, в отличие от двугранного, — *плоским углом*, так как его можно поместить в плоскость.

Плоским углом называют также не только два луча, исходящих из одной точки, но и часть плоскости, которую они ограничивают (рис. 209). Такой подход, как мы увидим в дальнейшем, удобен.

Плоским углом называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки вместе с этими лучами.

Плоский угол играет в геометрии очень важную роль, поэтому мы основное внимание уделим плоскому углу и в дальнейшем под словом *угол* будем понимать именно *плоский угол*.

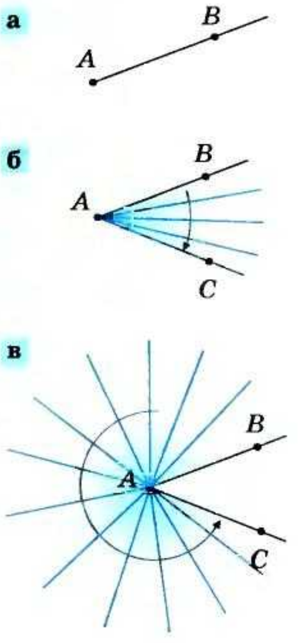


Рис. 210

11.3. Как можно получить угол? Возьмём луч AB и станем его непрерывно перемещать по плоскости так, чтобы его начало (точка A) не меняло своего положения (рис. 210, *а*). Перемещаясь, луч оставляет на плоскости след, зарисовывает часть этой плоскости (подобно тому, как поворачивающийся вокруг своего конца отрезок зарисовывал круг). Остановившись, луч занимает новое положение AC (рис. 210, *б*). Его след и представляет собой геометрическую фигуру, которая является плоским углом. Если бы мы поворачивали луч AB вокруг точки A в другом направлении до совпадения с лучом AC, то получили бы другой угол (рис. 210, *в*).

О плоском угле дает представление веер. По мере раскрытия веера получаются различные углы (рис. 211, *а*). В частности, если мы этот веер раскроем (развернём) полностью, то он станет моделью так называемого *развёрнутого угла* (рис. 211, *б*).

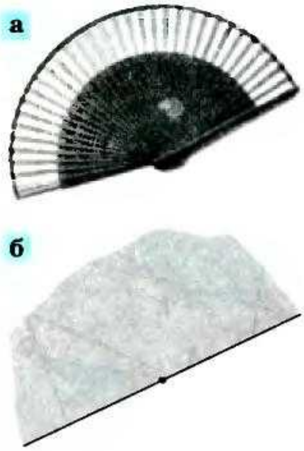


Рис. 211

Лучи, образующие развёрнутый угол, лежат на одной прямой (рис. 212, *а*). Общее начало этих лучей разбивает прямую на два противоположных луча, поэтому развёрнутый угол так и определяют:

Развёрнутый угол — это угол, который образован двумя противоположными лучами (рис. 212, *б*).

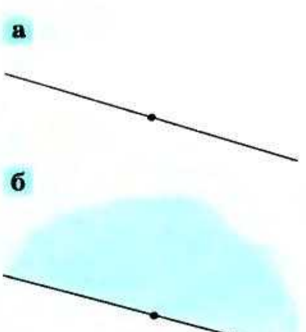


Рис. 212

11.3. Нарисуй луч OA. Построй ещё какой-нибудь луч так, чтобы получился угол. Получился ли у тебя развёрнутый угол?

11.4. По аналогии с определением плоского развёрнутого угла сформулируй определение двугранного развёрнутого угла. Как сделать модель развёрнутого двугранного угла?

11.4. Элементы плоского угла. На рисунке 213, *а*, изображён угол. При этом волнистая линия показывает, что угол простирается неограниченно. Границей угла являются

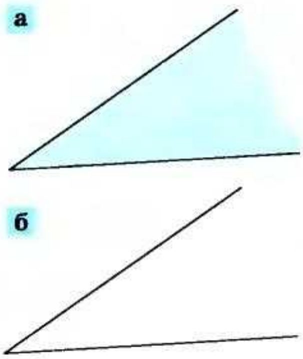


Рис. 213

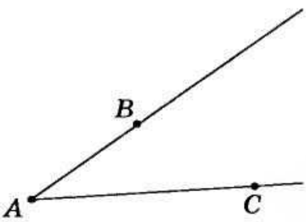


Рис. 214

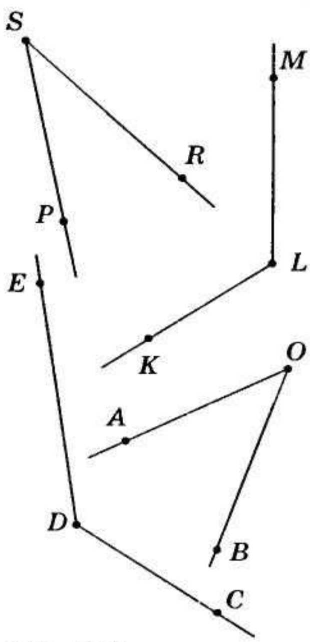


Рис. 215

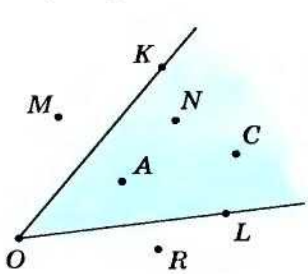


Рис. 216

два луча с общим началом. Эта граница тоже называется углом (рис. 213, *б*) подобно тому, как под треугольником понимают и трёхзвенную замкнутую ломаную, и часть плоскости, ограниченную этой ломаной. (Ты знаешь, что иногда граница фигуры имеет своё собственное название, например граница круга называется окружностью.)

Лучи, образующие угол, называются *сторонами* этого угла, а их общее начало — его *вершиной*. Например, на рисунке 214 изображён угол с вершиной A и сторонами AB и AC.

11.5. Назови стороны и вершину каждого из углов (рис. 215).

11.6. Отметь в тетради точки A, B, C, O. Построй, если возможно, угол: а) образованный лучами OA и OB; б) со сторонами CB и CO; в) образованный лучами AO и BC; г) со сторонами AB и BC. Объясни, когда задача имеет решение и когда не имеет.

Напоминание. Не забудь, что стороны угла — это лучи, исходящие из одной точки.

11.7. Построй два угла с вершиной в одной и той же точке, например C. Сколько углов при этом образовалось?

11.8. Отметь две точки A и B. Построй: а) какой-нибудь угол; б) развёрнутый угол так, чтобы точка A являлась его вершиной, а одна из сторон проходила через точку B.

Как и другие фигуры, угол имеет свои обозначения (названия). На рисунке 215 один из углов имеет стороны OA и OB. Он может быть назван так: AOB (или BOA). Обрати внимание: при обозначении угла средней всегда пишут (и называют) букву, обозначающую вершину угла. Для удобства в записи вместо слова «угол» используют значок $\angle$. Вместо того чтобы писать «угол AOB» или «угол DKC», пишут: $\angle AOB$ или $\angle DKC$.

11.9. Назови все углы, изображённые на рисунке 215.

11.10. Назови точки, которые лежат: а) внутри закрашенного угла KOL; б) на сторонах угла KOL (рис. 216).

11.11. Верно ли, что сторона AB угла BAC (см. рис. 214) больше стороны AC?

Иногда угол обозначают одной буквой — его вершиной (подобно тому, как ученика можно называть по имени и фамилии, а можно только по имени). Однако это возможно только лишь в тех случаях, когда ясно, о каком угле идёт речь. Например, на рисунке 217 изображены углы DMC и HRL. Их можно

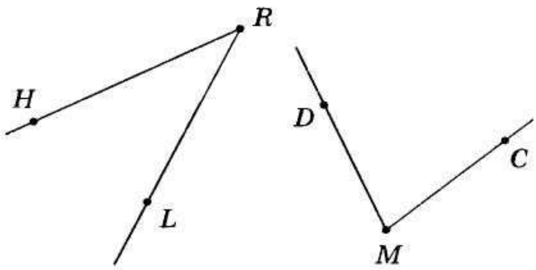


Рис. 217

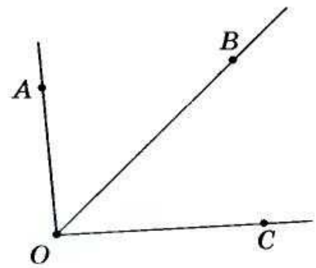


Рис. 218

назвать: $\angle M$ и $\angle R$. Но изображённые на рисунке 218 углы одной буквой назвать нельзя, так как здесь нарисовано несколько (сколько?) углов, имеющих одну и ту же вершину O.

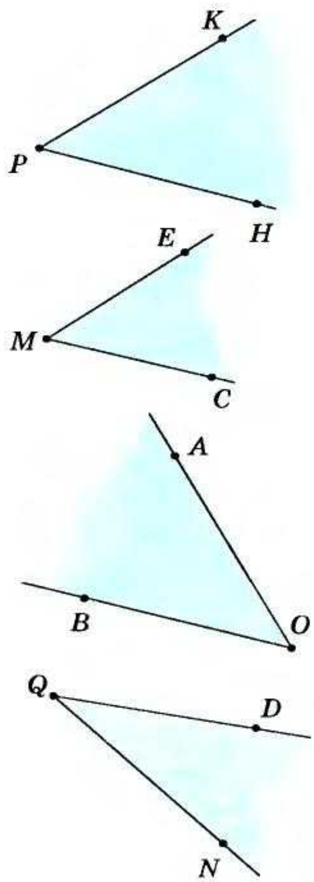


Рис. 219

§ 12 Сравнение углов

12.1. Равенство углов. На рисунке 219 изображены четыре угла. Есть ли на этом рисунке углы, которые тебе хотелось бы назвать равными? Вероятно, ты назвал равными углы KPH и EMC. Действительно эти углы равны. Но ещё и угол AOB равен углу EMC, хотя на первый взгляд так не кажется. Для того чтобы узнать, равны ли два угла, нужно (как и в случае отрезков) попытаться наложить их друг на друга. При этом важно помнить, что лучи (стороны угла) так же бесконечны, как и часть плоскости, ими ограниченная.

Для сравнения углов AOB и KPH воспользуемся калькой или прозрачной плёнкой: скопируем угол AOB и попытаемся совместить копию этого угла с углом KPH (рис. 220, *а*). Для этого наложим луч OA на луч PH, совместив сначала вершины углов O и H (рис. 220, *б*). Если при этом совместятся лучи OB и PK, то совместятся и части плоскости, ими ограниченные, а значит, будут равны углы. В нашем случае углы AOB и KPH равны. Работая с углами EMC и AOB, мы убедимся, что и они равны (рис. 221), несмотря на то, что стороны углов

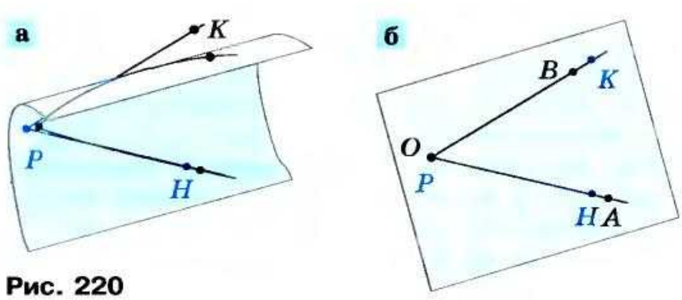


Рис. 220

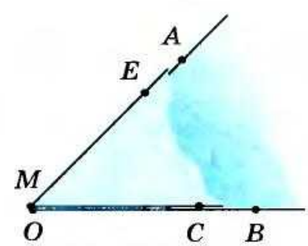


Рис. 221

5–13844 Ходот.

изображены отрезками разной длины. (Ведь мы изображаем только часть угла, так как и лучи, и часть плоскости не ограничены и мы не можем изобразить их целиком.)

Вообще с помощью наложения можно для любых двух, даже очень сложных фигур определить, равны они или нет.

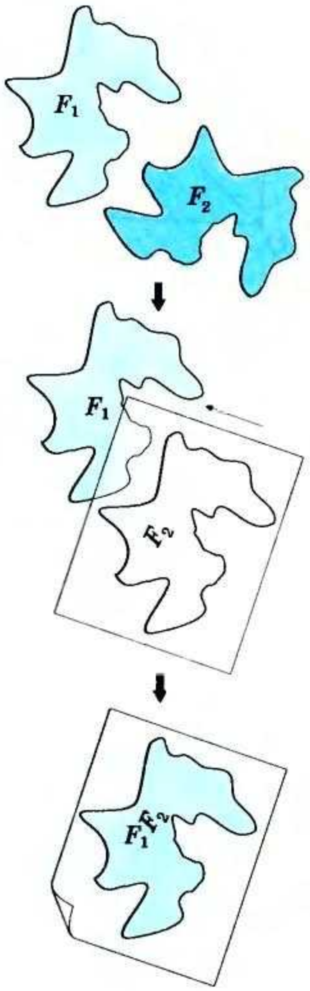


Рис. 222

Если **фигуры** можно так наложить друг на друга, что они совместятся (рис. 222), то они называются **равными**.

12.1. Из углов (рис. 223) выбери те, которые равны углу A. Проверь себя с помощью кальки.

12.2. Начерти произвольный угол ABC. Нарисуй другой угол MNP, который равен углу ABC. Проверь своё построение с помощью кальки.

Можно построить угол, равный данному, не используя кальку.

Пусть, например, нужно построить угол, равный углу AOB, так, чтобы одна сторона нового угла совпадала с лучом MN (рис. 224, *а*). Поступим следующим образом:

- построим какую-нибудь окружность (не обязательно всю) с центром в точке O и обозначим буквами C и D точки её пересечения со сторонами данного угла (рис. 224, *б*);
- с центром в точке M построим окружность того же радиуса и обозначим D_1 точку пересечения этой окружности с лучом MN (рис. 224, *в*);
- измерив циркулем отрезок CD (рис. 224, *г*), проведём окружность с центром в точке D_1 и радиусом, равным CD, и обозначим C_1 точку пересечения этой окружности с построенной ранее (рис. 224, *д*);
- проведя (рис. 224, *е*) луч MP, проходящий через точку C_1, получим угол PMN, равный данному углу AOB. (Почему? — К сожалению, мы пока это объяснить не можем. Позднее, в седьмом классе, мы к этому вернёмся.)

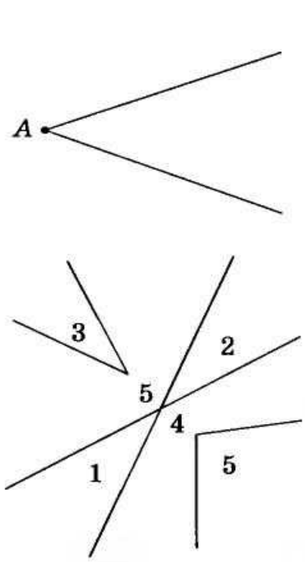


Рис. 223

12.3. Построй какой-нибудь угол AOB и горизонтальный луч MN. Построй угол, равный углу AOB, так, чтобы луч MN был его стороной. Сколько таких углов можно построить?

12.4. Верно ли, что все развёрнутые углы равны между собой?

12.5. Вырежи из бумаги модель какого-нибудь угла и раздели этот угол пополам (на два равных угла).

Проверь себя. Проще всего это сделать, сложив бумажную модель пополам (рис. 225, *а*).

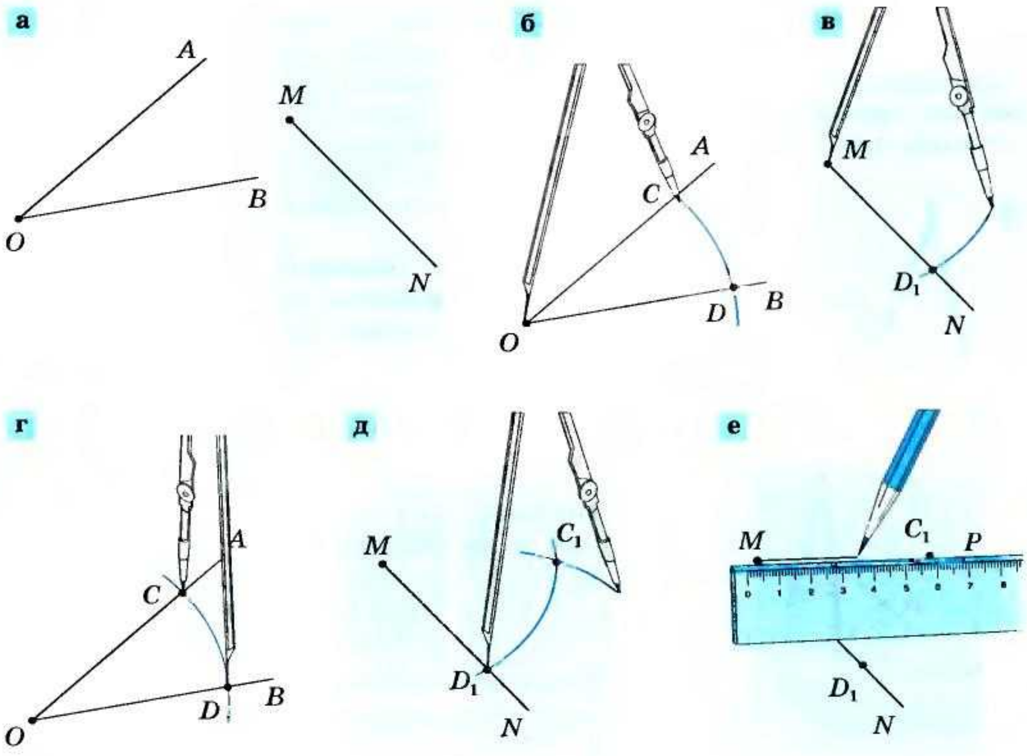


Рис. 224

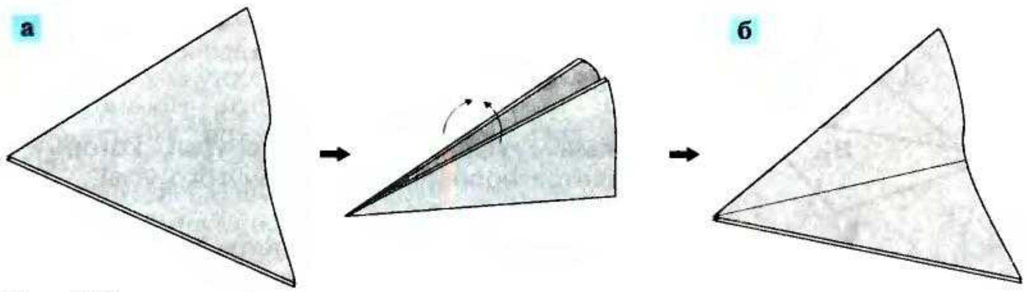


Рис. 225

Развернув получившуюся модель (рис. 225, *б*), ты видишь луч, который выходит из вершины угла и делит этот угол пополам. Этот луч называется *биссектрисой* угла.

Биссектрисой угла называется луч, исходящий из вершины угла и делящий его пополам.

Слово *биссектриса* — составное слово латинского происхождения (*bis* — повторить дважды, *secare* — отсекать). Таким образом, само строение слова подсказывает нам его смысл и объясняет, почему в этом слове нужно писать удвоенную согласную *с*.

Можно построить биссектрису угла, и не производя перегибания чертежа. Это тем более важно, что далеко не всегда можно перегнуть чертёж.

На рисунке 226 показано, как можно выполнить построение биссектрисы угла. Для этого воспользуемся циркулем и линейкой:
• на сторонах угла от его вершины откладываем два произвольных, но равных между собой отрезка OA и OB (рис. 226, *а*);
• строим произвольным радиусом две одинаковые окружности с центрами в точках A и B, при этом радиус подбираем так, чтобы эти окружности пересеклись (рис. 226, *б*, *в*);
• одну из точек пересечения построенных окружностей, например точку C, соединяем с вершиной угла (рис. 226, *г*). Построенный луч OC и является биссектрисой угла AOB. Пока мы не можем это доказать, но можем, скопировав чертёж на кальку, проверить это перегибанием кальки.

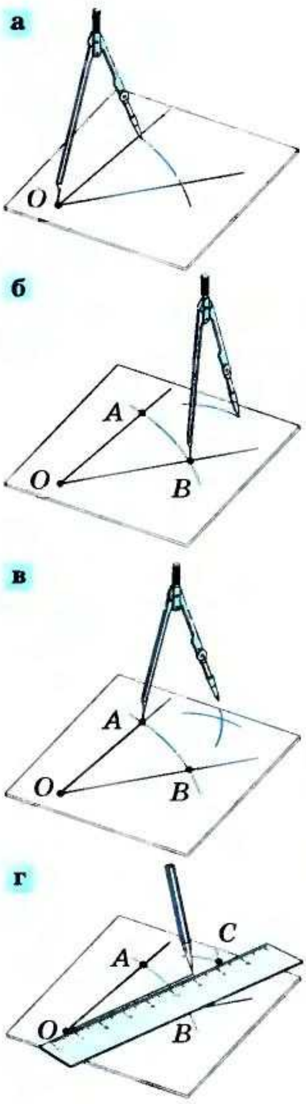


Рис. 226

12.6. Построй угол и раздели его пополам циркулем и линейкой.

12.7. Вырежи из бумаги два каких-нибудь равных угла. Построй биссектрисы этих углов. Сравни половины этих углов. Сделай вывод.

12.8. Построй биссектрису развёрнутого угла двумя способами: на модели и с помощью циркуля и линейки.

На рисунке 227 показано решение задачи. Угол, являющийся половиной развёрнутого угла, играет очень важную роль в геометрии. Поэтому он имеет даже специальное название — *прямой* угол.

Прямым углом называется угол, который является половиной развёрнутого угла.

Нам в дальнейшем понадобится шаблон прямого угла. Сделай его: начерти на плотной бумаге прямую и отметь на ней точку, отрежь по этой прямой часть листа и получи тем самым развёрнутый угол, а затем аккуратно сложи модель так, чтобы стороны этого угла совпали, и разрежь бумагу по линии сгиба. Получились модели двух прямых углов. Мы будем их использовать.

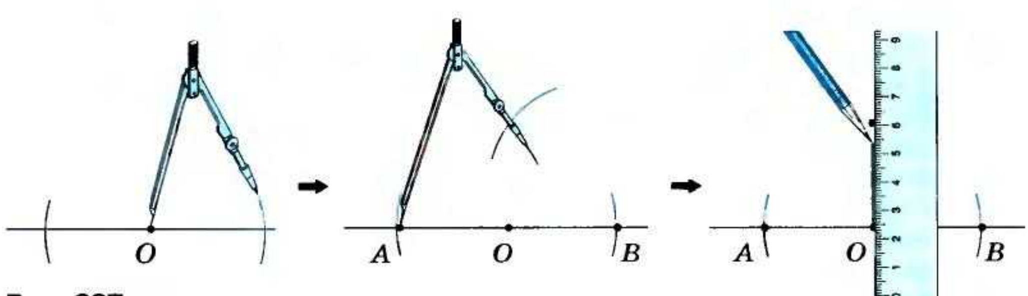


Рис. 227

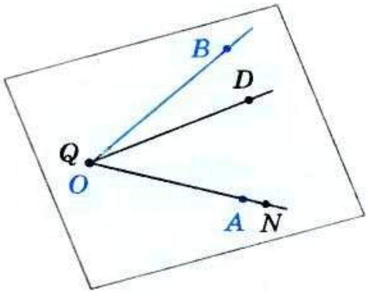


Рис. 228

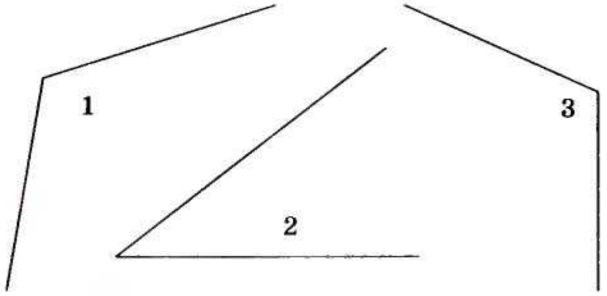


Рис. 229

12.2. Сравнение неравных углов. Вернёмся к рисунку 219 и попробуем определить, являются ли равными углы AOB и NQD. Для этого попытаемся наложить угол NQD на угол AOB (рис. 228) и заметим, что луч QD оказался между лучами OA и OB, т. е. внутри угла AOB. В таком случае говорят, что угол NQD меньше угла AOB и, наоборот, угол AOB больше угла NQD (это ясно: «веер» AOB раскрыт больше, чем «веер» NQD). Это можно записать так: $\angle NQD < \angle AOB$ и $\angle AOB > \angle NQD$.

Если при наложении двух углов вершины и две их стороны совпадают, а сторона одного из углов лежит внутри другого, то первый угол *меньше* второго.

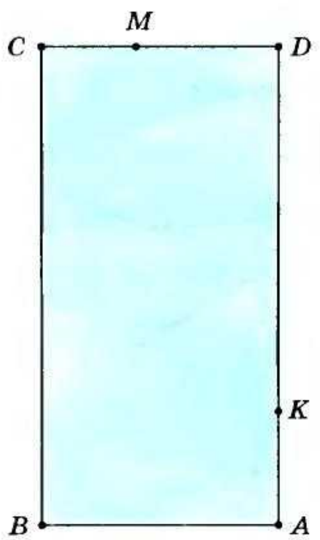


Рис. 230

12.9. На рисунке 229 изображены углы. Поставь вместо многоточия знаки >, < или = так, чтобы получились верные высказывания: а) $\angle 1 \ldots \angle 2$; б) $\angle 1 \ldots \angle 3$; в) $\angle 2 \ldots \angle 3$. Объясни своё решение.

12.10. На рисунке 230 изображены прямоугольник $ABCD$ и точки M и K на его сторонах. Запиши вместо многоточия знаки >, < или = так, чтобы получились верные высказывания: а) $\angle ABD \ldots \angle ABM$; б) $\angle KCB \ldots \angle BCA$; в) $\angle KCB \ldots \angle BCD$; г) $\angle DBC \ldots \angle DBM$.

12.11. На рисунке 231 $\angle ABC = \angle BCK$. Сравни $\angle CBA$ и $\angle BCD$.

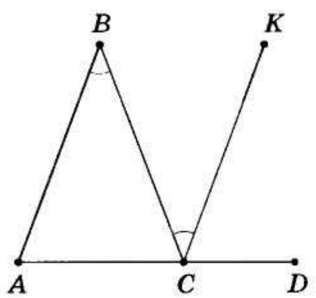


Рис. 231

12.12. Даны треугольник ABC и отрезок CD (рис. 232). Известно, что угол BCD равен углу BDC. Сравни углы BDC и BCA.

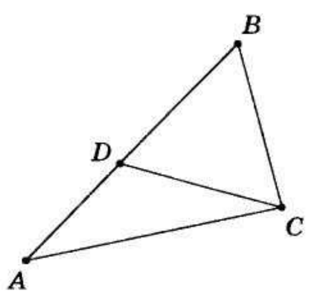


Рис. 232

Конечно, эту задачу можно решать так же, как и предыдущие, используя кальку. Но можно и по-другому, рассуждая. Нам нужно сравнить углы BDC и BCA. Легко сравнить угол BCA с углом BCD, так как эти углы имеют общую сторону CB, а луч CD лежит внутри угла BCA, т. е. угол BCD меньше угла BCA, но по условию задачи угол BCD равен углу BDC, поэтому угол BDC меньше угла BCA.

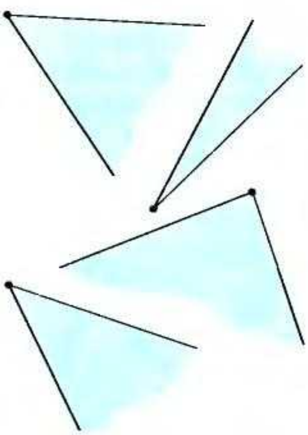


Рис. 233

На рисунке 231 некоторые углы отмечены маленькими дужками. В геометрии принято интересующие нас углы отмечать дугами и тем самым выделять их из множества других углов рисунка. При этом равные углы отмечаются одинаковым числом дуг: на рисунке 231 равны между собой углы ABC и BCK.

12.3. Виды углов. На рисунках 233, 234 изображены углы, которые не являются ни развёрнутыми, ни прямыми. Как ты думаешь, по какому принципу они разбиты на две группы? — В первой группе (рис. 233) собраны углы, которые меньше прямого (проверь это, используя шаблон прямого угла). Такие углы называются *острыми углами*. Во второй группе (рис. 234) — углы, больше прямого (проверь это!). Такие углы называются *тупыми*.

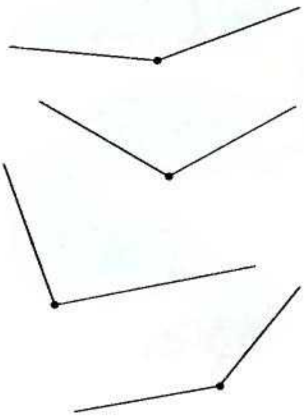


Рис. 234

> Угол, меньший прямого, называется **острым углом**. Угол, больший прямого, но меньший развёрнутого, называется **тупым углом**.

Таким образом, углы бывают прямые, острые, тупые и развёрнутые.

Двугранные углы тоже могут быть острыми (рис. 235) и тупыми (рис. 236).

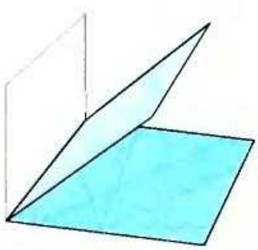


Рис. 235

12.13. Покажи на рисунке 237 прямые, острые и тупые углы.

12.14. На переднем стекле автомобиля от движения стеклоочистителя образовался угол (рис. 238). Определи вид этого угла.

12.15. Перерисуй таблицу и заполни её буквами О, П, Т, Р в зависимости от того, острый, прямой, тупой или развёрнутый угол образуют стрелки часов в указанное время.

Время	**13.00**	**15.00**	**17.00**	**18.00**	**19.00**
Вид угла					

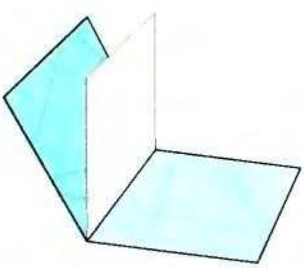


Рис. 236

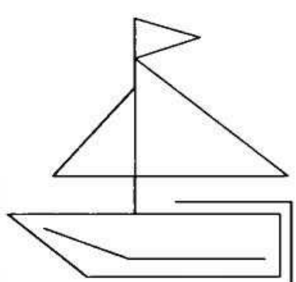


Рис. 237


Рис. 238

Замечание. В последнем случае получается угол, больший развёрнутого. Он не имеет особого названия. Мы пока с такими углами работать не будем.

12.16. Сколько острых углов содержится в гранях треугольной пирамиды, все рёбра которой равны между собой?

12.4. Угол треугольника.

Начерти в тетради какой-нибудь треугольник. Обозначь его вершины буквами A, B, C. Продлив стороны CA и CB треугольника, построй лучи CA и CB. Получился угол ACB (рис. 239). Построй таким же образом лучи AB и AC, BA и BC.

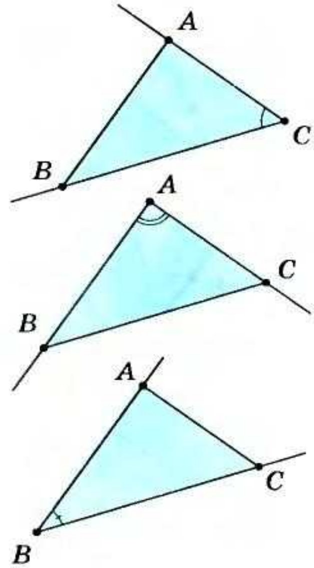


Рис. 239

Углы ACB, BAC, ABC называются также *углами треугольника* ABC. Каждый из них можно обозначить одной буквой: $\angle C$, $\angle A$, $\angle B$.

Поскольку любой отрезок можно мысленно продолжить до луча, то фигуру, образованную двумя отрезками, исходящими из одной точки, тоже называют углом.

Ясно, что замкнутая трёхзвенная ломаная именно потому называется треугольником, что она имеет три угла.

12.17. Нарисуй треугольник MNP и четырёхугольник $ABCD$. Выпиши все их углы. Какие из них острые?

12.18. Назови углы пятиугольника $MNSKP$ (рис. 240). Есть ли среди этих углов тупые?

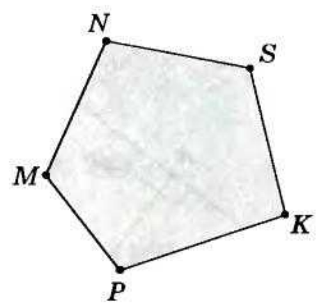


Рис. 240

12.19. Сколько вершин, сторон и углов у треугольника? У шестиугольника? Обобщи результат.

Проверь себя. Очевидно, что у любого многоугольника углов столько же, сколько вершин. А если двигаться по сторонам многоугольника от вершины к вершине, то можно увидеть, что и сторон у многоугольника столько же, сколько углов. (Поэтому треугольник можно было бы назвать *трёхвершинником* или *трёхсторонником*. Но договорились упоминать в названии только углы.)

12.20. Найди на рисунке 241: а) равнобедренные треугольники; б) разносторонние треугольники. В каждом случае сравни углы этих треугольников. Что ты заметил?

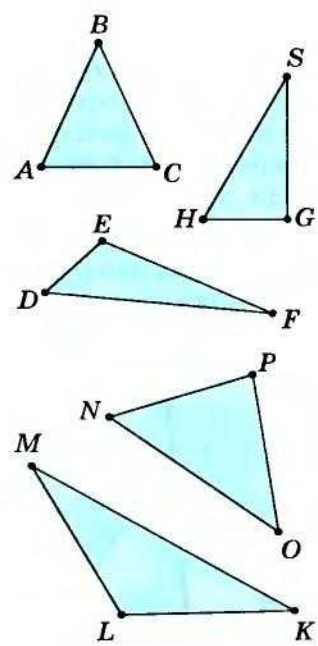


Рис. 241

Проверь себя. Углы при основании равнобедренного треугольника равны между собой.

Результат задачи 12.20 можно сформулировать так:

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны между собой.

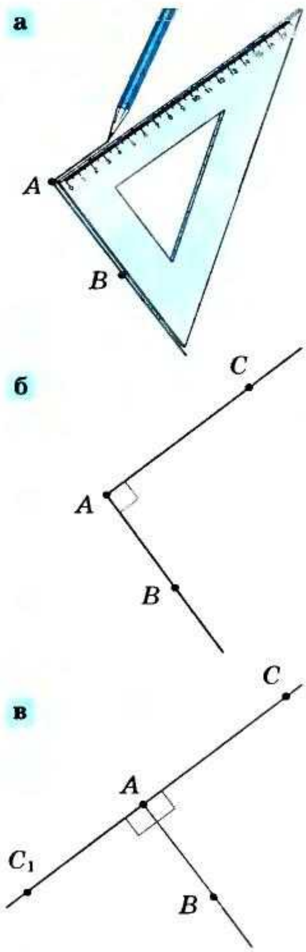


Рис. 242

12.5. Чертёжный треугольник. Чтобы начертить прямой угол или определить вид углов на рисунке, можно не пользоваться шаблоном прямого угла. Есть специальный инструмент — *чертёжный треугольник*, в нём есть прямой угол. Возьми чертёжный треугольник, найди прямой угол и убедись, что твой выбор верен. Это можно сделать с помощью шаблона.

12.21. Начерти луч AB и построй с помощью чертёжного треугольника прямой угол CAB так, чтобы этот луч являлся одной из его сторон. Подумай, сколько решений имеет эта задача. Объясни свой ответ.

Проверь себя. Луч AB должен стать одной стороной прямого угла, значит, точка A должна быть его вершиной, поэтому приложим чертёжный треугольник так, чтобы одна сторона его прямого угла совпала с лучом AB. Тогда, проведя вдоль другой стороны луч AC (рис. 242, *а*), мы начертим прямой угол (рис. 242, *б*). Эта задача имеет два решения, так как луч AC можно построить по разные стороны от прямой AB (рис. 242, *в*).

12.22*. Начерти тупой угол AOB. Построй карандашами разного цвета все прямые углы так, чтобы: а) луч OA оказался стороной построенного прямого угла; б) луч OB оказался стороной построенного прямого угла.

12.23. Начерти прямую AB и отметь точку C, не лежащую на этой прямой. С помощью чертёжного треугольника построй прямой угол так, чтобы одна его сторона лежала на прямой AB, а другая проходила через точку C.

Совет. Проведи построение по следующему плану:
- положи треугольник так, как показано на рисунке 243, *а*;
- передвигай треугольник вдоль прямой до тех пор, пока точка C не окажется лежащей на другой стороне его прямого угла (рис. 243, *б*);
- вдоль другой стороны прямого угла треугольника через точку C проведи луч с началом на прямой AB (рис. 243, *в*).

12.24. Построй тупой угол AOB и проведи внутри него: а) луч OC так, чтобы угол COB был прямым; б) луч OK так, чтобы угол AOK был прямым; в) луч OM так, чтобы углы AOM и BOM были острыми. Можно ли провести луч OP так, чтобы получилось 3 тупых угла?

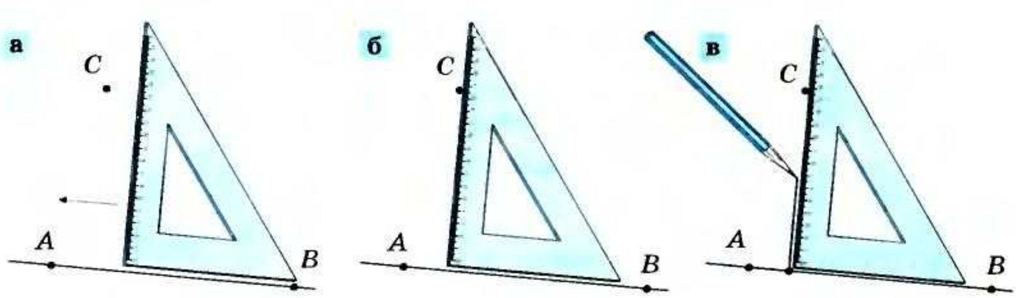


Рис. 243

12.25. Построй три угла: $\angle K$, $\angle L$ и $\angle M$ — так, чтобы они были все разного вида и $\angle K$ — самый маленький, а $\angle M$ — самый большой среди них. Может ли угол K быть тупым?

12.26*. Придумай, как с помощью чертёжного треугольника проверить, является ли данный двугранный угол прямым.

Проверь себя. Возможное решение задачи приведено на рисунке 244.

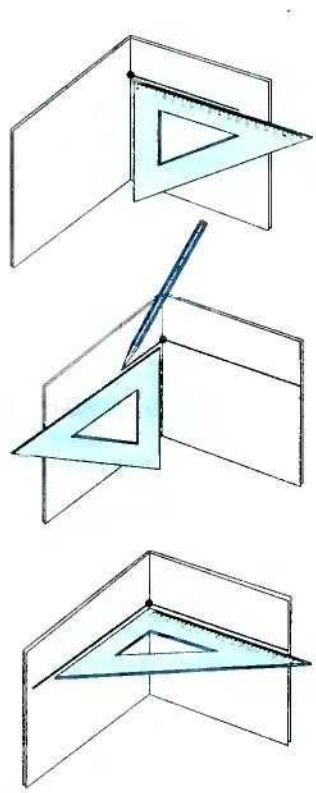


Рис. 244

12.27. Проверь с помощью чертёжного треугольника верно ли, что в вашем классе стены образуют прямые двугранные углы.

12.6. Перпендикуляр к прямой.

Мы переходим к одному из самых часто встречающихся в практике понятий — перпендикуляру к прямой или к плоскости. Начнём с перпендикуляра к прямой.

12.28. Построй какую-нибудь прямую a и отметь вне этой прямой точку A. Построй прямой угол так, чтобы одна его сторона проходила через точку A, а другая лежала на прямой a.

Решение этой задачи представлено на рисунке 245, *а*. Вершина построенного угла на рисунке 245, *б* обозначена буквой B. Про такой отрезок тоже говорят, что он образует с прямой a прямой угол или что он *перпендикулярен прямой* a. Этот отрезок называют также *перпендикуляром*, проведённым из точки A к прямой a.

Перпендикуляром, проведённым из точки A к прямой, называется отрезок AB, один конец которого лежит на этой прямой и который образует с ней прямой угол (рис. 245, *б*). Конец перпендикуляра к прямой, лежащий на этой прямой, называют *основанием* перпендикуляра.

12.29. Построй какую-нибудь прямую d и отметь на этой прямой точку B. Проведи какой-нибудь перпендикуляр BA к прямой d.

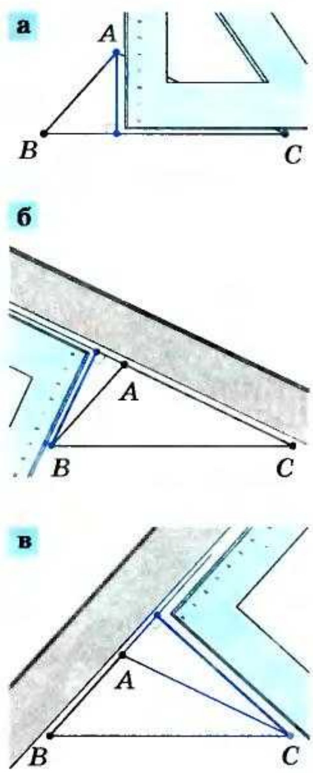


Рис. 246

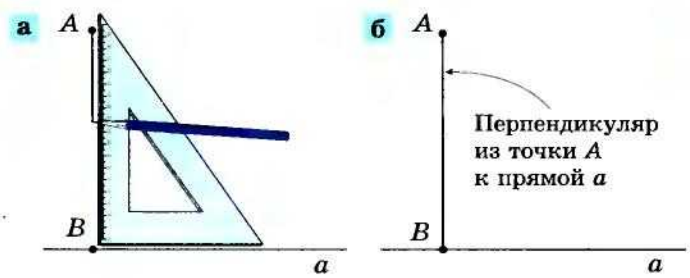


Рис. 245

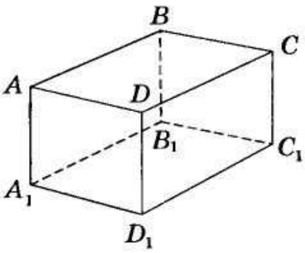


Рис. 247

12.30. Построй какой-нибудь треугольник ABC. Проведи перпендикуляр: а) из точки A к прямой BC; б) из точки B к прямой AC; в) из точки C к прямой AB.

Проверь себя. На рисунке 246 показано, как с помощью чертёжного треугольника и линейки может быть выполнено построение в каждом случае.

12.31. На рисунке 247 изображён прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Перпендикуляром к каким прямым является отрезок AB?

12.7. Перпендикуляр к плоскости. Понятие перпендикуляра к плоскости — одно из важнейших понятий, которое используют архитекторы и строители. Чаще всего оно встречается в тех случаях, когда нужно что-нибудь установить вертикально (прямо).

На рисунке 248, *а* изображён стоящий на платформе фонарь. Как ты думаешь, он стоит прямо или нет? Нам кажется, что прямо. Но для того чтобы с уверенностью ответить на этот вопрос, придётся обойти его и посмотреть на него со всех сторон. На рисунке 248, *б*

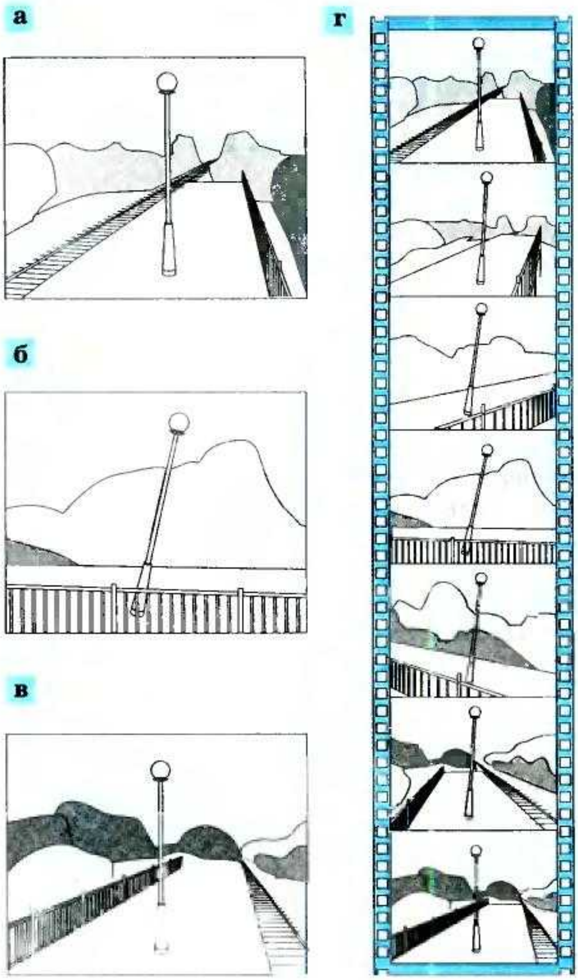


Рис. 248

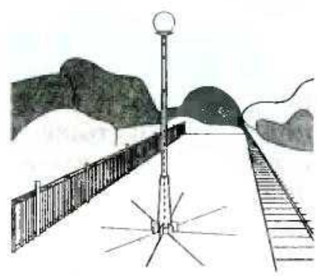


Рис. 249

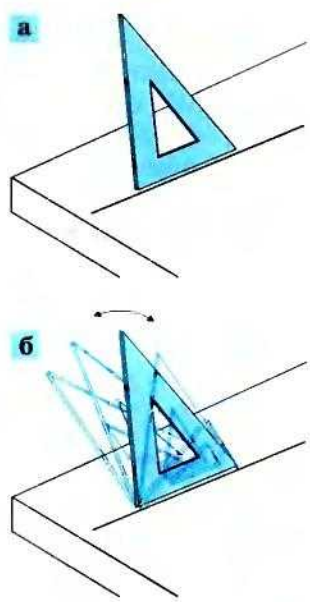


Рис. 250

показано, что с некоторой стороны мы можем увидеть фонарь наклонённым. При дальнейшем обходе в некоторый момент нам опять покажется, что фонарь стоит прямо (рис. 248, *в*). Это будет тогда, когда мы выйдем на ту же прямую, вдоль которой смотрели сначала.

Если бы мы зафиксировали наши наблюдения на киноплёнку (рис. 248, *г*), то получилось бы, что только на первом и последнем кадрах фонарь изображён вертикально.

Итак, фонарь оказался перпендикулярным только одной прямой, находящейся в плоскости платформы.

Если же, обходя фонарь со всех сторон, мы не обнаружим никакого наклона, т. е. увидим, что отрезок, его изображающий, перпендикулярен любой прямой плоскости (рис. 249), то скажем, что фонарь стоит прямо, вертикально — с геометрической точки зрения, перпендикулярно плоскости платформы.

Исходя из этих практических соображений, в геометрии так и определяют перпендикуляр к плоскости:

Отрезок называется **перпендикуляром к плоскости**, если он является перпендикуляром к любой прямой, которая проходит через его конец и лежит в этой плоскости. Конец перпендикуляра к плоскости, лежащий в этой плоскости, называют *основанием* перпендикуляра.

Чтобы построить перпендикуляр к плоскости, воспользуемся чертёжными треугольниками:

• нарисуем на листе бумаги прямую и приложим к ней какой-нибудь стороной прямого угла чертёжный треугольник (рис. 250, *а*); понятно, что это можно сделать по-разному: треугольник не закрепляется в одном положении (рис. 250, *б*);

• затем приложим второй чертёжный треугольник к другой прямой и расположим его так же, как первый (рис. 251, *а*);

• совмещая теперь свободные стороны прямых углов этих треугольников (рис. 251, *б*), увидим, что они «встали прямо», т. е. оказались перпендикулярными плоскости стола.

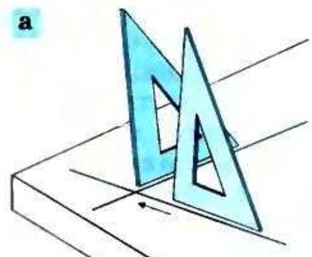
Оказалось, не обязательно брать много чертёжных треугольников и строить перпендикуляры к разным прямым плоскости. Достаточно взять два треугольника и две прямые на плоскости.

Оказывается, если отрезок перпендикулярен двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то он перпендикулярен этой плоскости.

Таким образом, для проверки того, прямо ли стоит фонарь (перпендикулярен ли он плоскости платформы), не обязательно было обходить его со всех сторон. Можно было посмотреть на него с двух не противоположных сторон.

Для проведения перпендикуляра к плоскости пользуются отвесом. Мы тоже пользова-

а



б

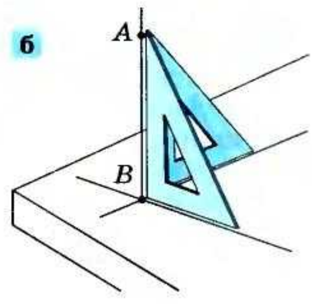


Рис. 251

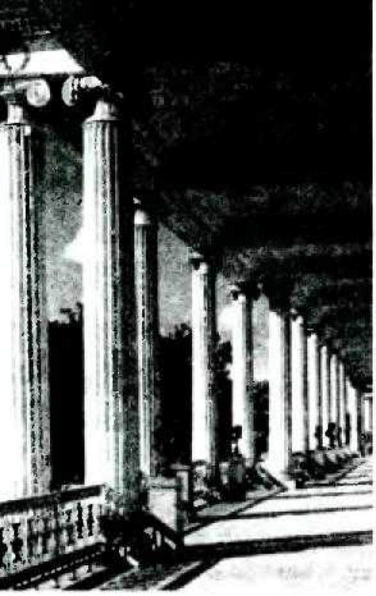


Рис. 252

лись им при изготовлении цилиндра, когда проверяли, прямой он или наклонный. Заметим, что использование отвеса удобно, но только тогда, когда нужно проверить перпендикулярность отрезка горизонтальной плоскости.

Слово *перпендикуляр* происходит от латинского слова *pendere — висеть* и означает *отвесный*.

12.32. Используя понятие перпендикуляра к плоскости, дай определение: а) прямого цилиндра; б) прямого кругового конуса.

12.33. Докажи, что ребро куба перпендикулярно плоскости грани, которую пересекает.

12.34. Найди различные перпендикуляры к плоскостям и прямым, использованные архитектором (рис. 252).

§ 13 Ещё раз о видах треугольников

13.1. Что такое классификация? Мы узнали, что бывает четыре вида углов, не больших развёрнутого: острые, прямые, тупые и развёрнутые. Математики говорят, что мы провели *классификацию* углов.

Классификация фигур или предметов — это разделение их по группам (по классам) так, чтобы каждый предмет попал только в какой-нибудь один класс.

С различными классификациями мы встречаемся в нашей жизни очень часто. Например, в школе учащихся разделяют по возрасту на классы: первый класс, второй класс, третий класс и т. д. — это одна классификация всех учащихся школы, а можно было бы всех учащихся разделить на две группы: мальчики и девочки — это другая классификация всех учащихся школы и т. д.

Рассмотрим ещё один пример. Представь себе, что тебе нужно расставить книги в шкафу по полкам.

Расставить книги можно многими способами. Например, так:

1 способ: на одну полку поставить книги из серии «Детективы», на другую — из серии «Фантастика и приключения», на третью — из серии «Исторические романы», на четвёртую — разные словари и справочники и т. д.;

2 способ: расставить книги в зависимости от высоты книг: на одну полку поставить самые высокие книги, на вторую — самые низкие и т. д.;

3 способ: расставить книги в зависимости от цвета их корешков: например, на первую полку поставить книги с красным корешком, на вторую — книги с зелёным корешком, на третью — с синим корешком и т. д.;

4 способ: расставить книги по полкам без всякого порядка.

В первых трёх случаях мы расставляли книги, руководствуясь разными соображениями, и получили три разные классификации книг: по жанру, по высоте, по цвету их корешков.

В четвёртом случае классификацию книг мы не проводили. Однако можно ещё сказать, что это самая простая классификация, в которой все книги принадлежат только одному классу. В этом случае мы не учитывали различие между книгами.

Приведи ещё пример какой-нибудь классификации книг, используя которую, можно расставить книги по полкам. Приведи также примеры классификаций, с которыми ты встречался на уроках русского языка, биологии.

Мы уже встречались с классификацией геометрических фигур, когда изучали линии и треугольники.

Ты помнишь, что в зависимости от разных свойств линий мы выделяли замкнутые и незамкнутые, плоские и пространственные линии. Это две разные классификации линий. Мы рассматривали ещё прямые, кривые и ломаные линии. Но такое деление классификацией назвать нельзя, так как можно нарисовать линию, которая не является ни той, ни другой, ни третьей (рис. 253), а это означает, что есть такие линии, которые не входят ни в один из предложенных классов.

Распределение линий на замкнутые и ломаные тоже классификацией не является, так как бывают линии, которые являются одновременно и замкнутыми, и ломаные. А такие линии нужно было бы отнести сразу в два класса.

Вспомним и про треугольники. В зависимости от того, как связаны между собой длины сторон какого-нибудь треугольника, мы относили его либо к классу равнобедренных, либо к классу разносторонних треугольников. А в классе равнобедренных треугольников мы различали треугольники равносторонние и неравносторонние (рис. 254).

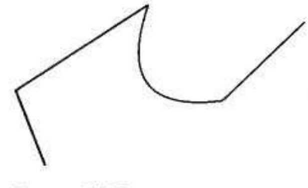


Рис. 253

Рис. 254

13.2. Новая классификация треугольников.

Теперь проведём другую классификацию треугольников, в зависимости от видов углов этих треугольников. Сначала построим треугольники, в которых имеются разные углы. Понятно, что развёрнутого угла в треугольнике быть не может, так как иначе все вершины треугольника лежали бы на одной прямой.

13.1. Построй три треугольника ABC: один треугольник с тупым углом A (рис. 255, *а*), другой — с прямым углом A (рис. 255, *б*), а третий — с острым углом A (рис. 255, *в*).

Проверь себя. Посмотри, например, на рисунок 256.

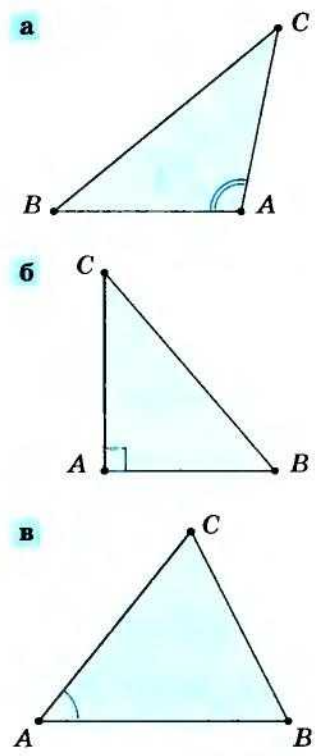


Рис. 255

13.2. Определи, какие углы с вершинами в точках B и C — прямые, тупые или острые — получились при решении предыдущей задачи.

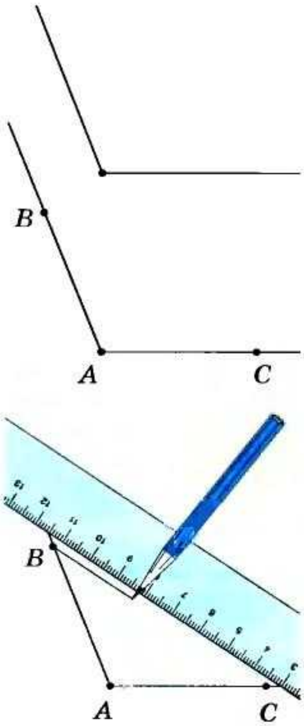


Рис. 256

Теперь попробуем построить треугольник, в котором было бы два тупых (или два прямых, или два острых) угла.

Начнём с первого случая. Начерти какой-нибудь отрезок (пусть это будет отрезок AB) (рис. 257) и по одну сторону от прямой AB отложи два каких-нибудь тупых угла — с вершиной A и с вершиной B. Треугольник не получается: стороны построенных углов не пересекаются, так как неограниченно удаляются друг от друга. Становится понятно, что в треугольнике не может быть два (а тем более три) тупых угла.

Попробуем с помощью чертёжного треугольника начертить треугольник с двумя прямыми углами, действуя так же, как и в прошлый раз.

И опять получается (рис. 258), что стороны построенных углов не пересекаются: нельзя построить треугольник с двумя (а тем более с тремя) прямыми углами.

Такой же результат мы получим, если захотим построить треугольник, в котором

Попытка 1:
треугольник с двумя тупыми углами

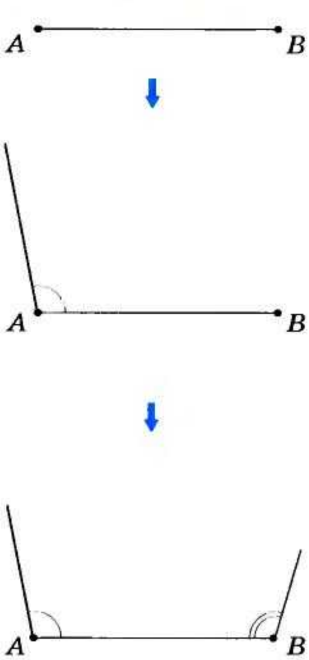


Рис. 257

Попытка 2:
треугольник с двумя прямыми углами

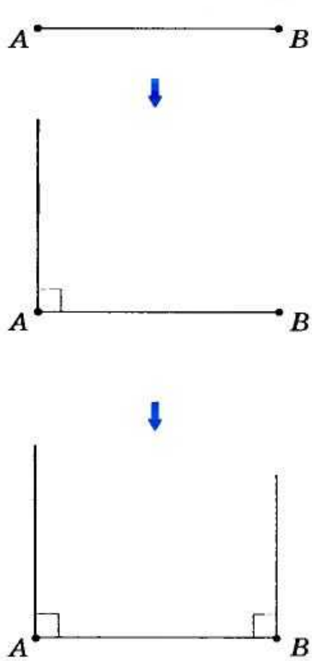


Рис. 258

Попытка 3:
треугольник с двумя острыми углами

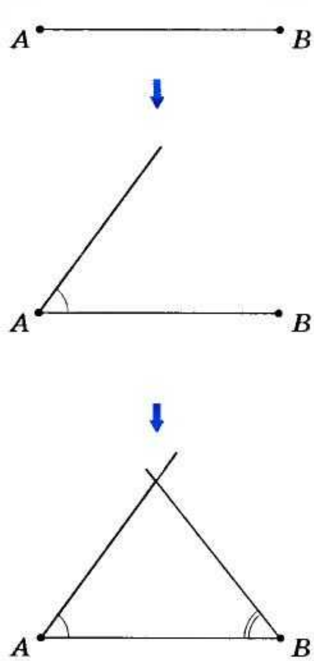


Рис. 259

один угол прямой, другой — тупой, а третий — острый. Это означает, что нет треугольников, в которых только один угол острый.

Треугольники с двумя острыми углами мы уже строили не один раз. Но можно пойти и только что рассмотренным путем (рис. 259).

Итак, в треугольнике могут быть три или два острых угла. В первом случае треугольник называется *остроугольным* (рис. 260, *а*).

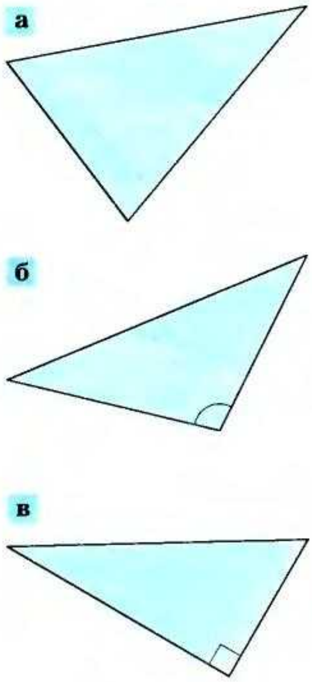


Рис. 260

Треугольник, в котором все углы острые, называется **остроугольным треугольником**.

Если же в треугольнике только два острых угла, то мы будем его называть по тому, какой в нём третий угол — тупой или прямой. В первом случае треугольник будем называть *тупоугольным* (рис. 260, *б*), во втором — *прямоугольным* (рис. 260, *в*).

Треугольник, в котором есть тупой угол, называется **тупоугольным треугольником**. Треугольник, в котором есть прямой угол, называется **прямоугольным треугольником**.

13.3. Среди треугольников, изображённых на рисунке 261, найди прямоугольные, тупоугольные и остроугольные. Ответ запиши в три столбика.

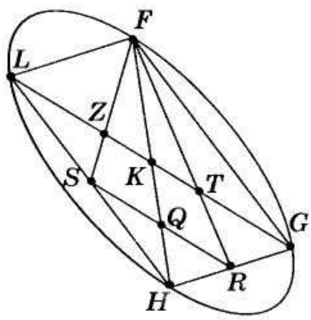


Рис. 261

Мы составили новую классификацию треугольников: каждый треугольник обязательно попадает в какой-нибудь класс (т. е. является прямоугольным, тупоугольным или остроугольным), но никакой треугольник не попадает сразу в два класса: тупоугольный треугольник не может быть прямоугольным и т. д.

§ 14 Многогранные углы

14.1. Что такое многогранный угол? Из углов, так же как и из отрезков, можно конструировать новые фигуры. Скопируй на кальку углы, изображённые на рисунке 262, и вырежи из картона их модели. Выполни с этими углами следующие упражнения.

14.1. Из каких-нибудь двух углов сконструируй угол: а) тупой; б) острый; в) прямой.

14.2. Из каких-нибудь трёх углов составь: а) тупой угол; б) развёрнутый угол.

14.3. Попытайся среди данных углов найти ещё три угла, сумма которых равна развёрнутому углу. Какие это углы?

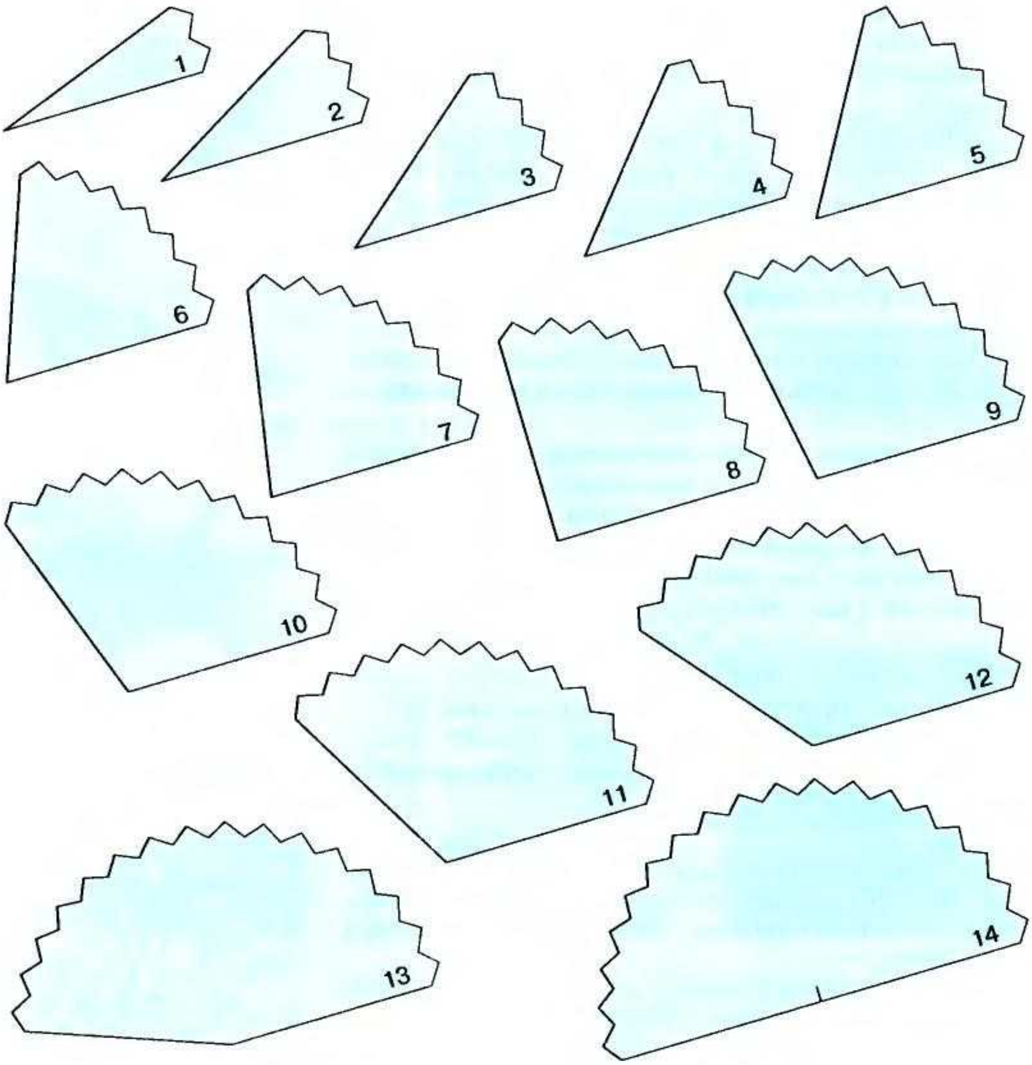


Рис. 262

14.4. Возьми углы *10*, *11* и *12*, сложи их так, чтобы каждые два из них имели общую сторону (так же, как, конструируя треугольник, ты прикладывал отрезки друг к другу). Какую фигуру ты получил?

Проверь себя. Получился *полный* угол — угол, который заполняет всю плоскость (рис. 263).

14.5. Возьми теперь углы *5*, *10* и *12* и попробуй составить какую-нибудь фигуру, прикладывая углы друг к другу так, чтобы каждые два угла имели общую сторону.

Совет. Решение задачи показано на рисунке 264. Используй скотч.

Чтобы решить эту задачу, приходится «выйти из плоскости». Сконструированная пространственная фигура называется *трёхгранным углом*.

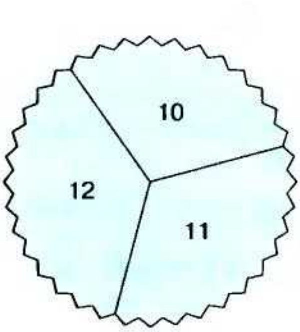


Рис. 263

Трёхгранный угол образован тремя плоскими углами *10*, *12*, *5* так, что каждые два из них имеют общую сторону. Эти углы называются *гранями* трёхгранного угла. Общая вершина граней называется *вершиной* трёхгранного угла, а стороны его граней — *рёбрами* трёхгранного угла (рис. 265).

14.6. Возьми модель куба. Посмотри на какую-нибудь его вершину. Грани куба, сходящиеся в этой вершине, образуют трёхгранный угол. Посмотри на другую вершину куба. Какой угол образуют грани куба, сходящиеся в этой вершине? Сколько всего трёхгранных углов в кубе?

Трёхгранный угол образуют также любые три грани пирамиды, изображённой на рисунке 266, *а*. Кроме трёхгранных углов, бывают ещё четырёхгранные, пятигранные, шестигранные и т. д. углы в зависимости от того, из какого количества плоских углов они сконструированы (рис. 267). Трёхгранные, четырёхгранные, пятигранные и т. д. углы — всё это *многогранные* углы.

У четырёхугольной пирамиды (см. рис. 266, *б*) треугольные боковые грани образуют четырёхгранный угол.

14.7. Сконструируй из *3*, *5*, *7*, *12* углов (см. рис. 262) модель четырёхгранного угла. Можно ли из тех же углов построить другой четырёхгранный угол, отличный от того, что ты уже построил? Ответ обоснуй: объясни или приведи пример.

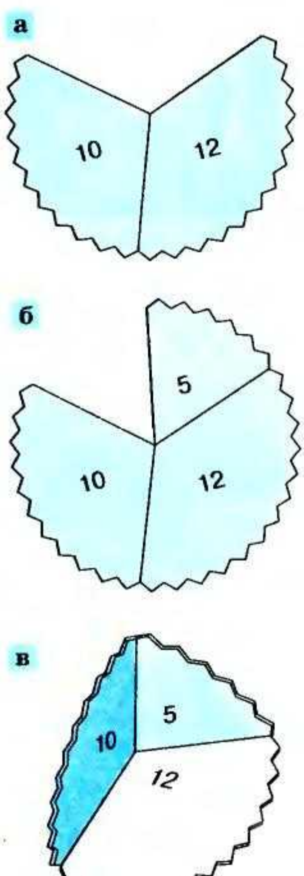


Рис. 264

Рис. 265

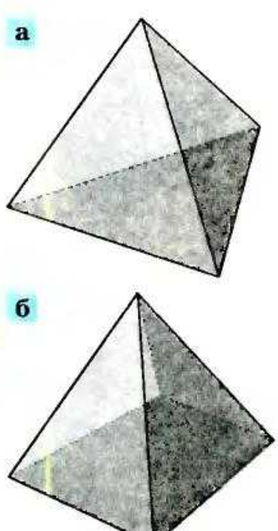


Рис. 266

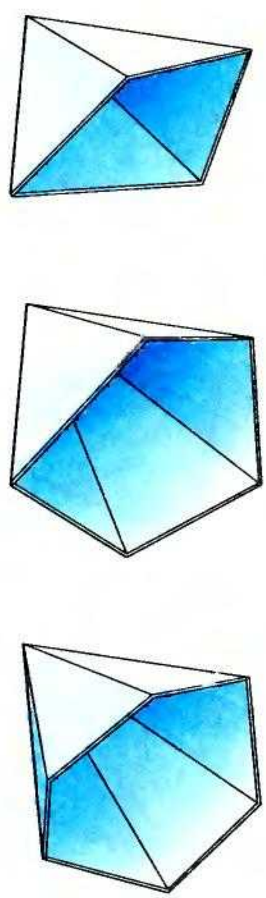


Рис. 267

6–13844 Ходот.

▼ **Проверь себя.** Оказывается, можно (рис. 268, *а*), причём не один. Например, можно «пошевелить» грани четырёхгранного угла так, что при этом мы получим другой четырёхгранный угол (рис. 268, *б*) подобно тому, как можно получать различные четырёхугольники, соединив шарнирно четыре отрезка. Можно надавить на одно из рёбер четырёхгранного угла (рис. 268, *в*), тогда мы получим другой четырёхгранный угол.

С трёхгранным углом такую операцию проделать нельзя (проверь это!), поэтому его называют *жёстким*.

14.8. На рисунке 269 изображены несколько многогранников. Определи, какие многогранные углы есть в каждом из этих многогранников.

14.9. Сосчитай, сколько граней и рёбер имеет: а) трёхгранный; б) четырёхгранный; в) пятигранный угол. Сделай вывод.

14.2. Как сделать модель многогранного угла. Можно построить модель многогранного угла следующим образом.

Возьми лист плотной бумаги, вырежи из него круг, начерти на нём шесть лучей, исходящих из одной точки, как показано на рисунке 270, *а*, и вырежи один угол, оставив небольшой клапан (рис. 270, *б*). Ты получил развёртку пятигранного угла. Согни теперь

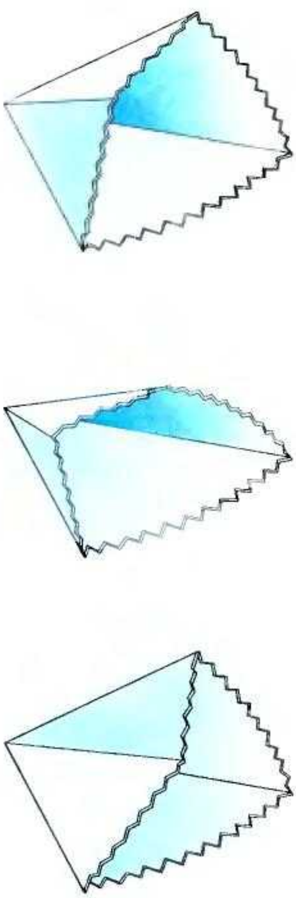


Рис. 268

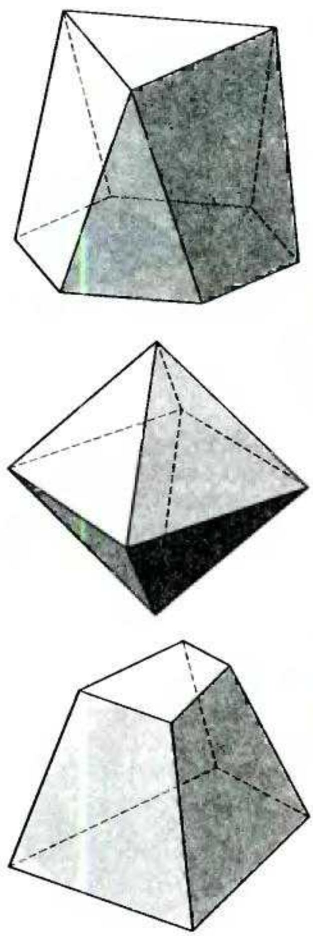


Рис. 269

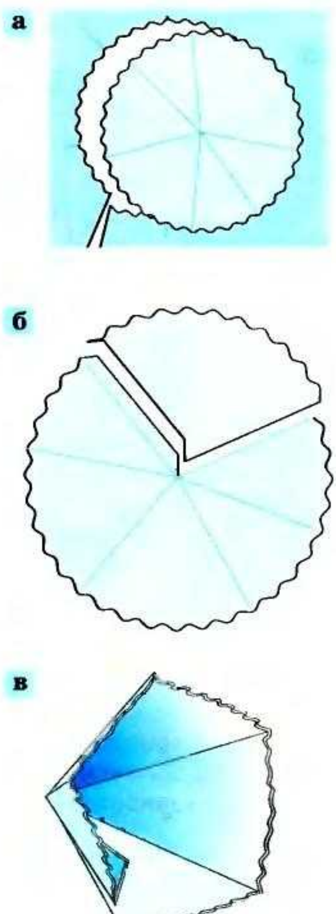


Рис. 270

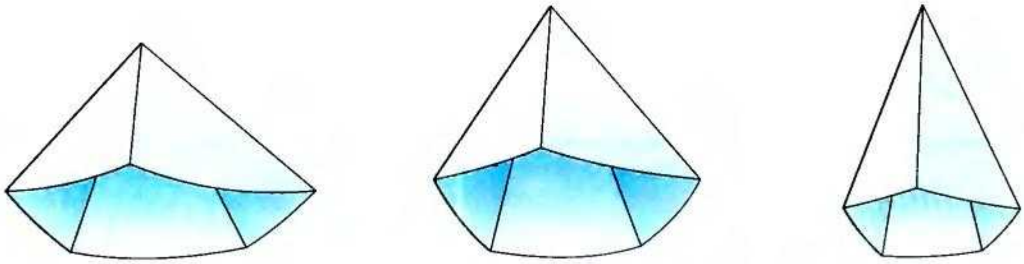


Рис. 271

картон по сторонам плоских углов и совмести края (рис. 270, *в*) — и получится модель пятигранного угла. Обрати внимание на то, что, вырезая разные по величине углы из данного полного угла, можно получить разные пятигранные углы — более «острые» и менее «острые» (рис. 271). Для многогранных углов в геометрии нет понятия острых и тупых углов, однако мы употребляем эти слова для создания соответствующего представления.

14.10. Придумай, как сделать модель шестигранного угла. Сделай её.

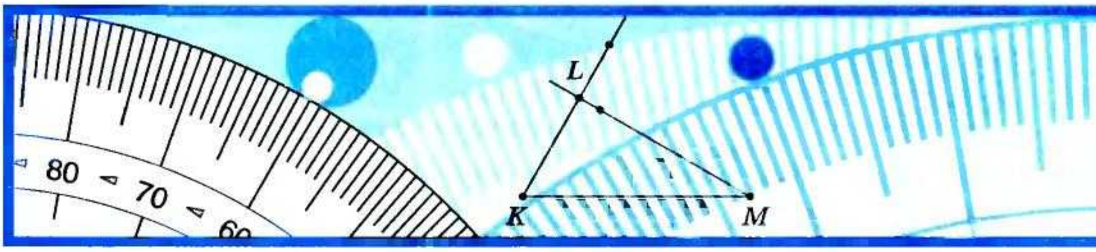
14.11. Сделай модель трёхгранного угла, все грани которого — прямые углы.

14.12. Сделай модель трёхгранного угла, одна грань которого — острый угол, вторая грань — прямой угол, а третья грань — тупой угол.

14.13. Сделай модель четырёхгранного угла, у которого две грани — тупые углы, а две другие грани — острые углы.

Глава 4

Измерения



§ 15 Измерение отрезков

15.1. Что значит измерить отрезок? Для измерения длины предмета можно воспользоваться палкой или верёвкой, прикладывая её к этому предмету. В геометрии такая палка (или верёвка) тоже представляется отрезком. Он называется *единицей измерения длины* или *единичным отрезком*.

Измерить длину какого-нибудь отрезка в заданных единицах измерения — значит найти число, показывающее, сколько единичных отрезков или его частей поместится в данном отрезке.

Для обозначения длины отрезка иногда используют значок $|\ |$.

15.1. Некоторые единицы длины: миллиметр, сантиметр, метр — тебе известны. Какие ещё единицы длины ты знаешь?

15.2. Измерь длину своего письменного стола, приняв за единицу длины: а) ширину тетради по математике; б) длину учебника по геометрии.

15.3. Измерь стороны и диагонали пятиугольника $ABCDE$ (рис. 272) и выпиши те отрезки, которые имеют равные длины. Проверь, не используя линейку, что эти отрезки равны между собой.

15.4. Начерти отрезок CD длиной 6 см. а) Построй отрезок CK длиной 2 см так, чтобы точка C принадлежала отрезку KD. Найди длину отрезка KD. б) Построй отрезок DB так, чтобы точка D принадлежала отрезку CB и чтобы длина отрезка CB была равна 10 см. в) Построй отрезок BO длиной 3 см так, чтобы точка B не лежала на отрезке DO. Верно ли, что длина DO равна 7 см?

15.5*. Даны отрезки AC и CD, $|AC| = 4$ см, $|CD| = 3$ см. Верно ли, что длина отрезка AD равна 7 см?

15.6*. Как ты думаешь, изменится ли значение длины отрезка при увеличении единицы длины? Если да, то как?

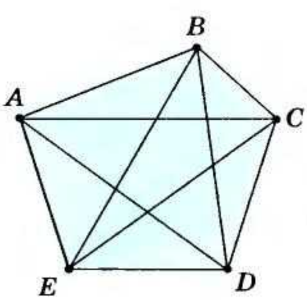


Рис. 272

Решая задачи, ты вспомнил важные свойства длины отрезка:

равные отрезки имеют равные длины;

если точка разбивает отрезок на две части, то длина всего отрезка равна сумме длин его частей.

15.2*. Различные меры длины. За свою историю человечество придумало много разных единиц (или, ещё говорят, мер) длины. Сначала каждый народ имел свои меры длины. В качестве единиц измерения длины люди тогда нередко использовали части своего тела, длину своих шагов и другие величины, которые были всегда доступны.

Например, в III в. до н. э. индусы имели в «системе мер протяжения» такие единицы: малая пылинка, средняя пылинка, поднятая ветром пылинка, зерно маковое, горчичное, ячменное, сустав пальца, локоть.

На Руси самой маленькой мерой длины был вершок. *Вершок* — это верх указательного пальца: две верхних его фаланги (рис. 273). В Англии мера длины, определённая длиной пальца, называлась *дюймом*, а в Средней Азии — *исбъа*.

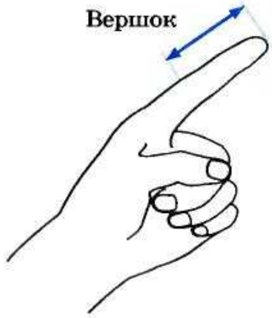


Рис. 273

15.7. Возьми какую-нибудь книгу, измерь её длину в вершках и попроси это сделать кого-нибудь из родственников. Сравни результаты.

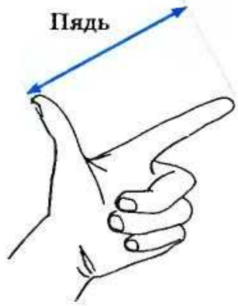


Рис. 274

Понятно, что у каждого человека указательный палец имеет свою длину, а значит, у каждого человека — свой вершок. Поэтому, измерив длину предмета в вершках, разные люди получат разные результаты.

Кроме вершка, на Руси мерами длины были пядь, шаг, локоть. Большие расстояния измерялись полётом стрелы или «аки далёко здоровый мужик камень бросить может». Немного позже появились аршин и верста.

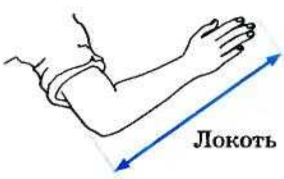


Рис. 275

Пядь — это расстояние между растянутыми большим и указательным пальцами одной руки (рис. 274). *Локоть* — это длина руки от локтевого сгиба до кончика среднего пальца (рис. 275). Жители Среднеазиатского Междуречья называли эту единицу измерения *зира*.

15.8. Измерь в пядях и локтях длину своего письменного стола.

Начиная с X в. в строительных и земляных работах на Руси использовали сажени и версту. Саженей было несколько: малая, прямая (или простая), маховая, косая (или казённая), великая косая. Рисунок 276 даёт представление о том, как определялись сажени.

Прямая сажень — это расстояние между кончиками средних пальцев, вытянутых в стороны рук (рис. 276).

Косая сажень — это расстояние между пальцами вытянутой вверх правой (левой) руки и носком отставленной левой (правой) ноги.

Рис. 276

Рис. 277

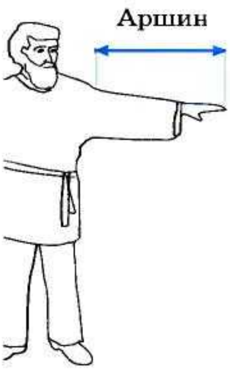


Рис. 278

На основе каждой сажени были определены другие меры длины: полусажень, локоть $\left(\frac{1}{4}\text{ сажени}\right)$, пядь $\left(\frac{1}{8}\text{ сажени}\right)$.

Верста — это старинная русская мера пути, равная 500 саженям. Сейчас на дорогах для измерения пути ставят километровые столбы, а раньше ставили верстовые. До сих пор на Московском проспекте в Петербурге сохранились верстовые столбы, отмечавшие путь из Петербурга в Москву (рис. 277).

В XVI в. в России появилась новая единица измерения длины — аршин. *Аршин* — расстояние от плеча до конца вытянутой руки взрослого человека (рис. 278). В XVIII в. Россия стала больше торговать с Западной Европой. Нужны были меры, которые было бы легче сравнивать с западными мерами длины. Поэтому решили сохранить названия старых мер, но заново определить их длину. Для определения длин новых русских мер Пётр I предложил воспользоваться английскими мерами, так как они не менялись уже несколько столетий, и ими часто пользовались в торговле.

Основные английские меры длины — это *ярд*, *фут* и *дюйм*. Эти единицы длины тоже определены частями тела взрослого человека.

Фут по-английски означает «ступня»; *дюйм* — голландское слово и означает «большой палец», а также первую фалангу большого пальца руки. Поначалу 1 дюйм определяли как длину трёх ячменных зёрен. Но затем договорились считать 1 дюйм равным одной двенадцатой части фута. (Есть и более мелкие единицы длины, имеющие геометрические названия: линия и точка. Один дюйм состоит из 10 линий, одна линия — из 10 точек.)

Именно дюйм, фут и ярд были положены в основу новых русских мер. По указу Петра I сажень, аршин, пядь и вершок определялись так, чтобы выполнялись равенства:

1 сажень = 3 аршинам, 1 аршин = 4 пядям, 1 пядь = 4 вершкам,

1 сажень = 7 футам, 1 фут = 12 дюймам.

15.3. Метрические меры длины. С развитием торговых связей у каждого народа возникала необходимость переводить свои национальные меры длины в меры длины других стран. А это очень сложная задача. Поэтому появилась потребность в единых международных единицах длины, определяемых через что-то более постоянное, чем длина ступни или макового зерна. Так появился *метр*. Он был определён как одна сорокамиллионная часть парижского меридиана. Был изготовлен эталон метра — металлический брус из сплава платины и иридия, и на него нанесены два штриха, расстояние между которыми было принято за единицу длины и названо метром. Вместе с метром родилась метрическая система мер. Она включает сам метр и другие единицы длины, которые получаются из метра умножением или делением на 10, 100 и т. д. Некоторые из этих единиц ты знаешь. Это миллиметр, сантиметр, дециметр и километр.

Все эти слова сложные. Один из корней у них общий — *метр*. Корни *милли-*, *санти-*, *деци-* имеют латинское происхождение и обозначают соответствующую часть метра:

милли (*milli*) — тысячный, значит, один миллиметр — это $\frac{1}{1000}$ метра;

санти (*centum*) — сотая, значит, один сантиметр — это $\frac{1}{100}$ метра;

деци (*decima*) — десятая, таким образом, один дециметр — это $\frac{1}{10}$ метра.

С корнем *санти* (*centum*) мы встречаемся также в словах *процент* $\left(\frac{1}{100}\text{ числа}\right)$, *центнер* — 100 кг. Вспомни ещё какие-нибудь слова, имеющие тот же корень. Греческий корень *кило* (*chilio*) переводится как *тысяча*, поэтому 1 км — это 1000 м (так же как 1 кг — это 1000 г).

Итак, между различными единицами длины метрической системы существуют следующие соотношения:

1 км = 1000 м 1 м = 1000 мм 1 м = 100 см
1 м = 10 дм 1 дм = 10 см 1 см = 10 мм

После введения метра одни страны сразу приняли его, другие же, например Англия, до сих пор измеряют длины в дюймах, футах, ярдах и милях. Но всем пришлось пересчитать свои меры в международные и, наоборот, измерить один метр в национальных единицах. Так, английский фут оказался равен приблизительно 30 см. Примерная связь между старинными русскими мерами длины и метрической системой приведена в следующей таблице.

Метрические меры	Старые русские меры
1 км	$\frac{94}{100}$ версты = 470 саженей
1 м	$22\frac{1}{2}$ вершка = 40 дюймов
1 дм	4 дюйма

Старые русские меры	Метрические меры
1 верста	$1\frac{7}{100}$ км
1 аршин	71 см
1 фут	30 см
1 вершок	$4\frac{1}{2}$ см
1 дюйм	$2\frac{1}{2}$ см

В нашей стране метрическая система мер стала обязательной в 1918 г. С тех пор старинные меры длины на практике не применяются. Но их нередко можно встретить в рассказах и повестях, в книгах по истории и поговорках. Вспомни пословицы и поговорки, в которых встречаются слова: *аршин*, *пядь*, *вершок*, *локоть*, *дюйм*.

15.9. Известно, что Конёк-Горбунок из одноимённой сказки П. П. Ершова был «...ростом только в три вершка, на спине с двумя горбами да с аршинными ушами». Определи рост Конька-Горбунка и длину его ушей в сантиметрах.

15.10. В сказке А. С. Пушкина «О попе и о работнике его Балде» говорится: «Сел Балда на кобылку верхом да версту проскакал так, что пыль столбом». Вырази в километрах длину пути, который проскакал Балда верхом на кобыле.

15.11. Каков в сантиметрах диаметр 12-дюймового орудия? Сколько дюймов имеет 42-сантиметровая пушка?

15.12. В старые времена военные придерживались следующих правил при оценке на глаз расстояний до предмета: до 50 шагов можно ясно различать глаза и рот людей; в 100 шагах глаза кажутся точками; в 200 шагах можно ещё различить пуговицы; в 300 шагах видно лицо; в 400 шагах различаются движения ног. Считая, что шаг взрослого человека равен примерно 60 см, вырази эти расстояния в метрах.

15.13. Сосчитай, сколько (приблизительно) твоих шагов содержится в 10 м (эту величину полезно запомнить, чтобы пользоваться ею в дальнейшем). Используя полученный результат, измерь: а) длину и ширину вашего класса; б) внешние размеры вашей школы.

15.14. Известно, что расстояние между Петербургом и Москвой 609 вёрст. Сколько столбов пришлось добавить на пути из Петербурга в Москву при замене верстовых столбов на километровые?

15.15. В старинных справочниках написано: а) обыкновенная черепаха имеет длину 10 вершков, ширину 4 вершка, высоту полвершка; б) серая цапля имеет высоту около одного аршина, размах крыльев два с половиной аршина. Определи размеры черепахи и цапли в метрической системе мер.

15.16. На обложке учебника изображены линейки с единицами измерения 1 дюйм, 1 вершок. Сделай такие же линейки и измерь в сантиметрах, дюймах и вершках свои вершок, пядь, сажень. Измерь с помощью этих линеек длины разных предметов.

15.17. Определи свой рост в аршинах с помощью линейки, на которой за единицу измерения взят 1 вершок (см. предыдущую задачу).

Подробнее об истории мер и различных приборах для измерения длины ты можешь прочитать в книге *Е. Н. Горячкина* «Из истории мер и весов».

§ 16 Площадь плоской фигуры

16.1. Что такое площадь фигуры? Ты, возможно, видел, как вспахивают землю. От плуга на земле остаётся след — борозда (полоса). Сначала плугом прокладывают одну борозду вдоль края поля, затем рядом с первой полосой прокладывают вторую и так далее. По мере того как вспахивают поле, все большая часть земли покрывается такими полосами, т. е. увеличивается место, занятое вспаханной землёй. На практике людям часто приходится выяснять, какое из двух полей больше, хотя бы для того, чтобы узнать, для засева какого из них требуется больше зерна. При решении этого вопроса мы не учитываем форму полей, нас интересует, какое из них занимает больше места, или, как говорят, имеет большую *площадь*. Слово *площадь* часто используют и в других случаях. Приведи примеры употребления этого слова в повседневной жизни.

С геометрической точки зрения поле является фигурой, которая занимает некоторую часть плоскости. Именно для плоских геометрических фигур мы и выясняем, какая из них занимает больше места на плоскости. Величину той части плоскости, которую занимает плоская фигура, называют *площадью* фигуры.

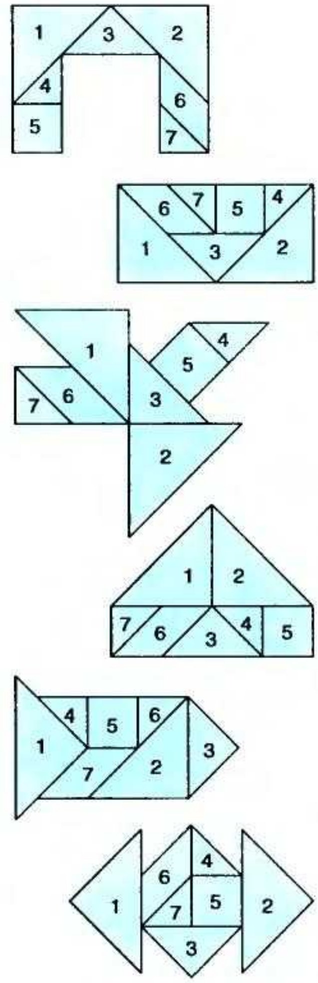


Рис. 279

16.1. Нарисуй какие-нибудь две фигуры, имеющие равные площади.

Замечание. Конечно, проще всего нарисовать две какие-нибудь равные фигуры, но интереснее придумать другие.

16.2. Объясни, почему фигуры (рис. 279) имеют одинаковые площади.

16.3. Сравни площади закрашенных фигур (рис. 280).

16.4. Для каждой из фигур, изображённых на рисунке 281, определи, какая часть этой фигуры — закрашенная или нет — имеет большую площадь.

16.5*. Определи, какой из предметов мебели занимает в комнате наименьшую площадь.

Решая задачи, ты познакомился с двумя важными свойствами площади фигуры: если плоские фигуры равны, то равны и их площади и если плоская фигура разбита на несколько частей, то её площадь равна сумме площадей этих частей.

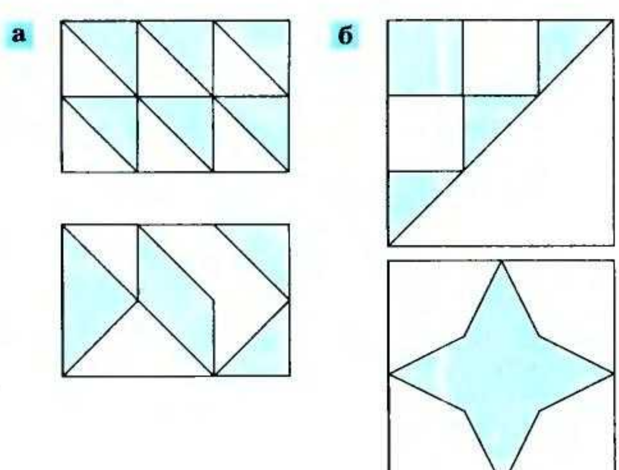


Рис. 280

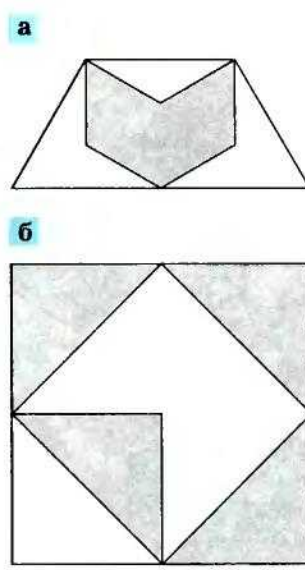


Рис. 281

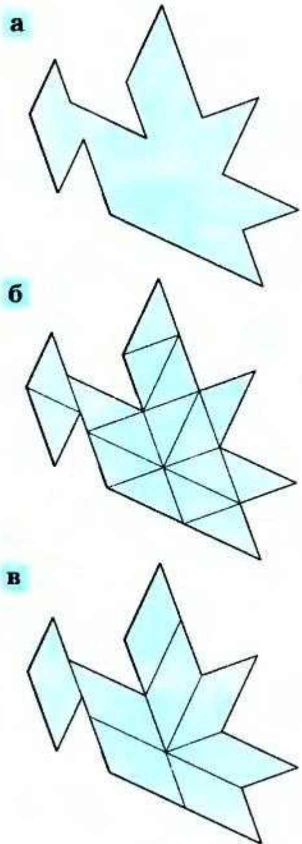


Рис. 282

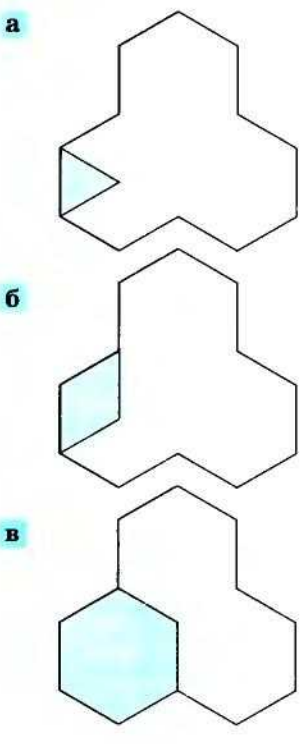


Рис. 283

Аналогичными свойствами обладает длина отрезка. И это понятно: понятия длины отрезка и площади плоской фигуры очень похожи. Длина отрезка характеризует протяжённость отрезка вдоль прямой, показывает, «сколько места» на прямой занимает отрезок в сравнении с единицей измерения. А площадь фигуры — это величина той части плоскости, которую занимает эта фигура. Она показывает, «сколько места» на плоскости занимает плоская фигура в сравнении с единицей измерения.

16.2. Измерение площади плоской фигуры. Для измерения площади фигуры поступим так же, как и при измерении длины отрезка. Выберем *единицу измерения площади* и найдём число, которое показывает, сколько раз выбранная единица содержится в измеряемой фигуре.

Для измерения длины отрезка в качестве единичного отрезка можно выбрать любой отрезок. Возникает вопрос: какие фигуры можно использовать в качестве единицы измерения площади? Оказывается, так же как и в случае измерения длины отрезка, можно выбирать разные плоские фигуры (однако, как мы узнаем, не любые!).

Вернёмся к игре-головоломке «Танграм» (см. рис. 10) и воспользуемся частями танграма для измерения площади фигуры.

Найдём площадь фигуры, изображённой на рисунке 282, *а*. Измерим эту площадь, например, «маленькими» треугольниками. Для этого покроем данную фигуру этими треугольниками целиком так, чтобы между единицами измерения не было щелей и просветов и они не пересекались друг с другом (рис. 282, *б*).

Таких треугольников оказалось 16. Значит, площадь этой фигуры в выбранных единицах равна 16 «маленьким» треугольникам танграма.

Можно было площадь этой фигуры измерить, например, в параллелограммах из частей танграма. Тогда в этих единицах площадь фигуры будет равна 8 единицам (рис. 282, *в*).

16.6. Найди площадь каждой из 7 частей танграма и площадь всего квадрата в «средних» треугольниках танграма.

16.7. Площадь некоторой фигуры измерили в двух различных единицах площади. Оказалось, что первая единица содержится в фигуре три раза, а вторая — сорок восемь раз. Определи, какая из этих единиц измерения площади крупнее и во сколько раз.

16.8. Можно ли в качестве единицы измерения площади взять круг?

Проверь себя. Конечно, нельзя измерять площадь фигуры кругами. Ведь их нельзя так уложить на плоскости, чтобы они не пересекались и при этом плотно заполняли всю плоскость.

16.9. Определи площадь фигуры, взяв в качестве единицы измерения площади выделенный: а) треугольник (рис. 283, *а*); б) параллелограмм (рис. 283, *б*); в) шестиугольник (рис. 283, *в*).

Процесс покрытия измеряемой фигуры равными фигурами напоминает укладку паркета. Поэтому покрытие некоторой фигуры (иногда и всей плоскости) равными фигурами часто так и называют *укладкой паркета* или *замощением*.

16.10. Придумай какие-нибудь фигуры, которые можно использовать для укладки паркета (и тем самым для измерения площади).

Проверь себя. Самые простые из этих фигур — прямоугольники (в том числе квадрат). Посмотри, как можно квадратами и прямоугольниками или их частями замостить фигуру (рис. 284).

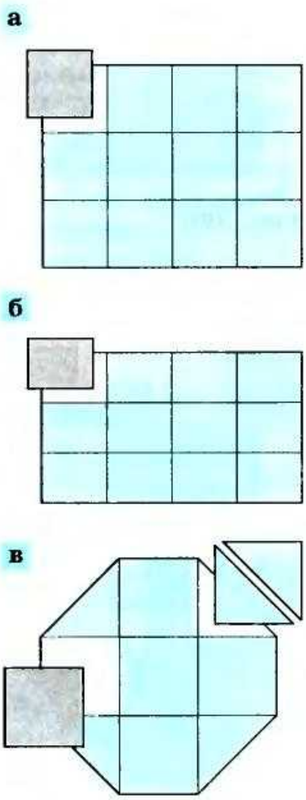


Рис. 284

16.11. Придумай вариант укладки паркета из прямоугольников.

16.12. Нарисуй какой-нибудь паркет. Закрась одним цветом единицу измерения площади, а другим — фигуру, площадь которой при выбранной единице измерения равна 9.

Фигуры, из которых составляется паркет, могут быть самыми разными, в том числе и необычными (рис. 285, *а*). В контурах этих фигур иногда можно увидеть силуэты животных, людей, предметов (рис. 285, *б*).

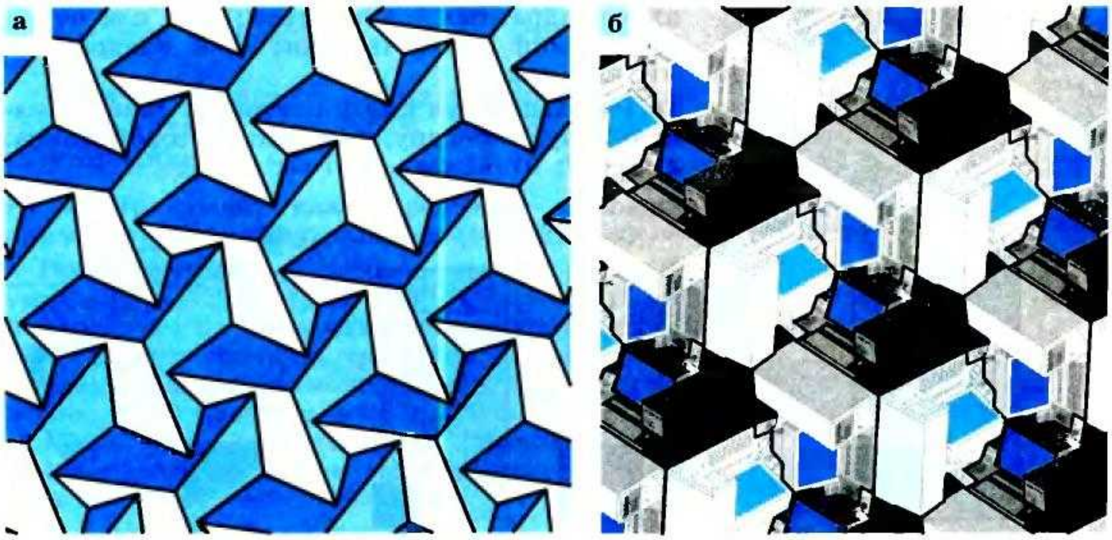


Рис. 285

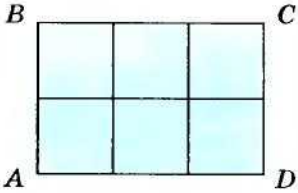


Рис. 286

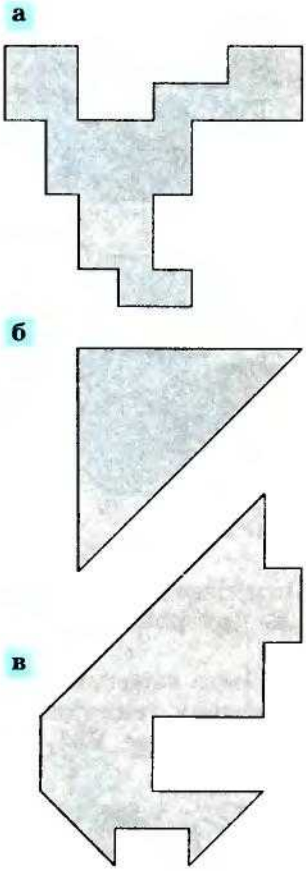


Рис. 287

Каждую из фигур, положенных в основу паркета, можно использовать для измерения площади, считая площадь этой фигуры единицей. Но это неудобно, поэтому договорились за единицу измерения площади брать квадрат, сторона которого равна единице длины, а единицу измерения площади назвали *квадратной единицей* или *единичным квадратом*.

Для квадрата со стороной, равной единице длины, его площадь считают равной одной квадратной единице. Это можно записать так:

$$S_{\text{кв.}} = 1 \text{ кв. ед., или } S_{\text{кв.}} = 1 \text{ ед}^2.$$

Обозначают площадь латинской буквой S, а внизу указывают, площадь какой фигуры находится, при этом название этой фигуры можно сократить. Мы, например, слово «квадрат» сократили: написали «кв.».

Чтобы измерить площадь в квадратных единицах, надо определить, сколько квадратов со стороной, равной единице длины, или их частей содержится в данной фигуре.

16.13. Глядя на рисунок 286, расскажи, как измерить площадь прямоугольника $ABCD$ со сторонами 2 см и 3 см. Вычисли эту площадь.

Проверь себя. $S_{ABCD} = 6 \text{ см}^2$.

16.14. Вырежи из бумаги квадрат со стороной 1 см. Измерь с его помощью площадь фигур, изображённых на рисунке 287.

16.15. Используя клетчатую разлиновку листа тетради, начерти прямоугольник со сторонами 4 см и 2 см 5 мм. Найди его площадь: а) в квадратных сантиметрах; б) в клеточках разлиновки листа тетради; в) в квадратных миллиметрах.

16.16. Используя клетки тетради, нарисуй какую-нибудь фигуру, площадь которой равна: а) 6 см²; б) 11 см²; в) 7 см².

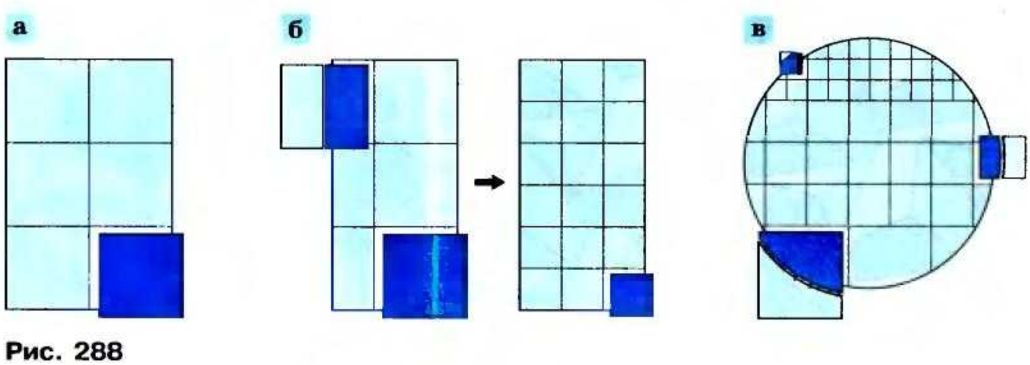


Рис. 288

Оказывается, не для каждой фигуры можно точно определить, какова её площадь, т. е. определить, сколько квадратов и их частей содержит эта фигура. Например, для прямоугольника на рисунке 288, *а*, это можно точно сделать. Она равна 6 см^2. Чтобы определить площадь прямоугольника, изображённого на рисунке 288, *б*, надо сосчитать не только целые квадраты, но и их части, которые содержатся в этом прямоугольнике. Однако можно так уменьшить сторону единичного квадрата, что площадь этого прямоугольника при новой единице измерения будет равна целому числу. Для фигуры, изображённой на рисунке 288, *в*, площадь можно определить только приблизительно, какую бы квадратную единицу измерения ты ни взял.

16.17. Нарисуй какую-нибудь фигуру, площадь которой точно определить мы не можем.

16.3. Площадь прямоугольника.

Ты знаешь ещё из начальной школы, что площадь прямоугольника равна произведению его длины и ширины. Это правило можно записать с помощью формулы, если длину прямоугольника обозначить a, а ширину — b:

$$S_{\text{пр.}} = a \cdot b \text{ ед}^2.$$

16.18. Объясни справедливость этой формулы на примере прямоугольника со сторонами 3 см и 4 см.

16.19. Сделай необходимые измерения и найди площади фигур, изображённых на рисунке 289.

16.20. Нарисуй фигуру, которая состоит из: а) двух прямоугольников; б) произвольных фигур. Найди площади этих фигур.

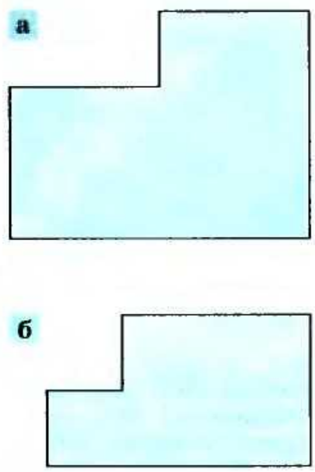


Рис. 289

16.4. Площадь треугольника.

Тебе известно, что треугольник очень важная фигура: из треугольников можно составить любой многоугольник. Поэтому если мы научимся определять площадь треугольника, то сможем определить и площадь любого многоугольника.

Как же вычислить площадь произвольного треугольника? — Начнём с прямоугольного треугольника.

16.21. Придумай, как определить площадь прямоугольного треугольника (рис. 290, *а*).

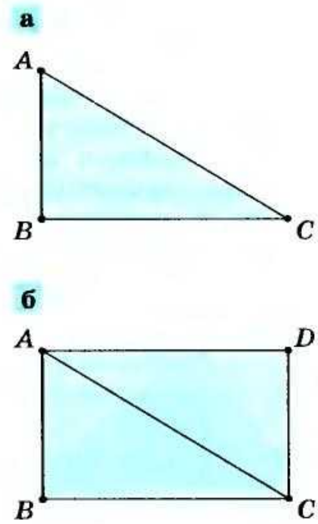


Рис. 290

Проверь себя. Достроим его до прямоугольника $ABCD$ (рис. 290, *б*). Прямоугольник состоит из двух одинаковых треугольников. Поэтому площадь треугольника равна половине площади прямоугольника. Значит, она может быть найдена как *половина произведения сторон треугольника, составляющих прямой угол*. Это можно в виде формулы записать так:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \text{ ед}^2.$$

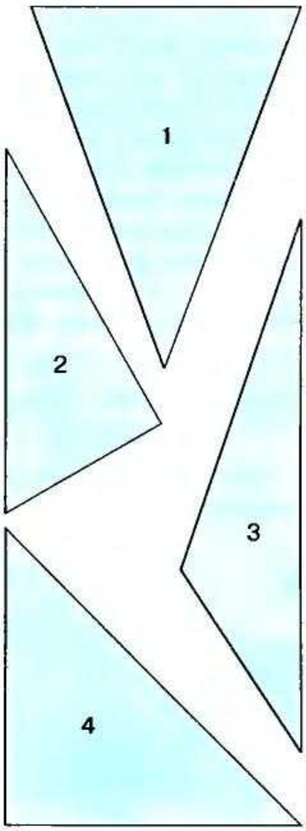


Рис. 291

16.22. Среди треугольников на рисунке 291 найди те, площадь которых ты можешь вычислить. Определи площадь этих треугольников, проведя необходимые измерения.

16.23. Нарисуй остроугольный треугольник. Придумай, как найти его площадь. Вычисли эту площадь, измерив необходимые отрезки.

Проверь себя. Можно разбить треугольник на два прямоугольных треугольника. На рисунке 292 треугольник ABC разбит отрезком BD на два прямоугольных треугольника ABD и BCD. Площадь треугольника ABC равна сумме площадей треугольников ABD и BCD:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AD \cdot BD + \frac{1}{2}CD \cdot BD = \frac{1}{2}(AD + CD) \cdot BD = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

Итак, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ ед^2.

16.24. Нарисуй тупоугольный треугольник. Придумай, как определить его площадь. Вычисли эту площадь, измерив необходимые отрезки.

Проверь себя. Можно, например, построить два вспомогательных прямоугольных треугольника так, чтобы один из этих треугольников был составлен из другого и данного треугольников. На рисунке 293, *а* приведены эти построения: проведён отрезок BD — перпендикуляр к прямой AC. При этом образовались два прямоугольных треугольника: ABD и BCD, причём оказалось, что отрезок DA — продолжение стороны AC. Площадь треугольника ABC равна разности площадей треугольников BCD и ABD:

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}CD \cdot BD - \frac{1}{2}AD \cdot BD = \frac{1}{2}(CD - AD) \cdot BD = \frac{1}{2}AC \cdot BD.$$

Итак, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ ед^2.

Но можно было, так же как в случае с остроугольным треугольником, разбить его на два прямоугольных треугольника. Для этого нужно провести перпендикуляр из вершины треугольника на наибольшую его сторону (рис. 293, *б*).

16.25. Вернись к рисунку 291 и определи площадь остальных треугольников, произведя необходимые построения и вычисления.

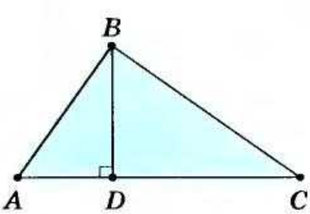


Рис. 292

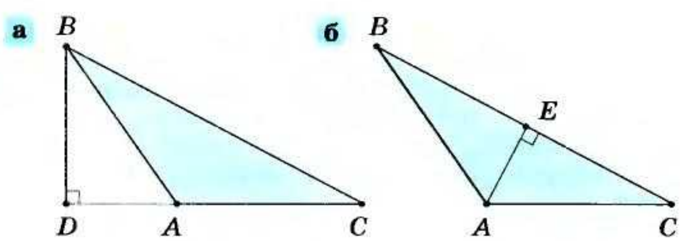


Рис. 293

16.26*. Построй какой-нибудь четырёхугольник. Определи два раза его площадь, разбив его на треугольники двумя способами. Сравни полученные результаты.

16.5. Единицы измерения площади метрической системы мер.

Ты знаешь разные единицы измерения площади: квадратный миллиметр (1 мм²), квадратный сантиметр (1 см²), квадратный дециметр (1 дм²), квадратный метр (1 м²), квадратный километр (1 км²), каждая из них есть квадрат, сторона которого равна соответствующей единице длины. (Конечно, есть квадратные аршины, дюймы и т. д.) Тебе известно также, что

$$1\ \text{см}^2 = 100\ \text{мм}^2 \qquad 1\ \text{дм}^2 = 10\,000\ \text{мм}^2 \qquad 1\ \text{м}^2 = 10\,000\ \text{см}^2$$
$$1\ \text{дм}^2 = 100\ \text{см}^2 \qquad 1\ \text{м}^2 = 100\ \text{дм}^2 \qquad 1\ \text{км}^2 = 1\,000\,000\ \text{м}^2.$$

16.27. Объясни, как можно проверить приведённые равенства.

Проверь себя. Проверим последнее равенство. Представим себе квадрат со стороной 1 км. Будем (мысленно!) укладывать квадраты со стороной 1 м в квадрат со стороной 1 км. В одном ряду таких квадратов поместится 1000 штук, так как в 1 км содержится 1000 м. Таких рядов тоже 1000. Значит, всего квадратов со стороной 1 м в квадрате со стороной 1 км поместится $1000 \times 1000 = 1\,000\,000$. Таким образом, $1\ \text{км}^2 = 1\,000\,000\ \text{м}^2$.

Для измерения больших площадей ввели ещё несколько единиц измерения: 1 *гектар* (1 га) — квадрат, сторона которого равна 100 м, 1 *ар* (1 а) — квадрат, сторона которого равна 10 м. (*Гекта* (*hekaton*) в переводе с греческого «сто», значит, 1 га = 100 ар.)

Ар называют ещё *соткой*, так как 1 а = 100 м² (объясни почему), поэтому, когда говорят: «Наш участок величиной 6 соток», то это означает, что участок имеет площадь, равную 600 м² (6 арам). Гектар используют для измерения площади поля.

16.28. Найди, сколько квадратных метров в: а) 1 га; б) 12 га; в) 7 а.

Подсказка. См. решение задачи 16.27.

16.29. В одной математической рукописи шутливо обсуждалась возможность построения дороги для муравья (длиной 100 км и шириной 1 мм). Сможешь ли ты найти площадь этой дороги?

16.30. Ученик начертил квадрат и нашёл его периметр — 20 см и его площадь — 36 см². Верны ли его расчёты?

16.31. Можно ли поместить в прямоугольник со сторонами 5 см и 3 см: а) два прямоугольника со сторонами 2 см и 4 см; б) квадрат со стороной 3 см и прямоугольник со сторонами 1 см и 3 см; в) квадрат со стороной 3 см и прямоугольник со сторонами 4 см и 17 мм? Объясни своё мнение.

16.32. Сторона одного квадрата в 2 раза больше, чем сторона другого квадрата. Нарисуй такие квадраты. Во сколько раз площадь второго квадрата больше площади первого?

16.33*. Начерти прямоугольник со сторонами 6 см и 12 см. Что произойдёт с площадью прямоугольника, если: а) его длину увеличить в 2 раза, а ширину уменьшить в 2 раза; б) его длину уменьшить в 3 раза, а ширину увеличить в 6 раз; в) и длину, и ширину уменьшить в 2 раза? Ответь на те же вопросы для прямоугольника со сторонами a и b.

16.34. Длину прямоугольника уменьшили в 3 раза, а площадь оставили той же. Что произошло с шириной прямоугольника?

16.35. Площадь комнаты равна 16 м². Нарисуй, как может выглядеть эта комната.

16.36. Нарисуй какую-нибудь фигуру: а) состоящую из двух равных треугольников; б) которую можно разбить на треугольники. Найди площадь этих фигур.

16.37. Вычисли площадь поверхности куба, ребро которого равно: а) 10 см; б) 3 дм; в) 34 мм.

16.38. Найди площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, три ребра которого соответственно равны: а) 3 см, 4 см, 5 см; б) 15 см, 7 см, 40 мм; в) 20 мм, 6 см, 1 дм.

16.6*. Из истории мер площади. История мер площади так же интересна, как и история мер длины. Уже в древности людям приходилось сравнивать площади (конечно, в первую очередь земельных участков) и измерять их. Известен, например, миф о Дидоне — богине-покровительнице Карфагена. Вынужденная бежать в Африку, она купила у нумидийского царя Ярбы столько земли, «сколько покроет бычья кожа». Чтобы площадь была как можно большей, Дидона разрезала кожу на тонкие ремешки и оградила ими такую территорию, что смогла заложить на ней город Карфаген.

Человечество придумало много различных единиц измерения площади. Но идеи, положенные в основу измерения площади, у многих народов очень похожи между собой. Например, в Риме мерой полей (единицей измерения площади) служила единица *югер*. Это слово происходит от латинского слова *югум* — ярмо, т. е. деревянная рама, которую надевали на шею двум волам. Югер — это участок земли, вспахиваемый за день плугом, в который впряжена пара волов. Аналогичная мера земли существовала и у славян. Она называлась *плугом*. Это была мера земли, с которой платили дань. Есть основания считать плуг равным 8—9 га.

На Руси, как и во многих других странах, за меру площади часто принимали количество ржи, необходимое для засева этой площади. В XIII—XV вв. основной единицей площади была *кадь* — площадь, для засева которой нужно было примерно 24 пуда (400 кг) ржи. Половина этой площади, получившая название *десятины*, стала основной мерой площади дореволюционной России. Она равнялась примерно 1,1 га. Десятина иногда называлась *коробьёй*.

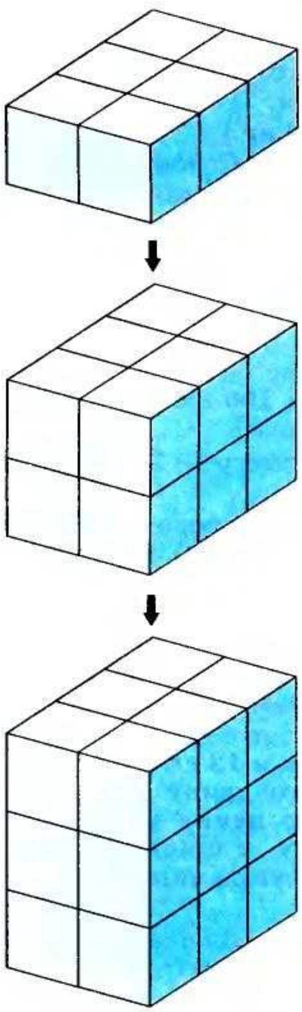


Рис. 294

§ 17 Объём тела

17.1. Что такое объём тела? Тебе, возможно, приходилось наблюдать, как строят дом. После закладки фундамента появляется первый этаж, затем второй, третий и т. д. Этот процесс схематично изображён на рисунке 294. С каждым новым этажом дом «подрастает» и занимает всё большую часть пространства, или, как говорят, всё больший объём.

Величина той части пространства, которую занимает пространственная фигура, является важной характеристикой этой фигуры и называется *объёмом*. Со словом *объём* мы часто встречаемся в обыденной жизни. Например, мы можем говорить: «объём жидкости в сосуде», «объём выполненных работ», «объём информации» и т. д. Приведи свои примеры использования этого слова.

17.1. Объясни, чем похожи понятия объёма тела и площади плоской фигуры.

17.2. Некоторые свойства объёма. Вспомни, какими свойствами обладает площадь плоской фигуры, и подумай, выполняются ли похожие свойства для объёма тела. В таблице слева записаны свойства площади плоской фигуры, справа — аналогичные (похожие на них) свойства объёма.

Площадь плоской фигуры	Объём пространственного тела
1. Если равны плоские фигуры, то равны и их площади	**1.** Если равны геометрические тела, то равны и их объёмы.
2. Если плоская фигура разбита на несколько частей, то её площадь равна сумме площадей этих частей	**2.** Если геометрическое тело разбито на несколько частей, то его объём равен сумме объёмов этих частей

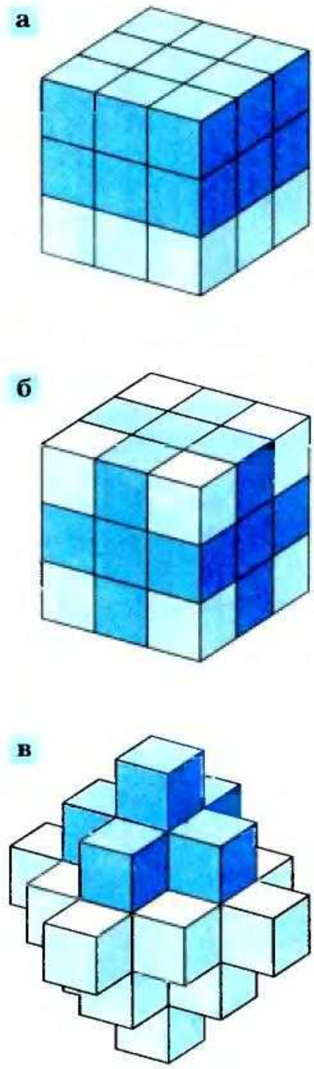


Рис. 295

Верны ли эти свойства объёма? — Конечно!

Равные тела занимают одинаковую часть пространства, значит, их объёмы равны. А величина той части пространства, которую занимает, например, прямоугольный параллелепипед на рисунке 294, равна сумме величин тех частей пространства, которые занимают его «слои».

17.2*. Какую часть объёма тела составляет объём его закрашенной части (рис. 295)? Обоснуй своё мнение.

17.3. Из равных кубиков сконструируй разные фигуры, имеющие одинаковый объём.

17.3. Как измеряется объём тела? Поскольку объём тела обладает теми же свойствами, что и площадь фигуры, то и измерять объём мы будем так же, как измеряли площадь.

17.4. Попробуй объяснить, как измерить объём тела.

Проверь себя. Сначала выберем единицу измерения объёма, а затем найдём число, которое показывает, сколько раз эта единица измерения или её части содержатся в данном теле.

7-13844 Ходот.

Единица измерения

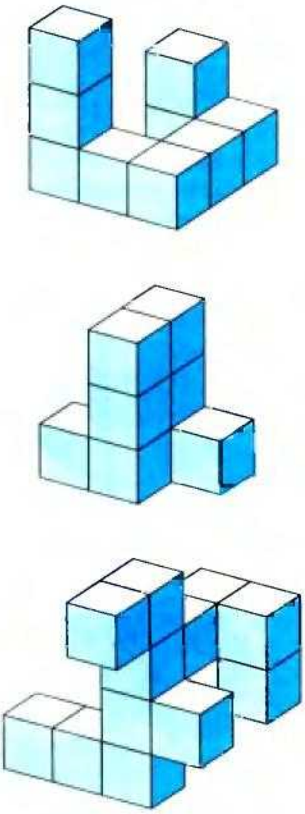


Рис. 296

Для вычисления объёма тела тоже можно выбирать разные единицы измерения. Но договорились использовать единичный куб — куб, ребро которого равно единице длины (подобно тому, как в качестве единицы измерения площади был выбран единичный квадрат — квадрат, сторона которого равна единице длины). Поэтому единицу измерения объёма называют *кубической единицей*. Таким образом, объём куба с ребром, равным единице длины, считается равным одной кубической единице. Это можно записать так:

$$V_{\text{ед.куба}} = 1 \text{ куб. ед.} = 1 \text{ ед}^3.$$

Для обозначения объёма обычно используют латинскую букву V, а внизу указывают, объём какого тела измеряют. При этом название тела часто сокращают.

Измерим объём куба с ребром 2 см. Конечно, удобно в качестве единицы измерения взять куб с ребром 1 см или с ребром 1 мм, так как вдоль ребра данного куба укладывается целое число таких кубиков. В нашем кубе содержится 8 кубиков с ребром, равным 1 см. Объём каждого из них равен 1 см^3. Значит, объём всего куба равен сумме объёмов маленьких кубиков и равен 8 см^3. Это можно записать так: $V_{\text{к.}} = 8$ см^3.

17.5. Чему равен (при заданной единице измерения) объём тел, изображённых на рисунке 296?

Есть интересный способ, который позволяет приблизительно измерить объём практически любого тела (например, камня). Возьмём какой-нибудь сосуд, заполним его до краёв водой, затем опустим туда камень. При этом часть воды перельётся через край сосуда. Объём вытесненной воды будет равен объёму камня.

17.6. Используя описанный способ, измерь объём каких-нибудь предметов.

17.7. В стакан объёмом 200 мл влили 195 мл воды и опустили в него чайную ложку. При этом вылилось 2 мл воды. Найди объём той части ложки, которая погружена в воду.

17.4. Объём прямоугольного параллелепипеда. Для измерения объёма тел не существует специальных приспособлений. Поэтому важно знать формулы, которые позволяют определить объём тела, зная только его размеры. Вот мы и займёмся выводом формулы, которая позволяет вычислить объём прямоугольного параллелепипеда, самого знакомого тебе тела.

Возьмём прямоугольный параллелепипед, длины трёх рёбер которого соответственно равны 2 см, 3 см, 4 см. Естественно в качестве единицы измерения объёма взять кубический сантиметр, т. е. куб с ребром 1 см.

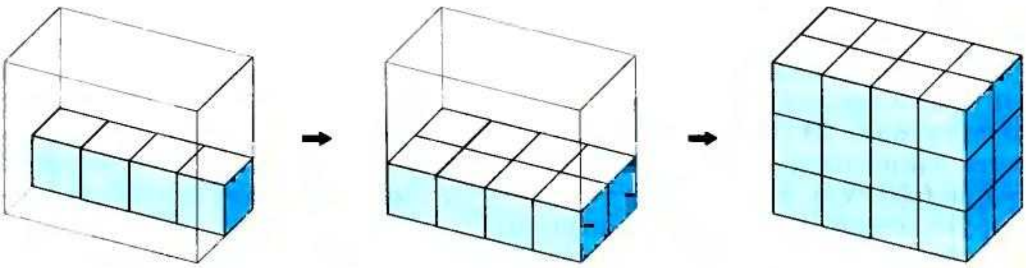


Рис. 297

17.8. Глядя на рисунок 297, расскажи, как узнать объём этого параллелепипеда, если заполнять его кубиками с ребром 1 см.

Проверь себя. Параллелепипед состоит из трёх слоёв, в каждом из которых $(2 \cdot 4)$ кубиков. Поэтому общее число кубиков в нём — $(2 \cdot 4) \cdot 3$. Значит, объём прямоугольного параллелепипеда равен 24 см^3.

Итак, чтобы найти объём прямоугольного параллелепипеда, достаточно перемножить длины трёх его рёбер, исходящих из одной вершины. При этом, конечно, важно, чтобы эти рёбра были измерены с помощью одной и той же единицы измерения длины. Можно написать формулу для вычисления объёма параллелепипеда, рёбра которого a, b, c:

$$V_{\text{п.}} = a \cdot b \cdot c \text{ ед}^3.$$

17.9. Зная формулу для вычисления объёма параллелепипеда, определи, как вычисляется объём куба с ребром a.

Проверь себя. $V_{\text{куба}} = a^3$ ед^3.

17.10. Можно ли из кубиков с ребром 3 см составить прямоугольный параллелепипед, имеющий объём, равный: а) 9 см^3; б) 27 см^3; в) 36 см^3; г) 28 см^3? Почему?

17.11. Вычисли объёмы тел, изображённых на рисунке 298.

Проверь себя. в) 4 ед^3.; г) $13\frac{1}{2}$ ед^3.

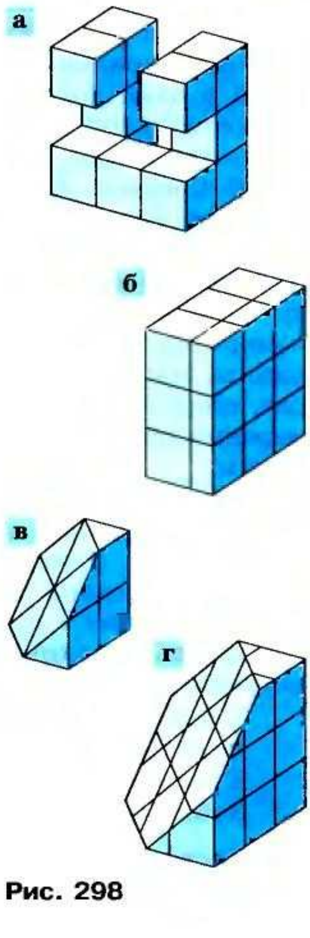


Рис. 298

17.5*. Различные единицы объёма. Как и при измерении длин и площадей, первоначально единицы объёма были связаны с имеющимися под рукой (в хозяйстве) предметами. Так, например, в России в качестве единицы объёма использовали бочку, ведро, четверик, четверть, стакан, бутылку. При этом 1 бочка равна 40 вёдрам, 1 ведро равно 20 бутылкам или 12 л, 1 четверик примерно равен 25 л, 1 четверть примерно равна 200 л.

Мы уже говорили, что на Руси в XIII— XV вв. основной единицей площади была кадь — площадь, для засева которой нужно было примерно 24 пуда (т. е. 400 кг) ржи.

Интересно, что и для измерения объёма в Киевской Руси использовали единицу, называемую *кадь*. Она вмещала 14 пудов (примерно 230 кг) ржи и делилась на два *половника*, четыре *четверти* или восемь *осьмин*. Кадь называли ещё и *оковом*, так как орлёную (проверенную властями и снабжённую печатью) кадь обивали (оковывали) по краям железным обручем. *Московская кадь* была больше киевской и содержала 24 пуда ржи. Таким образом были сделаны попытки связать единицы площади и объёма. С одной стороны, кадь — это мера зерна (объёма), а с другой стороны — это мера площади (площадь, которую можно засеять этим зерном).

Ещё в Древнем Вавилоне единицы измерения площади и объёма были согласованы друг с другом. Связующим звеном служила единица длины — *локоть* (по-вавилонски — *аммат*). С помощью локтей мерили площади и объёмы. Для измерения площадей брали квадрат со стороной 12 локтей. Его площадь называли словом, которое по-русски означает «грядка». Если на таком квадрате построить помещение высотой в один локоть, получится единица измерения объёмов, равная примерно 1500 литрам. Её называли *курру*. То же название носил и участок земли, для засева которого требовалось 1 курру семян.

В Средней Азии специальной мерой архитектуры был кирпич: «Здания, колонны и свод в постройках измеряются с помощью сырого и обожжённого кирпича» — можно прочесть в старинных рукописях.

Единицы измерения длины, площади и объёма согласованы между собой и сейчас. При измерении длин отрезков в качестве единицы измерения можно выбрать любой отрезок. Выбрав единицу измерения длины, мы в качестве единицы измерения площади выбираем квадрат, сторона которого равна единице длины, а в качестве единицы измерения объёма берём куб, ребро которого равно единице измерения длины.

Если, например, длина измеряется в дюймах, то площадь измеряется в квадратных дюймах, а объём — в кубических дюймах. Основная единица измерения длины в метрической системе — это метр. Основная единица измерения площади — это квадратный метр (квадрат со стороной 1 м), а объёма — кубический метр (куб с ребром 1 м). Все остальные единицы измерения объёма получаются из единиц измерения длины таким же способом.

Кубический сантиметр — куб с ребром 1 см — 1 см^3
Кубический миллиметр — куб с ребром 1 мм — 1 мм^3
Кубический дециметр — куб с ребром 1 дм — 1 дм^3
Кубический километр — куб с ребром 1 км — 1 км^3

Часто кубический дециметр называют *литром*. 1 л = 1 дм^3.

Переход от одних единиц измерения объёма к другим осуществляется так же, как и при измерении площади. Например, определим, сколько кубических сантиметров воды содержится в трёхлитровой банке (3 л = 3 дм^3). Для этого выразим в кубических сантиметрах объём одного кубического дециметра. Кубический дециметр — это куб с ребром 10 см, а его объём равен 10 см · 10 см · 10 см = 1000 см^3. Значит, 3 л = 3 дм = 3 · 1 дм^3 = 3 · 10 см · 10 см · 10 см = 3 · 1000 см^3 = = 3000 см^3.

17.12. Длина, ширина и высота прямоугольного параллелепипеда соответственно равны 4 см, 6 см, 12 см. Что произойдёт с его объёмом, если: а) длину уменьшить в 2 раза, а высоту увеличить в 2 раза; б) высоту уменьшить в 4 раза, а ширину увеличить в 3 раза?

17.13. Объём параллелепипеда оставили тем же, а высоту и ширину уменьшили в 2 раза. Что произошло с длиной?

17.14. Как изменится объём куба, если увеличить (уменьшить) длину его ребра в 2 раза? в 3 раза? в n раз?

17.15. Известно, что объём помещения равен 24 м^3. Какие размеры оно может иметь?

17.16. В бак кубической формы с ребром 1 м вливают ведро воды (10 л). Какой высоты будет слой воды в баке?

17.17. Колодец глубиной 5 м, шириной 1 м и длиной 2 м наполовину заполнен водой. Каждый день для поливки огорода требуется 16 десятилитровых вёдер воды. Вода в колодец не поступает. Хватит ли воды в колодце на два месяца, если поливать огород каждый день?

17.18*. Из железа выплавили три куба с рёбрами, соответственно равными 8 дм, 4 дм и 2 дм. Потом их все расплавили и выплавили один куб. Чему равна длина его ребра?

§ 18 Измерение углов

18.1. Что значит измерить угол? Познакомившись с тем, как измеряют разные величины (длину, площадь, объём), перейдём теперь к измерению углов. Так же, как в случае измерения отрезков, введём вспомогательный угол, который будем называть *единичным*.

Измерим, например, два угла KLM и CDB (рис. 299, *а*), введя для этого единичный угол, например $\angle POR$. Дальше будем действовать так:

- наложим единичный угол на угол KLM так, чтобы одна его сторона совпала со стороной LK (рис. 299, *б*);
- вдоль другой стороны вспомогательного угла проведём луч LA;
- наложим единичный угол на угол ALM так, чтобы одна его сторона совпала со стороной LA (рис. 299, *в*), а вдоль другой проведём луч LE и т. д.

В результате у нас получилось, что угол CDB содержит ровно три единичных угла, а угол KLM — ровно четыре, поэтому величина CDB равна трём, а величина KLM — четырём единицам измерения.

Понятно, что каждый угол имеет свою величину (или меру), которую и находят при измерении.

> Измерить величину какого-нибудь угла в заданных единицах измерения — значит найти число, показывающее, сколько единичных углов или его частей содержится в данном угле.

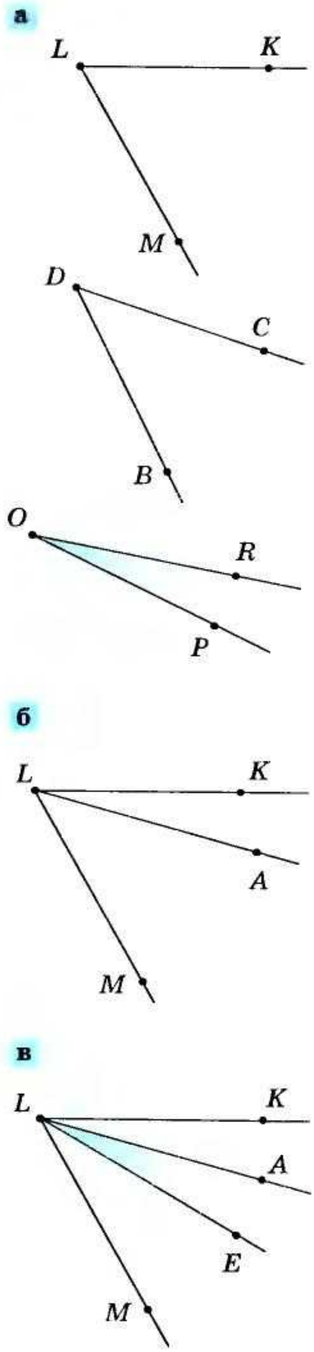


Рис. 299

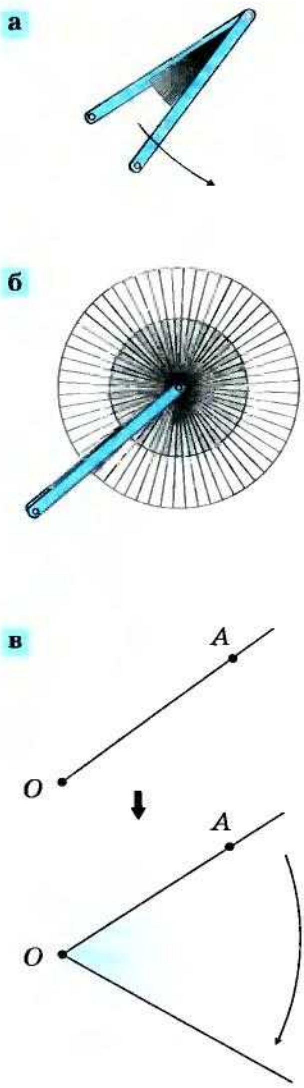


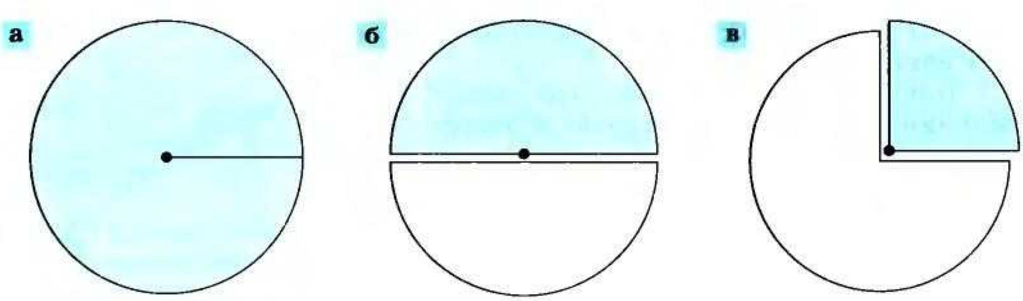
Рис. 300

18.2. Градусная мера угла. По-видимому, в древние времена с выбором меры угла дело обстояло так же, как с выбором меры длины отрезка: у каждого народа она была своя. И когда приходилось общаться людям разных стран, то им было трудно понимать друг друга. Возникали трудности при пользовании географическими картами, при ориентировании по звёздам, при стрельбе из пушек. Поэтому появилась необходимость (так же, как в случае измерения отрезков) выбрать единую меру угла.

Оказалось, что между измерением отрезков и измерением углов есть существенное отличие. Среди отрезков нет ни самого маленького, ни самого большого: любой отрезок можно продолжить или уменьшить. Поэтому среди отрезков нет естественного эталона.

Среди углов не так. Самого маленького угла тоже не существует: любой угол можно, например, разделить пополам. Но среди углов есть самый большой. Это *полный угол*. Его модель можно получить, если взять японский веер (рис. 300, *а*) и раскрыть его полностью (рис. 300, *б*).

Поскольку угол получается при повороте луча вокруг своего начала (рис. 300, *в*), то возникает простая связь между углами с общей вершиной и окружностью с центром в этой их общей вершине: каждый угол можно мерить дугой окружности, заключённой внутри этого угла. Поэтому полный угол измеряется всей окружностью (рис. 301, *а*), развёрнутый — её половиной (рис. 301, *б*), прямой — одной четвертью (рис. 301, *в*) и т. д. Но выбирать в качестве единицы измерения самый большой угол (или всю окружность) неудобно: тогда все остальные углы будут иметь величины, выраженные дробными числами. И поэтому естественнее принять за единицу измерения угла какую-нибудь часть круга.



Полный угол | Развёрнутый угол | Прямой угол

Рис. 301

Жители Древнего Вавилона считали, что в году приблизительно 360 дней и делили круг на 360 равных частей или полукруг на 180 равных частей (рис. 302). Один такой угол они и приняли за единицу измерения углов. Эта единица измерения называется *градусом*. Именно градус и его доли наиболее широко используются теперь как единицы измерения угла.

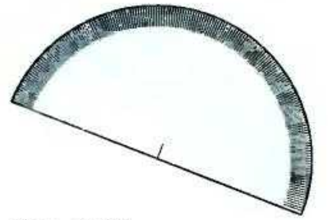


Рис. 302

Слово *градус* образовано от латинского слова *gradus*, что означает *шаг*, *ступень*, *степень*, *мера*. Тебе известны слова, однокоренные со словом *градус*: *градусник*, *градация*, *градуировать* (наносить деления на шкалу).

18.1. Сколько градусов в развёрнутом и в прямом углах?

Проверь себя. Из определения градуса следует, что развёрнутый угол содержит 180 градусов, а прямой (поскольку он является половиной развёрнутого) — 90 градусов.

Угол, равный 1 градусу, древние вавилоняне делили на 60 равных частей и получали угол в 1 *минуту*, а его тоже делили на 60 равных частей и получали 1 *секунду*.

Слова *минута* и *секунда* нам привычны. Мы используем их для измерения времени. И в этом нет ничего удивительного, так как мы определяем время углом поворота часовой и минутной стрелок относительно их начального положения.

Число, которое показывает, сколько раз в угле содержится единица измерения — градус или её части, называется **градусной мерой угла**.

1 градус — это $\frac{1}{180}$ часть развёрнутого угла,

1 минута — это $\frac{1}{60}$ часть градуса,

1 секунда — это $\frac{1}{60}$ часть минуты.

Результат задачи 18.1 можно сформулировать по-другому: градусная мера развёрнутого угла равна 180 градусам, а градусная мера прямого угла — 90 градусам.

При записи слово *градус* заменяют на значок «°», тогда запись «$\angle MNP = 90°$» читается: «градусная мера угла MNP равна девяноста градусам» — или короче: «угол MNP равен девяноста градусам».

18.2. На рисунке 303 изображены два угла $\angle ABC$ и $\angle DEH$. Известно, что $\angle ABC = 30°$ и $\angle DEH = \angle ABC$. Чему равна градусная мера угла DEH? Объясни.

Проверь себя. Угол DEH равен углу ABC, значит, в нём содержится то же число единичных углов, что и в угле ABC. Иначе говоря, единица измерения — градус содержится в угле DEH столько же раз, сколько и в угле ABC, т. е. 30 раз. Следовательно, градусная мера угла DEH равна 30°.

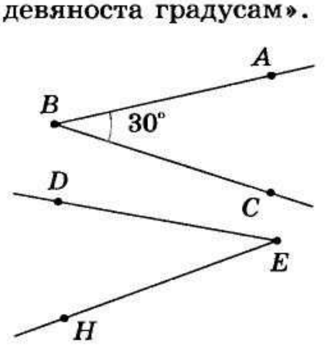


Рис. 303

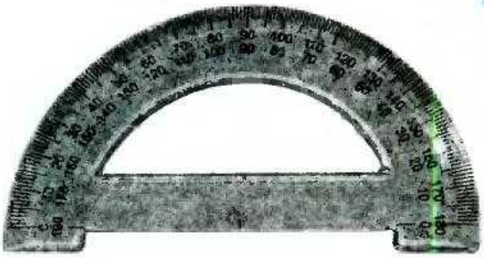


Рис. 304

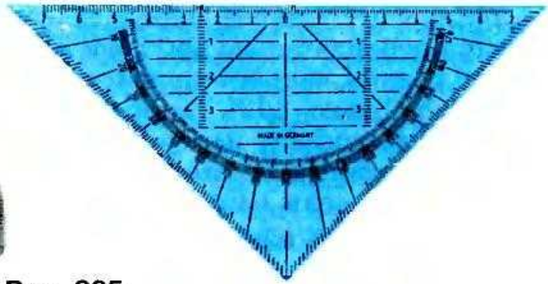


Рис. 305

18.3. Угол CKL больше угла AOB. Какое из утверждений верно: а) градусная мера угла CKL больше градусной меры угла AOB; б) градусная мера угла CKL меньше градусной меры угла AOB?

18.4. Есть ли в следующих утверждениях ошибочные: а) угол, имеющий градусную меру 45°, — острый; б) угол, имеющий градусную меру 55°, — прямой; в) угол, имеющий градусную меру 100°, — тупой; г) угол, градусная мера которого больше 60°, — прямой?

18.5. Какие из следующих углов острые, тупые, прямые и развёрнутые: $\angle A = 90^\circ$, $\angle B = 125^\circ$, $\angle C = 56^\circ$, $\angle D = 90^\circ$, $\angle E = 177^\circ$, $\angle M = 180^\circ$, $\angle N = 86^\circ$?

18.3. Транспортир. Для измерения углов в градусах пользуются специальным угломерным прибором — *транспортиром* (рис. 304).

Транспортир от латинского *transportare* — *переносить* (нам знакомо слово *транспорт*, которое мы употребляем как раз в этом смысле). Вероятно, первоначально транспортир использовали как инструмент, с помощью которого можно построить угол, равный данному углу, т. е. «перенести» угол с одного места в другое.

Транспортир представляет собой развёрнутый угол, разделённый на равные доли, каждая из которых имеет меру в 1°. Этих делений — 180, по числу градусов в развёрнутом угле. Они называются *градусными делениями*. Все штрихи, которые определяют градусные деления, направлены в одну точку — *центр* транспортира, расположенный в вершине развёрнутого угла.

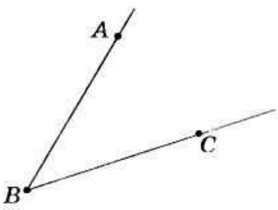


Рис. 306

При измерении углов центр транспортира совмещается с вершиной измеряемого угла. Если транспортир сделан из непрозрачного материала, то в нём прорезают отверстие, нижняя граница которого идёт по сторонам развёрнутого угла. Это делают для того, чтобы можно было точно приложить прибор к углу, градусная мера которого определяется.

Обычно транспортиры делают полукруглой формы (см. рис. 304), но иногда их встраивают в другие линейки и чертёжные треугольники (рис. 305).

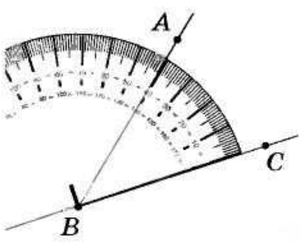


Рис. 307

18.6. Определи с помощью транспортира градусную меру угла ABC, изображённого на рисунке 306.

Проверь себя. $\angle ABC = 41^\circ$.

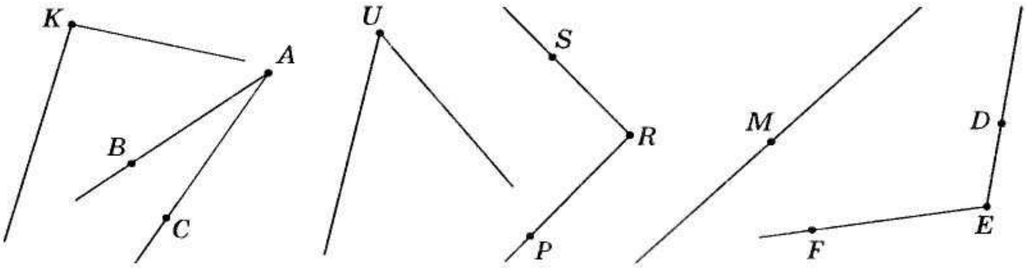


Рис. 308

Если ты ошибся, то измерь угол ABC ещё раз, следуя плану (рис. 307):

• совмести центр транспортира с вершиной угла;

• поверни транспортир так, чтобы одна сторона угла совместилась со стороной развёрнутого угла транспортира, а вторая была направлена в сторону шкалы со штрихами градусных делений;

• найди на шкале транспортира деление, через которое проходит вторая сторона угла; это деление шкалы покажет градусную меру угла (если вторая сторона угла проходит между делениями транспортира, то мера этого угла выражена не целым числом градусов).

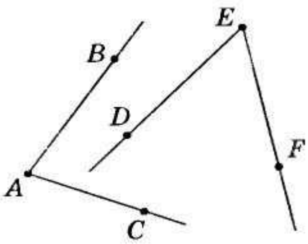


Рис. 309

18.7. Начерти три каких-нибудь угла. Определи на глаз их градусную меру, затем измерь их транспортиром. На сколько градусов ты ошибся?

18.8. Измерь градусные меры углов, изображённых на рисунке 308, и запиши результаты измерений. Расположи неравные углы в порядке их возрастания.

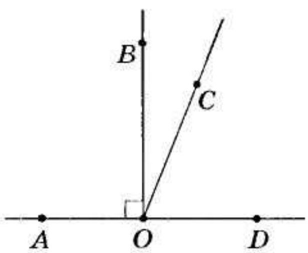


Рис. 310

18.9. Сравни углы (рис. 309) на глаз. Результаты проверь измерением.

18.10. Начерти и обозначь пятиугольник. Измерь его углы и запиши результаты. Есть ли среди этих углов равные?

18.11. Измерь угол AOC (рис. 310), а затем вычисли градусные меры углов BOC, BOD и COD.

18.12. На рисунке 311 изображены треугольник ABC и четырёхугольник $MNPQ$. Измерь их углы. Какие из них равные? Запиши неравные углы в порядке их убывания.

Транспортир применяют не только для измерения градусных мер углов, но и для построения углов, градусные меры которых известны. Построй, например, угол AOB, градусная мера которого равна $130°$. Попробуй решить задачу самостоятельно. В случае затруднений сделай следующее (рис. 312):

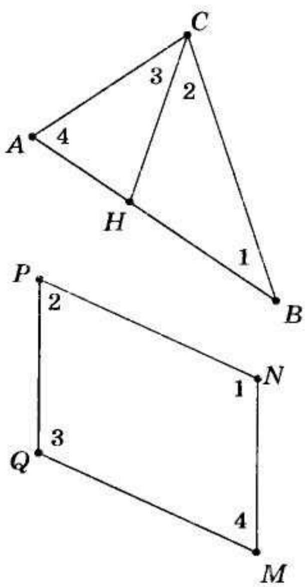
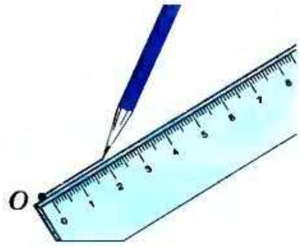


Рис. 311



• проведи произвольный луч и обозначь его OA;
• совмести центр транспортира с точкой O;
• расположи линейку транспортира так, чтобы луч OA прошёл через начало отсчёта на транспортире;
• найди на шкале транспортира деление, соответствующее $130°$, и, отметив против него точку B, проведи луч OB.

18.13. Пользуясь транспортиром, построй углы, градусная мера которых равна $15°$, $21°$, $78°$, $125°$, $170°$, $180°$.

18.14. Построй угол, равный данному углу (рис. 313).

Замечание. Можно решить задачу, используя транспортир, а можно построить угол, равный данному, с помощью циркуля и линейки. Вспомни, как это делается, или найди в учебнике описание решения такой задачи.

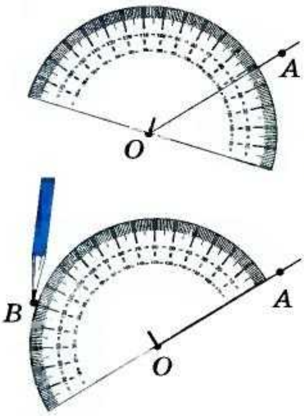


Рис. 313

18.15. Начерти луч AB. Построй с помощью транспортира прямой угол так, чтобы луч AB являлся его стороной. Сколько таких углов можно построить?

18.16. Построй угол, градусная мера которого равна $70°$. С помощью транспортира проведи луч, который делит этот угол пополам. Сколько таких лучей можно построить?

18.17. Построй треугольник ABC, у которого известны длины двух сторон и величина угла между ними: $AB = 5$ см; $AC = 3$ см; $\angle BAC = 30°$.

Совет. Сначала начерти угол BAC, а потом отложи на его сторонах нужные отрезки.

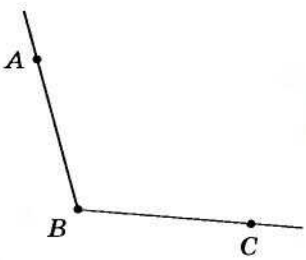


Рис. 314

18.18. Построй треугольник MKL, у которого известны длина стороны KM — 6 см и градусные меры двух прилежащих к ней углов: $\angle MKL = 60°$ и $\angle KML = 30°$. Измерь третий угол треугольника.

Совет. Сначала начерти сторону KM, а потом построй углы, как показано на рисунке 314.

18.19. Построй ломаную $ABCDEF$ так, чтобы $AB = 2{,}5$ см, $\angle ABC = 110°$, $BC = 2$ см, $\angle BCD = 155°$, $CD = 3$ см, $\angle CDE = 90°$, $DE = 1{,}5$ см, $\angle DEF = 45°$, $EF = 1$ см. Имеет ли построенная ломаная самопересечения? Является ли она замкнутой?

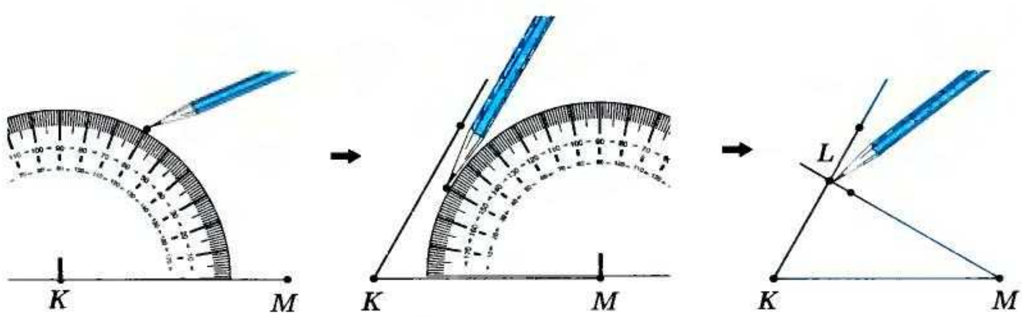
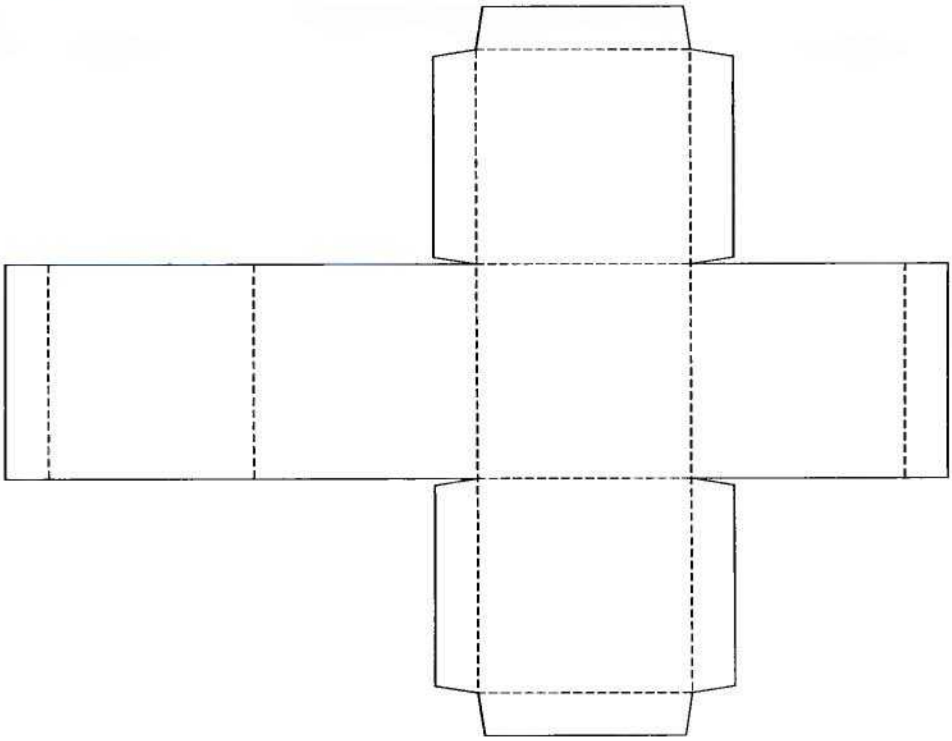
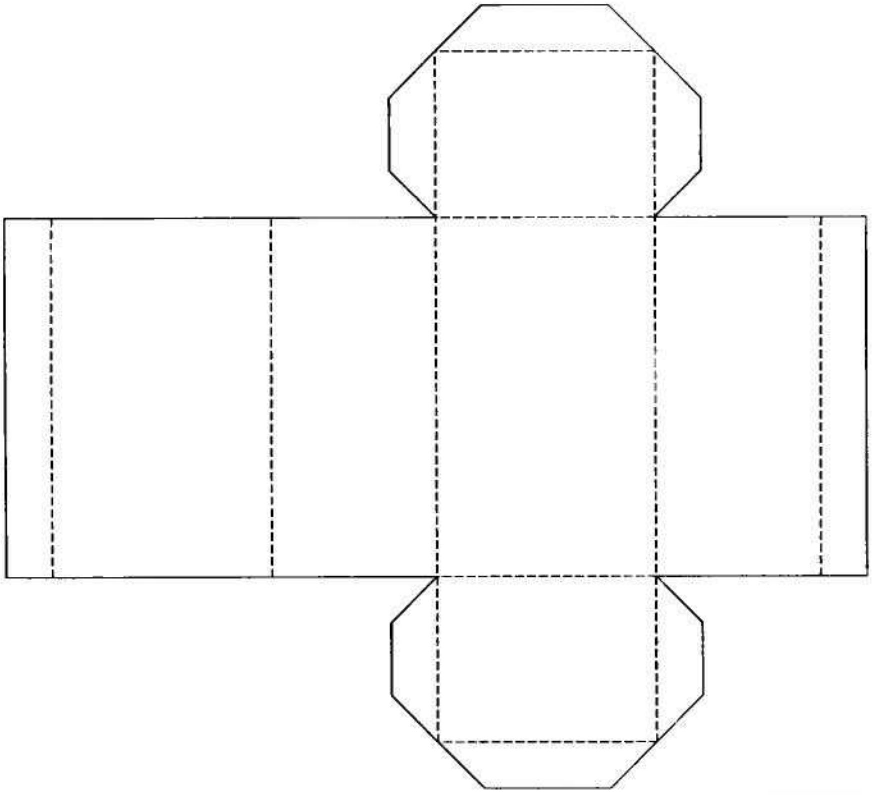
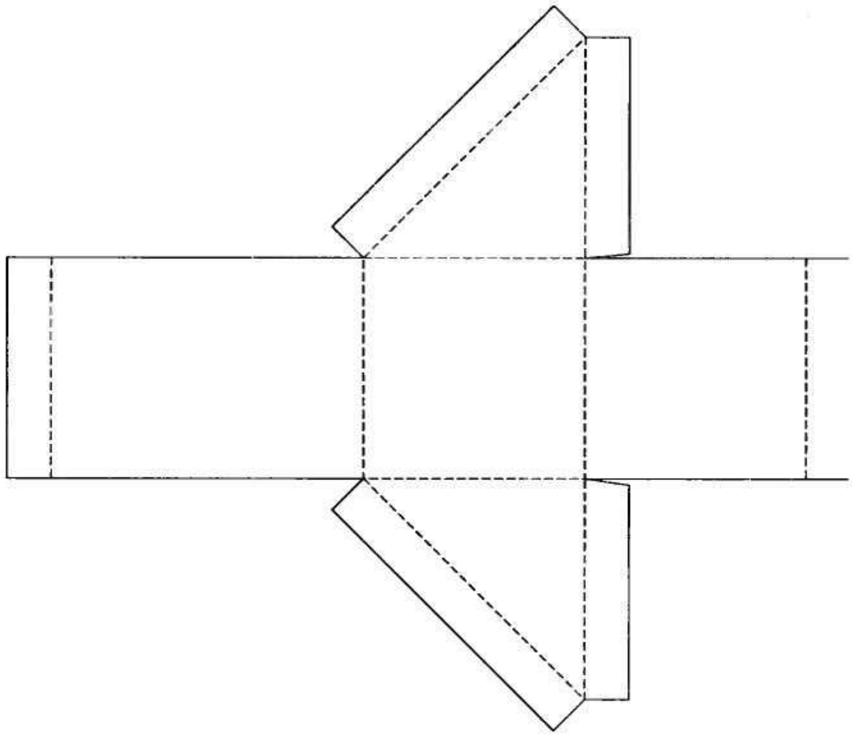
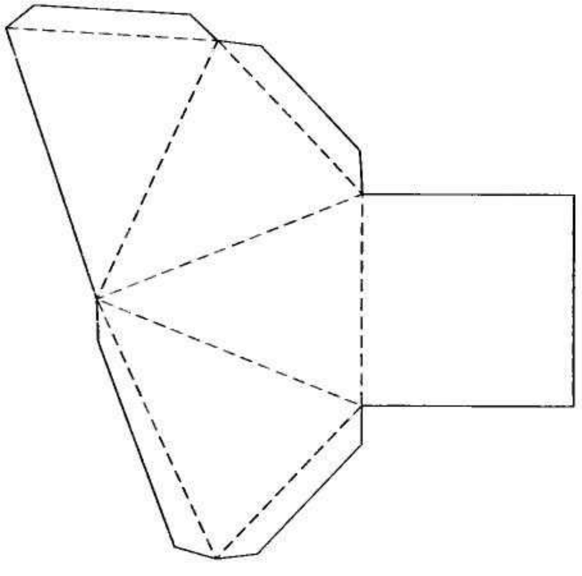


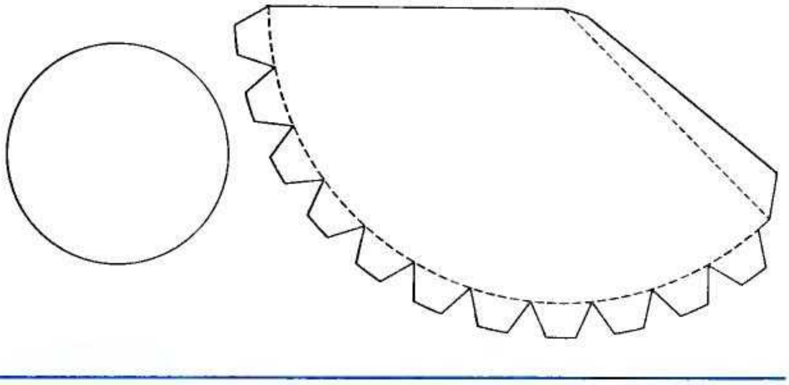
Рис. 312

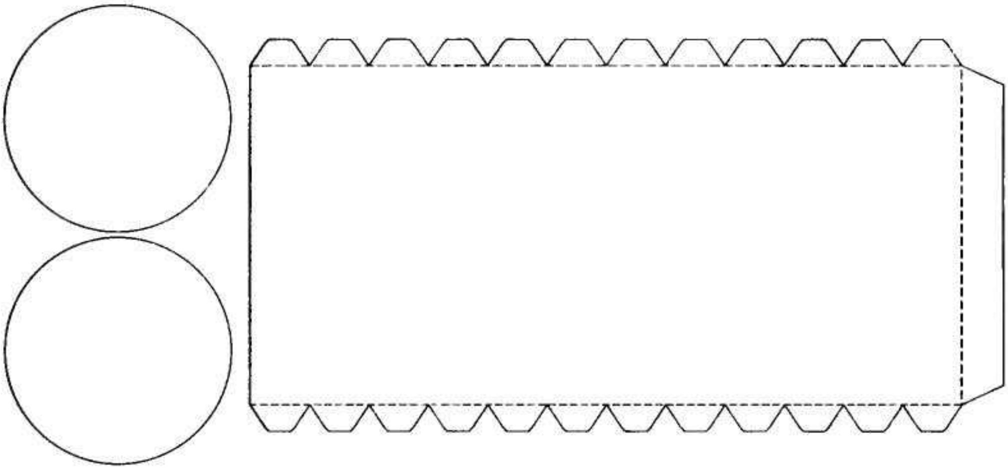


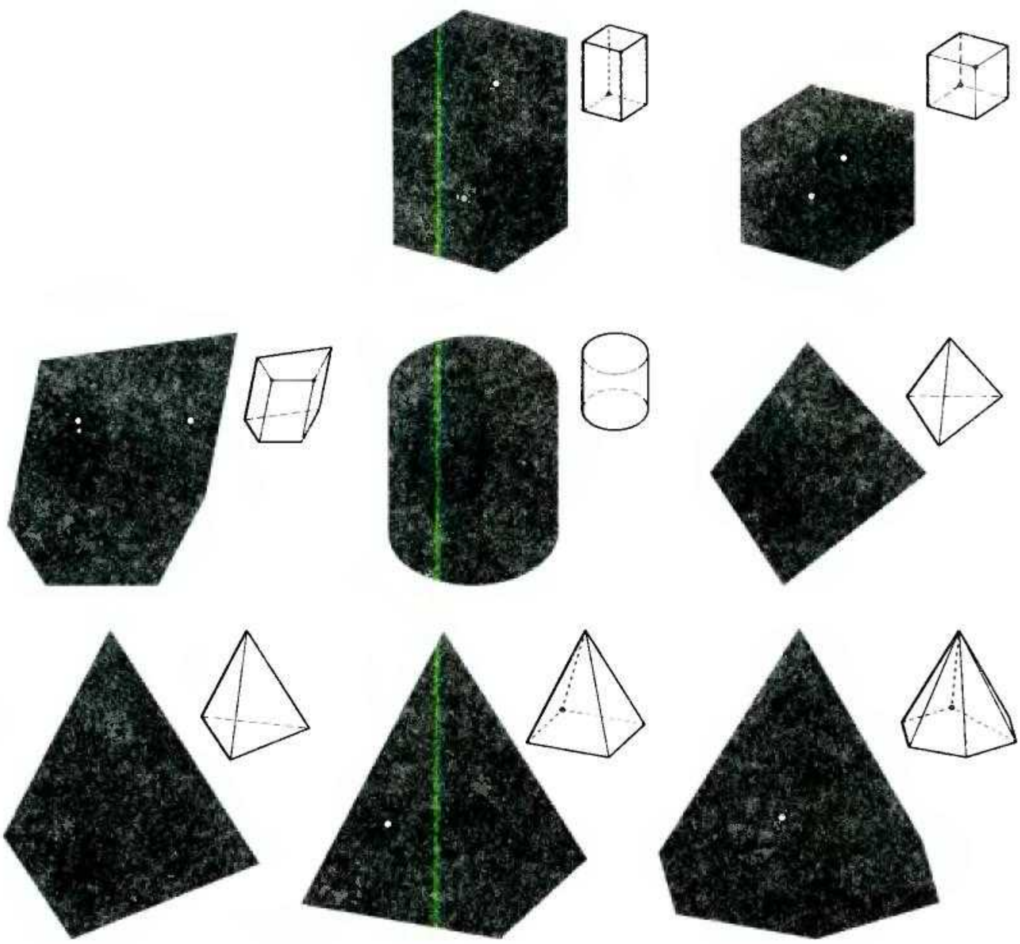


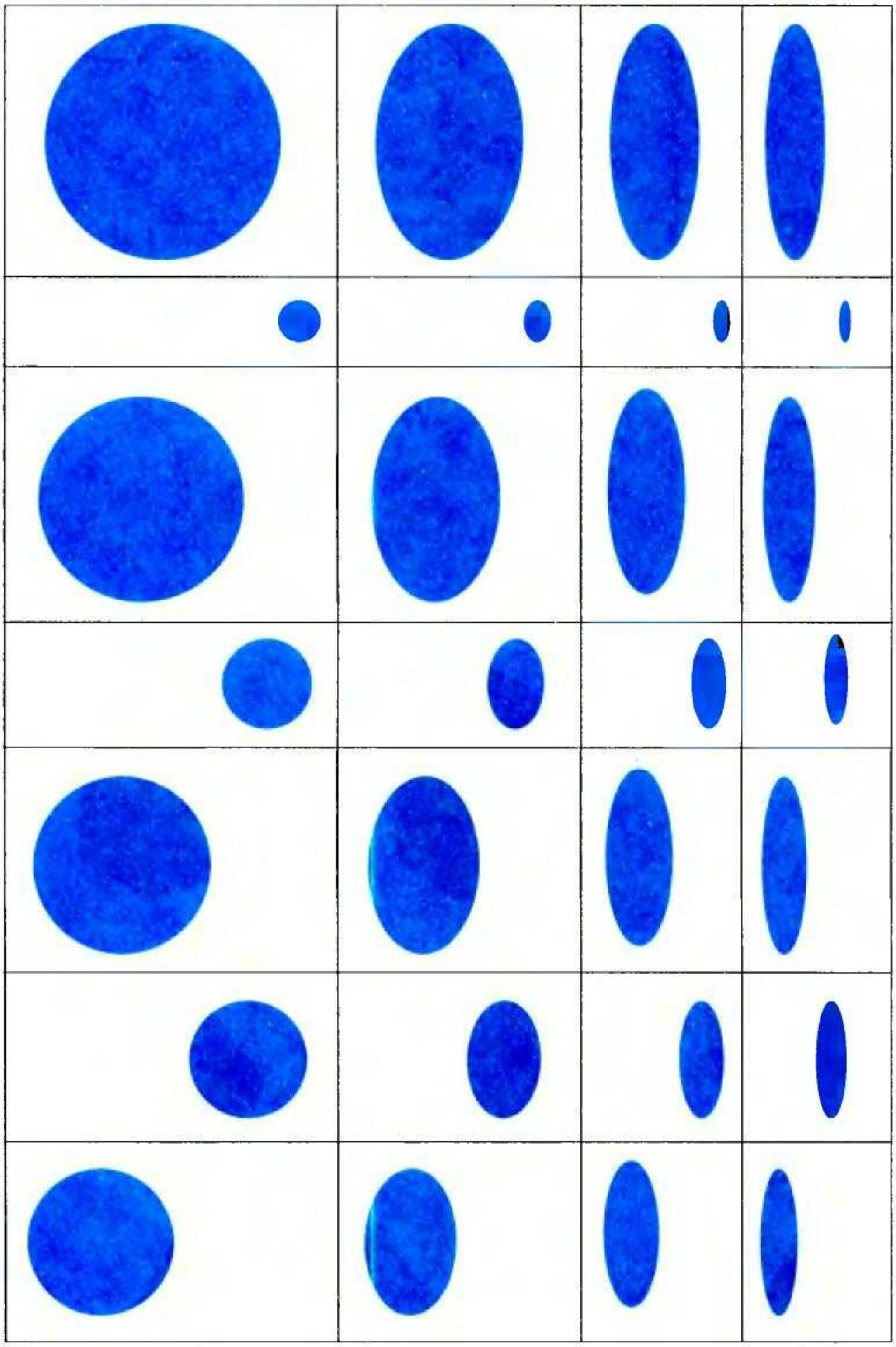












Оглавление

Учебное издание

Ходот Татьяна Георгиевна
Ходот Александр Юрьевич
Велиховская Виктория Львовна

НАГЛЯДНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для учащихся 5 класса
общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Т. А. Бурмистрова*
Младший редактор *Н. В. Ноговицина*
Художники *О. П. Богомолова, А. Ю. Ходот*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *А. Ю. Ходота*
Технический редактор *Е. В. Хомутова*
Корректор *Л. С. Александрова*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 28.03.06. Формат 70×108$^{1}/_{16}$. Бумага писчая. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Уч.-изд. л. 8,48. Тираж 7000 экз. Заказ № 13844 (Л-Sm).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, г. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

ОАО «Смоленский полиграфический комбинат». 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

5 Наглядная геометрия

Учебное пособие предназначено для учащихся 5 класса базовой общеобразовательной школы. Курс посвящен взаимному расположению фигур на плоскости и в пространстве. На наглядном уровне обсуждаются вопросы, связанные с расстоянием, параллельностью, координатами. Рассматриваются движения и элементы симметрии фигур, знания которых затем применяются к конструированию.

Курс имеет цель:

- развить пространственные представления
- выявить основы логического мышления
- подготовить учащихся к успешному усвоению систематического курса геометрии средней школы.

дюйм

ISBN 5-09-014596-2

9 785090 145961

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО