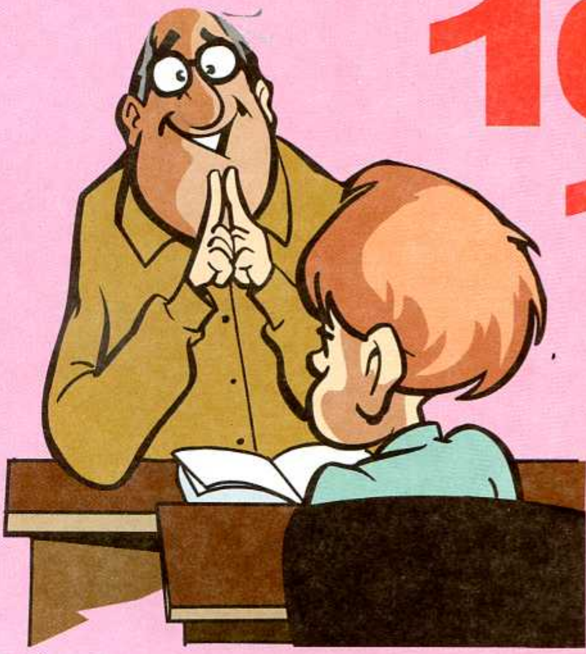
А.П. Ершова, В.В. Голобородько

АЛГЕБРА
НАЧАЛА АНАЛИЗА

10-11



Самостоятельные и контрольные работы

ИЛЕКСА

А.П. Ершова, В.В. Голобородько

САМОСТОЯТЕЛЬНЫЕ И КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА ДЛЯ 10–11 КЛАССОВ

5-е издание, исправленное

Рекомендовано
Научно-методическим советом по математике
Министерства образования и науки Российской Федерации
в качестве учебного пособия для общеобразовательных
учебных учреждений

Москва
ИЛЕКСА
2013

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21-26+74.202
Е80

Рецензенты:

Ю.В. Гандель, доктор физико-математических наук, профессор Харьковского Национального университета им. В.Н. Каразина;

Е.Е. Харик, Заслуженный учитель Украины, преподаватель математики ФМЛ № 27 г. Харькова

А.Ф. Крижановский, Заслуженный учитель Украины, преподаватель математики СОУВК № 45 «Академическая гимназия» г. Харькова

Ершова А.П., Голобородько В.В.
Е80 Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов.— 5-е изд., испр.— М.: ИЛЕКСА, — 2013, — 224 с.
ISBN 978-5-89237-322-7

Пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по всем важнейшим темам курса математики 10–11 классов.
Работы состоят из 6 вариантов трех уровней сложности.
Дидактические материалы предназначены для организации дифференцированной самостоятельной работы учащихся.

УДК 372.8:514
ББК 74.262.21-26+74.202

ISBN 978-5-89237-322-7

ПРЕДИСЛОВИЕ

Основные особенности предлагаемого сборника самостоятельных и контрольных работ:

1. Сборник содержит *полный набор самостоятельных и контрольных работ по всему курсу алгебры и начал анализа 10—11 классов*, как основному, так и углубленному.

Контрольные работы рассчитаны на один урок, самостоятельные работы — на 25—40 минут, в зависимости от темы и уровня подготовки учащихся.

2. Сборник позволяет осуществить дифференцированный контроль знаний, так как задания распределены по трем уровням сложности А, Б и В. Уровень А соответствует обязательным программным требованиям, Б — среднему уровню сложности, задания уровня В предназначены для учеников, проявляющих повышенный интерес к математике, а также для использования в классах, школах, гимназиях и лицеях с углубленным изучением математики. Для каждого уровня приведено два расположенных рядом равноценных варианта (как они обычно записываются на доске), поэтому на уроке достаточно одной книги на парте.

3. Как правило, на одном развороте книги приводятся оба варианта всех трех уровней сложности. Благодаря этому учащиеся могут сравнить задания различных уровней и, с разрешения учителя, выбрать подходящий для себя уровень сложности.

4. В книгу включены *домашние самостоятельные и практические работы*, содержащие творческие, нестандартные задачи по каждой изучаемой теме, а также задачи повышенной сложности. Эти задания могут в полном объеме или частично предлагаться учащимся в качестве зачетных, а также использоваться как дополнительные задания для проведения контрольных работ. По усмотрению учителя выполнение нескольких или даже одного такого задания может оцениваться отличной оценкой.

Ответы к контрольным и домашним самостоятельным работам приводятся в конце книги.

5. Тематика и содержание работ охватывают требования всех основных отечественных учебников алгебры и начал анализа 10—11 класса. Для удобства пользования книгой приводится таблица тематического распределения работ по учебникам А. Н. Колмогорова и др., Н. Я. Виленкина и др.

Наш адрес в Интернете: www.ilexa.ru.

ТРИГОНОМЕТРИЯ

С-1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И СВОЙСТВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ. ГРАДУСНАЯ И РАДИАННАЯ МЕРЫ УГЛА*

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $2\cos 60° - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}$;

б) $\sin(-420°)$.

2

Сравните значения выражений:

а) $\sin\dfrac{8\pi}{7}$ и $\cos 90°$;

б) $\sin\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{\pi}{2}$.

3

Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

$0{,}5\cos\alpha + 2$.

Вариант А2

а) $\operatorname{ctg} 45° - 2\sin\dfrac{\pi}{6}$;

б) $\cos(-750°)$.

а) $\cos\dfrac{4\pi}{7}$ и $\sin 180°$;

б) $\dfrac{\pi}{3}$ и $\cos\dfrac{\pi}{3}$.

$3\sin\alpha - 1$.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $2\cos 30° \operatorname{ctg} 60° - \sin\dfrac{3\pi}{2}$;

Вариант Б2

а) $2\sin 60° \operatorname{tg} 30° - \cos\pi$;

---

* Авторы обращают внимание на то, что работы по тригонометрии по уровню сложности ориентированы на учащихся, изучавших начала тригонометрии в 9 классе. Для учащихся, впервые изучающих основные формулы тригонометрии, рекомендуем набор самостоятельных работ, предложенный в сборнике авторов для 9 класса.

б) $\dfrac{\sin 390° - \sin(-390°)}{\operatorname{tg}(-765°)}$.

б) $\dfrac{\operatorname{ctg} 405° - \operatorname{ctg}(-405°)}{2\sin(-750°)}$.

❷

Сравните значения выражений:

а) $\cos\frac{25\pi}{13}\operatorname{tg}\frac{11\pi}{10}$ и $\sin(-330°)\operatorname{ctg}100°$;

б) $\cos 2°$ и $\cos 2$.

а) $\sin 1,2\pi\ \operatorname{ctg}\frac{4\pi}{7}$ и $\cos(-300°)\operatorname{tg}110°$;

б) $\sin 4$ и $\sin 4°$.

❸

При каких значениях *a* возможно равенство:

$\sin x = a^2 + 1$?

$\cos x = -1 - a^2$?

Вариант В1

Вариант В2

❶

Вычислите:

а) $\sin(-45°)\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \cos(-45°)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $\dfrac{\cos 540° - \sin 810°}{\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{2} - \operatorname{tg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$.

а) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\operatorname{tg}45° + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}45°$;

б) $\dfrac{\sin\frac{7\pi}{2} - \cos 6\pi}{\operatorname{tg}540° - \operatorname{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)}$.

❷

Сравните значения выражений:

а) $\sin 2\cos 3\operatorname{tg}4$ и $\cos 5$;

б) $\sin 200°$ и $\sin(-200°)$.

а) $\cos 1\operatorname{tg}2\operatorname{ctg}3$ и $\sin 4$;

б) $\operatorname{tg}(-100°)$ и $\operatorname{tg}100°$.

❸

При каких значениях *a* неравенство

$\sin x \le a^2 - a - 1$ $\cos x \ge a^2 - 3a + 1$

выполняется при любом значении x?

С-2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА

Вариант А1

Вариант А2

1

Известно, что

$\sin\alpha = 0{,}8$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

$\cos\alpha = 0{,}6$ и $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Найдите значения трех других тригонометрических функций угла α.

2

Упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta$;

б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} \cdot \left(1 - \sin^2\alpha\right)$.

а) $\operatorname{tg}\beta \operatorname{ctg}\beta - \sin^2\alpha$;

б) $\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$.

3

Докажите тождество:

$\dfrac{1 + \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.

$\dfrac{1 + \operatorname{ctg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Известно, что

$\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

$\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$ и $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Найдите значения трех других тригонометрических функций угла α.

2

Упростите выражение:

а) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\beta;$

б) $\left(\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-1\right).$

а) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\beta;$

б) $\left(\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-1\right).$

3

Докажите тождество:

$$\frac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}+2\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$$\frac{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)}+2\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Вариант В1

1

Известно, что

$25\sin^2\alpha+5\sin\alpha-12=0$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$

Найдите значения четырех основных тригонометрических функций угла α.

2

Упростите выражение:

а) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+\dfrac{3-3\cos^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha};$

б) $\operatorname{ctg}^6\beta-\dfrac{\cos^2\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}{\sin^2\beta-\operatorname{tg}^2\beta}.$

3

Докажите тождество:

$$\frac{\sin\alpha-\cos\beta}{\sin\beta+\cos\alpha}=\frac{\sin\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\beta}.$$

Вариант В2

1

$25\cos^2\alpha-5\cos\alpha-12=0$ и $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi.$

2

а) $\cos^6\alpha+\sin^6\alpha-\dfrac{3\sin^2\alpha-3}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha};$

б) $\operatorname{tg}^6\beta-\dfrac{\sin^2\beta-\operatorname{tg}^2\beta}{\cos^2\beta-\operatorname{ctg}^2\beta}.$

3

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\beta+\cos\alpha}=\frac{\cos\beta-\cos\alpha}{\sin\alpha+\sin\beta}.$$

С-3. ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ. ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $\sin 300°$;

б) $\cos 62°\cos 28° - \sin 62°\sin 28°$.

2

Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}$;

б) $\dfrac{1}{2}\sin\alpha - \sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

3

Докажите тождество:

$\sin\alpha\cos 3\alpha - \cos\alpha\sin 3\alpha = \cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)$.

Вариант А2

а) $\cos 210°$;

б) $\sin 112°\cos 22° - \sin 22°\cos 112°$.

а) $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}$;

б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha - \cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

$\sin 4\alpha\sin\alpha - \cos 4\alpha\cos\alpha = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+5\alpha\right)$.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\sin\dfrac{17\pi}{6} + \cos 240°$;

б) $\dfrac{\cos 52°\cos 7° + \sin 52°\sin 7°}{\sin 29°\cos 16° + \sin 16°\cos 29°}$.

Вариант Б2

а) $\cos\dfrac{10\pi}{3} + \sin 150°$;

б) $\dfrac{\sin 72°\cos 12° - \sin 12°\cos 72°}{\cos 18°\cos 12° - \sin 18°\sin 12°}$.

2

Упростите выражение:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

б) $\sin(\alpha-30^\circ)+\cos(60^\circ+\alpha)$.

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(2\pi-\alpha)}{\cos(\pi+\alpha)}$;

б) $\cos(60^\circ-\alpha)-\sin(\alpha+30^\circ)$.

3

Докажите тождество:

$\dfrac{\cos(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\dfrac{\operatorname{tg}40^\circ+\operatorname{tg}5^\circ}{1-\operatorname{tg}40^\circ\operatorname{tg}5^\circ}$.

$\dfrac{\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\sin(\pi-\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}55^\circ-\operatorname{tg}10^\circ}{1+\operatorname{tg}55^\circ\operatorname{tg}10^\circ}$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $\sin 530^\circ-\cos\dfrac{22\pi}{9}$;

б) $\dfrac{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}$.

2

Упростите выражение:

а) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha-\beta)}+$

$+\dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(2\pi-\beta)}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha-\beta)}$;

Вариант В2

1

Вычислите:

а) $\cos 770^\circ-\sin\dfrac{25\pi}{9}$;

б) $\dfrac{\sin 22^\circ\cos 8^\circ+\cos 158^\circ\cos 98^\circ}{\sin 23^\circ\cos 7^\circ+\cos 157^\circ\cos 97^\circ}$.

2

Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)}+$

$+\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(2\pi+\beta)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha+\beta\right)}$;

б) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+$
$+\cos^2\alpha+\sin^2\beta.$

б) $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)+$
$+\sin^2\beta+\cos^2\alpha.$

3

Докажите тождество:

$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+$
$+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\cdot\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1.$

$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=$
$=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$

С-4. ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО И ПОЛОВИННОГО УГЛА

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;

б) $2\cos^2 15°\ \operatorname{tg}15°$.

2

Найдите $\cos 2\alpha$, если

$\sin\alpha=-0,6.$

3

Упростите выражение:

$\operatorname{tg}2\alpha\cdot\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}.$

4

Докажите тождество:

$\sin 2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{tg}\alpha.$

Вариант А2

а) $2\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}$;

б) $1-2\sin^2 22°30'$.

$\cos\alpha=0,8.$

$\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot(1+\cos 4\alpha).$

$\operatorname{ctg}\alpha-\sin 2\alpha=\cos 2\alpha\operatorname{ctg}\alpha.$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Вычислите:

Б1:

а) $4\sin\frac{7\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$;

б) $\frac{\sin 15^\circ}{\sin 5^\circ}-\frac{\cos 15^\circ}{\cos 5^\circ}$.

Б2:

а) $\cos^4\frac{5\pi}{12}-\sin^4\frac{5\pi}{12}$;

б) $\operatorname{ctg} 15^\circ - \operatorname{tg} 15^\circ$.

2

Известно, что

Б1: $\cos\alpha = -0{,}28$ и α — угол II четверти. Найдите $\sin\frac{\alpha}{2}$.

Б2: $\cos\alpha = 0{,}28$ и α — угол I четверти. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$.

3

Упростите выражение:

Б1: $4\sin\alpha\cos^3\alpha-4\sin^3\alpha\cos\alpha$.

Б2: $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

4

Докажите тождество:

Б1: $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\cos 2\alpha$.

Б2: $\frac{\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\sin 2\alpha$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Вычислите:

В1:

а) $\sin 75^\circ \sin 15^\circ$;

б) $\left(\cos\frac{\pi}{12}-\sin\frac{\pi}{12}\right)\times$

$\times\left(\cos^3\frac{\pi}{12}+\sin^3\frac{\pi}{12}\right)$.

В2:

а) $\cos 15^\circ \cos 75^\circ$;

б) $\left(\cos\frac{\pi}{8}+\sin\frac{\pi}{8}\right)\times$

$\times\left(\cos^3\frac{\pi}{8}-\sin^3\frac{\pi}{8}\right)$.

❷

Известно, что

$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Найдите $\mathrm{tg}(\pi + 4\alpha)$.

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

Найдите $\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - 4\alpha\right)$.

❸

Упростите выражение:

$\frac{\cos\alpha}{\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2} - \sin\alpha}$.

$\frac{\cos 4\alpha}{\sin 4\alpha - \mathrm{tg}\,2\alpha}$.

❹

Докажите тождество:

$\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,2\alpha = \frac{1}{\sin 2\alpha}$.

$1 + \mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{1}{\cos 2\alpha}$.

С-5. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

Вариант А1

❶

Преобразуйте выражение

а) в произведение:

$\sin 6\alpha - \sin 4\alpha$;

б) в сумму:

$\cos 3\alpha \cos 2\alpha$.

❷

Упростите выражение:

а) $\frac{\sin 3\alpha + \sin\alpha}{\cos 3\alpha - \cos\alpha}$;

Вариант А2

❶

а) $\cos 7\alpha - \cos 3\alpha$;

б) $\sin 5\alpha \cos 2\alpha$.

❷

а) $\frac{\cos 4\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 4\alpha - \sin 2\alpha}$;

б) $2\sin 35^\circ \cos 10^\circ - \sin 25^\circ$.

б) $\sin 25^\circ \sin 5^\circ - 0{,}5\cos 20^\circ$.

3

Докажите тождество:

$$\frac{\sin 4\alpha + 2\cos 3\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 4\alpha - 2\sin 3\alpha - \cos 2\alpha} = -\operatorname{ctg} 3\alpha.$$

$$\frac{\cos\alpha + 2\cos 2\alpha + \cos 3\alpha}{\sin\alpha + 2\sin 2\alpha + \sin 3\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha.$$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите значение выражения, используя представление тригонометрических выражений в виде

а) произведения:

$$\frac{\cos 18^\circ + \cos 42^\circ}{\cos 12^\circ};$$

$$\frac{\cos 29^\circ - \cos 91^\circ}{\sin 31^\circ};$$

б) суммы:

$\sin 105^\circ \sin 15^\circ$.

$\cos 75^\circ \cos 15^\circ$.

2

Упростите выражение:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right)$;

б) $2\cos(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) - 1 + 2\sin^2\beta$.

а) $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{3\pi}{4} + \alpha\right)$;

б) $2\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) + 2\cos^2\alpha - 1$.

3

Докажите тождество:

$$\frac{2\sin 3\alpha\cos\alpha - \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \cos 6\alpha} = \frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}.$$

$$\frac{2\cos 3\alpha\cos\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 6\alpha - \sin 2\alpha} = \frac{1}{4\sin\alpha\cos\alpha}.$$

Вариант В1 / **Вариант В2**

1

Вычислите:

Вариант В1

а) $\dfrac{\sin\dfrac{7\pi}{18}-\sin\dfrac{\pi}{9}}{\cos\dfrac{7\pi}{18}-\cos\dfrac{\pi}{9}}$;

б) $\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{3\alpha}{2}$, если $\cos\alpha=0,6$.

Вариант В2

а) $\dfrac{\sin\dfrac{5\pi}{18}+\sin\dfrac{2\pi}{9}}{\cos\dfrac{5\pi}{18}+\cos\dfrac{2\pi}{9}}$;

б) $\sin\alpha\sin3\alpha$,

если $\cos2\alpha=-0,8$.

2

Упростите выражение:

Вариант В1

а) $\dfrac{\sin6\alpha-\sin4\alpha+\sin2\alpha}{4\cos3\alpha\cos2\alpha}$;

б) $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\times$

$\times\big(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\big)$.

Вариант В2

а) $\dfrac{4\sin3\alpha\sin2\alpha}{\sin4\alpha-\sin6\alpha+\sin2\alpha}$;

б) $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\times$

$\times\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$.

3

Докажите тождество:

Вариант В1

$\dfrac{\sin A+\sin B}{\cos A+\cos B}=\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$,

Вариант В2

$\dfrac{\cos A-\cos B}{\sin A-\sin B}=-\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$,

если A, B и C — углы треугольника.

С-6*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 / **Вариант 2**

1

Вычислите, используя умножение и деление на подходящее тригонометрическое выражение:

а) $\sin 18^\circ \sin 54^\circ$;

б) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$.

а) $\cos 36^\circ \cos 72^\circ$;

б) $\cos\frac{\pi}{5}+\cos\frac{2\pi}{5}+$
$+\cos\frac{4\pi}{5}+\cos\frac{6\pi}{5}$.

❷

Упростите выражение, используя формулы понижения степени:

а) $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{15\pi}{8}+\alpha\right)$;

б) $\sin^2 2\alpha+\sin^2\beta+$
$+\cos(2\alpha+\beta)\cos(2\alpha-\beta)$.

а) $\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}-\alpha\right)-\cos^2\left(\frac{11\pi}{8}+\alpha\right)$;

б) $\sin^2(\alpha+\beta)+$
$+\cos^2(\alpha-\beta)-\sin 2\alpha\sin 2\beta$.

❸

Решите неравенство, применяя тригонометрические преобразования:

а) $\cos(91^\circ - x)\cos x -$
$-\sin(91^\circ - x)\sin x < 0$;

б) $x^2 + 2x\cos 3{,}5\,\sin 0{,}5 -$
$-\sin 3\,\sin 4 < 0$.

а) $\sin(179^\circ + x)\cos x -$
$-\cos(179^\circ + x)\sin x > 0$;

б) $x^2 - 2x\cos 6{,}5\,\cos 0{,}5 +$
$+\cos 6\,\cos 7 < 0$.

❹

Оцените значение выражения, используя метод введения вспомогательного угла:

а) $\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha$;

б) $5\cos 2\alpha+12\sin 2\alpha$.

а) $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha$;

б) $7\sin\alpha-24\cos\alpha$.

❺

Найдите значение выражения, используя универсальную тригонометрическую подстановку:

а) $\cos 2\alpha\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha\alpha = -3$;

а) $\sin 4\alpha\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha\alpha = 3$;

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{5}$.

б) $\operatorname{tg}\alpha$, если

$$\cos^4\alpha - \sin^4\alpha = -\frac{7}{25}.$$

К-1. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $2\sin\frac{2\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$;

б) $\sin 56^\circ \cos 34^\circ + \cos 56^\circ \sin 34^\circ$.

2

Известно, что

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдите $\cos 2\alpha$.

3

Упростите выражение:

а) $\operatorname{tg}^2\alpha + \sin^2\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha}$;

б) $\frac{\cos 3\alpha + \cos\alpha}{2\cos\alpha} + 2\sin^2\alpha$.

4

Докажите тождество:

$1 - \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$.

Вариант А2

а) $2\cos\frac{5\pi}{6} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos 111^\circ \cos 69^\circ - \sin 111^\circ \sin 69^\circ$.

$\sin(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Найдите $\cos 2\alpha$.

а) $\operatorname{ctg}^2\alpha + \cos^2\alpha - \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

б) $\frac{\sin 5\alpha - \sin\alpha}{2\cos 3\alpha} \cdot \operatorname{ctg}\alpha - 1$.

$\operatorname{ctg}^2\alpha - 1 = \frac{\cos 2\alpha}{\sin^2\alpha}$.

5

Найдите значение x и выразите его в радианах, если $0° < x° < 90°$ и

$\sin 32° + \sin 28° = 2\sin x \cos 2°$.

$\cos 74° + \cos 16° = 2\cos x \cos 29°$.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}} - \sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4}$;

б) $\dfrac{\sin 50° + \sin 10°}{\cos 25° \cos 5° + \sin 25° \sin 5°}$.

2

Известно, что

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + \alpha\right) = 0,5$ и $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Найдите $\sin(60° - \alpha)$.

3

Упростите выражение:

а) $\left(\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha}\right)^2 - 2\sin^2\alpha$;

б) $\dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\cos\alpha - \cos 3\alpha}(1 - \cos 4\alpha)$.

4

Докажите тождество:

$\operatorname{tg} 2\alpha \cdot \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \sin 2\alpha$.

Вариант Б2

1

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}} + \sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{4}$;

б) $\dfrac{\cos 25° \cos 15° - \sin 25° \sin 15°}{\cos 100° + \cos 20°}$.

2

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\dfrac{1}{2}$ и $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

Найдите $\sin(30° + \alpha)$.

3

а) $2\cos^2\alpha - (\operatorname{tg}\alpha\cos\alpha)^2 - (\operatorname{ctg}\alpha\sin\alpha)^2$;

б) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha}(1 + \cos 4\alpha)$.

4

$\operatorname{ctg} 2\alpha \cdot \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \cos 2\alpha$.

5

Найдите значение x и выразите его в радианах, если $90° < x° < 180°$ и

$\sin 57° + \sin 41° = 2\sin x \cos 8°$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $\dfrac{\mathrm{tg}\,67° - \mathrm{tg}\,22°}{1 + \mathrm{tg}\,67°\,\mathrm{tg}\,22°} + 4\sin 105° \cos 105°$;

б) $\sqrt{\dfrac{1+\cos 4}{2}} + \cos 2$.

2

Известно, что

$\sin 2\alpha = 0{,}8$ и $45° < \alpha < 90°$. Найдите $\mathrm{tg}\,\alpha$.

3

Упростите выражение:

а) $\dfrac{4\cos\alpha}{\mathrm{ctg}^2\dfrac{\alpha}{2} - \mathrm{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}}$;

б) $\dfrac{\cos\alpha + \cos 3\alpha}{\sin 2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha + \sin 3\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$.

4

Докажите тождество:

$4\sin\alpha \sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \sin 3\alpha$.

$\cos 62° - \cos 18° = -2\sin x \sin 22°$.

Вариант В2

1

а) $\dfrac{\mathrm{tg}\,29° + \mathrm{tg}\,16°}{1 - \mathrm{tg}\,29°\,\mathrm{tg}\,16°} - 4\sin 75° \cos 75°$;

б) $\sqrt{\dfrac{1-\cos 8}{2}} + \sin 4$.

2

$\cos 2\alpha = 0{,}6$ и $135° < \alpha < 180°$. Найдите $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

3

а) $\dfrac{\mathrm{tg}^2 2\alpha - \mathrm{ctg}^2 2\alpha}{4\,\mathrm{ctg}\,4\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha}{1 - \cos 2\alpha} + \dfrac{\sin\alpha - \sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}$.

4

$4\cos\alpha \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos 3\alpha$.

5

Найдите два значения x из промежутка [−360°; 0°], удовлетворяющие равенству:

$\cos 21° - \cos 51° = 2\sin x \sin 396°$.

$\sin 5° + \sin 65° = 2\sin 395° \cos x$.

С-7. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ

Вариант А1

1

В одной системе координат постройте графики функций:

$y = \cos x$,

$y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$,

$y = 2\cos x$.

2

Найдите область определения функции:

а) $y = \sqrt{x+1}$;

б) $y = \operatorname{tg} x$.

3

Найдите область значений функции:

$y = \sin x - 2$.

Вариант А2

1

$y = \sin x$,

$y = 3\sin x$,

$y = \sin x + 2$.

2

а) $y = \frac{1}{x^2 + x}$;

б) $y = \operatorname{ctg} x$.

3

$y = 0{,}5\cos x$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

В одной системе координат постройте графики функций:

$y = \sin x,$

$y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right),$

$y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$

$y = \cos x,$

$y = -0{,}5 \cos x,$

$y = -0{,}5 \cos x + 1.$

❷

Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{x}}{x^2 - 1};$

б) $y = \operatorname{ctg} 3x.$

а) $y = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x - 1}};$

б) $y = \operatorname{tg}\frac{x}{2}.$

❸

Найдите область значений функции:

$y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 5.$

$y = 3\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1.$

Вариант В1

❶

В одной системе координат постройте графики функций:

$y = \operatorname{ctg} x,$

$y = 2\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right),$

$y = \left|2\operatorname{ctg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right|.$

❷

Найдите область определения функции:

а) $y = \frac{\sqrt{x + 6 - x^2}}{x^2 - 1};$

Вариант В2

❶

$y = \operatorname{tg} x,$

$y = 0{,}5\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right),$

$y = 0{,}5\operatorname{tg}\left|x + \frac{\pi}{4}\right|.$

❷

а) $y = \frac{\sqrt{20 - x - x^2}}{4 - x^2};$

б) $y = \dfrac{1}{\cos^2 \dfrac{x}{2} - \sin^2 \dfrac{x}{2}}$.

б) $y = \dfrac{1}{4 \sin \dfrac{x}{2} \cos \dfrac{x}{2}}$.

3

Найдите область значений функции:

$y = 4\sin^2\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - 3.$

$y = 4 - 6\cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right).$

С-8. ЧЕТНОСТЬ И ПЕРИОДИЧНОСТЬ ФУНКЦИЙ

Вариант А1

Вариант А2

1

Докажите, что функция $f(x)$ является четной, а функция $g(x)$ — нечетной, если:

$f(x) = 3x^2 - \cos x,$
$g(x) = \sin 2x + x^3.$

$f(x) = 2x^4 + \cos x,$
$g(x) = \operatorname{tg} x - 4x^5.$

2

Найдите наименьший положительный период функции:

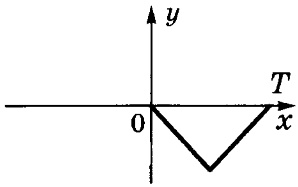
а) $y = \sin \dfrac{x}{3}$;
б) $y = \operatorname{tg} 4x$.

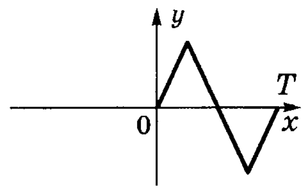
а) $y = \cos 2x$;
б) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{x}{3}$.

3

На рисунке изображена часть графика функции, имеющей период T.

Достройте график этой функции на промежутке $[-T;\ 2T]$. Является ли данная функция четной или нечетной?





Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Исследуйте функцию на четность или нечетность:

Б1:

а) $f(x) = x^3 \cos x$;

б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2 - 4}$.

Б2:

а) $f(x) = x^4 \sin x$;

б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{ctg} x}{x^3}$.

❷

Найдите наименьший положительный период функции:

Б1:

а) $y = \sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x$;

б) $y = \dfrac{2\cos 0,5x}{\sin 0,5x}$.

Б2:

а) $y = \cos 5x \cos 3x + \sin 5x \sin 3x$;

б) $y = \dfrac{3\sin\frac{x}{3}}{\cos\frac{x}{3}}$.

❸

Постройте на отрезке $[-3;\ 3]$ график

Б1: четной функции с наименьшим положительным периодом 2.

Б2: нечетной функции с наименьшим положительным периодом 3.

Вариант В1 **Вариант В2**

❶

Исследуйте функцию на четность или нечетность:

Вариант В1:

а) $f(x) = x\,\mathrm{tg}\,x - \sin^2 x$;

б) $f(x) = \dfrac{2x^3}{\cos x - 1}$.

Вариант В2:

а) $f(x) = x^3\,\mathrm{ctg}\,x + |\sin x|$;

б) $f(x) = \dfrac{x^5 + x}{\cos x + 1}$.

❷

Найдите наименьший положительный период функции:

Вариант В1:

а) $y = \dfrac{\mathrm{tg}\,x - \mathrm{tg}\,\dfrac{x}{3}}{1 + \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,\dfrac{x}{3}}$;

б) $y = 2\sin 2x\cos x - \sin x$.

Вариант В2:

а) $y = \dfrac{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,0,25x}{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,0,25x}$;

б) $y = \cos 3x - 2\cos 4x\cos x$.

❸

Приведите пример

Вариант В1: двух нечетных периодических функций, произведение которых — четная периодическая функция.

Вариант В2: четной и нечетной периодических функций, произведение которых — нечетная периодическая функция.

Ответ подтвердите доказательством.

С-9. МОНОТОННОСТЬ ФУНКЦИЙ. ЭКСТРЕМУМЫ

Вариант А1 **Вариант А2**

❶

Используя свойства возрастания и убывания тригонометрических

функций, сравните значения выражений:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{10}$ и $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$;

б) $\cos\frac{\pi}{8}$ и $\cos\frac{3\pi}{8}$.

а) $\sin\frac{\pi}{12}$ и $\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$ и $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{5}$.

❷

Найдите промежутки возрастания и убывания, точки экстремума и экстремумы функции:

$y = 2\sin x + 1$.

$y = 0,5\cos x - 1$.

❸

Функция $y = f(x)$ имеет максимум в точке $(x_0; y_0)$. Найдите точку минимума и минимум функции $y = -3f(x)$.

❸

Функция $y = f(x)$ имеет минимум в точке $(x_0; y_0)$. Найдите точку максимума и максимум функции $y = -f(x) - 2$.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Расположите в порядке возрастания числа:

а) $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$; $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{7}$;

б) $\cos(-1,8)$; $\cos 2,3$; $\cos 2$.

а) $\sin\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{7\pi}{6}$; $\sin\frac{\pi}{3}$;

б) $\operatorname{ctg}(-0,3)$; $\operatorname{ctg} 1,2$; $\operatorname{ctg} 1$.

❷

Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

$y = 0,5\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

$y = 3\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

❸

Дана функция $y = f(x)$, у которой

$x_{min} = -1$, $y_{min} = 1$,
$x_{max} = 2$, $y_{max} = 4$.

$x_{min} = 0$, $y_{min} = -8$,
$x_{max} = 5$, $y_{max} = 10$.

Найдите точки экстремума и экстремумы функции

$y = -2f(x + 1)$.

$y = -0{,}5f(x - 2)$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Расположите данные числа

а) в порядке возрастания:

$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$; $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{8}\right)$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$;

$\sin\frac{\pi}{3}$; $\sin\frac{9\pi}{7}$; $\cos\frac{\pi}{10}$; $\sin\frac{4\pi}{3}$;

б) в порядке убывания:

$\cos(-\pi)$; $\cos 4$; $\cos 6$; $\sin 0{,}1$.

$\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$; $\operatorname{ctg} 5$; $\operatorname{ctg} 1{,}8$; $\operatorname{tg} 0{,}9$.

❷

Найдите промежутки монотонности, точки экстремума и экстремумы функции:

$y = \left|\operatorname{ctg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right| - 1$.

$y = \left|3\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right| + 2$.

❸

Используя определения, докажите, что:

если $y = f(x)$ — четная функция, возрастающая на промежутке $[0; a]$, то на промежутке $[-a; 0]$ функция $y = -f(x)$ также возрастает.

если $y = f(x)$ — нечетная функция, убывающая на промежутке $[0; a]$, то на промежутке $[-a; 0]$ функция $y = -f(x)$ возрастает.

С-10*. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ (домашняя практическая работа)

Исследуйте функцию и постройте ее график:

Уровень А

1) $y = 1,5\sin 2x$;
2) $y = 2\cos\frac{x}{2}$;
3) $y = -\operatorname{tg} 3x$;
4) $y = 0,5\operatorname{ctg} 0,5x$;
5) $y = \sin\frac{1}{3}x - 1$;
6) $y = 2 - \cos 2x$;
7) $y = \frac{1}{3}\operatorname{tg} 2x$;
8) $y = -2\operatorname{ctg}\frac{2x}{3}$;
9) $y = 1 + \operatorname{tg}\frac{x}{4}$;
10) $y = -3\cos 1,5x$.

Уровень Б

1) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$;
2) $y = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$;
3) $y = -\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{6}\right)$;
4) $y = \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) + 1$;
5) $y = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right)$;
6) $y = 1 + \cos\left(\frac{2}{3}x + \frac{2\pi}{3}\right)$;
7) $y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)$;
8) $y = 2\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$;
9) $y = 1 - \cos\left(2x - \frac{4\pi}{3}\right)$;
10) $y = -\sin\left(1,5x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Уровень В

1) $y = \left|\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)\right|$;
6) $y = 3\cos\left(2|x| - \frac{\pi}{3}\right)$;

2) $y = \operatorname{tg}\left(2|x| + \frac{\pi}{4}\right)$;

3) $y = 3 - 2\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{2x}{3}\right)$;

4) $y = -\operatorname{ctg}\left(2\pi x - \frac{\pi}{4}\right)$;

5) $y = -0,5\sin\left|2x + \frac{\pi}{3}\right|$;

7) $y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 2x}}$;

8) $y = \left|\operatorname{tg}\left|\frac{x}{2}\right|\right| - 1$;

9) $y = \frac{1 - \sqrt{3}\operatorname{tg} 2x}{\sqrt{3} + \operatorname{tg} 2x}$;

10) $y = 2\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$.

К-2. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вариант А1

Вариант А2

❶

Постройте график функции

А1: $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

А2: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Пользуясь графиком, определите:

а) нули функции;

А1: б) промежутки убывания функции.

А2: б) промежутки возрастания функции.

❷

Определите, является ли функция $f(x)$ четной или нечетной, и найдите ее наименьший положительный период, если:

А1: $f(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 3x$.

А2: $f(x) = 2 - 4\cos\frac{x}{3}$.

❸

Не выполняя построений, найдите:

а) область определения и область значений функции:

$y = 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 2;$ $y = 0,5\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1,5;$

б) точки экстремума и экстремумы функции:

$y = -4\sin x.$ $y = -2\cos x.$

❹

Найдите область определения функции:

$y = \sqrt{2\cos^2\frac{x}{2} - 1}.$ $y = \sqrt{4\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}.$

Вариант Б1 Вариант Б2

❶

Постройте график функции

$y = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - \frac{1}{2}.$ $y = 2\sin 2x + 2.$

Пользуясь графиком, определите:

а) нули функции;

б) точки экстремума и экстремумы функции.

❷

Найдите область определения функции и выясните, является ли она четной или нечетной:

$f(x) = \frac{x^2 - 1}{\sin x}.$ $f(x) = \frac{x^3}{\cos x - 1}.$

3

Не выполняя построений, найдите:

а) область значений и наименьший положительный период функции:

$y = 4\sin 5x\cos 2x - 4\cos 5x\sin 2x;$

$y = 2\cos^4 x - 2\sin^4 x;$

б) область определения и промежутки монотонности функции:

$y = \operatorname{tg} 2x.$

$y = \operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}.$

4

Найдите область определения и область значений функции:

$y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}.$

$y = \dfrac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$

Вариант В1

Вариант В2

1

Постройте график функции:

$y = \dfrac{1}{2}\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right).$

$y = 2\cos\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right).$

Пользуясь графиком, определите

а) промежутки знакопостоянства функции;

б) точки экстремума и экстремумы функции.

2

Исследуйте на четность и периодичность функцию:

$f(x) = \cos 4x + \sin^2 x.$

$f(x) = \sin 3x - \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}.$

3

Не выполняя построений, найдите:

а) область значений и промежутки монотонности функции:

$y = \cos x + \sqrt{3}\sin x;$

$y = \sin x - \cos x;$

б) асимптоты и нули функции:

$y = 2\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{4}\right).$

$y = -\mathrm{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{3}\right).$

4

Постройте схематически график функции

$y = \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} + \cos x.$

$y = \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}} - \sin x.$

Является ли эта функция периодической? Если да, то найдите ее наименьший положительный период.

С-11. ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Вариант А1

1

Вычислите:

а) $\arcsin 1 - \mathrm{arctg}\, 0;$

б) $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right);$

в) $\mathrm{ctg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

Вариант А2

а) $\arccos 0 - \mathrm{arctg}\, 1;$

б) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3};$

в) $\mathrm{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

2

Сравните числа:

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ и $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3

Определите, имеет ли смысл выражение:

$\arcsin(x-1)$ при $x=\sqrt{5}$; $x=0,9$; $x=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

$\arccos(x+1)$ при $x=-\sqrt{3}$; $x=\cos\frac{\pi}{3}$; $x=-\frac{1}{3}$.

Ответ объясните.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\arccos(-1)-2\operatorname{arcctg}0$;

б) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\operatorname{arctg}\sqrt{3}$;

в) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2

Сравните числа:

$\sin 1$ и $\arcsin 1$.

3

Определите, при каких значениях a имеет смысл выражение:

$\arccos(2a-1)$.

Вариант Б2

1

а) $\arcsin(-1)+2\operatorname{arctg}0$;

б) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)-2\operatorname{arcctg}\sqrt{3}$;

в) $\arccos\left(\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

2

$\arccos 0$ и $\cos 0$.

3

$\arcsin(3a+2)$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Вычислите:

Вариант В1:

а) $\arccos\left(\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}\right)-2\arcsin 1$;

б) $\sin\left(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)$;

в) $\arccos(\sin(\operatorname{arctg} 0))$.

Вариант В2:

а) $\arcsin\left(\operatorname{tg}\dfrac{3\pi}{4}\right)+2\arccos\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\operatorname{arcctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

в) $\arcsin(\cos(\operatorname{arcctg} 0))$.

2

Сравните числа:

Вариант В1: $\operatorname{arctg}(a-1)$ и $\operatorname{arctg}(a+1)$.

Вариант В2: $\operatorname{arcctg} a$ и $\operatorname{arcctg}(a+2)$.

3

Найдите область определения функции:

Вариант В1: $y=\sqrt{-\arcsin(x+1)}$.

Вариант В2: $y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}-\arccos(x-1)}$.

С-12*. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ОБРАТНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

1

Определите, при каких значениях параметра *a* выполняется тождество, и докажите его:

Вариант 1:

а) $\sin(\arccos a)=\sqrt{1-a^2}$;

б) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a)=\dfrac{1}{a}$;

Вариант 2:

а) $\cos(\arcsin a)=\sqrt{1-a^2}$;

б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a)=\dfrac{1}{a}$;

в) $\operatorname{tg}(\arcsin a) = \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$;

г) $\cos(\operatorname{arcctg} a) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$;

д) $\arcsin a + \arccos a = \dfrac{\pi}{2}$.

в) $\operatorname{tg}(\arccos a) = \dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}$;

г) $\sin(\operatorname{arctg} a) = \dfrac{a}{\sqrt{1+a^2}}$;

д) $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \dfrac{\pi}{2}$.

2

Вычислите:

а) $\sin\left(2\arccos\dfrac{12}{13}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{13}\right)$;

в) $\sin\left(\operatorname{arctg}3 - \operatorname{arcctg}\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$.

а) $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{13}\right)$;

б) $\operatorname{ctg}\left(2\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$;

в) $\cos\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2} - \operatorname{arcctg}3\right)$.

3

Учитывая область значений аркфункций, вычислите:

а) $\arccos(\cos 10)$;

б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{5}\right)$.

а) $\arcsin(\sin 6)$;

б) $\operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{7\pi}{8}\right)$.

4

Найдите область определения функции:

а) $y = \arcsin(x^2 + x - 1)$;

б) $y = \arccos\sqrt{2-x}$.

а) $y = \arccos(x^2 - 3)$;

б) $y = \arcsin\dfrac{1}{x-1}$.

5

Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = \sqrt{-\arcsin x}$;

а) $y = \dfrac{1}{\arcsin x}$;

б) $y = 2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

б) $y = \dfrac{\pi}{2} + 2\operatorname{arcctg}\left(-\sqrt{x}\right)$.

6

Решите уравнение:

а) $\cos\left(\arccos\left(x+2\right)\right) = x^2$;

б) $6\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2} = 2\pi$;

в) $\arcsin\left(x^2 - 4\right) = \arcsin\left(2x+4\right)$;

г) $\left(\operatorname{arcctg} x\right)^2 - 6\operatorname{arcctg} x + 8 = 0$.

а) $\sin\left(\arcsin\left(4x-1\right)\right) = 3x^2$;

б) $2\operatorname{arcctg}\left(2x-3\right) = \pi$;

в) $\arccos\left(x^2 - x\right) = \arccos\left(2x-2\right)$;

г) $2\left(\operatorname{arctg} x\right)^2 - 5\operatorname{arctg} x + 2 = 0$.

С-13. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант А1

1

Решите уравнение:

а) $2\sin x = \sqrt{3}$;

б) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$;

в) $\operatorname{tg} 3x = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

2

Найдите нули функции:

$y = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - x\right) + 1$.

Вариант А2

а) $2\cos x = 1$;

б) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;

в) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2} = -\sqrt{3}$.

$y = \sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + 1$.

3

Решите уравнение и найдите

его наименьший положительный корень:

$\operatorname{ctg}\frac{x}{3}=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}$.

его наибольший отрицательный корень:

$\operatorname{tg}4x=\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Вариант Б1

1

Решите уравнение:

а) $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+1=0$;

б) $1-2\cos^2 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=-1$.

2

Найдите нули функции:

$y=\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1$.

3

Решите уравнение и найдите его корни, принадлежащие промежутку [0; π]:

$\left(\sin 2x+\sin\frac{\pi}{6}\right)(\sin 2x-3)=0$.

Вариант Б2

1

Решите уравнение:

а) $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)-1=0$;

б) $\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4}=-\frac{1}{4}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=-3$.

2

Найдите нули функции:

$y=\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1$.

3

Решите уравнение и найдите его корни, принадлежащие промежутку [0; π]:

$\left(\cos 2x+\cos\frac{\pi}{4}\right)(\cos 2x+4)=0$.

Вариант В1

1

Решите уравнение:

а) $4\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{8}=0$;

Вариант В2

1

Решите уравнение:

а) $4\cos\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)+\sqrt{12}=0$;

б) $\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi x}{2}\right)=-\mathrm{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

в) $\left|\cos\left(x\sin\frac{\pi}{6}\right)+0,5\right|=0,5.$

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi x}{3}\right)=\mathrm{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right)$;

в) $\left|0,5-\sin\left(x\cos\frac{\pi}{3}\right)\right|=0,5.$

❷

Не выполняя построений, найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

$f(x)=\cos 5x\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ и

$g(x)=\sin 5x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$f(x)=\sin 3x\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$ и

$g(x)=\cos 3x\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$.

❸

Определите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[-\pi;\ \pi]$:

$(\sin x-1)\left(\mathrm{tg}\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right)=0.$

$(\cos x-1)\left(\mathrm{ctg}\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)-1\right)=0.$

С-14. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант А1

❶

Решите уравнение:

а) $2\sin^2 x-3\sin x-2=0$;

б) $\sin 2x-\cos x=0$;

в) $\cos 7x+\cos x=0.$

Вариант А2

а) $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$;

б) $\sqrt{3}\cos x+\sin 2x=0$;

в) $\sin x+\sin 5x=0.$

2

Найдите корни уравнения на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$3\mathrm{tg}\,x - \mathrm{ctg}\,x = 2.$

$\mathrm{tg}\,x - 2\mathrm{ctg}\,x = -1.$

Вариант Б1

1

Решите уравнение:

а) $4\cos^2 x + 4\sin x - 1 = 0;$
б) $2\cos^2 x - \sin 2x = 0;$
в) $\cos x + \cos 3x = \cos 2x.$

2

Найдите корни уравнения на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$:

$\sin^2 x + 5\sin x \cos x + 2\cos^2 x = -1.$

Вариант Б2

1

а) $4\sin^2 x - 4\cos x - 1 = 0;$
б) $\sin^2 x - 0{,}5\sin 2x = 0;$
в) $\sin 2x + \sin 6x = \cos 2x.$

2

$3\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 1.$

Вариант В1

1

Решите уравнение:

а) $\cos 4x - 3\cos 2x = 1;$
б) $4\cos^2 x - \sin 2x = 1;$
в) $\sin 6x - 2\sin 2x = 0.$

2

Докажите, что на промежутке $[0; \pi]$ данное уравнение имеет единственный корень, и найдите его:

$\sin x\, \mathrm{tg}\,x + 1 = \sin x + \mathrm{tg}\,x.$

Вариант В2

1

а) $\cos x + 3\sin \frac{x}{2} = -1;$
б) $6\sin^2 x + \sin 2x = 4;$
в) $\cos 6x + 2\cos 2x = 0.$

2

$1 - \mathrm{ctg}\,x = \cos x - \cos x\, \mathrm{ctg}\,x.$

С-15. ОТБОР КОРНЕЙ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Вариант А1

1

Решите уравнение:

а) $(\operatorname{ctg} x - 1)(\cos x + 1) = 0$;

б) $\dfrac{\cos x}{1 + \sin x} = 0$;

в) $\sin 2x\sqrt{\cos x} = 0$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x + \cos y = 1, \\ x + y = 2\pi. \end{cases}$$

Вариант А2

1

а) $(\operatorname{tg} x + 1)(\sin x - 1) = 0$;

б) $\dfrac{\sin x}{1 - \cos x} = 0$;

в) $\sin 2x\sqrt{\sin x} = 0$.

2

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{3}, \\ x + y = \pi. \end{cases}$$

Вариант Б1

1

Решите уравнение:

а) $(1 + \cos 2x)\operatorname{tg} x = \cos x$;

б) $\dfrac{\sin x - \sin 3x}{1 + \cos x} = 0$;

в) $\sqrt{\operatorname{ctg} x} = \sqrt{2\cos x}$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0,75, \\ \sin y \cos x = 0,25. \end{cases}$$

Вариант Б2

1

а) $(1 - \cos 2x)\operatorname{ctg} x = \sin x$;

б) $\dfrac{\cos 3x + \cos x}{1 + \sin x} = 0$;

в) $\sqrt{\operatorname{tg} x} = \sqrt{2\sin x}$.

2

$$\begin{cases} \cos x \cos y = 0,75, \\ \sin x \sin y = 0,25. \end{cases}$$

Вариант B1

1

Решите уравнение:

0) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} \times \left(\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x\right) = 0;$

б) $\dfrac{\cos^2 2x - \sin^2 x}{1 - \sin 3x} = 0;$

в) $\sqrt{2\sin^2 x - 1} = \cos x - \sin x.$

2

Решите систему уравнений:

$\begin{cases} \cos x \cos y = \sin^2 x, \\ \sin x \sin y = \cos^2 x. \end{cases}$

Вариант B2

1

0) $\dfrac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x} \times \left(\sqrt{2}\sin^2 x + \sin x\right) = 0;$

б) $\dfrac{\sin^2 2x - \sin^2 x}{1 + \cos 3x} = 0;$

в) $\sqrt{1 - 2\cos^2 x} = \sin x + \cos x.$

2

$\begin{cases} \cos x \sin y = \sin^2 x, \\ \sin x \cos y = \cos^2 x. \end{cases}$

С-16*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Решите уравнение:

а) $\sin(\cos x) = 0{,}5;$

б) $\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} 2x = 1;$

в) $\cos 4x \cos 7x = \cos 6x \cos 3x;$

г) $\sin 4x - \cos 4x \operatorname{tg} 2x = \sqrt{3}.$

Вариант 2

1

а) $\cos(\sin x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2};$

б) $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 2x = -1;$

в) $\sin 7x \sin x = \sin 3x \sin 5x;$

г) $\sin 6x + \cos 6x \operatorname{ctg} 3x = \sqrt{3}.$

2

Используя замену переменной, решите уравнение:

а) $2\,\mathrm{tg}^2\,x + 3 = \dfrac{3}{\cos x}$;

б) $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$;

в) $\mathrm{tg}^4 x + \mathrm{ctg}^4 x + \mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x = 4$.

а) $\dfrac{1}{\sin^2 x} = \mathrm{ctg}\,x + 3$;

б) $4(\cos x - \sin x) = 4 - \sin 2x$;

в) $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{ctg}^2 x + 3\,\mathrm{tg}\,x + 3\,\mathrm{ctg}\,x = -4$.

3

Используя разложение на множители, решите уравнение:

а) $\cos 2x = \sin x - \cos x$;

б) $1 - \cos x = \mathrm{tg}\,x - \sin x$;

в) $\sin^2 3x + \sin^2 4x = \sin^2 5x + \sin^2 6x$.

а) $\sin 2x + 1 = \sin x + \cos x$;

б) $1 + \sin x = \mathrm{ctg}\,x + \cos x$;

в) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

4

Решите данное уравнение тремя способами (с помощью формул двойного угла, метода вспомогательного угла и универсальной тригонометрической подстановки) и докажите, что полученные ответы совпадают:

$2\sin x - 3\cos x = 2$.

$3\cos x - 4\sin x = 5$.

5

Используя умножение на тригонометрическую функцию, решите уравнение:

а) $4\cos x\,\cos 2x\,\cos 3x = \cos 6x$;

б) $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = -0{,}5$.

а) $\cos x \cos 2x \cos 4x = \dfrac{1}{8}$;

б) $\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{ctg}\,x$.

6

Решите тригонометрическое уравнение:

Вариант 1

а) $2\sqrt{\operatorname{ctg} x} = 3 - \operatorname{ctg} x$;

б) $\sqrt{0,5\cos x} = \sin\frac{x}{2}$;

в) $\sqrt{\sin 3x + \sin 5x} = \sqrt{\sin 4x}$.

Вариант 2

а) $2 - \operatorname{tg} x = \sqrt{\operatorname{tg} x}$;

б) $\sqrt{-\cos 4x} = \sqrt{2}\cos 2x$;

в) $\sqrt{\cos 5x + \cos 7x} = \sqrt{\cos 6x}$.

С-17*. СИСТЕМЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{3}{4}; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y = \frac{4\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \frac{3}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{2}, \\ \cos 2x + 5\cos y = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = \frac{3}{4}, \\ \operatorname{tg}\pi x - \operatorname{tg}\pi y = 2. \end{cases}$

Вариант 2

а) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \cos x \sin y = \frac{1}{4}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{2}, \\ \cos 2x + \sin y = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x - y = \frac{1}{3}, \\ \operatorname{ctg}\pi x - \operatorname{ctg}\pi y = -\sqrt{3}. \end{cases}$

2

Найдите решение системы, используя

а) подстановку и почленное сложение (вычитание) уравнений системы:

$$\begin{cases}\cos x\cos y = 0{,}75,\\ \operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y = 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x\sin y = \dfrac{\sqrt{3}}{4},\\ \operatorname{tg} x\operatorname{tg} y = 1;\end{cases}$$

б) разложение на множители и почленное деление уравнений системы:

$$\begin{cases}\sin x + \sin y = 1,\\ \cos x - \cos y = \sqrt{3};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x - \sin y = 0{,}5,\\ \cos x + \cos y = \dfrac{\sqrt{3}}{2};\end{cases}$$

в) замену переменных:

$$\begin{cases}\sin x + \cos y = 1,\\ \cos 2x + \cos 2y = 2.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos x + \cos y = 0{,}5,\\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1{,}75.\end{cases}$$

С-18. ПРОСТЕЙШИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Вариант А1

1

Решите неравенство:

а) $2\sin x > 1$;

б) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) \le -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $\operatorname{tg} 2x \le \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$.

Вариант А2

а) $\sqrt{2}\cos x < 1$;

б) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right) \ge -\dfrac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\dfrac{x}{3} \ge \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6}$.

2

Найдите значения x, при которых

график функции $y = \sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}$ лежит ниже оси x.

график функции $y = \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}$ лежит выше оси x.

Вариант Б1

1

Решите неравенство:

а) $-2\sin 2x < \sqrt{3}$;

б) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{3}\right) \le \cos\frac{5\pi}{3}$;

в) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - \sqrt{3} \ge 0$.

2

Найдите значения x, при которых

график функции $y = 1 - 2\cos^2\frac{x}{8}$ лежит ниже прямой $y = 0{,}5$.

Вариант Б2

1

а) $-2\cos\frac{x}{3} > 1$;

б) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \ge \sin\frac{3\pi}{4}$;

в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - 1 \le 0$.

2

график функции $y = 2\sin^2 4x - 1$ лежит выше прямой $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант В1

1

Решите неравенство:

а) $-4\sin\left(\frac{3}{4}x + \frac{\pi}{4}\right) > -2\sqrt{2}$;

б) $\cos^2 x \ge 0{,}25$;

в) $\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right| \ge \sqrt{3}$.

Вариант В2

1

а) $-\sqrt{3}\cos\left(1{,}5x + \frac{\pi}{6}\right) < -1{,}5$;

б) $\sin^2 x \le 0{,}25$;

в) $\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)\right| \ge 1$.

❷

Найдите значения x, при которых

график функции $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$ лежит выше оси x.

график функции $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$ лежит ниже оси x.

С-19*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

❶

Решите неравенство:

а) $\sqrt{\sin^2\left(\dfrac{\pi}{3} - 3x\right)} < \sqrt{0,75}$;

б) $\sin^4 x + \cos^4 x \le \dfrac{5}{8}$;

в) $\cos 2x\ (\sin 8x - 1) \le 0$.

❷

Используя замену переменных, решите неравенство:

а) $\cos 2x + 3\sin x \ge -1$;

б) $\dfrac{1}{\sin^2 x} + \operatorname{ctg} x - 3 < 0$;

в) $\operatorname{tg} x + \sin 2x \ge 2$;

г) $\sin^2 x + \sin 2x - 3\cos^2 x > 0$.

Вариант 2

❶

а) $\sqrt{\cos^2\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{x}{3}\right)} < \sqrt{0,25}$;

б) $\sin^6 x + \cos^6 x \ge \dfrac{5}{8}$;

в) $\sin 3x\ (\cos 2x + 1) \ge 0$.

❷

а) $\cos 2x + 3\cos x \le 1$;

б) $\dfrac{2}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x - 3 < 0$;

в) $2\sin 2x + 3\operatorname{tg} x \le 5$;

г) $2\sin^2 x + \sin 2x - 4\cos^2 x > 0$.

3

Используя метод интервалов, решите неравенство:

а) $\cos 3x + 2\cos x \geq 0$;

б) $\sin x \cos 5x < \sin 2x \cos 4x$;

в) $1 - \cos x \leq \operatorname{tg} x - \sin x$.

а) $\sin 3x - 2\sin x \leq 0$;

б) $\cos x \cos 7x > \cos 3x \cos 5x$;

в) $1 + \sin x \leq \operatorname{ctg} x + \cos x$.

К-3. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА, СИСТЕМЫ

Вариант А1

1

Решите уравнение:

а) $2\sin x = \sqrt{3}$;

б) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$;

в) $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$;

г) $\dfrac{\sin 3x + \sin x}{\cos x} = 0$.

2

Решите неравенство:

а) $1 - 2\cos\dfrac{x}{2} > 0$;

б) $\operatorname{tg}(\pi - x) < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x = \cos y, \\ 2\cos^2 y + \sin x = 3. \end{cases}$$

Вариант А2

1

а) $\sqrt{2}\cos x = 1$;

б) $\sin x + \cos x = 0$;

в) $2\cos^2 x - \sin x = -1$;

г) $\dfrac{\cos 3x - \cos x}{\sin x} = 0$.

2

а) $-\sqrt{3} - 2\sin 3x < 0$;

б) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) > \sqrt{3}$.

3

$$\begin{cases} \cos x = \sin y, \\ \sin^2 y - \cos x = 2. \end{cases}$$

Вариант Б1

1

Решите уравнение:

а) $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x - \frac{1}{2}\cos 3x = -1;$

б) $\sin^2 x - 2\sin 2x - 5\cos^2 x = 0;$

в) $1 - \cos x = \sin\frac{x}{2};$

г) $\frac{\sin 2x}{1+\sin x} = -2\cos x.$

2

Решите неравенство:

а) $2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sqrt{3} < 0;$

б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) \geq 1.$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x \cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Вариант Б2

а) $\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x = 1;$

б) $\cos^2 x + \sin 2x - 3\sin^2 x = 0;$

в) $1 + \cos 4x = \cos 2x;$

г) $\frac{\sin 2x}{1-\cos x} = 2\sin x.$

а) $\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 > 0;$

б) $\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) \leq \sqrt{3}.$

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{3}, \\ \sin x \sin y = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Вариант В1

1

Решите уравнение:

а) $\sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0,75;$

б) $2\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin x + 2 = 0;$

Вариант В2

а) $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0,5;$

б) $2\sin^2\frac{x}{2} + 3\sin x + 2 = 0;$

в) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;

г) $\dfrac{\cos x - 2\sin x \sin 2x}{1 + \sin 3x} = 0.$

в) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1{,}5$;

г) $\dfrac{2\cos x \cos 2x - \cos x}{1 - \sin 3x} = 0.$

2

Решите неравенство:

а) $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + 2x\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - 2x\right) \geq 1$;

б) $\sqrt{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{x}{4}\right)} < 1.$

а) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - 2x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{6} + 2x\right) \leq 1$;

б) $\sqrt{-\operatorname{ctg}\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{3}\right)} < 1.$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos x - \dfrac{2}{\sin y} = 3, \\ 2\cos x \sin y = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x + \dfrac{1}{\cos y} = 3, \\ \dfrac{\sin x}{\cos y} = 2. \end{cases}$$

АЛГЕБРА

С-20. КОРЕНЬ *n*-ОЙ СТЕПЕНИ И ЕГО СВОЙСТВА

Вариант А1 | **Вариант А2**

1

Вычислите:

Вариант А1:

а) $\sqrt[3]{-3}\cdot\sqrt[3]{9}+\sqrt[4]{(-2)^4}$;

б) $\sqrt[7]{5-\sqrt{26}}\cdot\sqrt[7]{5+\sqrt{26}}$.

Вариант А2:

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{-4}+\sqrt[6]{(-3)^6}$;

б) $\sqrt[9]{6+\sqrt{35}}\cdot\sqrt[9]{6-\sqrt{35}}$.

2

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

Вариант А1:

а) $\dfrac{3}{\sqrt[3]{3}}$;

б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$.

Вариант А2:

а) $\dfrac{5}{\sqrt[5]{5}}$;

б) $\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}$.

3

Упростите выражение:

Вариант А1:

а) $\sqrt[3]{\sqrt{a}}+\sqrt[18]{a^3}$;

б) $6a\sqrt[4]{a^5}:\left(3\sqrt[4]{a}\right)$.

Вариант А2:

а) $\sqrt[20]{a^2}-\sqrt[5]{\sqrt{a}}$;

б) $2a\sqrt[3]{a^4}\cdot 3\sqrt[3]{a^2}$.

4

а) Вынесите множитель из-под знака корня ($x>0$, $y>0$):

Вариант А1: $\sqrt[4]{81x^5y^9}$.

Вариант А2: $\sqrt{25x^3y^7}$.

б) Внесите множитель под знак корня ($x>0$):

$2x\sqrt[5]{x}$.

$4x^2\sqrt[3]{x}$.

5

Упростите выражение и найдите его значение при $a = 3$:

$\sqrt{\left(2+\sqrt{a}\right)^2 - 8\sqrt{a}}$.

$\sqrt{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(1+\sqrt{a}\right) - 2\left(\sqrt{a}-1\right)}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Вычислите:

Б1:

а) $\sqrt[3]{-2\sqrt{2}} + \sqrt[6]{2}\cdot\sqrt[3]{2}$;

б) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Б2:

а) $\sqrt[5]{3}\cdot\sqrt[10]{3} + \sqrt[5]{-3\sqrt{3}}$;

б) $\sqrt{1+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[4]{6-2\sqrt{5}}$.

2

Избавьтесь от иррациональности в знаменателе дроби:

Б1:

а) $\dfrac{a+\sqrt{3}}{a-\sqrt{3}}$;

б) $\dfrac{a-1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}$.

Б2:

а) $\dfrac{\sqrt{2}-b}{\sqrt{2}+b}$;

б) $\dfrac{a+1}{\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}+1}$.

3

Упростите выражение:

Б1:

а) $\sqrt{\sqrt[9]{a^6}} + \dfrac{2a}{\sqrt[3]{a^2}}$;

б) $\sqrt{2a^3}\cdot\sqrt[3]{2a} : \sqrt[6]{32a^{12}}$.

Б2:

а) $\sqrt{\sqrt[10]{a^4}} - \dfrac{3a}{\sqrt[5]{a^4}}$;

б) $\sqrt[6]{27a^5}\cdot\sqrt[4]{9a} : \sqrt{9a^2}$.

4

а) Вынесите множитель из-под знака корня:

$\sqrt[4]{32x^5y^{10}}$.

$\sqrt[3]{81x^4y^{10}}$.

б) Внесите множитель под знак корня:

$-2ab^2\sqrt[6]{\dfrac{1}{16a^5b^{10}}}$.

$-\dfrac{1}{3a^2b}\sqrt[4]{243a^{10}b^5}$.

5

Упростите выражение и найдите его значение при $a = 0{,}8$:

$\sqrt{\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+2}\right)\left(\sqrt{a}+\dfrac{1}{\sqrt{a}-2}\right)(a-4)+} + a.$

$\sqrt{\dfrac{a\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+1}-\sqrt{a}}+\sqrt{a}.$

Вариант В1

Вариант В2

1

Вычислите:

В1:

а) $\sqrt{3+\sqrt[4]{(-8)^2}}-\sqrt{3-\sqrt[4]{(-8)^2}}$;

б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{4+2\sqrt{3}}}$.

В2:

а) $\sqrt{4+\sqrt[8]{(-15)^4}}-\sqrt{4-\sqrt[8]{(-15)^4}}$;

б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{5}}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{6+2\sqrt{5}}}$.

2

Избавьтесь от иррациональности в числителе дроби и сравните ее с нулем:

В1:

а) $\dfrac{\sqrt[3]{3}-\sqrt[6]{12}}{2}$;

б) $\dfrac{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

В2:

а) $\dfrac{\sqrt[6]{7}-\sqrt[3]{2}}{2}$;

б) $\dfrac{3-\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

3

Упростите выражение:

В1:

а) $\sqrt[4]{8a}\cdot 9\sqrt[4]{12a^5} : \left(3\sqrt[4]{6a^2}\right)$;

В2:

а) $25\sqrt[3]{9a^5}\cdot\sqrt[3]{6a^2} : \left(5\sqrt[3]{2a}\right)$;

б) $\sqrt[3]{2a\sqrt[4]{\frac{1}{a}}-\frac{a\sqrt[4]{a}}{\sqrt{a}}}$.

б) $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{\frac{1}{a^2}}-\frac{2a\sqrt[6]{a}}{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}}$.

4

а) Вынесите множитель из-под знака корня (n — натуральное число) :

$\sqrt[n+1]{2^{n+3}\cdot a^{n^2-1}\cdot b^{3n+1}}$,
если $a \geq 0$, $b \geq 0$.

$\sqrt[n+2]{3^{n+3}\cdot a^{n^2-4}\cdot b^{5n+2}}$,
если $a \geq 0$, $b \geq 0$.

б) Внесите множитель под знак корня:

$0,5ab\sqrt[4]{-16ab^2}$.

$-3a^2b\sqrt[6]{-\frac{b}{27a^4}}$.

5

Упростите выражение и найдите его значение при $a = 6$:

$\sqrt{a+4\sqrt{a-4}}-\sqrt{a-4\sqrt{a-4}}$.

$\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}$.

С-21. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Вариант А1

1

Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2-4x}=\sqrt{6-3x}$;

б) $\sqrt{3x+1}=x-1$;

в) $2\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}=1$;

г) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=3$.

Вариант А2

а) $\sqrt{x^2-10}=\sqrt{-3x}$;

б) $\sqrt{2x+4}=x-2$;

в) $3\sqrt[3]{x}+2\sqrt[6]{x}=5$;

г) $\sqrt{x}-\sqrt{x-5}=1$.

2

Определите, при каких значениях x

функция $y = \sqrt[3]{x^2 - 1}$ принимает значение, равное 2.

функция $y = \sqrt[3]{x^2 + 2}$ принимает значение, равное 3.

Вариант Б1

1

Решите уравнение:

а) $\sqrt{x^2 + x - 3} = \sqrt{1 - 2x}$;

б) $\sqrt{2x^2 + 7} = x^2 - 4$;

в) $x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x} - 2 = 0$;

г) $\sqrt{x + 2} + \sqrt{x - 3} = \sqrt{3x + 4}$.

2

Найдите абсциссу точки пересечения графиков функций:

$y = \sqrt[3]{x - 1}$ и $y = \sqrt[6]{x + 5}$.

Вариант Б2

а) $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{1 - x}$;

б) $\sqrt{18x^2 - 9} = x^2 - 4$;

в) $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2 - 8x} - 3 = 0$;

г) $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x - 2} = \sqrt{4x + 1}$.

$y = \sqrt[6]{x + 3}$ и $y = \sqrt[3]{x + 1}$.

Вариант В1

1

Решите уравнение:

а) $\sqrt{x - 2 + 2\sqrt{x + 6}} = 4$;

б) $\sqrt{3x + 12} - \sqrt{x + 1} = \sqrt{4x + 13}$;

в) $3x^2 + 15x + 2\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2$;

г) $\sqrt[3]{x - 10} + \sqrt[3]{x - 17} = 3$.

Вариант В2

а) $\sqrt{x - 1 + \sqrt{x + 2}} = 3$;

б) $\sqrt{2x - 1} - \sqrt{x - 4} = \sqrt{x - 1}$;

в) $(x + 4)(x + 1) - 3\sqrt{x^2 + 5x + 2} = 6$;

г) $\sqrt[3]{4x + 3} - \sqrt[3]{x + 2} = 1$.

2

Найдите точки пересечения графиков функций:

$y=\sqrt{x+2}$ и $y=\sqrt[3]{3x+2}$.

$y=\sqrt[3]{x+7}$ и $y=\sqrt{x+3}$.

С-22. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА. СИСТЕМЫ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вариант А1

1

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ \sqrt{xy}=3;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y+27}=3,\\ \sqrt{2x-y+2}=x.\end{cases}$

2

Решите неравенство:

а) $(x+1)\sqrt{2-x}>0$;

б) $\sqrt{2x+4}\le 2$;

в) $\sqrt{x^2-3x+2}>-4$.

Вариант А2

1

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ \sqrt{xy}=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y+8}=2,\\ \sqrt{3x-2y+6}=y.\end{cases}$

2

Решите неравенство:

а) $(x-5)\sqrt{x+1}<0$;

б) $\sqrt{3x+1}\le 1$;

в) $\sqrt{2+x-x^2}>-2$.

Вариант Б1

1

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=4,\\ x-y=8;\end{cases}$

Вариант Б2

1

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases}\sqrt{x}-\sqrt{y}=1,\\ x-y=3;\end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{y}{x}} - 2\sqrt{\dfrac{x}{y}} = 1, \\ \sqrt{5x+y} + \sqrt{5x-y} = 4. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} - \sqrt{\dfrac{y}{x}} = \dfrac{3}{2}, \\ \sqrt{x-3y} + \sqrt{x+5y} = 4. \end{cases}$

❷

Решите неравенство:

а) $(9-x^2)\sqrt{x^2-4} \le 0;$

б) $\sqrt{\dfrac{x^2-x}{x+3}} > 1;$

в) $x + \sqrt{x} < 2.$

а) $(x^2-4)\sqrt{25-x^2} \ge 0;$

б) $\sqrt{\dfrac{x+2}{x-4}} < 1;$

в) $x - 3\sqrt{x} > 4.$

Вариант В1

❶

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 6, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 9; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{2y-5x} = x, \\ \sqrt{x+y} + \sqrt{2y-5x} = y. \end{cases}$

❷

Решите неравенство:

а) $(x-1)\sqrt{x^2-x-2} \ge 0;$

б) $\sqrt{2x+4} < \sqrt{x^2+4};$

в) $x^2 - 8x - 2\sqrt{x^2-8x} \le 3.$

Вариант В2

❶

а) $\begin{cases} x\sqrt{x} - y\sqrt{y} = 26, \\ x\sqrt{y} - y\sqrt{x} = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2\sqrt{3y+x} - \sqrt{6y-x} = x, \\ \sqrt{3y+x} + \sqrt{6y-x} = 3y. \end{cases}$

❷

а) $(x-3)\sqrt{x^2-6x+8} \le 0;$

б) $\sqrt{x^2+3} > \sqrt{3x+3};$

в) $x^2 - 3x - \sqrt{x^2-3x} \le 2.$

С-23*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИРРАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 | **Вариант 2**

❶

Решите иррациональное уравнение, используя в решении указанный способ:

— разложение на множители (с учетом ОДЗ) :

Вариант 1

а) $(x+2)\sqrt{x^2-x-20}=6x+12;$

б) $\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{x^2-1};$

Вариант 2

а) $(x-3)\sqrt{x^2-5x+4}=2x-6;$

б) $2\sqrt{x^2-2x-8}-\sqrt{x^2-16}=\sqrt{3x^2-13x+4};$

— введение одной или нескольких новых переменных:

Вариант 1

в) $\dfrac{x^2}{\sqrt{x+2}}+x=2\sqrt{x+2};$

г) $\sqrt[3]{x-4}=1-\sqrt{x+1};$

д) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2;$

е) $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=2x-15+2\sqrt{x^2+5x};$

Вариант 2

в) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2x+5}}+\sqrt{2x+5}=2x;$

г) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1};$

д) $\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{15+x}=2;$

е) $\sqrt{x}+\sqrt{x-8}=2x-20+2\sqrt{x^2-8x};$

— домножение на сопряженный радикал:

Вариант 1

ж) $\sqrt{2x^2+3x+5}+\sqrt{2x^2-3x+5}=3x;$

Вариант 2

ж) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{x+10}-4\right)=x;$

з) $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{2}{x}$;

з) $\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6-x}}{\sqrt{x+6}+\sqrt{6-x}}=\dfrac{x}{6}$;

— выделение полного квадрата:

и) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+10-6\sqrt{x+1}}=1$;

и) $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=3$;

— сравнение значений обеих частей уравнения на ОДЗ:

к*) $\sqrt{4x^2-1}=1-\sqrt{4x-1}$.

к*) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x-1}=\dfrac{2}{x}$.

❷

Решите неравенство, используя равносильные преобразования или метод интервалов:

а) $\sqrt{x^2-3x-4}>x-2$;

а) $\sqrt{x^2+3x-4}>x+2$;

б) $\sqrt{2x^2-3x-5}<x-1$;

б) $\sqrt{x^2-x-2}<x-1$;

в) $\sqrt{x-5}+\sqrt{10-x}<3$;

в) $\sqrt{2x-1}+\sqrt{x+15}<5$;

г) $\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{2x+5}\ge\dfrac{\sqrt{6+x-x^2}}{x+4}$;

г) $\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{x+8}\le\dfrac{\sqrt{3-2x-x^2}}{2x+1}$;

д) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}+1}{x}\ge 1$.

д) $\dfrac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x}\le 3$.

❸

Решите систему уравнений, используя в решении указанный способ:

а) введение новых переменных:

$\begin{cases}\sqrt[3]{x+y+4}+\sqrt[3]{y+7}=4,\\ x+2y=5;\end{cases}$

$\begin{cases}\sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3,\\ 2x+y=7;\end{cases}$

б) умножение уравнений системы:

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{108x}{5y}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{20y}{3x}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y};\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y},\\ \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y};\end{cases}$$

в) способ подстановки:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=10,\\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=5,\\ \sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}=1.\end{cases}$$

С-24. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ СТЕПЕНИ

1

Представьте выражение в виде степени числа x ($x>0$):

Вариант А1

а) $\sqrt[5]{x^3}\cdot\sqrt{x}$;

б) $\dfrac{x^{0,5}}{\left(\sqrt[4]{x}\right)^2}$.

Вариант А2

а) $\sqrt[10]{x^9}\cdot x^{1,1}$;

б) $\dfrac{\left(\sqrt[6]{x}\right)^3}{\sqrt{x}}$.

2

Вычислите:

Вариант А1: а) $\dfrac{3^{\frac{2}{3}}\cdot 81^{\frac{3}{4}}}{3^{-\frac{1}{3}}}$; б) $\left(10^{-\frac{1}{3}}\cdot 0,01^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$.

Вариант А2: а) $\dfrac{\sqrt{2}\cdot 8^{\frac{2}{3}}}{2^{-\frac{1}{2}}}$; б) $\left(25^{-\frac{1}{4}}\cdot 5^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}$.

3

Упростите выражение:

Вариант А1: а) $(16x)^{\frac{3}{4}}\cdot\left(\dfrac{1}{8}x^{\frac{3}{8}}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

Вариант А2: а) $(1000x)^{\frac{2}{3}}\cdot\left(0,01x^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\left(a+b^{\frac{1}{4}}\right)\left(a-b^{\frac{1}{4}}\right)+\sqrt{b}$;

в) $\dfrac{ab^{\frac{1}{3}}-a^{\frac{1}{3}}b}{(ab)^{\frac{1}{3}}}$.

б) $\left(a^{\frac{1}{3}}-b\right)\left(a^{\frac{1}{3}}+b\right)-\sqrt[3]{a^2}$;

в) $\dfrac{a^{\frac{1}{4}}b+b^{\frac{1}{4}}a}{(ab)^{\frac{1}{4}}}$.

4

Сравните числа:

а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ и $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\sqrt[7]{5^3}$ и $5^{0,4}$.

а) $3^{-\frac{1}{3}}$ и $3^{\frac{1}{3}}$;

б) $(0,5)^{0,2}$ и $\sqrt[9]{0,25}$.

Вариант Б1

1

Представьте в виде степени с основанием x $(x > 0)$:

а) $\dfrac{x\cdot\sqrt[3]{x}}{x^{-\frac{2}{3}}}$;

б) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{x}\cdot\left(x^{\frac{1}{8}}\right)^{-6}$.

2

Вычислите:

а) $\dfrac{4^{-0,5}\cdot 8^{\frac{4}{5}}}{\left(\sqrt[5]{2}\right)^2}$;

б) $\left(0,001^{\frac{1}{3}}\cdot 10^3\right)^{-\frac{1}{2}}$.

3

Упростите выражение:

Вариант Б2

а) $\dfrac{x\cdot\sqrt[4]{x^3}}{x^{-\frac{5}{4}}}$;

б) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x}\cdot\left(x^5\right)^{-\frac{1}{6}}$.

а) $\dfrac{27^{-\frac{1}{4}}\cdot 9^{1,5}}{\left(\sqrt[8]{3}\right)^2}$;

б) $\left(0,04^{\frac{1}{2}}\cdot 5^4\right)^{-\frac{1}{3}}$.

а) $\left(0,36ac^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{125}a^{\frac{3}{4}}c\right)^{-\frac{1}{3}}$;

б) $\frac{x^{1,5}-x^{0,5}}{x^{0,5}-x}$;

в) $\frac{a^{\frac{1}{4}}-4}{a^{\frac{1}{4}}+4a^{\frac{1}{8}}+4}$.

а) $\left(0,027a^2c\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{1}{25}ac^{\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}$;

б) $\frac{x^{\frac{4}{3}}-x}{x^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{5}{3}}}$;

в) $\frac{a^{\frac{1}{3}}-6a^{\frac{1}{6}}+9}{a^{\frac{1}{3}}-9}$.

4

Оцените значение выражения:

а) $x^{\frac{2}{5}}$, если $1 \le x \le 32$;

б) $x^{-\frac{1}{2}}$, если $\frac{4}{9} \le x \le 1\frac{11}{25}$.

а) $x^{\frac{4}{3}}$, если $0,008 \le x \le 1$;

б) $x^{-\frac{1}{4}}$, если $\frac{1}{625} \le x \le 5\frac{1}{16}$.

Вариант В1

1

Представьте в виде степени с основанием x ($x > 0$):

а) $x\sqrt{x^3\sqrt[5]{x}}$;

б) $\sqrt[3]{\frac{x^{\frac{8}{3}} \cdot x^{-2,5}}{x^{-\frac{1}{6}}}}$.

2

Вычислите:

а) $\left(4\frac{17}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\frac{81^{1,5}}{625}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(3\sqrt{3}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27^{\frac{2}{3}} \cdot 49^{0,5}}{21}}$.

Вариант В2

1

а) $\sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt[4]{x}$;

б) $\sqrt{\frac{x^{\frac{11}{6}} \cdot x^{-1,5}}{x^{-\frac{1}{3}}}}$.

2

а) $\left(5\frac{1}{16}\right)^{\frac{3}{4}} \cdot \left(\frac{32^{1,2}}{729}\right)^{\frac{1}{2}}$;

б) $\left(4\sqrt{2}\right)^{-\frac{1}{5}} \cdot \sqrt{\frac{16^{0,75} \cdot 343^{\frac{1}{3}}}{28}}$.

3

Упростите выражение:

а) $\left(0,0625a^{1,2}b^{0,8}c^{-1}\right)^{\frac{3}{4}} \times \times\left(\frac{1}{32}a^{\frac{3}{2}}bc^{\frac{5}{12}}\right)^{-0,6}$;

б) $\frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}+\sqrt{x}-\sqrt{y}}{1+x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}}}$;

в) $\frac{x^{\frac{2}{3}}y^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}}+y}{x-y}$.

а) $\left(0,00032a^{-\frac{1}{3}}b^{2}c^{-\frac{5}{6}}\right)^{0,4} \times \times\left(\frac{1}{125}a^{-0,2}b^{1,2}c\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}+\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y}}{x^{\frac{1}{6}}-y^{\frac{1}{6}}}$;

в) $\frac{x^{1,5}+y^{1,5}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}y-x^{\frac{5}{6}}y^{\frac{1}{2}}}$.

4

Запишите формулу зависимости между переменными a и b, если:

а) $a=t^{\frac{1}{4}},\ b=t^{\frac{1}{3}}$;

б) $a=t^{0,8}+1,\ b=t^{-0,8}-1$.

а) $a=t^{\frac{1}{2}},\ b=t^{\frac{1}{5}}$;

б) $a=(t+1)^{\frac{2}{3}},\ b=(t-1)^{\frac{2}{3}}$.

К-4. СТЕПЕНИ И КОРНИ

Вариант А1

1

Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt[3]{2^{2}\cdot\sqrt{2}}\right)^{\frac{6}{5}}$;

б) $\frac{2x^{\frac{1}{2}}}{x-4}-\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}-2}$ при $x=9$.

Вариант А2

1

Найдите значение выражения:

а) $\left(\sqrt{3^{3}\cdot\sqrt[3]{3}}\right)^{\frac{3}{5}}$;

б) $\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-3}-\frac{6}{x^{\frac{2}{3}}-9}$ при $x=8$.

2

Решите уравнение:

а) $\left(y^2-1\right)^{\frac{1}{3}}=2;$

б) $\sqrt{x+12}=x;$

в) $\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{1-3x}=x+5;$

г) $x^2+x+2\sqrt{x^2+x}=0.$

а) $\left(y^2-19\right)^{\frac{1}{4}}=3;$

б) $\sqrt{7-x}=x-1;$

в) $\sqrt{2-x}\cdot\sqrt{1-4x}=x+8;$

г) $x^2-3x+2\sqrt{x^2-3x}=0.$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}x+y+\sqrt{xy}=7,\\ xy=4.\end{cases}$$

$$\begin{cases}x-y-2\sqrt{xy}=2,\\ xy=9.\end{cases}$$

4

Определите значения a, для которых при $x=1$ выполняется неравенство:

$\sqrt{a-x}\geq x.$

$\sqrt{x-a}\geq\sqrt{x+3}.$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите значения выражения:

а) $\dfrac{\sqrt[4]{3\cdot\sqrt[3]{9}}}{\sqrt[6]{9\cdot\sqrt{3}}};$

б) $\left(\dfrac{x-x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}-1}-2\sqrt[3]{x}+1\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{3}}+1}{x^{\frac{1}{3}}-1}$

при $x=8.$

а) $\dfrac{\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{4}}}{\sqrt[6]{4\cdot\sqrt{2}}};$

б) $\left(1+2\sqrt[4]{x}+\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\right)\cdot\dfrac{x^{\frac{1}{4}}-1}{x^{\frac{1}{4}}+1}$

при $x=16.$

2

Решите уравнение:

а) $2x^{\frac{2}{3}}+3x^{\frac{1}{3}}-5=0;$

а) $x^{0,4}+5x^{0,2}-14=0;$

б) $\sqrt{6-4x-x^2}-x=4$;

в) $\sqrt{x+3}-\sqrt{7-x}=2$;

г) $\left(x^2-9x+14\right)\sqrt{x^2-9}=0$.

б) $\sqrt{2x^2+8x+7}-2=x$;

в) $\sqrt{x+4}-\sqrt{6-x}=2$;

г) $\left(x^2-9\right)\sqrt{x^2-5x+4}=0$.

❸

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt{x^2+xy}=3,\\ x+y+x^2+xy=5.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-y^2}+\sqrt{x-y}=6,\\ x^2-y^2-x+y=12.\end{cases}$$

❹

Используя метод интервалов, решите неравенство:

$$\sqrt{x^2-x}<\frac{6}{\sqrt{x^2-x}}.$$

$$\sqrt{x^2+x}>\frac{2x^2-12}{\sqrt{x^2+x}}.$$

Вариант В1

❶

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)$;

б) $\dfrac{x^{\frac{5}{3}}-x^{\frac{2}{3}}}{x+x^{\frac{2}{3}}}\cdot\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x-1}+\dfrac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}\right)$ при $x=125$.

❷

Решите уравнение:

а) $\sqrt{3+\sqrt{5-x}}=\sqrt{x}$;

б) $4\sqrt{3-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{\dfrac{x}{3x-1}}=3$;

Вариант В2

❶

Найдите значение выражения:

а) $\sqrt[3]{7-5\sqrt{2}}\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)$;

б) $\left(\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}+1}-\dfrac{3x^{\frac{1}{3}}-1}{x+1}\right):$ $:\dfrac{x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}+x^{\frac{1}{3}}}$ при $x=64$.

❷

Решите уравнение:

а) $\sqrt{1+\sqrt{3x+1}}=\sqrt{x}$;

б) $3\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}-2,5=3\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$;

в) $\sqrt[3]{x+7} = \sqrt{x+3}$;

г) $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x-16} = \sqrt[3]{x-8}$.

в) $\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{3x+2}$;

г) $\sqrt[3]{x+7} - \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{2x-1}$.

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y - 2\sqrt{xy} - \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 8. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2\sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} = 12, \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1. \end{cases}$$

4

Найдите значения a, при которых равносильны неравенства:

$(x-a)\sqrt{x-2} > 0$ и $x > a$.

$(x-2)\sqrt{x-a} > 0$ и $x > 2$.

С-25. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ. СИСТЕМЫ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Вариант А1

1

Решите уравнение:

а) $3^{x^2-x} = 9$;

б) $2^{x-1} + 2^{x+2} = 36$;

в) $25^x + 10 \cdot 5^{x-1} - 3 = 0$;

г) $2^x \cdot 5^{x+2} = 2500$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 6, \\ 3 \cdot 2^x - 2^y = 10. \end{cases}$$

Вариант А2

1

а) $2^{x^2-3x} = \frac{1}{4}$;

б) $5^x - 5^{x-2} = 600$;

в) $9^x + 3^{x+1} - 4 = 0$;

г) $7^{x+1} \cdot 2^x = 98$.

2

$$\begin{cases} 3^x - 3^y = 6, \\ 2 \cdot 3^x + 3^y = 21. \end{cases}$$

Вариант Б1

1

Решите уравнение:

а) $\left(2^{x+4}\right)^{x-3} = 0,5^x \cdot 4^{x-4}$;

б) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 13 \cdot 3^{x^2-7}$;

в) $\dfrac{5^x - 4}{5} = \dfrac{3 - 5^{x-1}}{2 \cdot 5^x}$;

г) $2^{x^2+2x} \cdot 3^{x^2+2x} = 216^{x+2}$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4^x - 4^y = 15, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

Вариант Б2

а) $\left(3^{x-3}\right)^{x+4} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x-1} \cdot 9^{x+1}$;

б) $2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} = 7 \cdot 2^{x^2}$;

в) $\dfrac{7^x - 1}{3} = \dfrac{7^{x+1} + 49}{7^{x+1}}$;

г) $2^{x^2-2x} \cdot 5^{x^2-2x} = 1000^{2-x}$.

$$\begin{cases} 5^x + 5^y = 30, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Вариант В1

1

Решите уравнение:

а) $\sqrt[3]{3^{x+1}} = \left(\sqrt[4]{9^{x-2}}\right)^{x+1}$;

б) $6^x + 6^{x+1} = 2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2}$;

в) $10^{1+x^2} - 10^{1-x^2} = 99$;

г) $6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}$.

2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$$

Вариант В2

а) $\sqrt[3]{2^{x-2}} = \left(\sqrt[4]{4^{x+3}}\right)^{x-2}$;

б) $3^{x-1} + 3^x + 3^{x+1} = 12^{x-1} + 12^x$;

в) $5^{1+x^2} - 5^{1-x^2} = 24$;

г) $20^{3x+2} = 4^{x+12} \cdot 5^{5x-8}$.

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, \\ 2^y \cdot 3^x = 18. \end{cases}$$

С-26. ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Вариант А1

1

Решите неравенство:

а) $5^{1-2x} > \frac{1}{125}$;

б) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+3x} \le 16$;

в) $3^x - 3^{x-3} > 26$;

г) $4^x - 2^x \ge 2$.

2

Решите графически неравенство:

$\left(\frac{1}{2}\right)^x \le 2$.

Вариант А2

1

Решите неравенство:

а) $7^{3-x} < \frac{1}{49}$;

б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x^2-3x} \ge 5$;

в) $2^{x+2} + 2^{x+5} < 9$;

г) $9^x - 3^x \le 6$.

2

Решите графически неравенство:

$2^x \ge \frac{1}{2}$.

Вариант Б1

1

Решите неравенство:

а) $(1,5)^{\frac{x^2+x-20}{x}} \le 1$;

б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x-1} > 9^{x-1}$;

в) $3^{x^2+1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{-x^2} > 162$;

г) $5^x + 5^{1-x} \ge 6$.

2

Решите графически неравенство:

$\left(\frac{1}{3}\right)^x > 2^x$.

Вариант Б2

1

Решите неравенство:

а) $(3,2)^{\frac{x^2+2x-3}{x}} \ge 1$;

б) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+x-2} < 4^{x-1}$;

в) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2} + 2^{x^2+3} < 18$;

г) $4^{1-x} + 4^x \ge 5$.

2

Решите графически неравенство:

$3^x < (0,5)^x$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Решите неравенство:

Вариант В1:

а) $\dfrac{2^{x^2-x-2}-1}{x^2-x-2} \geq 0;$

б) $\left(\dfrac{1}{5}\right)^{x^2-7} - 5 \cdot 0,2^x < 0;$

в) $5^x \cdot 2^{1-x} + 5^{x+1} \cdot 2^{-x} > 7 \cdot (0,4)^{-\frac{1}{x}};$

г) $4^{x+1} - 13 \cdot 6^x + 9^{x+1} \leq 0.$

Вариант В2:

а) $\dfrac{1-3^{x^2+2x-3}}{x^2+2x-3} \leq 0;$

б) $(0,25)^{x^2-4} - 16 \cdot \left(\dfrac{1}{4}\right)^x > 0;$

в) $4^{x+2} \cdot 3^{-x} - 4^x \cdot 3^{2-x} < 7 \cdot (0,75)^{-\frac{4}{x}};$

г) $25^{x+0,5} - 7 \cdot 10^x + 2^{2x+1} \geq 0.$

2

Решите графически неравенство:

Вариант В1: $2^{|x|} < -\dfrac{2}{x}.$

Вариант В2: $3^{|x|} < \dfrac{3}{x}.$

С-27*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

1

Решите показательное уравнение, используя в решении указанный способ:

— разложение на множители:

Вариант 1:

а) $6^x + 6 \cdot 25^x - 6 = 5^x \cdot 30^x;$

б) $x^2 \cdot 2^{\sqrt{-x}} + 4 = 2^{\sqrt{-x}} + 4x^2;$

Вариант 2:

а) $7^x \cdot 14^x + 8 = 2^x + 8 \cdot 49^x;$

б) $x^2 \cdot 3^{\sqrt{1-x}} - 9x^2 = 4 \cdot 3^{\sqrt{1-x}} - 36;$

— введение новой переменной:

в) $4^{x-\sqrt{x^2-5}} - 12 \cdot 2^{x-1-\sqrt{x^2-5}} + 8 = 0;$ в) $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6;$

г) $3^{2x+1} + 3^{1-2x} - 7\left(3^x + 3^{-x}\right) = 4;$ г) $5^{2x+1} + 5^{1-2x} - 31\left(5^x + 5^{-x}\right) + 36 = 0;$

д) $7^{\cos^2 x} + 7^{\sin^2 x} = 8;$ д) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30;$

е) $4^{\mathrm{tg}^2 x} + 8 = 3 \cdot 2^{\frac{1}{\cos^2 x}};$ е) $3^{\cos 2x} = 3^{1+\cos^2 x} - 6;$

ж) $\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}\right)^x + \left(\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^x = 10;$ ж) $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^x = 4\sqrt{2};$

— применение свойств прогрессий:

з) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \ldots \cdot 2^{2x-1} = 512;$ з) $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = 0{,}04^{-28};$

и) $5^{\sin x} \cdot 5^{\sin^2 x} \cdot 5^{\sin^3 x} \cdot \ldots = 5;$ и) $4^{\cos x} \cdot 4^{\cos^2 x} \cdot 4^{\cos^3 x} \cdot \ldots = 4;$

— деление на выражение, содержащее показательную функцию:

к) $3^x + 4^x = 5^x;$ к) $2^x + 7^x = 9^x;$

л) $6\sqrt[x]{9} - 13\sqrt[x]{6} + 6\sqrt[x]{4} = 0.$ л) $3\sqrt[x]{16} + \sqrt[x]{36} - 2\sqrt[x]{81} = 0.$

❷

Решите показательное неравенство:

а) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\sqrt{x^2-3}} + 3 < 28 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1};$ а) $(0{,}25)^{2-\sqrt{5x+1}} - 4 \cdot 2^{\sqrt{5x+1}} \le 0;$

б) $2^{x+3} - 5^x < 7 \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 5^{x-1};$ б) $3^{x+2} + 7^x > 4 \cdot 7^{x-1} + 34 \cdot 3^{x-1};$

в) $x^2 \cdot 2^x + 4 \ge x^2 + 2^{x+2};$ в) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+4} \le x^2 - 81;$

г) $\sqrt{9^x - 3^{x+2}} > 3^x - 9;$ г) $\sqrt{9^x + 3^x - 2} > 3^x - 9;$

д) $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}} \le \left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}.$ д) $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1} \ge \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}.$

С-28*. ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Решите уравнение:

а) $(x+1)^{x^2-x} = (x+1)^2$;

б) $(x^2-4x+3)^{x^2-1} = 1$;

в) $|x-3|^{3-x} = |3-x|^{x-3}$;

г) $(x^2-4)^x = (3x+6)^x$.

2

Решите неравенство:

а) $x^{4x^2} < x, \quad x > 0$;

б) $|x+5|^{x^2-4x+3} > 1$;

в) $(x^2+x+1)^{2x^2+5x+2} \le 1$;

г) $(1+x^2)^{x-1} + 1 \ge 2(1+x^2)^{1-x}$.

3

Решите систему:

а) $\begin{cases} (x^2+2x-7)^{x^2+2x-15} = 1, \\ |x+1|^{x+6} > |x+1|; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1, \\ x+y=5. \end{cases}$

Вариант 2

1

а) $(x-1)^{x^2+x} = (x-1)^6$;

б) $(x^2+2x-8)^{x^2-4} = 1$;

в) $|x-2|^{x-2} = |2-x|^{2-x}$;

г) $(x^2-1)^x = (2x+2)^x$.

2

а) $x^{x^2} > x^{0,5x}, \quad x > 0$;

б) $|x+3|^{x^2-5x+4} < 1$;

в) $(4x^2+2x+1)^{x^2-x} \ge 1$;

г) $(2x^2+1)^{2-x} + 4 \ge 5(2x^2+1)^{x-2}$.

3

а) $\begin{cases} (x^2-3x-9)^{x^2-5x-6} = 1, \\ |x-1|^{x-1} > |x-1|; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^{x^2-8x+15} = 1, \\ x-y=3. \end{cases}$

К-5. ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ

Вариант А1

1

Решите уравнение:

а) $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-2x} = 125;$

б) $3^{x+3} - 3^x = 78;$

в) $2^{2x+1} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0.$

2

Решите неравенство:

а) $(0,4)^{9-x^2} \le 1;$

б) $2^x \cdot 5^x < 10^{x^2} \cdot 0,01;$

в) $3^{x^2-x} \le \left(5^{x-1}\right)^x.$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^x + 3^y = 12, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

4

Найдите

наибольшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}.$

При каких значениях x оно достигается?

Вариант А2

1

Решите уравнение:

а) $\left(\frac{1}{3}\right)^{4-2x} = 9;$

б) $5^{x+2} + 5^x = 130;$

в) $3^{2x+1} - 28 \cdot 3^x + 9 = 0.$

2

Решите неравенство:

а) $(0,8)^{2x-x^2} \ge 1;$

б) $2^x \cdot 3^x > 6^{2x^2} \cdot \frac{1}{6};$

в) $7^{x^2+4x} \ge \left(2^x\right)^{x+4}.$

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^x + 2^y = 10, \\ x + y = 4. \end{cases}$$

4

Найдите

наименьшее значение функции $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}.$

При каких значениях x оно достигается?

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Решите уравнение:

а) $\left(\frac{1}{4}\cdot 8^x\right)^{3x+2} = \frac{1}{32^x}$;

б) $9^x + 3^{2x+1} = 4^{x+1}$;

в) $5\cdot 4^x + 3\cdot 10^x = 2\cdot 25^x$.

а) $\left(\frac{1}{27}\cdot 9^x\right)^{2x+3} = \frac{1}{3^{9x}}$;

б) $5^{2x+1} - 25^x = 4^{x+1}$;

в) $3\cdot 4^x + 6^x = 2\cdot 9^x$.

2

Решите неравенство:

а) $\left(\cos\frac{\pi}{10}\right)^{x^2+x} < 1 - \sin^2\frac{\pi}{10}$;

б) $3^{x^2-2x+2} - 3^{x^2-2x} \le 8\cdot 27^{4-x}$;

в) $2^{4x} - 5\cdot 4^x \ge -4$.

а) $(\sin 3)^{x^2-x} > 1 - \cos^2 3$;

б) $7^{x^2+x+1} - 7^{x^2+x} \ge 6\cdot 49^{x+10}$;

в) $9^x + 3 \le 4\cdot 3^x$.

3

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{2x} - (0,25)^y = 5, \\ 3^x + (0,5)^y = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} (0,2)^x - 2^{0,5y} = 3, \\ (0,04)^x - 2^y = 21. \end{cases}$$

4

Найдите область значений функций:

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x+1}$ и $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} + 1$.

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^{3\sin x}$ и $y = 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sin x}$.

Определите, у какой из данных функций областью значений является промежуток большей длины.

Вариант В1

1

Решите уравнение:

а) $\left(4^{x+2}\right)^x \cdot \sqrt[3]{32^{x-1}} = 64$;

б) $3^{2x-1} + 11^{2x-1} = 121^x - 3^{2x+1}$;

в) $5^{\sin^2 x} - 5^{\cos^2 x} = 4$.

Вариант В2

а) $\left(9^x\right)^{x+1} \cdot \sqrt{27^{x-3}} = 3$;

б) $2^{2x} + 6^{2x} = 6^{2x+1} - 4^{x+1}$;

в) $2^{\cos 2x} - 2^{2\sin^2 x} = 1$.

2

Решите неравенство:

а) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{x^2-x-6}{x^2-9}} > \arccos\frac{1}{\sqrt{2}}$;

б) $2^{x^2+x-1} \cdot 3^{x^2+x+1} \le 1,5 \cdot 216^{x+1}$;

в) $\left(\sqrt{5}-2\right)^{x+1} \ge 2\left(\sqrt{5}+2\right)^{x+1} - 1$.

а) $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{x^2-x-2}{x^2-4}} < \arcsin 1$;

б) $3^{x^2-2x+1} \cdot 5^{x^2-2x-1} \ge 0,6 \cdot 225^{x+6}$;

в) $\left(2-\sqrt{3}\right)^{x-1} \le 3\left(2+\sqrt{3}\right)^{x-1} - 2$.

3

Решите систему:

$$\begin{cases} 4 \cdot 8^x - 9 \cdot 18^x = 4 \cdot 12^x - 9 \cdot 27^x, \\ (0,25)^{|x+1|} \ge 0,5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot 27^x - 3 \cdot 18^x = 2 \cdot 12^x - 3 \cdot 8^x, \\ 9^{|x-1|} \le 3. \end{cases}$$

4

Среди нулей функции

$y = 3^{\sin\frac{\pi x}{2}} - 3$

$y = (0,5)^{\cos\frac{\pi x}{4}} - 1$

найдите точки, в которых функция

$f(x) = (0,2)^{\sqrt{15+2x-x^2}}$ принимает наибольшее значение.

$f(x) = 2^{\sqrt{8+2x-x^2}}$ принимает наименьшее значение.

С-29. ЛОГАРИФМ. СВОЙСТВА ЛОГАРИФМОВ

Вариант А1

Вариант А2

1

Вычислите:

а) $\log_3 27 - \log_{\frac{1}{7}} 7$;

б) $2^{1+\log_2 5}$;

а) $\log_2 16 + \log_{\frac{1}{3}} 9$;

б) $5^{\log_5 10 - 1}$;

в) $\lg 4 + 2\lg 5$;

г) $\log_5 \sqrt{10} - \log_5 \sqrt{2}$.

в) $\log_6 9 + 2\log_6 2$;

г) $\lg \sqrt{30} - \lg \sqrt{3}$.

2

Найдите значение x, если:

а) $3^x = 7$;

б) $\log_4 x = \log_{0,5} \sqrt{2}$.

а) $2^x = 11$;

б) $\log_{0,2} x = \log_{\sqrt{5}} 5$.

3

С помощью логарифмических тождеств упростите выражение ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$):

а) $\dfrac{\lg b}{\lg a} + \dfrac{2}{\log_b a} - \log_a b^3$;

б) $a^{2\log_a b} - (\log_a a^b)^2$.

а) $\dfrac{3}{\log_a b} - \log_b a^2 - \dfrac{\log_3 a}{\log_3 b}$;

б) $\log_b b^a - b^{2\log_b \sqrt{a}}$.

4

Сравните числа:

а) $\log_3 10$ и $\lg 3$;

б) $\log_2 \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{8} + \log_2 \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{8}$ и 0.

а) $\log_2 7$ и $\log_7 2$;

б) $\lg \sin\dfrac{\pi}{4} - \lg \cos\dfrac{\pi}{4}$ и 0.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\log_5 \dfrac{1}{25} + \log_{\sqrt{3}} 27$;

б) $\log_{1,5} \log_4 8$;

в) $4^{\log_2 3 + 0,5\log_2 9}$;

Вариант Б2

а) $\log_{0,5} 4 + \log_{\sqrt{5}} 25$;

б) $\log_{0,75} \log_{27} 81$;

в) $100^{2\lg 2 + \lg 3}$;

г) $10^{\lg\frac{1}{5}-\lg 2}$.

г) $3^{\log_3 2-\log_3\frac{1}{6}}$.

2

Найдите значение *x*, если:

а) $2^{2x-4}=9$;

б) $\log_4 x=\log_{\sqrt{2}} 6^{\frac{1}{\log_2 6}}$.

а) $5^{3x+6}=27$;

б) $\log_{\sqrt{5}} x=\log_{\frac{1}{5}} 2^{\frac{1}{\log_5 2}}$.

3

Сравните числа:

а) $\log_3 10$ и $\log_8 62$;

б) $\log_2 9\cdot\log_3 4$ и $\dfrac{\lg\dfrac{1}{16\sqrt{2}}}{\lg\sin\dfrac{\pi}{6}}$.

а) $\log_2 9$ и $\lg 900$;

б) $\log_2 25\cdot\log_5\sqrt{2}$ и $\dfrac{\log_3 0,75}{\log_3\sin\dfrac{\pi}{3}}$.

4

Найдите значение выражения:

а) $\lg\operatorname{tg}31^\circ+\lg\operatorname{tg}59^\circ$;

б) $\dfrac{\log_3^2 6-\log_3^2 2}{\log_3 12}$.

а) $\lg\operatorname{ctg}42^\circ+\lg\operatorname{ctg}48^\circ$;

б) $\dfrac{\log_5^2 10-\log_5^2 2}{\log_5 20}$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $10\log_9\sqrt[5]{27}+\log_6\log_5\sqrt[3]{\sqrt{5}}$;

б) $12^{\frac{1}{1+\log_3 4}}$;

в) $\log_2\sin\dfrac{\pi}{8}+\log_2 2\cos\dfrac{\pi}{8}$;

г) $\log_{\sqrt{7}} 2\cdot\log_4 5\cdot\log_{125} 49$.

Вариант В2

а) $\log_6\log_7\sqrt[4]{\sqrt[3]{49}}+9\log_8\sqrt[3]{16}$;

б) $18^{\frac{1}{1+\log_9 2}}$;

в) $\log_2\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}+\log_2 2\cos^2\dfrac{\pi}{12}$;

г) $\log_{\sqrt{3}} 5\cdot\log_{25} 6\cdot\log_6 27$.

2

Найдите x, если:

а) $4^{2x} - 2^{2x+4} + 15 = 0$;

б) $\log_2 x = \dfrac{\lg 5}{\lg 0,5} + \log_4 225$.

а) $9^{2x} - 3^{2x+2} + 14 = 0$;

б) $\lg x = \dfrac{\log_7 18}{\log_7 0,1} + \log_{\sqrt{10}} 6$.

3

Найдите значение выражения:

а) $3^{\log_4 5} - 5^{\log_4 3}$;

б) $\lg 5 \cdot \lg 20 + \lg^2 2$.

а) $2^{\lg 7} - 7^{\lg 2}$;

б) $\log_{15}^2 3 + \log_{15} 5 \cdot \log_{15} 45$.

4

Выразите:

а) $\log_6 9$, если $\log_6 2 = a$;

б) $\lg 56$, если $\lg 2 = a$ и $\log_2 7 = b$.

а) $\lg 25$, если $\lg 2 = a$;

б) $\log_5 54$, если $\log_5 3 = a$ и $\log_3 2 = b$.

С-30. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Вариант А1

1

Решите уравнение:

а) $\log_4(x^2 - 15x) = 2$;

б) $\lg(x^2 - 9) = \lg(4x + 3)$;

в) $2\log_2(-x) = 1 + \log_2(x + 4)$;

г) $\log_5^2 x + \log_5 x - 2 = 0$.

Вариант А2

а) $\log_2(x^2 - 2x) = 3$;

б) $\lg(2x^2 + 3x) = \lg(6x + 2)$;

в) $2\log_3(-x) = 1 + \log_3(x + 6)$;

г) $\log_4^2 x - 2\log_4 x - 3 = 0$.

2

Решите систему:

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = 2; \\ x^2 + y^2 = 425. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x - \log_2 y = 1; \\ x^2 - y^2 = 27. \end{cases}$$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Решите уравнение:

Б1:

а) $\log_3(x+3) = \log_3(x^2+2x-3)$;

б) $\log_2(2x-1) - 2 = \log_2(x+2) - \log_2(x+1)$;

в) $\dfrac{\log_5(2x^2-x)}{\log_4(2x+2)} = 0$;

г) $\log_{2x}(x^2+x-2) = 1$.

Б2:

а) $\log_2(2x-4) = \log_2(x^2-3x+2)$;

б) $\log_3(3x-1) - 1 = \log_3(x+3) - \log_3(x+1)$;

в) $\dfrac{\log_4(2x^2+x)}{\log_5(2-2x)} = 0$;

г) $\log_{-2x}(2x^2-x-1) = 1$.

2

Решите систему:

$$\begin{cases} \log_x y + 2\log_y x = 3; \\ x + y = 12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\log_x y + \log_y x = 3; \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Вариант В1

Вариант В2

1

Решите уравнение:

В1:

а) $\log_{x-1}(2x^2-5x-3) = 2$;

б) $\lg(x-2) - \dfrac{1}{2}\lg(3x-6) = \lg 2$;

в) $\log_3^2(9x) + \log_3^2(3x) = 1$;

г) $\log_2(9-2^x) = 3^{\log_3(3-x)}$.

В2:

а) $\log_{x+1}(2x^2+5x-3) = 2$;

б) $\lg 5 - 1 = \lg(x-3) - \dfrac{1}{2}\lg(3x+1)$;

в) $\log_2^2(4x) + \log_2^2(2x) = 1$;

г) $\log_6(5+6^{-x}) = 10^{\lg(x+1)}$.

❷

Решите систему:

$$\begin{cases} 1+\log_2 x+\log_2 y = \\ \qquad = \log_2(x^2+y^2-4), \\ \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=3. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2(4-y)+\log_2(4+y) = \\ \qquad = \log_2 x+\log_2(x+2y), \\ \log_2(x+y)+\log_2(x-y)=3. \end{cases}$$

С-31*. ПРИМЕНЕНИЕ ЛОГАРИФМОВ В РЕШЕНИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

❶

Решите показательное уравнение:

а) $3^{x^2+4x}=\frac{1}{25}$;

б) $2\cdot 25^x-5\cdot 10^x+2\cdot 4^x=0$;

в) $5^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=100$.

❷

Используя метод логарифмирования, решите уравнение:

а) $x^{\log_2 x}=64x$;

б) $x^{2\lg^3 x-3\lg x}=0,1$;

в) $\frac{1}{4}x^{\log_4 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$;

г) $3^{\log_3^2 x}+x^{\log_3 x}=6$.

❸

Решите систему:

а) $\begin{cases} x^{2y^2-1}=3, \\ x^{y^2+2}=27; \end{cases}$

Вариант 2

❶

а) $5^{x^2-2x}=128$;

б) $16^x-5\cdot 36^x+4\cdot 81^x=0$;

в) $3^x\cdot 8^{\frac{x}{x+1}}=36$.

❷

а) $x^{\log_3 x}=9x$;

б) $x^{9\lg^3 x-11\lg x}=0,01$;

в) $27x^{\log_{27} x}=9^{\log_{27} x^5}$;

г) $2\cdot 6^{\log_6^2 x}-x^{\log_6 x}=6$.

❸

а) $\begin{cases} y^{x^2+1}=100, \\ y^{3x^2-2}=10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 2 + \log_3 y, \\ y^x = 3^8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4, \\ \log_4 x - \log_4 y = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^{\log_5 y} + y^{\log_5 x} = 50, \\ \log_5 y - \log_5 x = 1. \end{cases}$

4*

Используя свойства логарифмической функции, решите уравнение:

а) $3^x = 10 - \log_2 x$;

б) $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 2x^2 - 4x + 1$.

а) $2^x = 18 - \log_2 x$;

б) $-3x^2 + 6x - 2 = \log_2(x^2 + 1) - \log_2 x$.

С-32. ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Вариант А1

1

Решите неравенство:

а) $\log_2(8 - x) < 1$;

б) $\log_{\frac{1}{3}}(x + 1) \geq \log_{\frac{1}{3}}(3 - x)$;

в) $\log_2 x + \log_2(x - 1) \leq 1$.

2

С помощью метода интервалов определите, при каких значениях x функция

$y = (2 - x)\lg x$

принимает положительные значения.

Вариант А2

1

Решите неравенство:

а) $\log_3(x - 2) < 2$;

б) $\log_{0,5}(2x - 4) \geq \log_{0,5}(x + 1)$;

в) $\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) \leq 1$.

2

С помощью метода интервалов определите, при каких значениях x функция

$y = (x - 3)\lg(x + 1)$

принимает положительные значения.

Вариант Б1

1

Решите неравенство:

а) $\log_2(x^2 - 3x) < 2$;

б) $\log_{0,3}(2x^2 - 9x + 4) \geq$
$\geq 2\log_{0,3}(x + 2)$;

в) $\log_3^2 x - \log_3 x - 2 > 0$.

2

Найдите область определения функции:

$y = \sqrt{(4 - x^2)\log_{\frac{1}{2}}(x + 5)}$.

Вариант Б2

а) $\log_3(x^2 + 2x) < 1$;

б) $\log_{0,5}(2x^2 + 3x + 1) \leq$
$\leq 2\log_{0,5}(x - 1)$;

в) $\log_2^2 x + 2\log_2 x - 3 > 0$.

$y = \sqrt{(x^2 - 1)\log_{\frac{1}{3}}(3 - x)}$.

Вариант В1

1

Решите неравенство:

а) $\log_{\frac{1}{2}} \log_5(x^2 - 4) > 0$;

б) $2\log_2(x - 2) + \log_{0,5}(x - 3) > 2$;

в) $\log_{\frac{1}{3}} x \geq \log_x 3 - 2,5$.

2

Найдите область определения функции:

$$y = \lg\left(\frac{\log_2 x^2}{\lg(x + 3)}\right).$$

Вариант В2

а) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4(x^2 - 5) > 0$;

б) $2\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) +$
$+ \log_2(x^2 - 2x - 1) < 1$;

в) $2\log_5 x - \log_x 125 \leq 1$.

$$y = \log_2\left(\frac{\lg(x + 4)}{\log_2 x^4}\right).$$

С-33*. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ, СИСТЕМ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1	Вариант 2

1

Решите уравнение, используя указанный способ:

— преобразование и потенцирование уравнения:

Вариант 1	Вариант 2
а) $\log_3 \log_8 \log_2(x-5) = \log_3 2 - 1$;	а) $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}}(x+1) = 3^{\log_{\frac{1}{9}} 4}$;
б) $\lg(3^x + x - 12) = x\lg 30 - x$;	б) $\lg(2^x + x - 9) = x - x\lg 5$;
в) $\log_4 \log_2 x + \log_2 \log_4 x = 2$;	в) $2\log_2 \log_2 x + \log_{\frac{1}{2}} \log_2(2\sqrt{2}x) = 1$;

— введение новой переменной:

Вариант 1	Вариант 2
г) $\log_2^2(2-x) - \log_2(x-2)^2 + 3\log_2\lvert x-2\rvert = 2$;	г) $\log_{0,5}^2(1-x) - \log_{0,5}(x-1)^2 + \log_{0,5}\lvert x-1\rvert = 2$;
д) $\lg(10x)\cdot\lg(0,1x) = \lg x^3 - 3$;	д) $\log_2(\frac{1}{4}x)\cdot\log_2(4x) = \log_2 x^2 - 1$;
е) $\log_{2\operatorname{tg} x}(2\operatorname{ctg} x) + \log_{2\operatorname{ctg} x}(2\operatorname{tg} x) = 2$;	е) $\log_{\cos x}\sin x + \log_{\sin x}\cos x = 2$;
ж) $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$;	ж) $5\log_{\frac{x}{9}} x + \log_{\frac{9}{x}} x^3 + 8\log_{9x^2} x^2 = 2$;

— введение параметра:

Вариант 1	Вариант 2
з) * $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$;	з) * $(x+1)\log_3^2 x + 4x\log_3 x - 16 = 0$;
и) * $\lg(x^3 + x) = \log_2 x$.	и) * $\log_5(1+\sqrt{x}) = \log_{16} x$.

2

Решите неравенство:

а) $\log_{0,5} \log_6 \dfrac{x^2+x}{x+4} \le 0;$

б) $\dfrac{\log_2(3 \cdot 2^{x-1} - 1)}{x} \ge 0;$

в) $x^{2-4\log_2 x+\log_2^2 x} < \dfrac{1}{x};$

г) $(2^x + 3 \cdot 2^{-x})^{2\log_2 x - \log_2(x+6)} > 1;$

д) $\log_{x-2}(x^2 - 8x + 15) > 0;$

е) $\log_x \log_9(3^x - 9) \le 1;$

ж) $\sqrt{\log_9(3x^2 - 4x + 2)} >$
$> \log_3(3x^2 - 4x + 2) - 1;$

з) * $16^{-0,5+\log_4^2 x} + \dfrac{11}{16} \ge x^{\log_2 \sqrt{x}}.$

а) $\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \dfrac{x^2-1}{x-2} \le 0;$

б) $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \ge 0;$

в) $x^{\lg^2 x - 2\lg x - 1} < x^2;$

г) $(4 \cdot 3^x + 3^{-x})^{2\log_3(x-1) - \log_3(2x+1)} > 1;$

д) $\log_{2x+4}(x^2 - x) > 1;$

е) $\log_x \log_2(4^x - 12) \le 1;$

ж) $\sqrt{1 + \log_2(7x^2 + 14x + 8)} <$
$< 1 + \log_8(7x^2 + 14x + 8);$

з) * $(\sqrt{3})^{2+\log_{\sqrt{3}}^2 x} - 1,5 \le x^{\log_3 x^4}.$

3

Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x^{\log_2 y} = 3, \\ xy = 6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^y = \dfrac{1}{\sqrt{1000}}, \\ \dfrac{1}{y} \lg x = -6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_x(xy) = \log_y x^2, \\ y^{2\log_y x} = 4y - 3. \end{cases}$

а) $\begin{cases} y^{\log_5 x} = 64, \\ xy = 500; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y^x = 100, \\ \dfrac{1}{x} \lg y = 0,5; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_y \dfrac{x}{y} = \log_x y^2, \\ x^{-2\log_x y} = 5x - 4. \end{cases}$

К-6. ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ

Вариант А1 | **Вариант А2**

1

Вычислите:

Вариант А1:

а) $3\log_2 \dfrac{1}{8} + 10^{\lg 2 + \lg 5}$;

б) $2\log_3 6 - \log_3 12$.

Вариант А2:

а) $2\log_3 \dfrac{1}{27} + 6^{\log_6 72 - \log_6 2}$;

б) $3\lg 5 + \lg 8$.

2

Решите уравнение:

Вариант А1:

а) $\log_{0,5}(x^2 + x) = -1$;

б) $2\log_3 x = \log_3(2x^2 - x)$.

Вариант А2:

а) $\log_{0,1}(x^2 - 3x) = -1$;

б) $2\log_5(-x) = \log_5(x + 2)$.

3

Решите неравенство:

Вариант А1:

а) $\log_7(2 - x) \le \log_7(3x + 6)$;

б) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 2) - 1$.

Вариант А2:

а) $\log_{0,2}(3x - 1) \ge \log_{0,2}(3 - x)$;

б) $\log_3(x^2 - 1) < \log_3(x + 1) + 1$.

4

Решите систему уравнений:

Вариант А1:

$$\begin{cases} \log_3(x + y) = 2, \\ 9^{\log_3 \sqrt{x-y}} = 5. \end{cases}$$

Вариант А2:

$$\begin{cases} \log_2(x - y) = 3, \\ 4^{\log_2 \sqrt{x+y}} = 10. \end{cases}$$

5

Найдите значения x, при которых функция

Вариант А1: $f(x) = x^{\log_2 x + 2}$

Вариант А2: $f(x) = x^{\log_3 x - 2}$

принимает значение,

Вариант А1: равное 8.

Вариант А2: равное 27.

Вариант Б1

1

Вычислите:

а) $\log_{0,6}(\log_8 32) + 49^{\log_{\sqrt{7}} \sqrt{2}}$;

б) $\dfrac{\lg 900 - 2}{2\lg 0,5 + \lg 12}$.

2

Решите уравнение:

а) $\log_{\frac{1}{2}} x = \log_{\frac{1}{2}}(x+3) - \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$;

б) $\log_2^2 x^2 + 6\log_{0,25} x - 1 = 0$.

3

Решите неравенство:

а) $\log_2(x^2 - 3x + 2) \le 1 + \log_2(x-2)$;

б) $2\log_{0,2}^2 x - \log_{0,2} x^2 > 4$.

4

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2^{2+\log_2(x^2+y^2)} = 20, \\ \lg(x^2 - y^2) - \lg(x - y) = 0. \end{cases}$$

5

Найдите абсциссы точек пересечения графиков функций:

$f(x) = x^{\log_3 x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{27}x^4$.

Вариант Б2

1

а) $\log_{1,2}(\log_{64} 32) + 9^{\log_{\sqrt{3}} \sqrt{5}}$;

б) $\dfrac{2\lg 0,2 + \lg 200}{\lg 20 - 1}$.

2

а) $\log_{0,2}(x+1) = \log_{0,2}(8-x) - \log_{0,2} x$;

б) $\log_3^2 x^3 - 20\log_9 x + 1 = 0$.

3

а) $\log_6(x^2 + 10x + 24) \le 1 + \log_6(x+6)$;

б) $\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x^2 > 3$.

4

$$\begin{cases} 3^{1+\log_3(x^2-y^2)} = 15, \\ \log_2(x^2 - y^2) - \log_2(x + y) = 0. \end{cases}$$

5

$f(x) = x^{\log_2 x}$ и $g(x) = \dfrac{8}{x^2}$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $3^{\frac{2}{\log_5 3}} + \dfrac{\log_2 \frac{1}{3}}{\log_4 81}$;

б) $\log_{\sqrt{2}}(\log_2 3 \cdot \log_3 4)$.

2

Решите уравнение:

а) $\log_2(x-2) \cdot \log_3 2 + \log_3(x+3) = 1 + \lg(x-1)\log_3 10$;

б) $\log_x \left(9x^2\right) \log_3^2 x = 4$.

3

Решите неравенство:

а) $\log_x(x+2) > 2$;

б) $\log_5(\log_{0,5}^2 x + \log_{0,5} x^2 - 3) \geq 1$.

4

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 3^{\log_3 y} - \log_3 x = 1, \\ x^y = 3^{12}. \end{cases}$$

5

Решите уравнение:

$\log_2(x^2 - x - 2) = 1 + \log_2(x-2)\log_2(x+1)$.

Вариант В2

1

а) $5^{-\frac{1}{\log_{0,5} 5}} + \dfrac{\log_3 \frac{1}{2}}{\log_9 16}$;

б) $\log_{\sqrt{3}}(\log_{27} 2 \cdot \log_2 3)$.

2

а) $\log_3(x-3) \cdot \log_2 3 + \log_2(x+2) = 1 + \log_5(x-1)\log_2 5$;

б) $\log_x (125x) \log_{25}^2 x = 1$.

3

а) $\log_x(6-x) > 2$;

б) $\log_2(\log_{0,5}^2 x - \log_{0,5} x - 2) \geq 2$.

4

$$\begin{cases} \log_5 x + 5^{\log_5 y} = 7, \\ x^y = 5^{12}. \end{cases}$$

5

$\log_3(x^2 - 2x - 3) = 1 + \log_3(x+1)\log_3(x-3)$.

С-34. ОБОБЩЕНИЕ ПОНЯТИЯ МОДУЛЯ. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С МОДУЛЕМ

Вариант А1

1 Раскройте модуль:

а) $\left|\sqrt{5}-2\right|$;

б) $\left|3-\pi\right|$;

в) $\left|1+x^2\right|$;

г) $\left|-\sqrt{x}-x^8\right|$.

2 Решите уравнение:

а) $\left|2x-3\right|=5$;

б) $\left|x^2-4\right|=x^2-4$;

в) $\left|x^2+x\right|=\left|3x+3\right|$;

г) $x^2-\left|x\right|-2=0$.

3 Решите неравенство:

а) $\left|x-2\right|\le 2$;

б) $\left|2+\dfrac{1}{x}\right|>-3$;

в) $\left|x^2-9\right|>16$;

г) $\left|2+x\right|\le x$.

Вариант А2

1 Раскройте модуль:

а) $\left|1-\sqrt{2}\right|$;

б) $\left|4-\pi\right|$;

в) $\left|-x^4-2\right|$;

г) $\left|x^2+\sqrt[4]{x}\right|$.

2 Решите уравнение:

а) $\left|2x+4\right|=6$;

б) $\left|x^2-1\right|=1-x^2$;

в) $\left|x^2-x\right|=\left|2x-2\right|$;

г) $x^2+\left|x\right|-6=0$.

3 Решите неравенство:

а) $\left|x+1\right|\le 1$;

б) $\left|1+\dfrac{1}{x-1}\right|>-1$;

в) $\left|x^2-4\right|>12$;

г) $\left|4-x\right|\le x$.

Вариант Б1

1

Раскройте модуль:

а) $\left|3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right|$;

б) $\left|2^{30}-3^{20}\right|$;

в) $\left|-x^2+2x-2\right|$;

г) $\left|\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right|$.

2

Решите уравнение:

а) $\left|x^2+x\right|=2$;

б) $|x-1|=3x+5$;

в) $x^2-4\dfrac{x+2}{|x+2|}=0$;

г) $x^2-6x+|x-4|+8=0$.

3

Решите неравенство:

а) $\left|\sqrt{x+1}-1\right|>-2$;

б) $|4x+1|\ge 3$;

в) $\left|x^2-4\right|\le 3x$;

г) $|x+1|<|x-3|$.

Вариант Б2

1

а) $\left|3\sqrt{5}-5\sqrt{3}\right|$;

б) $\left|3^{40}-4^{30}\right|$;

в) $\left|x^2+6x+10\right|$;

г) $\left|\sqrt{x-2}-\sqrt{x}\right|$.

2

а) $\left|x^2-x\right|=6$;

б) $|x+1|=2x+8$;

в) $x^2+\dfrac{|x-1|}{x-1}=0$;

г) $x^2+4x+|x+3|+3=0$.

3

а) $\left|4-\sqrt{x-2}\right|>-5$;

б) $|4x-3|\le 1$;

в) $\left|x^2-2x\right|\ge x$;

г) $|x+2|<|x-4|$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Раскройте модуль:

а) $\left|\sqrt{2}-\sqrt[3]{3}\right|$;

б) $\left|\cos 20^\circ - \cos 21^\circ\right|$;

в) $\left|2 - x^2 - \dfrac{1}{x^2}\right|$;

г) $\left|x^6 + 3 - 2x^3\right|$.

а) $\left|\sqrt[3]{2}-\sqrt[7]{5}\right|$;

б) $\left|\sin 1^\circ - \sin 2^\circ\right|$;

в) $\left|\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} - 2\right|$;

г) $\left|4x^5 - x^{10} - 5\right|$.

❷

Решите уравнение:

а) $\left|\left|x^2 - x\right| - 1\right| = 1$;

б) $\left|x^2 + x - 3\right| = x$;

в) $\sqrt{9 - x^2} = -\left|x^2 + 4x + 3\right|$;

г) $|x| + |x - 2| = 4$.

а) $\left|\left|x^2 + x\right| - 3\right| = 3$;

б) $\left|x^2 - x - 8\right| = -x$;

в) $\sqrt{25 - x^2} = -\left|x^2 + 2x - 15\right|$;

г) $|x - 1| + |x + 1| = 4$.

❸

Решите неравенство:

а) $\left|x^2 + 3x\right| \geq 2 - x^2$;

б) $\left|x^2 - 2x\right| \leq x$;

в) $\left|x^2 + x - 2\right| > |x + 2|$;

г) $\left|\dfrac{\sqrt{x+3} - 1}{x^2 - 1}\right| > 0$.

а) $\left|x^2 - 2x\right| \geq 12 - x^2$;

б) $\left|x^2 + 2x\right| \leq 4x$;

в) $\left|2x^2 + x - 1\right| > |x + 1|$;

г) $\left|\dfrac{\sqrt{x+5} - 2}{4 - x^2}\right| > 0$.

НАЧАЛА АНАЛИЗА

С-35. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ И ФУНКЦИЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Вариант А1

1

Найдите предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2+4}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-5n+2}{n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3^n+1}{3^{n+1}}$.

2

Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-1}{2x^3+x}$.

Вариант А2

1

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^3-2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n-2}{4n^2+1}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-3})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+2}}{2^n+2}$.

2

а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x+4}{x^2-2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{16-x^2}{4-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{15x}{3\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x^3}{3x^2+5x}$.

3

Пользуясь определением непрерывности функции в точке, докажите, что

функция $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$ непрерывна в точке $x_0 = -1$, но не является непрерывной в точке $x_1 = 0$.

функция $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$ непрерывна в точке $x_0 = 3$, но не является непрерывной в точке $x_1 = 2$.

Вариант Б1

1

Найдите предел числовой последовательности:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n^2+2}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8-3n}{n+4}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n^2+n}-n)$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n+3^n}{3^{n+1}+4}$.

2

Вычислите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x^2-5x+2}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+\sin 2x}{\sin x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+2}{\cos(x+2)}$.

Вариант Б2

1

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{3n^3-1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+3}{5-4n}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt{n^2-2n})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+5^{n+2}}{5^{n+1}+4^{n+1}}$.

2

а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sqrt{x^2+2}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{2x^2-5x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x-\sin x}{\sin 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-1}{\sin(x-1)}$.

3

Определите, является ли непрерывной функция:

а) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ в точке $x_0 = 1$;

б) $g(x) = \begin{cases} x^2, & \text{при } x \le -1, \\ 3x+4, & \text{при } x \ge -1 \end{cases}$

в точке $x_0 = -1$.

а) $f(x) = \dfrac{2+x}{2-x}$ в точке $x_0 = -2$;

б) $g(x) = \begin{cases} 2x-3, & \text{при } x < 1, \\ x^2-2, & \text{при } x \ge 1 \end{cases}$

в точке $x_0 = 1$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите предел числовой последовательности:

Вариант В1:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\dfrac{1}{n}\cos n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2-n-1}{n^2-1}\right)^3$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n+1})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1-n)n!}{(n+1)!-n!}$.

Вариант В2:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{1}{n}\right)\sin n$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n^2+n-2}{2n^2-2}\right)^2$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n})$;

г) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!+n!}{(2-n)n!}$.

2

Вычислите предел:

Вариант В1:

а) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\lg(3-x)}{2+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-2x-3}{x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 7x - \sin 3x}{4x}$;

Вариант В2:

а) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{\sin(x+1)}{x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-8}{x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 3x - \cos x}{4x^2}$;

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{\operatorname{tg} x}$.

г) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2 \operatorname{ctg} x}$.

3

Найдите значение a, при котором функция $f(x)$ является непрерывной на $D(f)$, если:

а) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{при } x \le 2, \\ ax - 6, & \text{при } x > 2; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 4x}{x^2}, & \text{при } x \ne 0, \\ a, & \text{при } x = 0. \end{cases}$

а) $f(x) = \begin{cases} 4 + x, & \text{при } x \le 1, \\ 2x^2 - a, & \text{при } x > 1; \end{cases}$

б) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos x}{2x}, & \text{при } x \ne 0, \\ a, & \text{при } x = 0. \end{cases}$

С-36. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ. ПРОСТЕЙШИЕ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ

Вариант А1

1

Найдите приращение функции:

а) $f(x) = 2x - 3$,
если $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}2$;

б) $f(x) = x^2 + 2$,
если $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}01$.

2

Найдите производную функции:

а) $f(x) = 2x^5 - \dfrac{4}{x^2}$;

б) $f(x) = (2\sqrt{x} + 1) \cdot x^3$.

Вариант А2

1

а) $f(x) = 3x + 1$,
если $x_0 = -2$, $\Delta x = 0{,}1$;

б) $f(x) = x^2 - 4$,
если $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}02$.

2

а) $f(x) = 3x^4 + \dfrac{2}{x^3}$;

б) $f(x) = (3\sqrt{x} - 2) \cdot x^2$.

3

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x + 2}$;

б) $f(x) = 4x + \dfrac{1}{x} - \sqrt{5}$.

а) $f(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x - 2}$;

б) $f(x) = -\dfrac{1}{x} - 9x + \sqrt{2}$.

4

Решите неравенство

$f'(x) > 0$, если:

а) $f(x) = 8x - x^2 - \dfrac{x^3}{3}$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$.

$f'(x) < 0$, если:

а) $f(x) = \dfrac{x^3}{6} + x^2 - 6x$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x - 3}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - x$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = \dfrac{2}{x} + 1$, $x_0 = -1$.

а) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + 2x$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = 3 - \dfrac{4}{x}$, $x_0 = 2$.

2

Найдите производную функции:

а) $f(x) = x\sqrt{x} - 8x^3$;

б) $f(x) = \left(3 - \dfrac{4}{x^4}\right)(x^2 + 1)$.

а) $f(x) = 3x^5 + x^2\sqrt{x}$;

б) $f(x) = \left(2 + \dfrac{3}{x^3}\right)(x - 1)$.

3

Составьте и решите уравнение:

а) $f'(x) = f'(-2)$,

если $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 4}$;

б) $f'(x) = f(x) - 2x$,

если $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$.

а) $f'(x) = f'(6)$,

если $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 4}$;

б) $xf'(x) = f(x) + 4$,

если $f(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

4

Составьте и решите неравенство

$f(x) \cdot f'(x) \geq 0$, если:

а) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;

б) $f(x) = \dfrac{2 - x}{x + 3}$.

$f(x) \cdot f'(x) \leq 0$, если:

а) $f(x) = x^2 - 4x + 3$;

б) $f(x) = \dfrac{x + 1}{4 - x}$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Пользуясь определением, найдите производную функции $f(x)$ в каждой точке $D(f)$:

В1:

а) $f(x) = \sqrt{x - 2}$;

б) $f(x) = 4 - \dfrac{2}{x^2}$.

В2:

а) $f(x) = \sqrt{x + 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{3}{x^2} - 7$.

2

Найдите производную функции:

В1:

а) $f(x) = 4x^5 - \dfrac{2}{x\sqrt{x}}$;

б) $f(x) =$

$= \left(x - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)(2 + 5x - 3x^2)$.

В2:

а) $f(x) = \dfrac{4}{x^2\sqrt{x}} + 3x^6$;

б) $f(x) =$

$= (15 - 2x - x^2)\left(2x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

3

Составьте и решите уравнение:

а) $|f(x)| = f'(x)$,

если $f(x) = x^2 + x + 1$;

б) $f'(x) = f'(5) - f'(1)$,

если $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$.

а) $|f(x)| = -f'(x)$,

если $f(x) = -x^2 - 4x - 1$;

б) $f'(x) = f'(-1) + f'(-5)$,

если $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x + 3}$.

4

Составьте и решите неравенство

$\dfrac{f(x)}{f'(x)} \ge 0$, если:

а) $f(x) = x^4 - 4x^2$;

б) $f(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)^2$.

$\dfrac{f(x)}{f'(x)} \le 0$, если:

а) $f(x) = 9x - x^3$;

б) $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^2$.

С-37. ПРОИЗВОДНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ И СЛОЖНЫХ ФУНКЦИЙ

Вариант А1

1

Найдите $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = (4x+3)^6$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = 2 - 2\cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8}$, $x_0 = 3$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{8}$.

Вариант А2

а) $f(x) = (3x-2)^5$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = 4\sin x - x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

в) $f(x) = \sqrt{5 - x^2}$, $x_0 = -2$;

г) $f(x) = \dfrac{1}{4}\cos 4x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{16}$.

2

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = (x^2 - 6x + 5)^2$;

б) $f(x) = \cos^2 \dfrac{x}{4} - \sin^2 \dfrac{x}{4}$.

а) $f(x) = (x^2 - 2x - 3)^2$;

б) $f(x) = 4\sin\dfrac{x}{8}\cos\dfrac{x}{8}$.

3

Докажите тождество:

а) $f'(x) = \dfrac{1}{x-2} f'(3) \cdot f(x)$,

если $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$;

б) $g'(x) = \left(\dfrac{g(x)}{\sin x}\right)^2$,

если $g(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \pi$.

а) $f'(x) = \dfrac{1}{x+1} f'(0) \cdot f(x)$,

если $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)^3}$;

б) $g'(x) = \left(\dfrac{g(x)}{\cos x}\right)^2$,

если $g(x) = \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2}$.

Вариант Б1

1

Найдите $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = (3x-5)^3 + \dfrac{1}{(3-x)^2}$,

$x_0 = 2$;

б) $f(x) = \sin 3x - \operatorname{tg} x$,

$x_0 = 0$;

в) $f(x) = \sqrt{5 - 4x - x^2}$, $x_0 = -2$;

г) $f(x) = x^2 \cos\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$,

$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

Вариант Б2

а) $f(x) = \dfrac{1}{(2x+7)^4} - (1-x)^3$,

$x_0 = -3$;

б) $f(x) = \cos 4x + \operatorname{ctg} x$,

$x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 12}$, $x_0 = 4$;

г) $f(x) = x \sin\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$,

$x_0 = \pi$.

❷

Решите уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$;

б) $f(x) = \cos 5x \cos 3x + \sin 5x \sin 3x - x$.

а) $f(x) = \sqrt{x^3 + \frac{243}{x}}$;

б) $f(x) = \sin 4x \cos x - \cos 4x \sin x + 1,5x$.

❸

Докажите, что при всех допустимых значениях x производная функции $g(x)$ не может принимать

положительных / отрицательных

значений, если:

а) $g(x) = \frac{1}{3(2x-1)^3} + 2\sqrt{1 - x^3}$;

б) $g(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{9} + \cos\frac{\pi}{9}$.

а) $g(x) = \frac{0,2}{(5-4x)^5} - \sqrt{2 - x^5}$;

б) $g(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{7} - \sin\frac{\pi}{7}$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите $f'(x_0)$, если:

Вариант В1:

а) $f(x) = (x^2 + 3x - 4)^5 - \sin \pi x$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^3 \frac{x}{3}}$, $x_0 = -3\pi$;

в) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

г) $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$, $x_0 = 0$.

Вариант В2:

а) $f(x) = (2x^2 - x - 3)^6 + \cos \pi x$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = \frac{1}{\sin^4 \frac{x}{2}}$, $x_0 = 3\pi$;

в) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$, $x_0 = \frac{3\pi}{4}$;

г) $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, $x_0 = 1$.

2

Решите уравнения $\left(f\left(g\left(x\right)\right)\right)' = 0$ и $\left(g\left(f\left(x\right)\right)\right)' = 0$, если:

$f(x) = x^2 - x$ и $g(x) = \dfrac{1}{x}$.

$f(x) = x^2 - 4x$ и $g(x) = \sqrt{x}$.

3

Докажите, что при всех допустимых значениях x верно равенство:

а) для $f(x) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ и

$$g(x) = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$f'(x)\cdot g'(x) = -f(x)\cdot g(x)$;

б) для $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x}$

$$\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)' = -\frac{f'(x)}{\left(f\left(x\right)\right)^2}.$$

а) для $f(x) = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ и

$$g(x) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{1-\cos\frac{x}{2}}$$

$\dfrac{1}{f'(x)} - \dfrac{1}{g'(x)} = 1$;

б) для $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$

$$\left(f\left(f\left(x\right)\right)\right)' = \frac{f'(x)}{\left(f\left(x\right)\right)^2}.$$

С-38. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ И МЕХАНИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

Вариант А1

Вариант А2

1

Найдите тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = 3x^2 - 12x + 5$, $x_0 = -1$;

а) $f(x) = 2x^2 + 8x - 3$, $x_0 = -3$;

б) $f(x) = 4\cos x + x, \quad x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

б) $f(x) = 2x - 3\sin x, \quad x_0 = \pi$.

❷

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке M:

а) $f(x) = 2x^2 + \dfrac{1}{3}x^3$, $M(-3; 9)$;

б) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, $M(2; 3)$.

а) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x$, $M(3; 3)$;

б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$, $M(-2; 3)$.

❸

Тело движется по закону

$x(t) = t^4 + 0,5t^2 - 3t$

$x(t) = t^3 - 2t^2 + 5$

(x — в метрах, t — в секундах). Найдите скорость и ускорение тела через 2 с после начала движения.

❹

На графике функции $f(x)$ найдите точку, в которой касательная к $f(x)$ наклонена к оси абсцисс под углом α, если:

$f(x) = \sqrt{2x-1}, \quad \alpha = 45°$.

$f(x) = \sqrt{4x+8}, \quad \alpha = 45°$.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

Б1:

а) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + x)$, $x_0 = -1$;

б) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{12}$.

Б2:

а) $f(x) = (x^2 + 1)(x^3 - x)$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \cos^2 x$, $x_0 = -\dfrac{\pi}{12}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

а) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = \cos(1+4x)$, $x_0 = -0,25$.

а) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$, $x_0 = -2$;

б) $f(x) = \sin(1-2x)$, $x_0 = 0,5$.

3

Тело массой m кг движется по закону $x(t)$ (x — в метрах, t — в секундах). Найдите силу, действующую на тело в момент времени t_0, если:

$m = 3$, $t_0 = 2$,
$x(t) = 0,25t^4 + \dfrac{1}{3}t^3 - 7t + 2$.

$m = 2$, $t_0 = 3$,
$x(t) = 2t^3 - 6t^2 + t + 3$.

4

На графике функции

$g(x) = \sqrt{8x - x^2}$

$g(x) = \sqrt{-x^2 - 10x}$

найдите точку, в которой касательная к графику параллельна оси абсцисс.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите угол между осью абсцисс и касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = \sqrt{x^2+6}$, $x_0 = \sqrt{3}$;

б) $f(x) = -x\cos 2x$, $x_0 = 0$.

а) $f(x) = \sqrt{x^2-6}$, $x_0 = 3$;

б) $f(x) = -x\sin 2x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+1}$, x_0 — точка пересечения графика с осью абсцисс;

б) $f(x) = (7-3x)^3$, x_0 — точка пересечения графика с прямой $y = 1$.

а) $f(x) = \dfrac{3x^2+2}{x-1}$, x_0 — точка пересечения графика с осью ординат;

б) $f(x) = (4x+3)^5$, x_0 — точка пересечения графика с прямой $y = -1$.

3

Из точки A вдоль координатных осей Ox и Oy движутся два тела по законам:

$x(t) = \sqrt{t^4+3}$,

$y(t) = \sqrt{4t^2+1}$, $A(\sqrt{3}; 1)$

$x(t) = \sqrt{3t^4+4t^2}$,

$y(t) = \sqrt{t^4+1}$, $A(0; 1)$

(x, y — в метрах, t — в секундах). Определите, с какой скоростью они удаляются друг от друга.

4

На графике функции

$f(x) = \dfrac{x+1}{x+2}$

$f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

найдите точки, в которых касательная параллельна прямой

$y = x - 3$.

$y = 2x + 3$.

К-7. ПРОИЗВОДНАЯ

Вариант А1

1

Найдите производную функции:

а) $y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4$;

б) $y = 2\cos x - 3\,\mathrm{tg}\,x$;

в) $y = \frac{x-3}{x+2}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

$f(x) = \frac{2}{x^2} - x$, $x_0 = -1$.

3

Составьте и решите уравнение:

$f'(x) = g'(x)$, если
$f(x) = (2x-1)^5$, $g(x) = 10x + 7$.

4

Материальная точка движется по закону

$x(t) = t^3 + 1$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее координата равна 9 м.

Вариант А2

1

Найдите производную функции:

а) $y = 4x^5 + \frac{x^3}{3} - 2$;

б) $y = 4\sin x - 5\,\mathrm{ctg}\,x$;

в) $y = \frac{x-2}{x+3}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

$f(x) = \frac{3}{x^3} + 2x$, $x_0 = 1$.

3

Составьте и решите уравнение:

$f'(x) = -g'(x)$, если
$f(x) = (3x-5)^4$, $g(x) = 96x - 17$.

4

Материальная точка движется по закону

$x(t) = t^4 + 3t$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

координату точки в момент, когда ее скорость равна 7 м/с.

5

Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции

$g(x) = \dfrac{1}{2-3x}$ в точке с ординатой -1.

$g(x) = \dfrac{2}{1-x}$ в точке с ординатой 1.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите производную функции:

Б1:

а) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{4}{x^4} + 8\sqrt{x}$;

б) $y = (x^2+1)\cos x$;

в) $y = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$.

Б2:

а) $y = \dfrac{3}{x^3} + \dfrac{x^3}{3} - 6\sqrt{x}$;

б) $y = (4-x^2)\sin x$;

в) $y = \dfrac{x^2-6x}{x+2}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

$f(x) = \dfrac{1}{(2x-1)^2}$, $x_0 = 1$.

$f(x) = \dfrac{1}{(3x-8)^2}$, $x_0 = 3$.

3

Составьте и решите уравнение:

$f'(x) = -g'(x)$, если $f(x) = \sin^2 x$, $g(x) = \cos x + \cos\dfrac{\pi}{12}$.

$f'(x) = g'(x)$, если $f(x) = \cos^2 x$, $g(x) = \sin x - \sin\dfrac{\pi}{10}$.

4

Материальная точка движется по закону

$x(t) = 5t + 6t^2 - t^3$

$x(t) = \dfrac{t^3}{3} - t^2 + 2t - 4$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее ускорение равно нулю.

ускорение точки в момент, когда ее скорость равна 1 м/с.

5

Найдите острый угол, который образует с осью ординат касательная к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если

$f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$, $x_0 = 1$.

$f(x) = \sqrt{x^2 - 6}$, $x_0 = 3$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите производную функции:

Вариант В1:

а) $f(x) = (x + 1)^2(x - 1)$;

б) $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x - \cos 2x$;

в) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

Вариант В2:

а) $f(x) = (x - 1)^2(x + 1)$;

б) $f(x) = \sin\dfrac{x}{3} - \operatorname{tg}^2 x$;

в) $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x^2 - 8}}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$, если ее угловой коэффициент равен k, если:

$f(x) = \sqrt{2x + 1}$, $k = \dfrac{1}{3}$.

$f(x) = \sqrt{1 - 4x}$, $k = -\dfrac{2}{3}$.

3

Составьте и решите неравенство:

$f'(x) \le f''(x)$, если $f(x) = (3 - 2x)^4$.

$f'(x) \ge f''(x)$, если $f(x) = (2x - 1)^6$.

4

Материальная точка движется по закону

$x(t) = t^4 - 4t^3 + 12t^2 - 3$

$x(t) = 1 + 6t + 3t^2 - t^3$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите

скорость точки в момент, когда ее ускорение минимально.

ускорение точки в момент, когда ее скорость максимальна.

5

Прямая проходит через точки

$A(-4;-2)$ и $B(0;1)$.

$A(4;6)$ и $B(0;1)$.

Определите, в какой точке она касается графика функции

$$g(x) = \frac{x^2+1}{x}.$$

$$g(x) = \frac{x^2-1}{x}.$$

С-39. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ НА МОНОТОННОСТЬ И ЭКСТРЕМУМЫ

Вариант А1

Вариант А2

1

Найдите критические точки функции:

Вариант А1:

а) $f(x) = x^3 + 6x^2$;

б) $f(x) = 2\sin x - x$.

Вариант А2:

а) $f(x) = 12x - x^3$;

б) $f(x) = x + \sqrt{2}\cos x$.

2

Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.

$f(x) = 3 + 24x - 3x^2 - x^3$.

3

Найдите точки экстремума функции:

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x-2}.$$

$$f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}.$$

4

Докажите, что функция $g(x)$ на множестве R является

возрастающей, если
$g(x) = 2x^5 + 4x^3 + 3x - 7$.

убывающей, если
$g(x) = 5 - 2x - x^3 - 4x^7$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите критические точки функции:

Б1:

а) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 7$;

б) $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{4}$.

Б2:

а) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 1$;

б) $f(x) = \sin\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2\sqrt{2}} - \pi$.

2

Найдите промежутки монотонности функции:

Б1: $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 4}$.

Б2: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 4}$.

3

Найдите точки экстремума функции:

Б1: $f(x) = (x + 1)^2(x + 5)^2$.

Б2: $f(x) = (x + 3)^2(x - 5)^2$.

4

Докажите, что функция $g(x)$ на множестве R является возрастающей (убывающей) , и определите, какой именно:

Б1: $g(x) = 4x + \sin^2 x$.

Б2: $g(x) = \cos^2 x - 3x$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите критические точки функции:

В1:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x + 1}$;

В2:

а) $f(x) = (x - 1)\sqrt{x}$;

б) $f(x) = x^2 - 4|x|$.

б) $f(x) = |2x + x^2|$.

2

Найдите промежутки монотонности функции:

$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x}$.

$f(x) = \sqrt{4x - x^2}$.

3

Найдите точки экстремума функции:

$f(x) = x^5 - 15x^3 + 8$.

$f(x) = 35x^7 - x^5 + 1$.

4

Определите, при каких значениях a функция $g(x)$ на каждом из промежутков $D(g)$ является

строго убывающей, если

$g(x) = \operatorname{ctg}\frac{x}{2} + ax$.

строго возрастающей, если

$g(x) = \operatorname{tg} 3x - ax$.

С-40*. ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Исследуйте функцию на выпуклость:

а) $f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + x - 3$;

б) $f(x) = \frac{x^6}{30} - 3x^4$;

в) $f(x) = \sin 2x - x^2$.

Вариант 2

а) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 - 5x + 3$;

б) $f(x) = 2x^6 - 5x^4$;

в) $f(x) = \cos 2x + x^2$.

❷

Найдите значение a, при котором точка x_0 будет точкой перегиба кривой $g(x)$, если

$g(x) = x^3 + ax^2$, $x_0 = -1$.

$g(x) = ax^3 - 6x^2$, $x_0 = 1$.

❸

Изобразите схематически фрагмент графика функции $f(x)$ в окрестности точки разрыва x_0 (для каждого случая приведите пример такой функции), если:

а) $x_0 = 2$,
$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 4$;

б) $x_0 = 1$, $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = 1$,
$\lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 2$;

в) $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = -\infty$,
$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = 0$;

г) $x_0 = -1$, $\lim\limits_{x \to -1-0} f(x) = +\infty$,
$\lim\limits_{x \to -1+0} f(x) = -\infty$.

а) $x_0 = 3$,
$\lim\limits_{x \to 3+0} f(x) = \lim\limits_{x \to 3-0} f(x) = 6$;

б) $x_0 = 2$, $\lim\limits_{x \to 2-0} f(x) = 1$,
$\lim\limits_{x \to 2+0} f(x) = -1$;

в) $x_0 = 0$, $\lim\limits_{x \to -0} f(x) = 0$,
$\lim\limits_{x \to +0} f(x) = +\infty$;

г) $x_0 = -2$, $\lim\limits_{x \to -2-0} f(x) = -\infty$;
$\lim\limits_{x \to -2+0} f(x) = +\infty$.

❹

Среди данных функций выберите те, которые имеют вертикальные асимптоты (ответ подтвердите доказательством) :

1) $y = \dfrac{x^2 - 5x - 6}{x + 1}$;

2) $y = \begin{cases} \sqrt{-x + 1}, \text{ если } x \le 1, \\ \dfrac{1}{1 + x}, \text{ если } x > 1; \end{cases}$

1) $y = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$;

2) $y = \begin{cases} 2x^2 - 7, \text{ если } x \le 2, \\ \dfrac{1}{x - 2}, \text{ если } x > 2; \end{cases}$

3) $y = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$;

4) $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, \text{ если } x < 0, \\ 3x, \text{ если } x \ge 0. \end{cases}$

3) $y = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$;

4) $y = \begin{cases} 2x + 2, \text{ если } x \le -1, \\ \dfrac{1}{x + 2}, \text{ если } x > -1. \end{cases}$

5

Исследуйте функцию на наличие асимптот:

а) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2 + 3}}$;

в) $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - x - 2}$;

г) $f(x) = \dfrac{x - 2}{\sqrt{1 - x}}$;

д) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 9}$.

а) $f(x) = \dfrac{4x^3}{2x^2 + 1}$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4 + 4}}$;

в) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + x - 6}$;

г) $f(x) = \dfrac{x + 3}{\sqrt{x - 1}}$;

д) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$.

С-41*. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ ФУНКЦИЙ (домашняя практическая работа)

Исследуйте функцию и постройте ее график:

Уровень А

1) $y = x^3 - 3x$;

2) $y = x^3 - 4x^2 + 3$;

3) $y = (x - 2)^4$;

4) $y = 4x^2 - x^4$;

5) $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$;

6) $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$;

7) $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$;

8) $y = \dfrac{1}{4 - x^2}$;

9) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$;

10) $y = x + \dfrac{4}{x}$;

11) $y = \dfrac{x + 3}{x^2 - 9}$;

12) $y = \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$.

Уровень Б

1) $y = 0{,}5x^2 - 0{,}2x^5$;
2) $y = x(x-1)^2$;
3) $y = x^2(x-2)^2$;
4) $y = -x^2(x+4)^2$;
5) $y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$;
6) $y = \dfrac{1}{x^2 - 2x - 8}$;
7) $y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 4}$;
8) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 9}$;
9) $y = \dfrac{x}{4 - x^2}$;
10) $y = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$;
11) $y = x\sqrt{2-x}$;
12) $y = (x-1)\sqrt{x}$.

Уровень В

1) $y = 3x^4 - 4x^3 + 2$;
2) $y = (x^2 - 1)^3$;
3) $y = x^2 - \dfrac{2}{x}$;
4) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2}$;
5) $y = \dfrac{7x}{2x^2 - 3x - 2}$;
6) $y = \dfrac{16}{x^3 - 4x}$;
7) $y = \dfrac{1-x}{(x-2)^3}$;
8) $y = x^2\sqrt{x+1}$;
9) $y = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x-1}}$;
10) $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$;
11) $y = 2\sin x - \cos 2x$;
12) $y = \sin x - \cos x + x$.

С-42. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ. ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Вариант А1	Вариант А2

❶

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

Вариант А1	Вариант А2
а) $f(x) = x - \dfrac{1}{3}x^3$, $[-2; 0]$;	а) $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - 4x$, $[0; 3]$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $[0; 2]$.

б) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2}$, $[1; 3]$.

❷

Тело, брошенное вертикально вверх, движется по закону

$h(t) = 8t - t^2$

$h(t) = 12t - 0,5t^2$

(h — в метрах, t — в секундах). Определите, в какой момент времени тело достигнет наибольшей высоты и каково будет ее значение в этот момент.

❸

Представьте число 12 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы

их произведение было наибольшим.

сумма их квадратов была наименьшей.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

а) $f(x) = (x+1)^2(x-1)$, $[-2; 0]$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x+1}$, $[0; 3]$.

а) $f(x) = (1-x^2)(x-1)$, $[0; 2]$;

б) $f(x) = \dfrac{x^2+8}{x-1}$, $[-3; 0]$.

❷

Материальная точка движется прямолинейно по закону

$x(t) = 18t^2 - t^3$

$x(t) = t^3 - 12t^2 + 60t$

(x — в метрах, t — в секундах).

Определите, в какой момент времени

из промежутка [4; 8]

из промежутка [1; 5]

скорость точки будет наибольшей, и найдите значение скорости в этот момент.

3

Из всех прямоугольников с диагональю 18 см найдите прямоугольник наибольшей площади.

3

Из всех прямоугольников с площадью 25 см^2 найдите прямоугольник с наименьшем периметром.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите множество, на которое функция $f(x)$ отображает данный промежуток:

В1:

а) $f(x) = \left|x^2 - 2x - 8\right|, [0; 5]$;

б) $f(x) = x + \cos^2 x, \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.

В2:

а) $f(x) = x^2 - 4|x| - 5, [-1; 3]$;

б) $f(x) = x - \sin^2 x, [0; \pi]$.

2

Найдите кратчайшее расстояние от точки A до графика функции $f(x)$, если:

В1: $A(1; 0),\ f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 10}$.

В2: $A(-3; 0),\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 6}$.

3

Среди всех равнобедренных треугольников

В1: с боковой стороной a найдите треугольник наибольшей площади.

В2: с данным периметром $2P$ найдите треугольник наибольшей площади.

С-43*. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1	Вариант 2

1

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$, проходящей через точку M, не принадлежащую данному графику, если

Вариант 1	Вариант 2
$f(x) = -x^2 - 5x - 6,\ M(-1;-1).$	$f(x) = x^2 - 4,\ M(2;-1).$

2

Найдите уравнение общей касательной к графикам функций:

Вариант 1	Вариант 2
$f(x) = x^2 - 2x + 5$, $g(x) = x^2 + 2x - 11.$	$f(x) = x^2 + 4x + 8,$ $g(x) = x^2 + 8x + 4.$

3

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$, перпендикулярной к прямой $g(x)$, если:

Вариант 1	Вариант 2
$f(x) = x^2 + 2x,\ \ g(x) = x - 7.$	$f(x) = -x^2 - 3,\ \ g(x) = x + 3.$

4

К графику функции $f(x)$ проведены две касательные в точках x_1 и x_2. Найдите площадь треугольника, образованного этими касательными и

Вариант 1	Вариант 2
осью абсцисс, если $f(x) = 4x - x^2,\ x_1 = 1,\ \ x_2 = 4.$	осью ординат, если $f(x) = -8x - x^2,\ x_1 = -6,\ \ x_2 = 1.$

Вариант 1	Вариант 2
5 Найдите угол при вершине равнобедренного треугольника	**5** В равнобедренный треугольник вписана окружность ра-

с заданной площадью, в который можно вписать окружность наибольшего радиуса.

диуса r. Каким должен быть угол при основании, чтобы площадь треугольника была наименьшей?

6

Определите количество корней уравнения

$3x - x^3 - 1 = 0.$

$x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$

К-8. ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

Вариант А1

Вариант А2

1

Найдите критические точки функции:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3;$

б) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x + 4}.$

а) $f(x) = 2 + 18x^2 - x^4;$

б) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 4}.$

2

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = x^3 - 3x^2.$

$y = -\dfrac{1}{3}x^3 + 4x.$

3

Найдите число,

которое в сумме со своим квадратом давало бы наименьшую величину.

разность которого со своим квадратом была бы наибольшей.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите промежутки монотонности функции:

а) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{x+1}$;

б) $f(x) = \sqrt{x} - x$.

а) $f(x) = \frac{(x+2)^2}{x-1}$;

б) $f(x) = x - 4\sqrt{x}$.

❷

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = \frac{4x}{1+x^2}$.

$y = \frac{4}{x^2+1}$.

❸

Представьте

число 12 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение куба одного из них на удвоенное второе было наибольшим.

число 20 в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы произведение одного из них на куб другого было наибольшим.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^2\sqrt{1-x^2}$;

б) $f(x) = \sin^2 x - \cos x$.

а) $f(x) = x\sqrt{2-x^2}$;

б) $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$.

❷

Исследуйте функцию и постройте ее график:

$y = \frac{4x^2+1}{x}$.

$y = -\frac{9x^2+1}{x}$.

❸

Известно, что

наименьшее значение функции $g(x) = 3x^2 - x^3$ на проме-

наибольшее значение функции $g(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ на промежутке $[-1; a]$ равно нулю. При каком максимальном значении a выполняется это условие?

жутке $[a; 0]$ равно 1. При каком минимальном значении a выполняется это условие?

С-44. ПЕРВООБРАЗНАЯ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНЫХ

Вариант А1

1 **Докажите, что функция F является первообразной для функции f на R, если:**

$F(x) = x^2 - \sin 2x - 1,$
$f(x) = 2x - 2\cos 2x.$

2 **Найдите общий вид первообразных для функции:**

а) $f(x) = x^2 - \sin x;$

б) $f(x) = 4 - \dfrac{2}{x^3}.$

3 **Для функции f найдите первообразную F, принимающую заданное значение в указанной точке, если:**

а) $f(x) = (x-8)^3,\ F(8) = 1;$

б) $f(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{x}},\ F(9) = 9.$

Вариант А2

1 **Докажите, что функция F является первообразной для функции f на R, если:**

$F(x) = -\cos\dfrac{x}{2} - x^3 + 4,$
$f(x) = \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{x}{2} - 3x^2.$

2 **Найдите общий вид первообразных для функции:**

а) $f(x) = 4x^3 + \cos x;$

б) $f(x) = \dfrac{4}{x^5} - 3.$

3 **Для функции f найдите первообразную F, принимающую заданное значение в указанной точке, если:**

а) $f(x) = (x+4)^2,\ F(-4) = 3;$

б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}},\ F(4) = 4.$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Определите, является ли функция F первообразной для функции f на R, если:

Б1: $F(x) = 2x^4 + \cos^2 x - 3,$
$f(x) = 8x^3 + \sin 2x - 3x.$

Б2: $F(x) = 3x^5 - \sin^2 x + 2,$
$f(x) = 15x^4 - \sin 2x.$

2

Найдите общий вид первообразных для функций:

Б1:

а) $f(x) = \dfrac{4}{x^5} - (1-2x)^3;$

б) $f(x) = x + \dfrac{2}{\cos^2 x} - 1.$

Б2:

а) $f(x) = (3x+2)^4 - \dfrac{1}{x^6};$

б) $f(x) = 2x - \dfrac{3}{\sin^2 x} + 6.$

3

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A, если:

Б1:

а) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+2}} + 3x^2,$ $A(-1; 0);$

б) $f(x) = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x - 2\cos\dfrac{x}{2},$ $A(2\pi; 2\pi).$

Б2:

а) $f(x) = 4x^3 - \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}},$ $A(2; 0);$

б) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x + \dfrac{1}{3}\sin 3x,$ $A\left(\dfrac{\pi}{6}; \dfrac{\pi}{6}\right).$

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите функцию f, для которой функция F является одной из первообразных на R, если:

$F(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) -$
$- \operatorname{arcctg} x + 2x.$

$F(x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) +$
$+ \operatorname{arctg} x - 3x^2.$

❷

Найдите неопределенный интеграл:

а) $\int\left(\frac{8}{\sin^2 x} + 6\cos^2\frac{x}{6}\right)dx;$

б) $\int\left(3 - \frac{2}{(2x+5)^2}\right)dx.$

а) $\int\left(\frac{8}{\cos^2 x} - 8\sin^2 2x\right)dx;$

б) $\int\left(\frac{6}{(3x-1)^3} - 5\right)dx.$

❸

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A, если:

а) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{5-2x}} + 4x,\ A(2;6);$

б) $f(x) = \sin x \sin 5x,$
$A\left(\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$

а) $f(x) = 6x^2 - \frac{1}{6\sqrt{2 - \frac{x}{3}}},$
$A(3;55)$

б) $f(x) = \cos x \cos 5x,$
$A\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{1}{24}\right).$

С-45. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ С ПОМОЩЬЮ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Вариант А1

Вариант А2

❶

Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_0^3 (x^2 + 4x - 1)dx$;

б) $\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \left(3 - \frac{1}{x^2}\right)dx$;

в) $\int\limits_0^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x+1}} + 3x^2\right)dx$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}\,dx$.

а) $\int\limits_0^2 \left(3x^2 - 2x + 4\right)dx$;

б) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{2}{x^3} + 8\right)dx$;

в) $\int\limits_3^6 \left(4x - \frac{1}{2\sqrt{x-2}}\right)dx$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} 3\sin 3x dx$.

2

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 1,\ y = 3$.

$y = 5 - x^2,\ y = 1$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_1^2 \left(4x + 3 - \frac{4}{x^2}\right)dx$;

б) $\int\limits_1^4 \left(\frac{\sqrt{x}}{x} + 8(2x-5)^3\right)dx$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x - 1}$;

г) $\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos\frac{x}{8} - \sin\frac{x}{8}\right)^2 dx$.

а) $\int\limits_1^2 \left(\frac{6}{x^3} + 9x^2 - 5\right)dx$;

б) $\int\limits_4^{16} \left(\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{x^2} + \left(\frac{x}{4} - 3\right)^3\right)dx$;

в) $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^0 \frac{dx}{1 - \sin^2 x}$;

г) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 2x)^2 dx$.

2

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 - 4x + 4,\ y = 4 - x.$

$y = x^2 + 4x + 4,\ y = x + 4.$

Вариант В1

Вариант В2

❶

Вычислите интеграл:

Вариант В1:

а) $\int_1^3 \frac{3x^4 - 2x^2 + 6}{x^2}\,dx;$

б) $\int_1^5 \left(\frac{1}{\sqrt{11 - 2x}} + 1\right)dx;$

в) $\int_0^{2\pi} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{8}\right)dx;$

г) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{ctg}^2\, x dx.$

Вариант В2:

а) $\int_1^2 \frac{2x^5 - x^3 - 8}{x^3}\,dx;$

б) $\int_1^6 \left(\frac{3}{2\sqrt{3x - 2}} - 2\right)dx;$

в) $\int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{x}{4}\right)dx;$

г) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}^2\, x dx.$

❷

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 4x - x^2,\ y = x,\ y = 0.$

$y = x^2 + 4x,\ y = x,\ y = 0.$

С-46. ПРИМЕНЕНИЕ ПЕРВООБРАЗНОЙ И ИНТЕГРАЛА

Вариант А1

Вариант А2

❶

Точка движется прямолинейно со скоростью

$v(t) = 6t^2 - 4t - 1.$

$v(t) = 4t^3 + 2t - 3.$

Найдите закон движения точки, если

в момент времени $t = 1$ с координата точки была равна 4 м.

в момент времени $t = 2$ с координата точки была равна 10 м.

❷

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$, $y = 0$.

$y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$.

❸

Найдите работу, которую необходимо затратить

на растяжение пружины на 2 см, если сила в 2 Н растягивает ее на 4 см.

на растяжение пружины на 5 см, если сила в 4 Н растягивает ее на 10 см.

❹

Докажите с помощью определенного интеграла

формулу объема цилиндра $V = \pi R^2 H$, где R – радиус цилиндра, H – его высота.

формулу объема равностороннего цилиндра $V = 2\pi R^3$, где R – радиус цилиндра.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Точка движется прямолинейно с ускорением

$a(t) = \cos\frac{t}{2}$.

$a(t) = -\sin\frac{t}{3}$.

Найдите закон движения точки, если

в момент времени $t = \frac{2\pi}{3}$ с ее скорость равна $\sqrt{3}$ м/с, а координата равна 2 м.

в момент времени $t = \frac{\pi}{2}$ с ее скорость равна $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ м/с, а координата равна 1,5 м.

❷

Найдите объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{x}$, $y = 0,5x$.

$y = \sqrt{-x}$, $y = x^2$.

❸

Линейная плотность неоднородного стержня изменяется по закону

$\rho(l) = 8l + 1$

$\rho(l) = 32l + 2$

(плотность измеряется в кг/м).

Найдите массу стержня, если его длина

равна 50 см.

равна 25 см.

❹

Выведите с помощью определенного интеграла

формулу объема конуса с радиусом R и высотой H.

формулу объема усеченного конуса с радиусами R и r и высотой H.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Тело массой m движется прямолинейно под действием силы $F(t)$ (F – в ньютонах). Найдите закон его движения, если

$m = 2$ кг, $F(t) = 12t - 8$, и в момент времени $t = 3$ с скорость тела равна 10 м/с, а координата 21 м.

$m = 3$ кг, $F(t) = 36 - 18t$, и в момент времени $t = 2$ с скорость тела равна 14 м/с, а координата 20 м.

❷

Найдите объем тела, ограниченного поверхностями:

$x^2 + y^2 = 3z^2 + 1$, $z = 1$, $z = -1$.

$x^2 + y^2 = 1 + 6z^2$, $z = 0$, $z = 1$.

❸

Найдите работу, которую необходимо затратить на выкачивание воды из резервуара, если

резервуар имеет форму цилиндра радиуса 1 м и глубину 4 м.

резервуар имеет глубину 2 м, а его поперечное сечение — квадрат со стороной 1 м.

❹

Выведите с помощью определенного интеграла

формулу объема пирамиды.

формулу объема усеченной пирамиды.

С-47*. ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 | **Вариант 2**

❶

Найдите неопределенный интеграл, используя в решении указанный способ:

— преобразование подынтегрального выражения:

а) $\int \frac{x^5 + x^3 - 2}{x^2 + 1} dx;$ а) $\int \frac{x^2 - 1}{1 + x^2} dx;$

б) $\int \frac{dx}{1 - \cos x};$ б) $\int \frac{dx}{1 + \cos x};$

в) $\int \sin^4 \frac{x}{8} dx;$ в) $\int \cos^4 2x dx;$

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}};$ г) $\int \frac{dx}{-\sqrt{-2x - x^2}};$

д) $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10};$ д) $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5};$

— замена переменной:

е) $\int (x^3 - 1)^4 x^2 dx;$ е) $\int \frac{x dx}{(x^2 + 1)^3};$

ж) $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}};$ ж) $\int \frac{dx}{4x^2 + 25};$

з) $\int \frac{\operatorname{tg} x}{\cos x} dx;$ з) $\int \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx;$

и) $\int \cos^3 x dx;$ и) $\int \sin^3 x dx;$

к) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x - 1}};$ к) $\int x\sqrt{x - 4} dx;$

— интегрирование по частям:

л) $\int x \cos 2x dx;$ л) $\int x \sin \frac{x}{3} dx;$

м) $\int \frac{x dx}{\sqrt{9 + 16x}};$ м) $\int (2x + 1)^4 x dx;$

н) $\int \arcsin x dx.$ н) $\int \arccos x dx.$

2

Используя геометрические или аналитические рассуждения, вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{-3}^{0} \sqrt{9 - x^2}\,dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{1} (|x + 1| + |x|)\,dx$;

в) $\int\limits_{-2}^{2} x^4 \sin^5 x\,dx$.

а) $\int\limits_{-6}^{6} -\sqrt{36 - x^2}\,dx$;

б) $\int\limits_{-1}^{2} (|x| + |x - 1|)\,dx$;

в) $\int\limits_{-1}^{1} x\sqrt{4 - x^4}\,dx$.

3

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = 4 - x^2,\ y = 3x,\ y = -3x$ $(y > 0)$;

б) $y = \sin x,\ y = \cos x,$ $0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}$;

в) $y = |x^2 - 2x|,\ y = 11 - |x - 1|$;

г) $y = \dfrac{8}{x^2},\ y = x,\ y = 4,$ $x = 0$.

а) $y = 2x - x^2,\ y = -x,$ $y = x - 2$ $(y > 0)$;

б) $y = \sin x,\ y = -\sin x,$ $0 \le x \le \dfrac{3\pi}{2}$;

в) $y = \dfrac{1}{4}|x^2 - 4|,\ y = 7 - |x|$;

г) $y = -\dfrac{4}{x^2},\ y = -4,\ y = -\dfrac{1}{2}x,$ $x = 0$.

4

Найдите все значения a, при которых выполняется условие:

а) $\int\limits_{0}^{a} (2x - 5)\,dx \le 6$;

б) $\int\limits_{a}^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{ctg}^4 x)\,dx = \dfrac{1}{3}$;

а) $\int\limits_{0}^{a} (4 - 2x)\,dx \ge 3$;

б) $\int\limits_{a}^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x)\,dx = \dfrac{1}{3}$;

в) функция $f(a) = \int\limits_a^{2a} (2x+1)dx$ принимает наименьшее значение.

в) функция $f(a) = \int\limits_{\frac{a}{2}}^{a} (1-4x)dx$ принимает наибольшее значение.

К-9. ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Вариант А1

Вариант А2

1

Найдите общий вид первообразных для функции:

A1:

а) $f(x) = x^3 - \dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

б) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} - 3\sin x$.

A2:

а) $f(x) = \dfrac{1}{4\sqrt{x}} - x^2$;

б) $f(x) = 2\cos x - \dfrac{1}{\sin^2 x}$.

2

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через данную точку:

A1:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2,\ A(-1; 0)$;

б) $f(x) = \cos\dfrac{x}{2},\ A\left(\dfrac{\pi}{3}; 1\right)$.

A2:

а) $f(x) = 4 + 2x - 6x^2,\ A(-2; 0)$;

б) $f(x) = \sin 3x,\ A\left(\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$.

3

Вычислите интеграл:

A1:

а) $\int\limits_1^2 (2x - \dfrac{1}{x^2})dx$;

б) $\int\limits_{-2}^0 (0,5x+1)^5 dx$.

A2:

а) $\int\limits_1^2 (3x^2 - \dfrac{2}{x^3})dx$;

б) $\int\limits_{-1}^0 (2x+1)^4 dx$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = x^2 + 2,\ y = 4 - x.$

$y = x^2 + 2,\ y = 4 + x.$

5

Известно, что $\int\limits_a^b f(x)dx = 2$. **Найдите:**

$2\int\limits_a^a f(x)dx + \int\limits_b^a f(x)dx.$

$\int\limits_b^b f(x)dx - 3\int\limits_b^a f(x)dx.$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите общий вид первообразных для функции:

Б1:

а) $f(x) = \frac{1}{3\sin^2 x} + \frac{1}{x^3}$;

б) $f(x) = 1 + \cos\frac{x}{4}$.

Б2:

а) $f(x) = -\frac{1}{x^4} + \frac{1}{5\cos^2 x}$;

б) $f(x) = \sin 5x - x$.

2

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через данную точку:

Б1:

а) $f(x) = 2x + \frac{2}{\sqrt{1-x}}$, $A(-3;1)$;

б) $f(x) = 6\sin 3x$, $A\left(\frac{\pi}{9};0\right)$.

Б2:

а) $f(x) = 3 + \frac{1}{\sqrt{5-x}}$, $A(-4;0)$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}\cos\frac{x}{4}$, $A\left(\frac{2\pi}{3};1\right)$.

3

Вычислите интеграл:

Б1:

а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^3}$;

Б2:

а) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(2-0,5x)^2}$;

б) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (1-2\sin^2 2x)dx.$

б) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \sin 3x \cos 3x dx.$

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y=-x^2-4x,\ y=x+4.$

$y=4x-x^2,\ y=4-x.$

5

Точка движется вдоль прямой со скоростью

$v(t)=2+\dfrac{1}{\sqrt{t+2}}$

$v(t)=4-\dfrac{2}{\sqrt{t-1}}$

(v — в метрах за секунду, t — в секундах).

Найдите путь, пройденный точкой

в промежутке времени $[2;7]$.

в промежутке времени $[2;5]$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите интеграл:

а) $\int (x-1)(x+1)(x+2)dx;$

б) $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x}dx.$

а) $\int (x+1)(x+2)(x-2)dx;$

б) $\int \dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}dx.$

2

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, обладающую указанными свойствами:

а) график первообразной имеет только одну общую точку с прямой y, если:

$f(x)=4x+8,\ y=3;$

$f(x)=3-x,\ y=7;$

б) график первообразной проходит через точки A и B, если:

$f'(x) = \dfrac{16}{x^3}$, $A(1;10)$, $B(4;-2)$.

$f'(x) = \dfrac{54}{x^4}$, $A(-1;4)$, $B(3;4)$.

❸

Вычислите интеграл:

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{9-4x^2+\sqrt{3-2x}}{3-2x}\,dx$;

б) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} - 2\sin 2x\right)dx$.

а) $\displaystyle\int_0^1 \frac{9x^2-1-\sqrt{3x+1}}{3x+1}\,dx$;

б) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2} - 3\sin 3x\right)dx$.

❹

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \dfrac{4}{x^2}$, $y = -3x+7$.

$y = \dfrac{9}{x^2}$, $y = -4x+13$.

❺

Подберите функцию $f(x)$, которая при любом значении a удовлетворяла бы равенству:

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 2a^2 - 3a$.

$\displaystyle\int_0^a f(x)dx = 4a - a^2$.

С-48. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ

Вариант А1

Вариант А2

❶

Найдите производную функции:

а) $f(x) = 4^x + 4x^3$;

б) $f(x) = 2e^x - e^{-2x}$.

а) $f(x) = 3x^2 - 2^x$;

б) $f(x) = e^{2x} - 2e^x$.

❷

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

$f(x) = e^{x^2}$, $x_0 = 0$.

$f(x) = e^{-4x}$, $x_0 = 0$.

❸

Найдите критические точки функции:

$f(x) = x^2 e^x$.

$f(x) = \dfrac{x^2}{e^x}$.

❹

Вычислите интеграл:

а) $\int_0^1 3^x\,dx$;

б) $\int_2^4 0,5e^{\frac{x}{2}}\,dx$.

а) $\int_1^2 2^x\,dx$;

б) $\int_3^6 \frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\,dx$.

❺

Найдите две различные первообразные для функции $g(x)$ и укажите, график какой из них лежит выше, если:

$g(x) = e^{7-3x} - 0,5^{-x}$.

$g(x) = e^{4x-3} + 0,1^{-x}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Найдите производную функции:

а) $f(x) = 3e^x - 3^x$;

б) $f(x) = e^{2\sqrt{x}} + 0,5^{-x}$.

а) $f(x) = 2^x + 2e^x$;

б) $f(x) = e^{x^2-x} - 0,2^{-x}$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0, если:

$f(x) = e^{\cos x}$, $x_0 = 0$.

$f(x) = e^{\sin x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

3

Найдите промежутки монотонности функции:

$f(x) = xe^{1-2x^2}$.

$f(x) = x^2 e^{2x-1}$.

4

Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_0^1 (e^{-x}+1)^2\,dx$;

б) $\int\limits_{-2}^{-1} 10^x 2^{-x}\,dx$.

а) $\int\limits_0^1 (e^{-x}-1)^2\,dx$;

б) $\int\limits_{-3}^{-1} 3^{-x} 6^x\,dx$.

5

Для функции $f(x)$ найдите хотя бы одну первообразную, которая при любых значениях x

положительна, если $f(x) = e^x(xe^{-x} - e^{5-3x})$.

отрицательна, если $f(x) = e^{-x}(e^{4-x} - x^3 e^x)$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите производную функции:

а) $f(x) = \sin e^{\sqrt{x}} - 2^{2x-x^2}$;

б) $f(x) = e^{\operatorname{arctg} x}(1+x^2)$.

а) $f(x) = \cos e^{x^2-x} + 3^{\sqrt{2x+1}}$;

б) $f(x) = e^{\operatorname{tg} x}\cos^2 x$.

2

Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке,

в которой угловой коэффициент равен k, если:

$f(x) = e^{3x-2}$, $k = 3$.

$f(x) = e^{5-2x}$, $k = -2$.

3

Найдите точки экстремума и экстремумы функции:

$f(x) = \dfrac{1}{x^2e^x}$.

$f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x^2}$.

4

Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_{\ln 2}^{\ln 3} e^{-3x}dx$;

б) $\int\limits_0^1 \dfrac{2^x + 3^x}{6^{x+1}}dx$.

а) $\int\limits_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x}dx$;

б) $\int\limits_0^1 \dfrac{2^{x-1} + 5^{x-1}}{10^x}dx$.

5

Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ и определите, при каких значениях C первообразная при любом значении x

отрицательна, если $f(x) = (5^{-x} - 0,1^{-x}) \cdot (5^{-x} + 0,1^{-x})$.

положительна, если $f(x) = (0,5^{-x} - 3^{-x}) \cdot (0,5^{-x} + 3^{-x})$.

С-49. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Вариант А1

1

Найдите производную функции:

а) $f(x) = 2\ln(x+1)$;

Вариант А2

а) $f(x) = 3\ln(x-2)$;

б) $f(x) = \lg x + 1$.

б) $f(x) = 2 - \lg x$.

2

Найдите промежутки возрастания и убывания функции:

$f(x) = \ln(x^2 + 4)$.

$f(x) = \ln(1 + x^4)$.

3

Найдите общий вид первообразных для функции $f(x)$ на заданном промежутке:

а) $f(x) = \frac{4}{x}$ на $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

б) $f(x) = \frac{4}{2x-1}$ на $[0{,}5; +\infty)$.

а) $f(x) = -\frac{2}{x}$ на $(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$;

б) $f(x) = \frac{3}{5+3x}$ на $\left[-\frac{5}{3}; +\infty\right)$.

4

Найдите площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$y = \frac{6}{x}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$.

$y = \frac{4}{x}$, $y = 0$, $x = e$, $x = e^2$.

5

Определите, при каких значениях x верно равенство:

$(\ln(x^2 - x - 2))' = \frac{2x-1}{x^2 - x - 2}$.

$(\ln(3 - 2x - x^2))' = -\frac{2x+2}{3 - 2x - x^2}$.

Вариант Б1

1

Найдите производную функции:

а) $f(x) = -3\ln\frac{x+1}{3}$;

б) $f(x) = \log_2 \cos x$.

Вариант Б2

а) $f(x) = 4\ln\frac{x+3}{2}$;

б) $f(x) = \log_3 \sin x$.

2

Найдите точки экстремума функции:

$f(x) = \ln x^3 + \frac{6}{x}$.

$f(x) = \ln\frac{1}{x} - \frac{3}{x}$.

3

Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_e^{e^2} \frac{2}{x}\,dx$;

б) $\int\limits_0^6 \frac{dx}{0,5x+1}$.

а) $\int\limits_1^{e^3} -\frac{3}{x}\,dx$;

б) $\int\limits_1^3 \frac{3}{3x-2}\,dx$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \frac{2}{x}$, $y = 2$, $x = \frac{1}{e^2}$.

$y = \frac{1}{x}$, $y = 1$, $x = \frac{1}{e}$.

5

Определите, совпадает ли область определения функции $g(x)$ с областью определения

ее производной, если

$$g(x) = \ln(9x^2 + 6x + 1).$$

ее первообразной, если

$$g(x) = \frac{1}{8-x} + \frac{1}{\sqrt{4-0,5x}}.$$

Вариант В1

Вариант В2

1

Найдите производную функции:

а) $f(x) = \lg\frac{x}{x+2}$;

б) $f(x) = x^{\ln x}$.

а) $f(x) = \ln\frac{3x^2+2}{x^2+1}$;

б) $f(x) = \log_x e^x$.

2

Исследуйте функцию на монотонность и экстремумы:

$f(x) = \dfrac{x^2}{\ln x}$.

$f(x) = \dfrac{x}{\ln^2 x}$.

3

Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_2^4 \dfrac{dx}{3-2x}$;

б) $\int\limits_0^{\sqrt{e-1}} \dfrac{2x dx}{x^2+1}$.

а) $\int\limits_2^8 \dfrac{dx}{0,5x-5}$;

б) $\int\limits_{\sqrt{3}}^{\sqrt{e+2}} \dfrac{2x dx}{x^2-2}$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \dfrac{5}{x}$, $y = 6 - x$.

$y = \dfrac{3}{x}$, $y = 4 - x$.

5

Найдите все значения a, при которых область определения функции $g(x)$ совпадает с областью определения ее производной, если

$g(x) = \ln(ax^2 - (a+1)x + 2a - 1)$.

$g(x) = \ln(ax^2 + 4x + a + 3)$.

С-50. СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

Вариант А1 **Вариант А2**

1

Найдите значение производной функции $f(x)$ в указанной точке x_0:

а) $f(x) = 3x^{\frac{4}{3}}$, $x_0 = 8$;

б) $f(x) = x^{-\sqrt{3}}$, $x_0 = 1$.

а) $f(x) = 2x^{1,5}$, $x_0 = 9$;

б) $f(x) = x^{\lg 2}$, $x_0 = 1$.

2

Постройте схематически график функции на $(0; \infty)$:

а) $y = x^{\sqrt{5}-2}$;

б) $y = x^{\frac{e}{2}}$.

а) $y = x^{1-\sqrt{2}}$;

б) $y = x^{\frac{\pi}{3}}$.

3

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = x^{-3}$, $[1; 3]$.

$f(x) = \sqrt[3]{x}$, $[1; 8]$.

4

Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_1^8 \frac{2dx}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\limits_4^9 \sqrt{x}dx$.

а) $\int\limits_1^{16} \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}}$; б) $\int\limits_8^{27} \sqrt[3]{x}dx$.

5

Даны положительные числа *a* и *b*. Сравните *f*(*a*) и *f*(*b*), если:

$a > b$, $f(x) = \frac{x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}$.

$a < b$, $f(x) = \frac{x^{\sqrt{3}}}{x}$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = -x^{-\pi}$, $x_0 = 1$;

а) $f(x) = 2x^{\frac{e}{2}}$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = (16x)^{\frac{3}{4}}$, $x_0 = 16$.

б) $f(x) = \left(\dfrac{x}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$, $x_0 = \dfrac{8}{27}$.

❷

Постройте схематически график функции:

а) $y = x^{2\sin\frac{\pi}{4}}$;

б) $y = x^{\ln 0,5}$.

а) $y = x^{\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}}$;

б) $y = x^{\ln 2}$.

❸

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$, $[0; 8]$.

$f(x) = 4x^{\frac{3}{4}} - 3x$, $[0; 16]$.

❹

Вычислите интеграл:

а) $\int\limits_8^{27} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$;

б) $\int\limits_1^5 \sqrt{3x+1}\,dx$.

а) $\int\limits_4^9 \dfrac{dx}{\sqrt{x^3}}$;

б) $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{7x+1}\,dx$.

❺

Дана функция $f(x) = x^{\alpha}$ и положительные числа a и b. Сравните $f(a)$ и $f(b)$, если:

$a > b$, $0 < \alpha < 1$.

$a < b$, $\alpha < 0$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите $f'(x_0)$, если:

а) $f(x) = \sqrt[5]{x\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = (10x)^{\lg 30}$, $x_0 = 10$.

а) $f(x) = \sqrt{x\sqrt[3]{x}}$, $x_0 = 1$;

б) $f(x) = \left(\dfrac{x}{2}\right)^{\log_2 6}$, $x_0 = 2$.

❷

Постройте схематически график функции:

а) $y = x^{\frac{1}{\ln 3}}$; б) $y = \left(\dfrac{x}{3}\right)^{2\sin\frac{\pi}{5}}$.

а) $y = x^{\frac{1}{\lg 5}}$; б) $y = (4x)^{\cos\frac{3\pi}{5}}$.

❸

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = \ln x - \sqrt[3]{x}$, $[1;64]$.

$f(x) = \sqrt[4]{x} - \dfrac{1}{2}\ln x$, $[1;81]$.

❹

Вычислите интеграл:

а) $\displaystyle\int_1^{81} \frac{x^{\frac{3}{4}} - x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

б) $\displaystyle\int_{-1}^{15} \frac{dx}{\sqrt{x+10} - \sqrt{x+1}}$.

а) $\displaystyle\int_1^{64} \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{x}}\,dx$;

б) $\displaystyle\int_3^{19} \frac{dx}{\sqrt{x+6} + \sqrt{x-3}}$.

❺

Дана функция $f(x) = x^{\alpha}$ и положительные числа a и b, причем $a > b$. Сравните α с нулем и единицей, если:

$f(a) > f(b)$, $f'(a) < f'(b)$.

$f(a) > f(b)$, $f'(a) > f'(b)$.

С-51*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА
(домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1 | **Вариант 2**

❶

Исследуйте функцию и постройте ее график:

а) $f(x) = \sqrt[3]{4 - x^2}$;
б) $f(x) = xe^{-x^2}$;
в) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;
г) $f(x) = \ln \sin x$;
д) $f(x) = x^2 \ln^2 x$;
е) $f(x) = \log_2(4x - x^2)$.

а) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$;
б) $f(x) = x^2 e^{-x}$;
в) $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$;
г) $f(x) = \ln \cos x$;
д) $f(x) = x \ln x$;
е) $f(x) = \log_2(4 - x^2)$.

2

Найдите неопределенный интеграл, используя при решении указанный способ:

— замена переменной:

а) $\int xe^{x^2} dx$;
б) $\int \dfrac{dx}{x \ln x}$;
в) $\int \mathrm{ctg}x dx$;
г) $\int \dfrac{x^2 dx}{x^3 + 1}$;
д) $\int \dfrac{\sin 2x dx}{1 + \cos^2 x}$;
е) $\int (x + 1)\sqrt{x^2 + 2x} dx$;

а) $\int \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$;
б) $\int \dfrac{\ln^2 x dx}{x}$;
в) $\int \mathrm{tg} x dx$;
г) $\int \dfrac{2x dx}{x^2 + 3}$;
д) $\int \dfrac{\sin 2x dx}{1 + \sin^2 x}$;
е) $\int (x^2 - 1)\sqrt{x^3 - 3x + 2} dx$;

— интегрирование по частям:

ж) $\int xe^{2x} dx$;
з) $\int \dfrac{\ln x}{x^3} dx$;
и) $\int \sin x \ln \cos x dx$;

ж) $\int xe^{-x} dx$;
з) $\int x^2 \ln x dx$;
и) $\int \cos x \ln \sin x dx$;

— комбинирование предыдущих методов:

к) $\int \arcsin x dx$;

к) $\int \arccos x dx$;

л) $\int \frac{2x^3dx}{\cos^2 x^2}$;

м*) $\int e^x \cos x dx$.

л) $\int \frac{2x^3dx}{\sin^2 x^2}$;

м*) $\int \sin(\ln x)dx$.

❸

Найдите решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным условиям:

а) $y' = 3y,\ y(0) = 2$;

б) $y'' = -4y,\ y(0) = 1,\ y'(0) = -2\sqrt{3}$;

в) $y' = \frac{y}{1-x},\ y(0) = 3$;

г) $y' = 4x^3y,\ y(0) = -2$.

а) $y' = -4y,\ y(0) = 3$;

б) $y'' = -3y,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6$;

в) $y' = \frac{y}{1+x},\ y(0) = 4$;

г) $y' = 3x^2y,\ y(0) = -1$.

К-10. ПРОИЗВОДНАЯ И ПЕРВООБРАЗНАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ, ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ И СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИЙ

Вариант А1

❶

Найдите производную функции:

а) $f(x) = e^x + x^{2,5}$;

б) $f(x) = \ln(x^2+1) - 4^x$.

❷

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = e^{x^2-2x}$, $[0;2]$.

Вариант А2

❶

Найдите производную функции:

а) $f(x) = x^{1,2} - e^x$;

б) $f(x) = \ln(8-3x) + 8^x$.

❷

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = e^{4x-x^2}$, $[0;4]$.

3

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой проходит через точку A:

$f(x) = \dfrac{3}{x+2}$, $A(-3;1)$.

$f(x) = \dfrac{2}{x-3}$, $A(2;3)$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{x}$, $y = 1$, $x = 9$.

$y = \sqrt[3]{x}$, $y = 1$, $x = 8$.

5

Для функции

$g(x) = e^{2x} + \dfrac{1}{2x+1}$

$g(x) = e^{-3x} - \dfrac{1}{3x+1}$

найдите первообразную, которая в точке $x_0 = 0$ принимала бы такое же значение, как и производная $g(x)$ в этой точке.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите производную функции:

Б1:

а) $f(x) = e^{x^2-1} + \log_3 x$;

б) $f(x) = x^{\ln 2e} - \ln\dfrac{1}{x}$.

Б2:

а) $f(x) = \log_2 x - e^{4-x^3}$;

б) $f(x) = x^{\ln 3e} + \ln\sqrt{x}$.

2

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = x^2 e^{2x}$, $[-2; 1]$.

$f(x) = \dfrac{x^2}{e^{2x}}$, $[-1; 2]$.

3

Для функции $f(x)$ найдите первообразную, график которой

пересекает ось Ox в точке с абсциссой 1, если

$$f(x) = 2x - \frac{2}{4x-5}.$$

пересекает ось Oy в точке с ординатой 3, если

$$f(x) = 3x^2 + \frac{6}{3x-1}.$$

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = \sqrt{2x}$, $y = x$.

$y = \sqrt{3x}$, $y = x$.

5

Для функции $g(x)$ найдите первообразную, график которой пересекается с графиком производной этой функции в точке x_0, если:

$g(x) = (3x-2)^{\frac{1}{3}}$, $x_0 = 1$.

$g(x) = (4x+5)^{\frac{1}{4}}$, $x_0 = -1$.

Вариант В1

1

Найдите производную функции:

а) $f(x) = e^{\sin^3 x} - \lg \cos x$;

б) $f(x) = 2^{\sqrt[4]{x}} + \ln^2(x^2 - 1)$.

2

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

Вариант В2

1

Найдите производную функции:

а) $f(x) = e^{-\cos^2 x} + \log_2 \sin x$;

б) $f(x) = 3^{\sqrt[3]{x}} - \ln^3(9 - x^2)$.

2

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на данном промежутке:

$f(x) = \ln\dfrac{2-4x}{2+x^2}$, $[-4;0]$. $f(x) = \ln\dfrac{2x-1}{x^2+2}$, $[1;5]$.

3

Для функции

$f(x) = \dfrac{6}{7-3x}$ $f(x) = \dfrac{2}{0,5x-1}$

найдите первообразную, график которой проходит через точку M, если M — точка пересечения прямых в графическом решении уравнения

$xy - 3x - 2y + 6 = 0$. $xy + 2x - 4y - 8 = 0$.

4

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 2\sqrt{x+1}$, $y = x+1$. $y = 2\sqrt{x-1}$, $y = x-1$.

5

Для функции $g(x)$ найдите первообразную, наименьшее значение которой равно y_0:

$g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} + 6x^5e^{x^6}$, $y_0 = 3$. $g(x) = \dfrac{4x^3}{x^4+1} + 2xe^{x^2}$, $y_0 = 4$.

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

С-52. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Вариант А1	Вариант А2
1	
Даны комплексные числа:	
$z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 4i - 2$.	$z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -6 + 4i$.
Найдите:	
а) сумму $z = z_1 + z_2$ и укажите	
$\mathrm{Re}\, z$;	$\mathrm{Im}\, z$;
б) разность $z = z_1 - z_2$ и укажите комплексное число, которое	
сопряжено с z;	противоположно z;
в) произведение $z = z_1 \cdot z_2$;	
г) частное $z = \dfrac{z_2}{z_1}$.	
2	
По формуле разности квадратов разложите на множители:	
$9x^2 + 25$.	$4x^2 + 1$.
3	
Вычислите:	
а) $(1 + 3i)(1 - 3i) - 2$;	а) $(5 - 2i)(5 + 2i) + 1$;
б) $(2 - i)^2 + i(3i + 4)$;	б) $(3 + i)^2 - 3i(2 + 3i)$;

в) $i^{16} + \frac{2}{i^6}$.

в) $i^{10} - \frac{3}{i^8}$.

4

Решите уравнение:

а) $2z^2 + 8 = 0$;

б) $3iz = 9 - 6i$.

а) $3z^2 + 27 = 0$;

б) $2iz = -10 + 8i$.

5

Найдите действительные x и y из равенства:

$(-2 - i)x + 4iy = 6 + 7i$.

$3x + (5 - 2i)y = 1 + 2i$.

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Даны комплексные числа:

$z_1 = 15 - 5i$, $z_2 = 1 + 2i$.

$z_1 = 5 + 10i$, $z_2 = 2 - i$.

Найдите:

а) сумму $z = z_1 + z_2$ и укажите ее вещественную и мнимую часть;

б) разность $z = z_1 - z_2$ и укажите комплексные числа, сопряженные и противоположные к z;

в) произведение $z = z_1 \cdot z_2$;

г) частное $z = \frac{z_2}{z_1}$.

2

Разложите на множители по формуле разности квадратов ($a > 0$) :

$a + 16$.

$a + 49$.

3

Вычислите:

а) $(2-3i)^2+(1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})$;

б) $\dfrac{8+6i}{(1-i)^2}-2i(2-i)$;

в) $(2i)^6+\dfrac{32}{i^{20}}$.

а) $(3+2i)^2-(1-i\sqrt{3})(1+i\sqrt{3})$;

б) $\dfrac{6-4i}{(1+i)^2}+3i(1-2i)$;

в) $10i^{18}+\left(\dfrac{2}{i}\right)^4$.

4

Решите уравнение:

а) $z^2-2z+5=0$;

б) $(1+i)z=6-2i$.

а) $z^2+4z+13=0$;

б) $(1-i)z=8+6i$.

5

Найдите действительные x и y из равенства:

$(5+3i)x+(2-i)y=-1-5i$.

$(4-3i)x+(1+2i)y=2-7i$.

Вариант В1

Вариант В2

1

Даны комплексные числа $a = z_1 - 2i$ и $b = z_2 - 2i$, где z_1 и z_2 — корни уравнения:

$z^2+4z+5=0$ $(\operatorname{Im} z_1<0,\ \operatorname{Im} z_2>0)$.

$z^2-2z+2=0$ $(\operatorname{Im} z_1<0,\ \operatorname{Im} z_2>0)$.

Найдите:

а) число, сопряженное к сумме $a+b$;

б) число, противоположное разности $a-b$;

в) произведение данных чисел ab;

г) частное $\frac{a}{b}$.

2

Разложите двумя способами на комплексные множители по формуле разности квадратов

число 17.

число 10.

3

Вычислите:

а) $(2+i)^3-(1-i)^2$;

б) $\frac{1-i}{2i^{17}+i^{19}}+\frac{2i}{i-1}$;

в) $1+i^3+i^6+\ldots+i^{90}$.

а) $(2-i)^3+(1+2i)^2$;

б) $\frac{1+i}{i^{21}-2i^{25}}+\frac{2i}{1+i}$;

в) $1+i^5+i^{10}+\ldots+i^{100}$.

4

Решите уравнение:

а) $z^4+13z^2+36=0$;

б) $(1+2i)(1-i)z=20-30i$.

а) $z^4+20z^2+64=0$;

б) $(1-2i)(1+i)z=-40+50i$.

5

Найдите комплексное число z, удовлетворяющее равенству:

$i+\operatorname{Re} z=iz$.

$i\cdot\operatorname{Im} z+1=iz$.

С-53. МОДУЛЬ И АРГУМЕНТ КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ДЕЙСТВИЯ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

Вариант А1

1

Найдите модуль и главный аргумент комплексного числа:

а) $z = 4 + 4i$;

б) $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

2

Выполните действия на комплексной плоскости:

а) $(4 + i) + (-1 + 3i)$;

б) $(1 - 3i) - (-2 - i)$.

3

Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Im} z = -2$;

б) $|z| = 1$.

4

Решите уравнение:

$|z| = z - 3i + 1$.

Вариант А2

1

Найдите модуль и главный аргумент комплексного числа:

а) $z = 3 - 3i$;

б) $z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2

Выполните действия на комплексной плоскости:

а) $(3 - 2i) + (1 + 3i)$;

б) $(5 + i) - (3 - 2i)$.

3

Изобразите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Re} z = 3$;

б) $\operatorname{Arg} z = \frac{\pi}{4}$.

4

Решите уравнение:

$|z| = z + 5i + 1$.

Вариант Б1 / Вариант Б2

1

Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

Б1:

а) $z = (1 - 2i)^2$;

б) $z = \dfrac{2}{1+i}$.

Б2:

а) $z = (2 + i)^2$;

б) $z = \dfrac{2}{1-i}$.

2

Выполните действия на комплексной плоскости:

Б1:

а) $2i + (1 - 4i)$;

б) $2(3 - 2i) - 3(1 + i)$.

Б2:

а) $(-3 + 2i) + 5$;

б) $4(-1 - i) - 2(-3 - 2i)$.

3

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

Б1:

а) $\operatorname{Re} z < -1$;

б) $\dfrac{\pi}{4} \le \operatorname{Arg} z \le \dfrac{\pi}{2}$.

Б2:

а) $\operatorname{Im} z > 2$;

б) $1 \le |z| \le 3$.

4

Решите уравнение:

Б1: $|z|^2 + z^2 = 8 - 4i$.

Б2: $|z|^2 - z^2 = 2 - 4i$.

Вариант В1 / Вариант В2

1

Найдите модуль и аргумент комплексного числа:

В1:

а) $\dfrac{2+2i}{1-i}$;

В2:

а) $\dfrac{3-3i}{1+i}$;

б) $(1 - i)(4 + 3i)(2 + i)(3 + i)$.

б) $(1 + i)(4 - 3i)(2 - i)(3 - i)$.

❷

Выполните действия на комплексной плоскости:

а) $z + 2\bar{z}$, где $z = 1 + i$;

б) $\frac{2i - 3}{i} - 2i$.

а) $2z - \bar{z}$, где $z = 2 - i$;

б) $\frac{-4 + 3i}{i} - 3$.

❸

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Re}(z \cdot \bar{z}) < 4$;

б) $\frac{\pi}{4} \le \operatorname{Arg}(z + 2 - i) \le \frac{3\pi}{4}$.

а) $\operatorname{Im} z^2 > 2$;

б) $1 \le |z - 3 + 3i| \le 3$.

❹

Решите уравнение:

$z|iz| - z - 2i = 0$.

$z|iz| - z + 6i = 0$.

С-54. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА. ФОРМУЛА МУАВРА

Вариант А1

❶

Представьте данное комплексное число

а) в алгебраической форме:

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

Вариант А2

$z = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

б) в тригонометрической форме:

$z = 1 + \sqrt{3}i.$

$z = 2 + 2i.$

❷

Выполните действия:

а) $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)\times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$

б) $\frac{18(\cos 47^\circ + i\sin 47^\circ)}{9(\cos 17^\circ + i\sin 17^\circ)}.$

а) $\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\times \sqrt{12}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right);$

б) $\frac{20(\cos 72^\circ + i\sin 72^\circ)}{5(\cos 12^\circ + i\sin 12^\circ)}.$

❸

Пользуясь формулой Муавра, вычислите:

а) $(-1 + i)^4;$

б) $\sqrt[3]{8(\cos\pi + i\sin\pi)}.$

а) $(-1 + \sqrt{3}i)^3;$

б) $\sqrt{16\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)}.$

❹

Разложите на линейные множители:

$z^4 - 16.$

$81 - z^4.$

❺

Найдите все корни уравнения:

$4z^2 + 8i = 0.$

$3z^3 - 24 = 0.$

Вариант Б1

❶

Представьте данные комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z = -2 - 2i;$

Вариант Б2

а) $z = \sqrt{3} - i;$

б) $z = -\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}$.

б) $z = -\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$.

2

Выполните действия и представьте ответ в тригонометрической форме:

а) $3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\cdot 2i$;

б) $\frac{\sqrt{20}(\cos 18^\circ + i\sin 18^\circ)}{\sqrt{5}(\cos 48^\circ + i\sin 48^\circ)}$.

а) $2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot(-3i)$;

б) $\frac{\sqrt{18}(\cos 4^\circ + i\sin 4^\circ)}{\sqrt{2}(\cos 64^\circ + i\sin 64^\circ)}$.

3

Вычислите, пользуясь формулой Муавра, и представьте ответ в алгебраической форме:

а) $(1 - \sqrt{3}i)^9$;

б) $\sqrt[4]{-4}$.

а) $(-1 + i)^{10}$;

б) $\sqrt[3]{-8}$.

4

Разложите на линейные множители:

$3z^3 - 24$.

$2z^4 + 8$.

5

Решите уравнение:

$z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.

$z^3 - z^2 + z - 1 = 0$.

Вариант В1

1

Представьте данные комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z = \frac{2}{-1+i}$;

Вариант В2

1

Представьте данные комплексные числа в тригонометрической форме:

а) $z = \frac{2}{1-i}$;

б) $z = \cos\frac{\pi}{5} - i\sin\frac{\pi}{5}$.

б) $z = -2\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)$.

❷

Выполните действия и представьте ответ в тригонометрической форме:

а) $4\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)\cdot\frac{1}{2}i$;

а) $6\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{3}i\right)$;

б) $\frac{1+i\sqrt{3}}{2i(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)}$.

б) $\frac{i-1}{2(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)}$.

❸

Вычислите и представьте ответ в алгебраической форме:

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{i-1}\right)^{20}$;

а) $\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{10}$;

б) $\sqrt[3]{8i}$.

б) $\sqrt[3]{-8i}$.

❹

Разложите на линейные множители:

$z^4 + 2z^2 + 4$.

$z^4 - 4z^2 + 16$.

❺

Решите уравнение:

$(z+i)^6 = z^2 + 2iz - 1$.

$(z-2i)^5 = z^2 - 4iz - 4$.

С-55*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ С КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Постройте на комплексной плоскости геометрические образы соотношений:

а) $z\bar{z} + 2z + 2\bar{z} = 0$;

б) $z^2\bar{z}^2 - 5z\bar{z} + 4 \geq 0$;

в) $\mathrm{Im}\,\dfrac{2}{\bar{z} - 1} \geq 1$;

г) $|z - 1|^2 + |z + 1|^2 = 10$.

2

Выведите с помощью формулы Муавра тригонометрические формулы, выражающие:

а) $\cos 3\alpha$ через $\cos\alpha$;

б) $\sin 4\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

3

Для любых комплексных чисел z_1 и z_2 докажите неравенство:

$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1| + |z_2|$.

4

Найдите комплексное число, задающее четвертую вершину параллелограмма, три последовательных вершины которого находятся в точках:

$z_1 = 1 + 2i$,

Вариант 2

1

а) $z\bar{z} + 2iz - 2i\bar{z} = 0$;

б) $z^2\bar{z}^2 - 10z\bar{z} + 9 \leq 0$;

в) $\mathrm{Re}\,\dfrac{-2i}{\bar{z} + 1} \geq 1$;

г) $|z + i|^2 + |z - i|^2 = 16$.

2

а) $\sin 3\alpha$ через $\sin\alpha$;

б) $\cos 4\alpha$ через $\cos\alpha$.

3

$\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 - z_2|$.

4

$z_1 = -1 + 2i$,

$z_2 = -1 - i,$
$z_3 = 2 - 2i.$

$z_2 = -3 - i,$
$z_3 = 1 - 2i.$

5

Решите уравнение:

а) $(z^2 + 3z + 6)^2 + 2z(z^2 + 3z + 6) - 3z^2 = 0;$
б) $z^3 - 4z^2 - 4z - 5 = 0;$
в) $(z^2 + z)^4 = 1.$

а) $(z^2 + 4z + 8)^2 + 3z(z^2 + 4z + 8) + 2z^2 = 0;$
б) $z^3 + 8z^2 + 15z + 18 = 0;$
в) $(z^2 - z)^4 = 16.$

К-11. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Вариант А1

1

Выполните действия:

а) $2i(3 + i) - 6i^5;$
б) $\dfrac{-1 - i}{1 - i}.$

2

Найдите множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$\begin{cases} \operatorname{Re} z > 1, \\ |z| \le 3. \end{cases}$

3

Вычислите:

а) $(2 + 2i)^4;$
б) $\sqrt{-16}.$

Вариант А2

1

а) $3i(i - 4) - 12i^7;$
б) $\dfrac{3 - 3i}{1 + i}.$

2

$\begin{cases} \operatorname{Im} z < 1, \\ |z| \ge 2. \end{cases}$

3

а) $(\sqrt{3} + i)^3;$
б) $\sqrt{-25}.$

4

Решите уравнение:

а) $z + iz = 1 + 7i$;

б) $z^2 + 4z + 13 = 0$.

а) $z - iz = 8 + 2i$;

б) $z^2 - 2z + 10 = 0$.

5

Найдите значение a, при котором числа

$a^2 + 1 + 6i$ и $5 - 3ai$

$a^2 - 3 - 4i$ и $-2 + 4ai$

являются сопряженными.

Вариант Б1

1

Выполните действия:

а) $\dfrac{5-15i}{1+2i} - (1-3i)^2$;

б) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)}{i^{23}} \times$

$\times(2-2i)$.

2

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$\begin{cases} |z+3i| \le 3, \\ \operatorname{Re} z > -\operatorname{Im} z. \end{cases}$

3

Вычислите:

а) $(-1 + i\sqrt{3})^{12}$;

Вариант Б2

1

а) $\dfrac{30+20i}{3-i} + (2i-3)^2$;

б) $\dfrac{2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6} + i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)}{i^{17}} \times$

$\times(\sqrt{3} + 3i)$.

2

$\begin{cases} |z-3| < 3, \\ \operatorname{Re} z \le \operatorname{Im} z. \end{cases}$

3

а) $(\sqrt{3} - i)^6$;

б) $\sqrt[3]{27i}$.

б) $\sqrt{-9i}$.

4

Решите уравнение:

а) $|z+1| + i|z| = 4\sqrt{2} + 5i$;

б) $z^2 + 2iz - 5 = 0$.

а) $|z-i| - i|z| = 3\sqrt{2} - 5i$;

б) $z^2 - 4iz - 20 = 0$.

5

Даны комплексные числа

$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ и $z_2 = -\sqrt{3} + i$.

$z_1 = 1 - i\sqrt{3}$ и $z_2 = \sqrt{3} - i$.

Задайте равенством геометрическое место точек комплексной плоскости, лежащих на биссектрисе угла z_1Oz_2.

Вариант В1

1

Выполните действия:

а) $\dfrac{(2i+3)^2}{i-1} - \dfrac{i^{41}}{i+1}$;

б) $\left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^6 + \left(\dfrac{1}{\cos\dfrac{7\pi}{4} + i\sin\dfrac{3\pi}{4}}\right)^6$.

2

Найдите геометрическое место точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условиям:

$$\begin{cases} |z-1+i| \ge |z+1-i|, \\ \dfrac{\pi}{2} \le \operatorname{Arg}(z-2) \le \dfrac{3\pi}{4}. \end{cases}$$

Вариант В2

1

а) $\dfrac{(2i-3)^2}{i+1} + \dfrac{i^{43}}{i-1}$;

б) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^6 + \left(\dfrac{1}{\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\dfrac{5\pi}{4}}\right)^6$.

2

$$\begin{cases} |z+1+i| \ge |z-1-i|, \\ \dfrac{\pi}{4} \le \operatorname{Arg}(z+2) \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

3

Вычислите:

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^{-6}$;

б) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$.

а) $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{2}\right)^{-12}$;

б) $\sqrt{3+4i}$.

4

Решите уравнение:

а) $|z|^2+\bar{z}-2iz=2i$;

б) $(z+1)^4=(z-i)^4$.

а) $|z|^2-3z+3i=i\bar{z}$;

б) $(z+i)^4=(z-i)^4$.

5

Докажите, что для любых комплексных
чисел z_1 **и** z_2

$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=$
$=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$.

если $|z_1|=|z_2|=d$, то
$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=4d^2$.

Какова геометрическая интерпретация этого равенства?

КОМБИНАТОРИКА

С-56. МНОЖЕСТВА. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Вариант А1 | **Вариант А2**

❶

Пусть M — множество учебников математики, F — множество учебников физики, K — множество книг школьной библиотеки. Запишите с помощью знаков операций над множествами:

Вариант А1

а) множество учебников физики, имеющихся в школьной библиотеке;
б) множество учебников физики и математики;
в) множество книг, имеющихся в школьной библиотеке, кроме учебников математики.

Вариант А2

а) множество учебников математики, имеющихся в школьной библиотеке;
б) множество учебников физики и книг школьной библиотеки;
в) множество книг, имеющихся в школьной библиотеке, кроме учебников физики.

❷

Пусть A, B и C — множества корней уравнений

Вариант А1: $x^2 = 4$, $(x+1)(x-2) = 0$ и $|x| = 1$

Вариант А2: $|x| = 9$, $(x-3)(x+4) = 0$ и $x^2 = 16$

соответственно.

Перечислите элементы множеств:

а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$;
г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

Назовите любое множество D из одного элемента такое, что $D \subset B$.

❸

Каждый из 36 учеников класса изучает хотя бы один иностранный язык (английский или немецкий). Известно, что английский язык изучают 24 ученика, немецкий — 18 учеников. Сколько учеников изучают и немецкий, и английский языки?

❸

Во всех домах деревни Уткино крестьяне держат скот (коров или свиней). Известно, что в 43 домах держат коров, в 39 домах — свиней, а в 12 домах — и коров, и свиней. Сколько всего домов в деревне Уткино?

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Пусть U — множество ученых, F — множество физиков, M — множество математиков, L — множество лауреатов Государственной премии. Запишите с помощью знаков операций над множествами:

а) множество ученых и лауреатов Государственной премии;

б) множество ученых-лауреатов Государственной премии;

в) множество лауреатов Государственной премии, не работающих в области физики и математики.

а) множество физиков и математиков;

б) множество людей, изучающих и физику, и математику;

в) множество ученых, не работающих в области физики и математики.

❷

Пусть множества A, B и C — числовые промежутки, причем

$A = [-5;1]$, $B = [0;8]$, $C = [2;10]$.

$A = (-8;-2)$, $B = (-3;4)$, $C = (0;5)$.

Найдите:

а) $A \cup B$; б) $B \cap C$; в) $A \cap C$;
г) $C \setminus B$; д) $B \setminus C$; е) $A \cup B \cup C$.

Назовите любое множество D такое, что $D \subset C$.

❸

Из 40 участников конференции 6 не знают ни русского, ни немецкого языка, 19 знают русский язык, 5 знают оба языка. Сколько человек знают немецкий язык?

❸

Из 46 студентов 11 не занимаются ни баскетболом, ни футболом, 22 занимаются футболом, 8 — и футболом, и баскетболом. Сколько студентов занимаются баскетболом?

Вариант В1

Вариант В2

❶

Пусть A — множество четных чисел,
B — множество нечетных чисел,
C — множество чисел, кратных 3,
D — множество чисел, кратных 5.
Запишите с помощью знаков операций над множествами:

В1:

а) множество чисел, кратных 2 или 3;
б) множество чисел, кратных 10;
в) множество нечетных чисел, не кратных 15.

В2:

а) множество чисел, кратных 2 или 5;
б) множество чисел, кратных 6;
в) множество четных чисел, не кратных 15.

❷

Пусть A, B, C и D — множества углов α, для которых выполняются условия:

$A : \sin\alpha \geq \frac{1}{2}$, $B : \cos\alpha \geq \frac{1}{2}$,
$C : \mathrm{tg}\alpha \geq 0$, $D : \mathrm{ctg}\alpha = -1$.

$A : \sin\alpha \leq -\frac{1}{2}$, $B : \cos\alpha \leq -\frac{1}{2}$,
$C : \mathrm{ctg}\alpha \leq 0$, $D : \mathrm{tg}\alpha = 1$.

Отметьте часть дуги единичной окружности, соответствующую множеству:

а) $A \cap B$; б) $B \cup C$; в) $A \setminus D$;
г) $(A \cup B) \setminus C$; д) $(A \cup B) \cap C$; е) $C \setminus (A \cup B)$.

Запишите символами, подмножеством каких из данных множеств является множество *D*.

❸

Из 44 членов литературной студии 25 человек пишут стихи, 28 — прозу и 26 — эссе, причем 15 человек пишут стихи и эссе, 13 — прозу и эссе, а 5 человек — и стихи, и прозу, и эссе. Сколько человек пишут стихи и прозу?

❸

Из 120 участников экологической конференции 60 занимаются биологией, 48 — географией, 32 — химией, причем 21 человек занимаются биологией и географией, 19 — географией и химией, 15 — биологией и химией, а 10 — всеми тремя науками. Сколько участников не занимаются ни одной из этих наук?

С-57. ОСНОВНЫЕ ФОРМУЛЫ КОМБИНАТОРИКИ. ПРОСТЕЙШИЕ КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ

Вариант А1

Вариант А2

❶

Вычислите:

а) $\frac{P_4}{P_8} \cdot A_8^4$;

б) $C_8^6 \cdot P_2$.

а) $\frac{P_5}{P_9} \cdot A_9^5$;

б) $C_{10}^7 \cdot P_3$.

❷

Сколькими способами можно составить расписание одного учебного дня из 6 различных уроков?

❷

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 (цифры в одном числе не должны повторяться) ?

❸

Сколькими способами из 7 членов президиума собрания можно выбрать председателя, его заместителя и секретаря?

❸

Сколькими способами из 9 учебных предметов можно составить расписание учебного дня из 6 различных уроков?

❹

Сколькими способами из 10 игроков волейбольной команды можно выбрать стартовую шестерку?

❹

Сколькими способами из 25 учеников класса можно выбрать четырех для участия в праздничном концерте?

❺

Решите уравнение:

$A_{x+1}^2 = 20.$

$C_x^{x-1} \cdot (x-1) = 30.$

Вариант Б1

❶

Вычислите:

а) $\frac{P_{20}}{A_{20}^{15}} - \frac{A_{20}^5}{C_{20}^5}$;

б) $C_5^3 C_4^2 + C_4^2 C_3^1$.

Вариант Б2

а) $\frac{P_{14}}{A_{14}^{10}} - \frac{A_{14}^4}{C_{14}^4}$;

б) $C_6^4 C_5^3 - C_5^3 C_4^2$.

2

Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 6, 7, 8, 9, 0 (цифры в одном числе не должны повторяться) ?

2

Сколькими способами можно расставить на книжной полке тома 4-томника Эдгара По так, чтобы четвертый том не стоял крайним слева?

3

Сколько различных правильных дробей можно составить, используя в числителе и знаменателе числа 2, 3, 5, 7, 11, если в записи каждой дроби использовать 2 числа?

3

Сколько различных трехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, если цифры в одном числе не повторяются?

4

Сколько диагоналей имеет выпуклый семиугольник?

4

Сколько существует различных треугольников с вершинами в 7 данных точках, если известно, что 3 из них лежат на одной прямой?

5

Решите уравнение:

$A_x^5 = 336C_{x-2}^{x-5}$.

$12C_{x+3}^{x-1} = 55A_{x+1}^2$.

Вариант В1

1

Вычислите:

а) $\dfrac{A_{12}^4 - A_{11}^4}{C_{11}^3}$;

б) $\dfrac{(k+1)C_{n+1}^{k+1}}{(n+1)C_n^k}$.

Вариант В2

а) $\dfrac{A_{15}^5 - A_{14}^5}{C_{14}^4}$;

б) $\dfrac{C_n^k + C_n^{k+1}}{C_{n+1}^{k+1}}$.

2

Сколькими способами можно рассадить за круглым столом 6 человек, если не существенно, кто на каком стуле сидит, а существенно, кто является соседом одного человека справа и слева?

3

Сколько различных неправильных дробей, не равных единице, можно составить, используя в числителе и знаменателе числа 2, 3, 5, 7, 11, 13?

4

Сколькоразличныхнатуральных делителей имеет число 210?

2

Сколько различных «слов» (буквенных наборов) из 7 букв можно составить путем перестановки букв в слове «барабан»?

3

Из 11 учебных предметов составляют расписание дня из 5 уроков. Сколькими способами это можно сделать при условии, чтобы в расписании была физкультура, но не на первых трех уроках?

4

Сколько различных произведений, кратных 10, можно составить из множителей 2, 3, 5, 7, 11, 13, используя каждый множитель по одному разу?

5

Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству:

$C_x^1 + 6C_x^2 + 6C_x^3 \le 9x^2 - 14x.$

$C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^{x} + C_x^{x-2} \le C_{x+3}^{x+1}.$

С-58. БИНОМ НЬЮТОНА. СВОЙСТВА БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Вариант А1 / Вариант А2

1

По формуле бинома Ньютона раскройте скобки и упростите выражение:

Вариант А1	Вариант А2
а) $(x-2)^4$;	а) $(x+2)^5$;
б) $\left(x^2+\dfrac{1}{x}\right)^5$.	б) $\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right)^4$.

2

Найдите член, не содержащий x, в разложении бинома:

Вариант А1	Вариант А2
$\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^6$.	$\left(3x+\dfrac{1}{x}\right)^4$.

3

Дан бином:

Вариант А1	Вариант А2
$(3a-b)^n$.	$(2a^3+b)^n$.

Найдите n, если сумма всех биномиальных коэффициентов

Вариант А1	Вариант А2
равна 128.	равна 256.

4

С помощью формулы бинома Ньютона вычислите:

Вариант А1	Вариант А2
99^3.	101^3.

Вариант Б1 / Вариант Б2

1

Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $(x+\sqrt{2})^6$;

б) $\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{y}\right)^5$.

а) $(x-\sqrt{3})^5$;

б) $\left(3x+\frac{1}{2y}\right)^6$.

❷

Найдите показатель степени бинома

$\left(\sqrt[7]{x}+\frac{1}{x}\right)^n$, если второй член разложения не зависит от x.

$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}+x\right)^n$, если третий член разложения не зависит от x.

❸

Найдите член разложения бинома

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, содержащий x в первой степени, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 512.

$\left(x\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$, содержащий x в первой степени, если сумма всех биномиальных коэффициентов равна 256.

❹

Докажите тождество
$(k,\ n\in N,\ 1\le k\le n)$:

$n(C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n+1})=C_{2n}^{n+1}$.

$C_{n+1}^{k+1}=C_{n}^{k}+C_{n}^{k+1}$.

Вариант В1

Вариант В2

❶

Раскройте скобки и упростите выражение:

а) $\left(x^2-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^6$;

б) $(2\sqrt{3}+\sqrt{6})^5$.

а) $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}\right)^5$;

б) $(\sqrt{6}-3\sqrt{2})^4$.

2

В разложении бинома

$\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$ коэффициенты третьего и пятого членов относятся как 2 : 7.

$\left(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)^n$ третий биномиальный коэффициент в 4 раза больше второго.

Найдите член разложения, содержащий

x^1.

x^4.

3

Найдите показатель бинома $(a+b)^n$, если

сумма всех его биномиальных коэффициентов на 256 больше суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах.

утроенная сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, на 512 больше суммы биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

4

Найдите количество рациональных членов в разложении бинома:

$(\sqrt[4]{2}+\sqrt[8]{3})^{80}$.

$(\sqrt[5]{3}-\sqrt[10]{5})^{100}$.

С-59. КОМБИНАТОРНЫЕ ЗАДАЧИ. ПРАВИЛО СУММЫ И ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ

Вариант А1

Вариант А2

1

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими спосо-

бами из вазы можно выбрать букет, состоящий из

двух белых роз и одной красной розы.

двух красных и одной белой розы.

❷

Даны цифры 1, 2, 5, 8, 9. Определите, сколько четырехзначных чисел можно составить из них (цифры в одном числе не должны повторяться) при условии, что все составленные числа должны быть

меньше 6000.

больше 4000.

❸

Три стрелка должны поразить 6 мишеней (каждый по две). Сколькими способами они могут разделить мишени между собой?

❸

Три автора должны составить справочник из 9 глав (каждый составляет по 3 главы). Сколькими способами они могут разделить работу?

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из вазы можно выбрать букет из трех цветов, в котором будет

не менее двух белых роз.

не менее двух красных роз.

❷

12 человек разделены на группы

по 4 человека в каждой.

по 3 человека в каждой.

Сколькими способами это можно сделать?

❸

Шестерых новых учеников нужно распределить в три параллельных класса. Сколькими способами это можно сделать?

❸

Семь книг необходимо разместить на четырех книжных полках. Сколькими способами это можно сделать?

Вариант В1

Вариант В2

❶

В вазе стоят 10 белых и 5 красных роз. Определите, сколькими способами из вазы можно выбрать букет из трех цветов, в котором была бы

В1: хотя бы одна белая роза.

В2: хотя бы одна красная роза.

Вариант В1

❷

Из 8 юношей и 6 девушек выбирают три пары для участия в танцевальном конкурсе. Сколькими способами можно сделать такой выбор?

❸

На четырех полках необходимо расставить пять книг. Сколькими способами это можно сделать, если на первой полке должна стоять только одна любая книга?

Вариант В2

❷

Из 6 различных букв и 10 различных цифр составляют 4 кода «буква-цифра». Сколькими способами это можно сделать?

❸

За пять дней садовник должен высадить шесть различных деревьев. Сколькими способами он может распределить работу, если в первый день он должен высадить только одно любое дерево?

С-60*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ПО КОМБИНАТОРИКЕ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

1

Докажите тождество:

а) $C_n^k + 2C_n^{k+1} + C_n^{k+2} = C_{n+2}^{k+2}$;

б) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \ldots + nC_n^n = n \cdot 2^{n+1}$.

2

Подставляя в разложение $(x+a)^n$ подходящие значения a и x, найдите сумму:

$1 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \ldots + 2^nC_n^n$.

3

Найдите коэффициент

при x^8 в разложении выражения $(1+2x^2-3x^4)^{10}$.

4

Найдите рациональные члены в разложении бинома:

$(\sqrt[4]{4} + \sqrt[7]{7})^{15}$.

5

Сколькими способами можно рассадить за круглым

Вариант 2

1

Докажите тождество:

а) $C_n^k + 3C_n^{k+1} + 3C_n^{k+2} + C_n^{k+3} = C_{n+3}^{k+3}$;

б) $C_n^1 - 2C_n^2 + 3C_n^3 - \ldots + (-1)^{n-1}nC_n^n = 0$.

2

Подставляя в разложение $(x+a)^n$ подходящие значения a и x, найдите сумму:

$1 + 10C_n^1 + 100C_n^2 + \ldots + 10^nC_n^n$.

3

Найдите коэффициент

при x^4 в разложении выражения $(1+2x+3x^2)^{10}$.

4

Найдите рациональные члены в разложении бинома:

$(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2})^{24}$.

5

Сколькими способами можно построить в одну шерен столом 8 мужчин и 8 женщин так, чтобы лица одного пола не сидели рядом?

гу игроков двух футбольных команд, чтобы игроки одной команды не стояли рядом?

6

Какое минимальное количество жителей должно быть в населенном пункте, чтобы наверняка утверждать, что по крайней мере двое из них имеют одинаковые инициалы

фамилии и имени?

фамилии, имени и отчества?

К-12. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

Вариант А1

1

Найдите:

а) $A_8^2 - P_4$;

б) третий член разложения бинома $(x+2)^4$.

2

На плоскости даны 8 точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой.

а) Сколько существует отрезков с концами в этих точках?

б) Сколько существует лучей с началом в любой из данных точек, проходящих

Вариант А2

1

а) $A_7^2 + P_5$;

б) четвертый член разложения бинома $(2x+1)^5$.

2

а) Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

б) Сколько существует векторов с началом и концом в любых двух из данных точек?

через любую другую из данных точек?

3

В разложении бинома $\left(x-\frac{1}{x}\right)^n$

второй и третий биномиальные коэффициенты равны.

второй и четвертый биномиальные коэффициенты равны.

Найдите n и запишите формулу этого разложения.

4

Сколькими способами можно осуществить перестановку десяти различных шкафов вдоль двух стен, если вдоль одной стены поместится 6 шкафов, а вдоль другой – 4?

4

Сколькими способами можно организовать размещение тургруппы из 7 человек в два гостиничных номера на три и четыре человека?

5

Решите уравнение:

$A_x^2 - C_x^{x-1} = 24.$

$A_{x+1}^2 + C_x^1 = 24.$

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите:

а) $\frac{A_9^3}{P_4} - C_{21}^1$;

б) средний член разложения бинома $(2x-1)^6$.

а) $\frac{A_8^4}{P_5} - C_{14}^{13}$;

б) средний член разложения бинома $(3x+1)^4$.

2

На окружности выбрано 8 различных точек.

а) Сколько существует вписанных выпуклых четырехугольников с вершинами в данных точках?
б) Сколько существует ненулевых векторов с началом и концом в данных точках?

а) Сколько существует вписанных треугольников с вершинами в данных точках?
б) Сколько существует вписанных углов с вершиной в одной из данных точек и сторонами, проходящими через две другие точки?

3

Найдите сумму биномиальных коэффициентов бинома

$(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x})^n$, если четвертый коэффициент разложения в 5 раз больше второго.

$\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$, если второй коэффициент разложения в 7 раз меньше четвертого.

4

Сколькими способами из колоды в 36 карт можно выбрать 10 карт так, чтобы среди выбранных карт было

ровно два валета?

ровно три туза?

5

Найдите все значения *n*, удовлетворяющие неравенству:

$A_{n-1}^2 - C_n^{n-1} < 23.$

$A_{n+1}^2 + C_n^1 < 24.$

Вариант В1

1

Найдите:

а) $\dfrac{A_n^{n-2}}{P_{n-2}} - C_n^2;$

Вариант В2

а) $\dfrac{A_n^3}{P_3} - C_n^{n-3};$

б) сумму биномиальных коэффициентов и сумму коэффициентов разложения бинома

$(2x-1)^9$.

$(6x-7)^8$.

❷

На одной из двух параллельных прямых выбрано 5 различных точек, а на другой — 4 точки.

а) Сколько существует секущих данных прямых, проходящих через любые две данные точки?

б) Сколько существует треугольников с вершинами в данных точках?

а) Сколько существует отрезков с концами в данных точках, не лежащих ни на одной из данных прямых?

б) Сколько существует выпуклых четырехугольников с вершинами в данных точках?

❸

Найдите наибольший член разложения:

$(1+\sqrt{2})^{50}$.

$(1+\sqrt{3})^{60}$.

❹

В списке выступающих на заседании 6 человек. Сколько существует вариантов регламента заседания, если

выступающий A должен выступить раньше B и C?

выступающий B должен выступить позже A, но раньше C?

❺

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} C_{x-1}^{y} = 10, \\ C_x^{y+1} = \dfrac{5}{2}x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_x^{y} = C_x^{y+2}, \\ C_x^{2} = 153. \end{cases}$$

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

С-61. КЛАССИЧЕСКАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ КОМБИНАТОРИКИ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ВЕРОЯТНОСТИ

Вариант А1 | **Вариант А2**

❶

Из 30-томного собрания сочинений Льва Толстого ученик наугад выбирает один том. Какова вероятность того, что

Вариант А1:

а) в этом томе окажется роман «Анна Каренина», изданный в одном томе?
б) этот том будет иметь четный номер?

Вариант А2:

а) в этом томе окажется роман «Война и мир», изданный в двух томах?
б) этот том будет иметь нечетный номер?

❷

Бросают две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что

Вариант А1: выпадут «орел» и «решка»?

Вариант А2: выпадут два «орла»?

❸

Из букв слова «провал» наугад выбираются 5 букв. Найдите вероятность того, что из выбранных букв можно будет составить

Вариант А1: слово «право».

Вариант А2: слово «повар».

4

Из 28 костей домино наугад выбирают одну. Что вероятнее:

что сумма цифр на ней будет равна 6 или 8?

что сумма цифр на ней будет равна 3 или 4?

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Какова вероятность того, что ваш будущий ребенок:

Б1:

а) родится в апреле?

б) родится 30-го числа?

Б2:

а) родится в январе?

б) родится 31-го числа?

2

Бросают два одинаковых игральных кубика. Какова вероятность того, что сумма выпавших чисел будет

Б1: равна 3?

Б2: равна 11?

3

Из букв слова «апельсин» последовательно выбирают 4 буквы. Найдите вероятность того, что выбранные буквы в порядке их выбора образуют

Б1: слово «лиса».

Б2: слово «плен».

4

Что вероятнее при бросании двух одинаковых игральных кубиков:

Б1: что выпавшая сумма будет равна 6 или что она будет больше 10?

Б2: что выпавшая сумма будет равна 10 или что она будет меньше 4?

Вариант В1

1. **Из 28 костей домино выбирают одну. Какова вероятность того, что:**

а) сумма цифр на ней меньше 3?
б) обе цифры на ней — четные?

2. **В ящике лежит 15 шаров, из которых 5 – черные. Какова вероятность того, что при выборе из ящика трех шаров**

один окажется черным?

3. **Из букв слова «комбинаторика» наугад выбираются 4 буквы. Найдите вероятность того, что**

из выбранных букв можно составить слово «корт».

4. **В колоде 32 карты. Что вероятнее:**

найти среди четырех выбранных карт ровно два туза или все четыре карты черные?

Вариант В2

1. **Из 28 костей домино выбирают одну. Какова вероятность того, что:**

а) сумма цифр на ней больше 9?
б) обе цифры на ней — нечетные?

2. **В ящике лежит 15 шаров, из которых 5 – черные. Какова вероятность того, что при выборе из ящика трех шаров**

два окажутся черными?

3. **Из букв слова «комбинаторика» наугад выбираются 4 буквы. Найдите вероятность того, что**

выбранные буквы в порядке их выбора образуют слово «атом».

4. **В колоде 32 карты. Что вероятнее:**

найти среди трех выбранных карт ровно одну даму или ровно две красные карты?

С-62. ТЕОРЕМЫ СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вариант А1 / Вариант А2

1

Из 30 учеников спортккласса 11 занимается футболом, 6 — волейболом, 8 — бегом, а остальные 5 — прыжками в длину. Какова вероятность того, что один произвольно выбранный ученик класса:

Вариант А1:

а) не занимается прыжками?
б) занимается игровым видом спорта?

Вариант А2:

а) не занимается футболом?
б) занимается легкой атлетикой?

2

Нина и Лора пишут диктант. Вероятность того, что Нина допустит в нем ошибку, составляет 60%, вероятность ошибки Лоры — 40%. Найдите вероятность того, что:

Вариант А1:

а) обе девочки напишут диктант без ошибок;
б) Нина напишет без ошибок, а Лора ошибется.

Вариант А2:

а) обе девочки в диктанте ошибутся;
б) Лора напишет без ошибок, а Нина ошибется.

3

Монету бросают 6 раз подряд. Найдите вероятность того, что

Вариант А1: хотя бы один раз выпадет «решка».

Вариант А2: хотя бы один раз не выпадет «решка».

Вариант Б1

Вариант Б2

1

В беспроигрышной лотерее выпущено 10000 билетов, среди которых 100 выигрышей по 1000 рублей, 200 выигрышей по 500 рублей, 500 выигрышей по 200 рублей и 1000 выигрышей по 100 рублей, а остальные билеты выигрывают по 1 рублю. Какова вероятность того, что при покупке одного билета выигрыш составит:

Вариант Б1:

а) не более 200 рублей?
б) более 200 рублей?

Вариант Б2:

а) не менее 500 рублей?
б) менее 500 рублей?

2

Каждый из трех стрелков стреляет в мишень по одному разу, причем вероятность попадания первого стрелка составляет 90%, второго — 80 %, третьего — 70 %. Найдите вероятность того, что:

Вариант Б1:

а) все три стрелка поразят мишень;
б) двое из трех стрелков промахнутся.

Вариант Б2:

а) все три стрелка промахнутся;
б) двое из трех стрелков поразят мишень.

3

Монету бросают 5 раз подряд. Найдите вероятность того, что

Вариант Б1: «решка» выпадет не более 2 раз.

Вариант Б2: «орел» выпадет не менее 4 раз.

Вариант В1 **Вариант В2**

❶

В ящике лежат 6 белых, 4 черных, 5 красных и 3 синих шарика. Из ящика наугад выбираются 2 шарика. Какова вероятность того, что:

Вариант В1

а) шарики будут оба белыми или оба черными?

б) один из шариков будет синим, а второй — красным?

Вариант В2

а) шарики будут оба красными или оба синими?

б) один из шариков будет белым, а второй — черным?

❷

Три референта стенографируют выступление министра. Известно, что вероятность составления дословной стенограммы у первого референта составляет 75%, у второго — 80%, у третьего — 90%. Кроме того, вероятность грамматической ошибки у каждого из референтов составляет 10%. Найдите вероятность того, что:

Вариант В1

а) ни один из референтов не составит дословной стенограммы;

б) ровно один из референтов сможет дословно записать выступление, но допустит грамматические ошибки.

Вариант В2

а) все три референта составят дословную стенограмму;

б) ровно два референта смогут дословно записать выступление, но допустят грамматические ошибки.

❸

Монету бросают 6 раз подряд. Найдите вероятность того, что

Вариант В1

«решка» будет выпадать чаще, чем «орел».

Вариант В2

«орел» будет выпадать не реже, чем «решка».

С-63. ВЕРОЯТНОСТЬ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ХОТЯ БЫ ОДНОГО ИЗ НЕЗАВИСИМЫХ СОБЫТИЙ. СХЕМА БЕРНУЛЛИ

Вариант А1 / Вариант А2

1

Стрелок стреляет по мишени 4 раза подряд. Известно, что

Вариант А1: вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена хотя бы один раз.

Вариант А2: вероятность промаха при каждом выстреле равна 0,1. Найдите вероятность того, что стрелок хотя бы один раз промахнется.

2

В классе 15 мальчиков и 10 девочек. Известно, что на каждом из 6 различных уроков к доске вызывают одного человека. Найдите вероятность того, что:

Вариант А1:
а) на всех уроках вызовут девочек;
б) в течение дня вызовут 4 мальчиков и двух девочек.

Вариант А2:
а) на всех уроках вызовут мальчиков;
б) в течение дня вызовут 5 девочек и одного мальчика.

3

Что вероятнее при бросании монеты:

Вариант А1: выпадение «решки» четыре раза из пяти или шесть раз из девяти?

Вариант А2: выпадение «орла» четыре раза из семи или два раза из трех?

Вариант Б1

Вариант Б2

❶

Три лучших спортсмена школы принимают участие в общегородском забеге. Известно, что

вероятность стать призером для каждого из учеников составляет $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{4}$ соответственно. Какова вероятность того, что хотя бы один ученик станет призером?

вероятность не занять призовое место для каждого из учеников составляет $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{5}$ соответственно. Какова вероятность того, что хотя бы один ученик не станет призером?

❷

Найдите вероятность того, что при 6 бросаниях игрального кубика:

а) пятерка выпадет 5 раз;
б) цифра меньше трех выпадет 3 раза.

а) тройка выпадет 3 раза;
б) цифра больше четырех выпадет 4 раза.

❸

Что вероятнее при игре с равным по силе соперником (без ничьих) :

выиграть три партии из четырех или шесть партий из восьми?

выиграть две партии из трех или четыре партии из шести?

Вариант В1

Вариант В2

❶

Найдите вероятность того, что наугад взятое двузначное число

будет кратно 2 или 5 или 10.

будет кратно 3 или 10 или 30.

❷

Завод производит изделия, каждое из которых с вероятностью p — бракованное. При осмотре брак обнаруживают с вероятностью q. Для контроля продукции выбирают n изделий. Найдите вероятность того, что при осмотре:

а) брак не обнаружат ни в одном изделии;
б) брак обнаружат не менее, чем в $(n-1)$ изделиях.

а) брак обнаружат во всех изделиях;
б) брак обнаружат не более, чем в одном изделии.

❸

Что вероятнее при случайном выборе костей домино:

что шестерка будет хотя бы раз встречаться на двух костях из четырех или на трех из шести?

что единица будет хотя бы раз встречаться на двух костях из трех или на четырех из шести?

С-64*. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ (домашняя самостоятельная работа)

Вариант 1

Вариант 2

❶

Используя понятия условной и полной вероятности и формулу Байеса, решите задачи:

а) В ящике лежат 12 белых, 8 черных и 10 красных шариков. Какова

вероятность того, что наугад выбранный шарик

будет красным, если известно, что он не черный?

будет черным, если известно, что он не белый?

б) На заводе 50% деталей типа А1 производит рабочий Уткин, 30% — рабочий Чайкин и 20% — рабочий Воронин. Вероятность брака у этих рабочих составляет 5%, 3% и 2% соответственно. Из партии деталей наугад выбирается одна. Найдите вероятность того, что эта деталь:

1) качественная;
2) бракованная и изготовлена Уткиным.

1) бракованная;
2) качественная и изготовлена Чайкиным.

в) В цехе 10 станков марки А, 6 — марки В и 4 – марки С. Вероятность выпуска качественной продукции для каждого типа станков составляет 0,9, 0,8 и 0,7 соответственно.

Какой процент

качественной

бракованной

продукции выпускает цех в целом?

❷

Используя понятие геометрической вероятности, решите задачи:

а) После бури на участке между 40-м и 70-м километрами телефонной линии произошел обрыв провода. Какова вероятность того, что обрыв произошел между

50-м и 55-м километрами?

60-м и 66-м километрами?

б) В круг случайным образом брошено n точек. Найдите вероятность того, что все точки окажутся внутри вписанного в этот круг правильного

шестиугольника.	треугольника.

в) Сумма модулей двух чисел не превосходит $\sqrt{2}$. Какова вероятность того, что сумма их квадратов

больше единицы?	меньше единицы?

г) * Коэффициенты p и q квадратного трехчлена $x^2 + px + q$ произвольным образом выбираются из отрезка $[-1;1]$. Найдите вероятность того, что данный трехчлен

имеет действительные корни.	не имеет действительных корней.

❸

Решите задачу:

а) Стержень длины l разломали на 3 части, выбирая наугад места разлома. Определите вероятность того, что из получившихся частей

можно составить треугольник.	нельзя составить треугольник.

б) Двое друзей договорились о встрече в условленном месте между 12 и 13 часами. Пришедший первым ждет второго в течение a минут ($a < 60$). Какова вероятность того, что

друзья встретятся?	друзья не встретятся?

К-13. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Вариант А1	Вариант А2

1

В игральной колоде 36 карт. Какова вероятность того, что взятая наугад карта окажется:

Вариант А1	Вариант А2
а) валетом; б) бубновой?	а) тузом; б) пиковой?

2

Стрелок попадает в десятку с вероятностью 0,05, в девятку — 0,1, в восьмерку — 0,2, в семерку — 0,4.

Найдите вероятность выбить с одного выстрела:

Вариант А1	Вариант А2
а) больше семи очков; б) не больше восьми очков.	а) больше восьми очков; б) не больше семи очков.

3

В процессе производства заготовка последовательно обрабатывается на двух станках. Первый станок производит 97% качественной продукции, а второй выдает 3% брака. Какова вероятность того, что деталь, полученная из заготовки,

Вариант А1	Вариант А2
будет качественной?	будет бракованной?

4

Монету бросают три раза подряд. Можно ли утверждать

Вариант А1	Вариант А2
с вероятностью 0,9, что «орел» не выпадет все три раза?	с вероятностью 0,8, что «решка» не выпадет все три раза?

5

Вероятность встретить на улице мужчину-блондина составляет 0,4.

Какова вероятность того, что среди четырех прохожих мужчин встретится

три блондина?

один блондин?

Вариант Б1

Вариант Б2

1

Найдите вероятность того, что наугад взятое двузначное число:

Б1:

а) делится на 5;
б) содержит в записи цифру 0.

Б2:

а) делится на 10;
б) содержит в записи цифру 9.

2

При игре в шахматы Остап Бендер жульничает с вероятностью 0,6.

При этом он выигрывает с вероятностью 0,1, играет вничью с вероятностью 0,2, а в остальных случаях проигрывает. Найдите вероятность того, что в одной наугад взятой партии Бендер:

Б1:

а) жульничал и не выиграл;
б) не жульничал и не проиграл.

Б2:

а) не жульничал и не выиграл;
б) жульничал и не проиграл.

3

Три ученика независимо друг от друга решают задачу. Первый ученик ошибается в 10% случаев, второй — в 15% случаев, а третий в 80% слу-

чаев решает задачи правильно. Какова вероятность того, что

хотя бы один ученик при решении задачи ошибется?

хотя бы один ученик решит задачу правильно?

4

Игральный кубик бросают два раза подряд. Можно ли утверждать

с вероятностью 0,95, что выпадет сумма больше трех?

с вероятностью 0,93, что выпадет сумма меньше одиннадцати?

5

Вероятность встретить на улице мужчину-блондина составляет 0,4.

Какова вероятность того, что среди четырех прохожих мужчин встретится

не менее двух блондинов?

не более двух блондинов?

Вариант В1

Вариант В2

1

Даны числа 1, 2, 3, 4, 6, 8. Найдите вероятность того, что:

а) произведение любых двух из них будет нечетным;
б) любые три наугад взятых числа могут быть длинами сторон треугольника.

а) сумма любых двух из них будет нечетной;
б) любые четыре наугад взятых числа могут быть членами пропорции.

2

На класс из 30 учеников распределили туристические путевки:

12 — в Крым, 8 — в Санкт-Петербург, 5 — в Венгрию. Какова вероятность того, что:

а) двое друзей поедут в Санкт-Петербург?

б) трое друзей поедут по одному маршруту?

а) трое друзей поедут в Крым?

б) двое друзей поедут по одному маршруту?

❸

В ящике лежат 10 шариков, среди которых 3 – белые. Из ящика последовательно вынимают и удаляют по одному шарику до тех пор, пока не появится белый шарик. Найдите вероятность появления белого шарика

в третьей попытке.

в четвертой попытке.

❹

Три стрелка стреляют по одной цели по 2 раза каждый. Известно, что вероятность попадания для каждого стрелка равна 0,5 и не зависит от результатов других стрелков и предыдущих выстрелов. Можно ли утверждать

с вероятностью 0,99, что в цель попадет хотя бы один выстрел?

с вероятностью 0,5, что каждый стрелок попадет в цель хотя бы один раз?

❺

Пять шариков случайным образом разбрасываются в 6 лунок. Найдите вероятность того, что

во вторую лунку попадут 2 шарика.

в третью лунку попадут 3 шарика.

ОТВЕТЫ

ОТВЕТЫ К КОНТРОЛЬНЫМ РАБОТАМ

К-1	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
1а)	0	0	2	2	0	0
1б)	1	– 1	1	1	0	0
2	0	0	– 1	– 1	2	– 2
3а)	$-\cos^2\alpha$	$-\sin^2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\cos 2\alpha$	$\sin^2\alpha$	$-\dfrac{1}{\sin 4\alpha}$
3б)	1	$\cos 2\alpha$	$-\sin 4\alpha$	$\sin 4\alpha$	$\dfrac{1}{\sin\alpha}$	$\dfrac{1}{\cos\alpha}$
5	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	131°	140°	– 345°; – 195°	– 30°; – 330°

К-2	А1	А2	Б1
1а)*	$\dfrac{3\pi}{4}+\pi n$	$-\dfrac{\pi}{3}+\pi n$	$4\pi n$
1б)	$\left[\dfrac{\pi}{4}+2\pi n; \dfrac{5\pi}{4}+2\pi n\right]$	$\left[-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n; \dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right]$	$x_{\min}=2\pi+4\pi n$, $y_{\min}=-1$, $x_{\max}=4\pi n$, $y_{\max}=0$
2	Нечетная, $T=\dfrac{\pi}{3}$	Четная, $T=6\pi$	$D(y)$: $x\neq\pi n$, нечетная
3а)	$D(f)=R$, $E(f)=[-5;\ 1]$	$D(f)=R$, $E(f)=[1;\ 2]$	$E(y)=[-4;4]$. $T=\dfrac{2\pi}{3}$
3б)	$x_{\min}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ $y_{\min}=-4$ $x_{\max}=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$ $y_{\max}=4$	$x_{\min}=2\pi n$ $y_{\min}=-2$ $x_{\max}=\pi+2\pi n$ $y_{\max}=2$	$D(y)=\left(-\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}; \dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi n}{2}\right)$; возрастает на каждом промежутке $D(y)$

* Здесь и далее $n\in\mathbf{Z}$, $m\in\mathbf{Z}$, $k\in\mathbf{Z}$, $p\in\mathbf{Z}$.

К-2	А1	А2	Б1
4	$\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right]$	$[2\pi n; \pi+2\pi n]$	$x \neq \pi n$; $(0; 1]$

К-2	Б2	В1	В2
1а)	$-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$y>0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{8}+\pi n; \frac{5\pi}{8}+\pi n\right)$; $y<0$, если $x \in \left(-\frac{3\pi}{8}+\pi n; \frac{\pi}{8}+\pi n\right)$	$y>0$, если $x \in \left(-\frac{5\pi}{3}+4\pi n; \frac{\pi}{3}+4\pi n\right)$; $y<0$, если $x \in \left(\frac{\pi}{3}+4\pi n; \frac{7\pi}{3}+4\pi n\right)$
1б)	$x_{\min}=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $y_{\min}=0$, $x_{\max}=\frac{\pi}{4}+\pi n$, $y_{\max}=4$	$x_{\min}=-\frac{\pi}{8}+\pi n$, $y_{\min}=-0{,}5$, $x_{\max}=\frac{3\pi}{8}+\pi n$, $y_{\max}=0{,}5$	$x_{\min}=\frac{4\pi}{3}+4\pi n$, $y_{\min}=-2$, $x_{\max}=-\frac{2\pi}{3}+4\pi n$, $y_{\max}=2$
2	$D(y)$: $x \neq 2\pi n$, нечетная	Четная, $T=\pi$	Нечетная, $T=2\pi$
3а)	$[-2; 2]$, $T=\pi$	$[-2; 2]$, возрастает на $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right]$, убывает на $\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$	$\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi n; \frac{3\pi}{4}+2\pi n\right]$, убывает на $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi n; \frac{7\pi}{4}+2\pi n\right]$
3б)	$D(y)=$ $=(2\pi n; 2\pi+2\pi n)$; убывает на каждом промежутке $D(y)$	$x=\pi+4\pi n$; нули: $x=-\pi+4\pi n$	$x=\frac{\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}$; нули: $x=\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$
4	$x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$; $(0; 1]$	$y=\begin{cases}2\cos x, \cos x \geq 0,\\ 0, \cos x<0,\end{cases}$ $T=2\pi$	$y=\begin{cases}0, \sin x \geq 0,\\ -2\sin x, \sin x<0,\end{cases}$ $T=2\pi$

К-3	А1	А2	Б1
1а)	$(-1)^n \frac{\pi}{3}+\pi n$	$\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n$	$-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}$
1б)	$\frac{\pi}{3}+\pi n$	$-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\operatorname{arctg} 5+\pi n,\ -\frac{\pi}{4}+\pi k$
1в)	$\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$2\pi n,\ (-1)^k \frac{\pi}{3}+2\pi k$
1г)	πn	$\frac{\pi}{2}+\pi n$	$\frac{\pi}{2}+2\pi n, (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6}+\pi k$
2а)	$\left(\frac{2\pi}{3}+4\pi n;\ \frac{10\pi}{3}+4\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3};\ \frac{4\pi}{9}+\frac{2\pi n}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$
2б)	$\left(-\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi k\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi n}{2}\right]$
3	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi k\right)$	$\left(\pi+2\pi n;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\ \pi k\right), \left(\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+\pi n\right)$

К-3	Б2	В1	В2
1а)	$\frac{\pi}{6}+\pi n$	$(-1)^{k+1} \frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$	$\frac{\pi n}{2}$
1б)	$-\operatorname{arctg} 3+\pi n, \frac{\pi}{4}+\pi k$	$2\operatorname{arctg} 2+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi n$	$-2\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+2\pi k,$ $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$
1в)	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$	$\frac{\pi n}{2},\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi k$	$\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4},\ \pm\frac{\pi}{3}+\pi k$
1г)	$\pi+2\pi n,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$	$\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$	$-\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}$
2а)	$\left(2\pi n;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$	$\left[-\frac{\pi}{6}+\pi n;\ \frac{\pi}{12}+\pi n\right]$	$\left[-\frac{7\pi}{12}+\pi n;\ \frac{\pi}{6}+\pi n\right]$
2б)	$\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\ \pi+2\pi n\right]$	$\left(4\pi n;\ \pi+4\pi n\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}+3\pi n;\ \frac{5\pi}{4}+3\pi n\right)$
3	$\left(\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \frac{\pi}{6}-\pi k\right)$	$\left(\pi+2\pi n;\ (-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k\right)$	$\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi k\right)$

К-4	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
1а)	2	3	1	1	1	–1
1б)	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	3	3	6	3
2а)	±3	±10	1	32	4	5
2б)	4	3	–1	– 1	$\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{5}$
2в)	–1	–2	6	5	1	2
2г)	–1; 0	0; 3	±3; 7	–3; 1; 4	8	1
3	(1; 4), (4; 1)	(9; 1), (–1; –9)	(4; – 3), $\left(\frac{1}{4}; 3\frac{3}{4}\right)$	(4; 0)	(25; 9), $\left(12\frac{1}{4}; 20\frac{1}{4}\right)$	(4; 1)
4	$a \geq 2$	$a \leq -3$	$(-2; 0) \cup (1; 3)$	$(-3; -1) \cup (0; 4)$	$[2; +\infty)$	$(-\infty; -2]$

К-5	А1	А2	Б1
1а)	3	3	$-1; \frac{4}{9}$
1б)	1	1	0
1в)	– 1; 2	– 1; 2	1
2а)	$[-3; 3]$	$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$	$(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$
2б)	$(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$	$\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$	$[-4; 3]$
2в)	$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$	$(-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$	$(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$
3	(1; 2) ;(2; 1)	(1; 3) ; (3; 1)	(1; –1)
4	$3; -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\frac{1}{3}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n$	$\left[\frac{1}{4}; 1\right]; \left[1\frac{1}{2}; 3\right]$; у второй

К-5	Б2	В1	В2
1а)	$-3; \frac{3}{4}$	$1; -\frac{23}{6}$	$1; -\frac{11}{4}$
1б)	0	0,5	0
1в)	1	$\frac{\pi}{2} + \pi n$	πn

К-5	Б2	В1	В2
2а)	$(-1; 2)$	$(-3; 3) \cup (3; +\infty)$	$(-2; 2) \cup (2; +\infty)$
2б)	$(-\infty; -4] \cup [5; +\infty)$	$[-1; 3]$	$(-\infty; -2] \cup [6; +\infty)$
2в)	$[0; 1]$	$(-\infty; -1]$	$[1; +\infty)$
3	$(-1; 2)$	-1	1
4	$\left[\frac{1}{27}; 27\right]; [1; 9]$; у первой	-3 и 5	-2

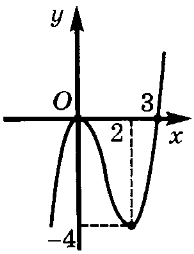
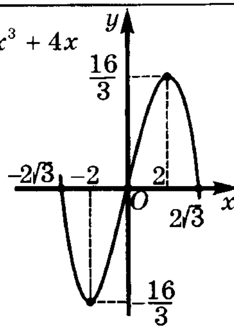
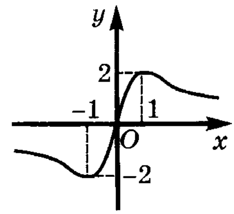
К-6	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
1а)	1	30	3	24	24,5	1,5
1б)	1	3	2	3	2	-2
2а)	$-2; 1$	$-2; 5$	3	2	3	4
2б)	1	-1	$2; \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$	$3; \sqrt[9]{3}$	$\frac{1}{9}; 3$	$\frac{1}{625}; 5$
3а)	$[-1; 2)$	$\left(\frac{1}{3}; 1\right]$	$(2; 3]$	$(-4; 2]$	$(1; 2)$	$(1; 2)$
3б)	$(2; 4)$	$(1; 4)$	$(0; 0{,}04) \cup$ $\cup (5; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup$ $\cup (2; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{4}\right] \cup$ $\cup [16; +\infty)$	$\left(0; \frac{1}{8}\right] \cup$ $\cup [4; +\infty)$
4	$(7; 2)$	$(9; 1)$	$(2; -1)$	$(3; 2)$	$(27; 4)$	$(125; 4)$; $(625; 3)$
5	$\frac{1}{8}; 2$	$\frac{1}{3}; 27$	$3; 27$	$\frac{1}{8}; 2$	4	6

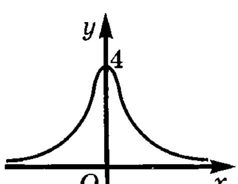
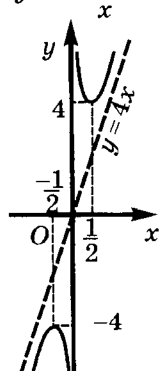
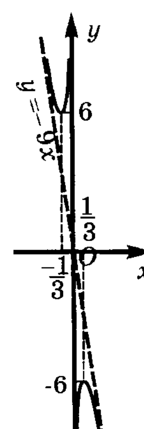
К-7	А1	А2	Б1
1а)	$6x^2 - x$	$20x^4 + x^2$	$x^3 + \frac{16}{x^5} + \frac{4}{\sqrt{x}}$
1б)	$-2\sin x - \frac{3}{\cos^2 x}$	$4\cos x + \frac{5}{\sin^2 x}$	$2x\cos x - (x^2 + 1)\sin x$
1в)	$\frac{5}{(x+2)^2}$	$\frac{5}{(x+3)^2}$	$\frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$

К-7	А1	А2	Б1
2	$y = 3x + 6$	$y = -7x + 12$	$y = -4x + 5$
3	0; 1	1	πn; $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$
4	12 м/с	4 м	17 м/с
5	3	$\frac{1}{2}$	$\frac{\pi}{3}$

К-7	Б2	В1	В2
1а)	$-\frac{9}{x^4} + x^2 - \frac{3}{\sqrt{x}}$	$(x + 1)(3x - 1)$	$(x - 1)(3x + 1)$
1б)	$-2x\sin x -$ $-\left(4 - x^2\right)\cos x$	$-\frac{2\cos x}{\sin^3 x} + 2\sin 2x$	$\frac{1}{3}\cos\frac{x}{3} - \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$
1в)	$\frac{x^2 + 4x - 12}{(x + 2)^2}$	$\frac{x + 1}{\left(x^2 + 1\right)\sqrt{x^2 + 1}}$	$\frac{4x - 8}{\left(x^2 - 8\right)\sqrt{x^2 - 8}}$
2	$y = -6x + 19$	$y = \frac{1}{3}x + \frac{5}{3}$	$y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$
3	$\frac{\pi}{2} + \pi n$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6} + \pi k$	$(-\infty; 4,5]$	$\{0,5\} \cup [5,5; +\infty)$
4	0 м/с^2	16 м/с	0 м/с^2
5	$\frac{\pi}{6}$	(2; 2,5)	(–2; –1,5)

К-8	А1	А2	Б1
1а)	– 1; 0; 1	– 3; 0; 3	Возрастает на $(-\infty; -4]$, $[2; +\infty)$; убывает на $[-4; -1)$, $(-1; 2]$
1б)	– 6; – 2	2; 6	Возрастает на $\left[0; \frac{1}{4}\right]$; убывает на $\left[\frac{1}{4}; +\infty\right)$

К-8	А1	А2	Б1
2	$y = x^3 - 3x^2$ 	$y = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$ 	$y = \frac{4x}{1 + x^2}$ 
3	− 0,5	0,5	12 = 9 + 3

К-8	Б2	В1	В2
1а)	Возрастает на $(-\infty; -2]$, $[4; +\infty)$; убывает на $[-2; 1)$, $(1; 4]$	$x_{\min} = 0,\ x_{\max} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$	$x_{\min} = -1$, $x_{\max} = 1$
1б)	Возрастает на $[4; +\infty)$; убывает на $[0; 4]$	$x_{\max} = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n$, $x_{\min} = \pi k$	$x_{\min} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_{\max} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$
2	$y = \frac{4}{x^2 + 1}$ 	$y = \frac{4x^2 + 1}{x}$ 	$y = -\frac{9x^2 + 1}{x}$ 
3	20 = 15 + 5	3	$-\sqrt{2}$

К-9	А1	А2	Б1
1а)	$\frac{x^4}{4}-4\sqrt{x}+c$	$\frac{\sqrt{x}}{2}-\frac{x^3}{3}+c$	$-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}x-\frac{1}{2x^2}+c$
1б)	$\operatorname{tg}x+3\cos x+c$	$2\sin x+\operatorname{ctg}x+c$	$x+4\sin\frac{x}{4}+c$
2а)	x^3-2x^2+2x+5	$4x+x^2-2x^3-12$	$x^2-4\sqrt{1-x}$
2б)	$2\sin\frac{x}{2}$	$-\frac{1}{3}\cos 3x$	$-2\cos 3x+1$
3а)	$2\frac{1}{2}$	$6\frac{1}{4}$	$\frac{2}{9}$
3б)	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$
4	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$
5	-2	6	12 м

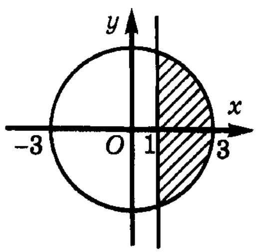
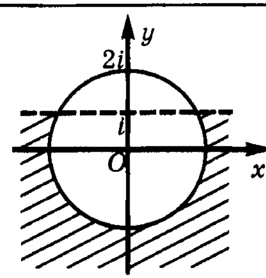
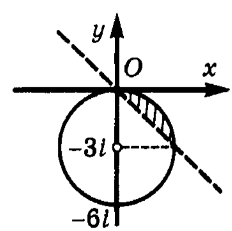
К-9	Б2	В1	В2
1а)	$\frac{1}{3x^3}+\frac{1}{5}\operatorname{tg}x+c$	$\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x+c$	$\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-2x^2-4x+c$
1б)	$-\frac{1}{5}\cos 5x-\frac{x^2}{2}+c$	$-\operatorname{ctg}x-2x+c$	$2x-\operatorname{tg}x+c$
2а)	$3x-2\sqrt{5-x}+18$	$2x^2+8x+11$	$3x-\frac{x^2}{2}+2,5$
2б)	$2\sin\frac{x}{4}$	$\frac{8}{x}-2x+4$	$\frac{9}{x^2}+2x-3$
3а)	1	$3+\sqrt{3}$	$-\frac{1}{6}$
3б)	$\frac{1}{12}$	1	1

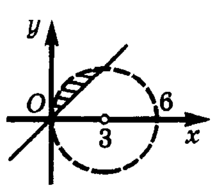
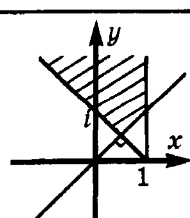
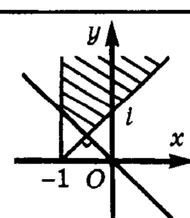
К-9	Б2	В1	В2
4	$4\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	4
5	8 м	$4x-3$	$4-2x$

К-10	А1	А2	Б1
1а)	$e^x + 2{,}5x^{1{,}5}$	$1{,}2x^{0{,}2} - e^x$	$2xe^{x^2-1} + \frac{1}{x\ln 3}$
1б)	$\frac{2x}{x^2+1} - 4^x \ln 4$	$-\frac{3}{8-3x} + 8^x \ln 8$	$x^{\ln 2}(\ln 2+1) + \frac{1}{x}$
2	$1; \frac{1}{e}$	$1;\ e^4$	$e^2;\ 0$
3	$3\ln\|x+2\|+1$	$2\ln\|x-3\|+3$	$x^2 - \frac{1}{2}\ln\|4x-5\|-1$
4	$17\frac{1}{3}$	$11\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$
5	$\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}\ln\|2x+1\| - \frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}e^{-3x} - \frac{1}{3}\ln\|3x+1\| + \frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}(3x-2)^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{4}$

К-10	Б2	В1	В2
1а)	$\frac{1}{x\ln 2} + 3x^2e^{4-x^3}$	$3\sin^2 x\cos xe^{\sin^3 x} + \frac{\operatorname{tg} x}{\ln 10}$	$\sin 2xe^{-\cos^2 x} + \frac{\operatorname{ctg} x}{\ln 2}$
1б)	$x^{\ln 3}(\ln 3+1) + \frac{1}{2x}$	$\frac{2^{\sqrt[4]{x}-2}\ln 2}{\sqrt[4]{x^3}} + \frac{4x\ln(x^2-1)}{x^2-1}$	$\frac{3^{\sqrt[3]{x}-1}\ln 3}{\sqrt[3]{x^2}} + \frac{6x\ln^2(9-x^2)}{9-x^2}$
2	$e^2;\ 0$	$\ln 2;\ 0$	$-\ln 3;\ -\ln 2$
3	$x^3 + 2\ln\|3x-1\|+3$	$-2\ln\|7-3x\|+3$	$4\ln\|0{,}5x-1\|-2$
4	1,5	$2\frac{2}{3}$	$2\frac{2}{3}$

К-10	Б2	В1	В2
5	$\frac{1}{5}(4x+5)^{\frac{5}{4}}+\frac{4}{5}$	$\ln\left(x^2+1\right)+e^{x^6}+2$	$\ln\left(x^4+1\right)+e^{x^2}+3$

К-11	А1	А2	Б1
1а)	-2	-3	$3+i$
1б)	$-i$	$-3i$	-4
2			
3а)	-64	$8i$	2^{12}
3б)	$\pm 4i$	$\pm 5i$	$\pm\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3i}{2}; -3i$
4а)	$4+3i$	$3+5i$	$3\pm 4i$
4б)	$-2\pm 3i$	$1\pm 3i$	$\pm 2-i$
5	$a=2$	$a=1$	$\operatorname{Re} z=-\operatorname{Im} z$

К-11	Б2	В1	В2
1а)	$12-3i$	$-9+3i$	$-4-8i$
1б)	$-4\sqrt{3}$	$2i$	$-2i$
2			
3а)	-64	1	1

К-11	Б2	В1	В2
3б)	$\pm\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{2}}{2}i\right)$	$\sqrt{\frac{3}{2}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$; $-\sqrt{\frac{3}{2}}-\frac{i}{\sqrt{2}}$	$2+i$; $-2-i$
4а)	$\pm 3+4i$	-1; $-2i$	3; i
4б)	$\pm 4+2i$	0; $-1+i$	0; ± 1
5	$\mathrm{Re}\, z=\mathrm{Im}\, z$	Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон	Сумма квадратов диагоналей ромба в 4 раза больше квадрата его стороны

К-12	А1	А2	Б1	Б2	В1	В2
1а)	32	162	0	0	0	0
1б)	$24x^2$	$40x^2$	$-160x^3$	$54x^2$	512; 1	256; 1
2а)	28	56	70	56	20	20
2б)	56	56	56	168	70	60
3	$x^3-3x+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^3}$	$x^4-4x^2+6-\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^4}$	128	256	$2^{14}\sqrt[4]{2}\cdot C_{50}^{29}$	$C_{60}^{38}\cdot 3^{19}$
4	210	35	$C_4^2\cdot C_{32}^8$	$C_4^3\cdot C_{32}^7$	240	120
5	6	4	3, 4, 5, 6	1, 2, 3	(6; 3)	(18; 8)

К-13	А1	А2	Б1	Б2
1а)	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0,2	0,1
1б)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0,1	0,2
2а)	0,35	0,15	0,54	0,36
2б)	0,85	0,65	0,12	0,18
3	$0{,}97^2$	$0{,}03^2$	0,388	0,997

К-13	А1	А2	Б1	Б2
4	Нет	Да	Нет	Нет
5	$C_4^3 \cdot (0,4)^3 \cdot 0,6$	$C_4^1 \cdot 0,4 \cdot (0,6)^3$	$1 - 0,6^4 - 4 \cdot 0,4 \cdot 0,6^3$	$1 - 0,4^4 - 4 \cdot 0,6 \cdot 0,4^3$

К-13	В1	В2
1а)	$\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$
1б)	0,2	$\frac{1}{3}$
2а)	$\frac{28}{435}$	$\frac{11}{203}$
2б)	$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10 + 8 \cdot 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4 \cdot 3}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{113}{2030}$	$\frac{12 \cdot 11 + 8 \cdot 7 + 5 \cdot 4}{30 \cdot 29} = \frac{104}{435}$
3	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{8}$
4	Нет	Нет
5	$\frac{C_5^2 \cdot 5^3}{6^5}$	$\frac{C_5^3 \cdot 5^2}{6^5}$

ОТВЕТЫ К ДОМАШНИМ САМОСТОЯТЕЛЬНЫМ РАБОТАМ

С-6*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1б)	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
2а)	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\alpha$
2б)	1	1
3а)	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
3б)	$(\sin 3;\ -\sin 4)$	$(\cos 7;\ \cos 6)$
4а	$[-2;\ 2]$	$\left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$
4б)	$[-13;\ 13]$	$[-25; 25]$
5а)	$-0{,}8$	$0{,}6$
5б)	$-\frac{1}{3}; 2$	$\pm\frac{4}{3}$

С-12*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$[-1;\ 1]$	$[-1;\ 1]$
1б)	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$	$(-\infty;\ 0) \cup (0;\ \infty)$
1в)	$(-1;\ 1)$	$[-1;\ 0) \cup (0;\ 1]$
1г)	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{R}$
1д)	$[-1;\ 1]$	$\boldsymbol{R}$
2а)	$\frac{120}{169}$	$\frac{5}{\sqrt{26}}$
2б)	5	$\frac{7}{24}$
2в)	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{7}{5\sqrt{2}}$
3а)	$4\pi - 10$	$6 - 2\pi$

С-12*	Вариант 1	Вариант 2
3б)	$-\frac{\pi}{10}$	$\frac{5\pi}{8}$
4а)	$[-2; -1] \cup [0; 1]$	$\left[-2; -\sqrt{2}\right] \cup \left[\sqrt{2}; 2\right]$
4б)	$[1; 2]$	$(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$
5а)	$D(f) = [-1; 0]$; $E(f) = \left[0; \frac{\sqrt{\pi}}{2}\right]$	$D(f) = [-1; 0) \cup (0; 1]$; $E(f) = \left(-\infty; -\frac{2}{\pi}\right) \cup \left(\frac{2}{\pi}; +\infty\right)$
5б)	$D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = [0; \pi)$	$D(f) = [0; +\infty)$, $E(f) = \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$
6а)	-1	$\frac{1}{3}$
6б)	$2\sqrt{3} - 1$	1,5
6в)	-2	1
6г)	$\operatorname{ctg} 2$	$\operatorname{tg} 0{,}5$

С-16*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\pm\arccos\frac{\pi}{6} + 2\pi n$	$(-1)^n \arcsin\frac{\pi}{4} + \pi n$; $(-1)^{k+1} \arcsin\frac{\pi}{4} + \pi k$
1б)	$\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$	Корней нет
1в)	$\frac{\pi n}{10}$	$\frac{\pi n}{4}$
1г)	$\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$	$\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$
2а)	$2\pi n$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$; $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi k$
2б)	$2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $\frac{\pi}{4} + \pi m$	$2\pi n$; $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
2в)	$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$	$-\frac{\pi}{4} + \pi n$

С-16*	Вариант 1	Вариант 2
3а)	$\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi+2\pi k; -\frac{\pi}{2}+2\pi m$	$-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+2\pi k; 2\pi m$
3б)	$\frac{\pi}{4}+\pi n; 2\pi k$	$\frac{\pi}{4}+\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi k$
3в)	$\frac{\pi n}{9}; \frac{\pi}{2}+\pi k$	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{10}+\frac{\pi k}{5}$
5а)	$\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi k}{3}, k\neq 3m$	$\frac{\pi}{9}+\frac{2\pi n}{9}, n\neq 9p+4;\ \frac{2\pi k}{7}, k\neq 7m$
5б)	$\frac{\pi k}{7}, k\neq 7n$	$\frac{\pi}{14}+\frac{\pi n}{7}$
6а)	$\frac{\pi}{4}+\pi n$	$\frac{\pi}{4}+\pi n$
6б)	$\frac{\pi}{3}+2\pi n$	$\pm\frac{\pi}{6}+\pi n$
6в)	$\frac{\pi n}{4}; -\frac{\pi}{3}+2\pi k$	$\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{6}$

С-19*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\left(\frac{\pi n}{3}; \frac{2\pi}{9}+\frac{\pi n}{3}\right)$	$(2\pi+3\pi n; 3\pi+3\pi n)$
1б)	$\left[\frac{\pi}{6}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{3}+\frac{\pi n}{2}\right]$	$\left[-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{2}\right]$
2а)	$\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$	$\left[\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{5\pi}{3}+2\pi n\right]$
2б)	$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \pi-\operatorname{arcctg}2+\pi n\right)$	$\left(-\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi k; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$
2в)	$\left[\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left(-\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$

С-19*	Вариант 1	Вариант 2
2г)	$\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\operatorname{arctg} 3+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$	$\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n; -\operatorname{arctg} 2+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$
3а)	$\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi n; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}+2\pi n; \frac{\pi}{3}+2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}+2\pi n; \frac{2\pi}{3}+2\pi n\right]$	$\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi n; 2\pi n\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right] \cup \left[\pi+2\pi n; \frac{7\pi}{6}+2\pi n\right]$
3б)	$\left(\pi n; \frac{\pi}{6}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$	$\left(\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}+\pi n; \frac{3\pi}{4}+\pi n\right)$
3в)	$\{2\pi n\} \cup \left[\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$	$\left\{-\frac{\pi}{2}+2\pi n\right\} \cup \left(\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right]$

С-23*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$-7; 8$	$0; 5$
1б)	1	4
1в)	$2-2\sqrt{3}; 2$	$1+\sqrt{6}$
1г)	3	1; 2; 10
1д)	8	$-15; 1$
1е)	4	9
1ж)	4	-1
1з)	± 2	± 6
1и)	[3; 8]	Корней нет
1к*)	0,5	1
2а)	$(-\infty; -1] \cup (8; +\infty)$	$(-\infty; -4]$
2б)	[2,5; 3)	[2; 3)
2в)	$[5; 6) \cup (9; 10]$	$\left[\frac{1}{2}; 1\right)$

С-23*	Вариант 1	Вариант 2
2г)	$[-2; -1] \cup \{3\}$	$\{-3\} \cup \left(-\frac{1}{2}; 1\right]$
2д)	$[1; +\infty)$	$\left[-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right]$
3а)	(3; 1)	$(2; 3); \left(\frac{13}{3}; -\frac{5}{3}\right)$
3б)	(10; 6)	(5; 4)
3в)	(1; 81) ; (81; 1)	(64; 1)

С-27*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	0; 1	0; 3
1б)	– 1; – 4	– 2; – 3
1в)	$3; 2\frac{1}{4}$	1,5
1г)	± 1	± 1
1д)	$\frac{\pi n}{2}$	$\pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}$
1е)	$\pm\frac{\pi}{4} + \pi n; \pm \operatorname{arctg} 2 + \pi k$	πn
1ж)	± 2	2
1з)	3	7
1и)	$(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$	$\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$
1к)	2	1
1л)	Корней нет	2
2а)	$\left(-\sqrt{7}; -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}; \sqrt{7}\right)$	$\left[-\frac{1}{5}; 7\right]$
2б)	$(3; +\infty)$	$(2; +\infty)$
2в)	$[-2; 0] \cup [2; +\infty)$	$[-\infty; -9] \cup [0; 9]$
2г)	$(2; +\infty)$	$[0; +\infty)$

*	Вариант 1	Вариант 2
	$(-1;2]\cup[3;+\infty)$	$[-2;-1)\cup[1;+\infty)$

задач данной работы предполагается, что основа-
может принимать неположительные значения

ант 1	Вариант 2
1; 0; 2	– 3; 0; 1; 2
$\pm\sqrt{2}$	$-2;-1\pm\sqrt{10}$
; 4	1; 3
); 5	0; 3
$\frac{1}{2};1\Big)$	$\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$
$-4;1)\cup(3;+\infty)$	$(-4;-2)\cup(1;4)$
$]\cup\left[-\frac{1}{2};0\right]$	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right]\cup\{0\}\cup[1;+\infty)$
$\cup[1;+\infty)$	$(-\infty;2]$
4; 2; 3	5; 6
– 1; 6) ; (3; 2)	(4; 1) ; (5; 2)

ариант 1	Вариант 2
$\pm\sqrt{\log_3\frac{81}{25}}$	$1\pm\sqrt{\log_5 640}$
$\pm\frac{1}{\log_2 2,5}$	$0;\ \frac{1}{\log_2\frac{2}{3}}$
$2;\ -\frac{1}{\lg 5}$	$2;-\log_3 6$
$8;\frac{1}{4}$	$9;\frac{1}{3}$
$0;\frac{1}{10};10^{\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$10;\frac{1}{10};10^{\pm\frac{\sqrt{2}}{3}}$

С-31*	Вариант 1	Вариант 2
2в)	$4^{\pm\sqrt{2}}$	$3;\ 3^9$
2г)	$3;\dfrac{1}{3}$	$6;\dfrac{1}{6}$
3а)	$(3;\ 1)\ ;\ (3;\ -1)$	$(1;\ 10)\ ;\ (-1;\ 10)$
3б)	$(4;9);\left(-2;\dfrac{1}{81}\right)$	$(16;3);\left(\dfrac{1}{64};-2\right)$
3в)	$(8;2);\ \left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{8}\right)$	$(5;25);\left(\dfrac{1}{25};\dfrac{1}{5}\right)$
4а)	2	4
4б)	1	1

С-33*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	21	24
1б)	12	9
1в)	16	8
1г)	0; 1,75	−1; 0,75
1д)	10; 100	$\dfrac{1}{2};8$
1е)	$\dfrac{\pi}{4}+\pi n$	$\dfrac{\pi}{4}+\pi n$
1ж)	$1;\dfrac{1}{\sqrt{2}};4$	$\sqrt{3};3$
1з*)	$\dfrac{1}{4};2$	$\dfrac{1}{81};3$
1и*)	2	16
2а)	$(-4;-3]\cup[8;+\infty)$	$(2;3]\cup[5;+\infty)$
2б)	$\left(\log_2\dfrac{2}{3};0\right)\cup\left[\log_2\dfrac{4}{3};+\infty\right)$	$[1;2)$
2в)	$(0;1)\cup(2;8)$	$(0;0,1)\cup(1;1000)$
2г)	$(3;+\infty)$	$(4;+\infty)$

С-33*	Вариант 1	Вариант 2
2д)	$\left(4-\sqrt{2};3\right)\cup\left(4+\sqrt{2};+\infty\right)$	$(-1,5;-1)\cup(4;+\infty)$
2е)	$(\log_3 10;+\infty)$	$(\log_4 13;2]$
2ж)	$\left(-1;\frac{1}{3}\right]\cup\left[1;2\frac{1}{3}\right)$	$(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$
2з*)	$\left(0;2^{-\sqrt{2\log_2\frac{4+\sqrt{5}}{2}}}\right]\cup\left[2^{\sqrt{2\log_2\frac{4+\sqrt{5}}{2}}};+\infty\right)$	$\left(0;3^{-\sqrt{0,5\log_3\frac{3+\sqrt{3}}{2}}}\right]\cup\left[3^{\sqrt{0,5\log_3\frac{3+\sqrt{2}}{2}}};+\infty\right)$
3а)	(2; 3) ; (3; 2)	(125; 4) ; (4; 125)
3б)	$\left(0,001;\frac{1}{2}\right);\left(1000;-\frac{1}{2}\right)$	(2; 10) ; (– 2; 0,1)
3в)	(3; 3)	$\left(4;\frac{1}{4}\right)$

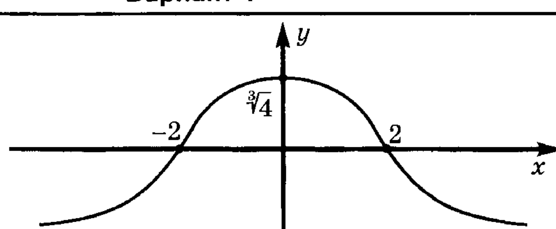
С-40*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	Выпукла вниз на $(-\infty;1)$ и $(3;+\infty)$; выпукла вверх на $(-1;3)$	Выпукла вниз на $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$ и $(1;+\infty)$; выпукла вверх на $\left(\frac{1}{3};1\right)$
1б)	Выпукла вниз на $(-\infty;-6)$ и $(6;+\infty)$; выпукла вверх на $(-6;6)$	Выпукла вниз на $(-\infty;-1)$ и $(1;+\infty)$; выпукла вверх на $(-1;1)$
1в)	Выпукла вниз на $\left(\frac{7\pi}{12}+\pi n;\frac{11\pi}{12}+\pi n\right)$; выпукла вверх на $\left(-\frac{\pi}{12}+\pi n;\frac{7\pi}{12}+\pi n\right)$	Выпукла вниз на $\left(-\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{\pi}{6}+\pi n\right)$; выпукла вверх на $\left(\frac{\pi}{6}+\pi n;\frac{5\pi}{6}+\pi n\right)$
2	3	2
4	3) , 4)	1) , 2)
5а)	$y=x$	$y=2x$
5б)	$y=2$	$y=1$

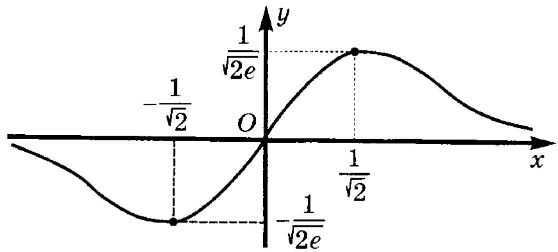
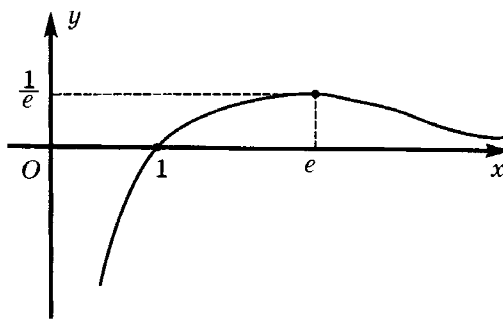
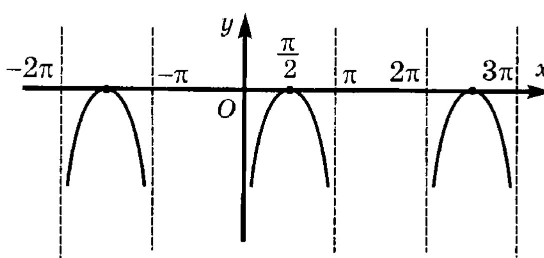
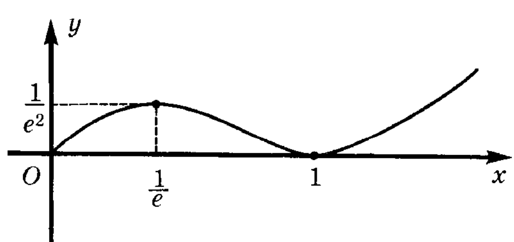
С-40*	Вариант 1	Вариант 2
5в)	$x = -1,\ x = 2;\ y = 0$	$x = -3;\ x = 2;\ y = 0$
5г)	$x = 1$	$x = 1$
5д)	$x = -3;\ x = 3;\ y = x$	$x = -2;\ x = 2;\ y = x$

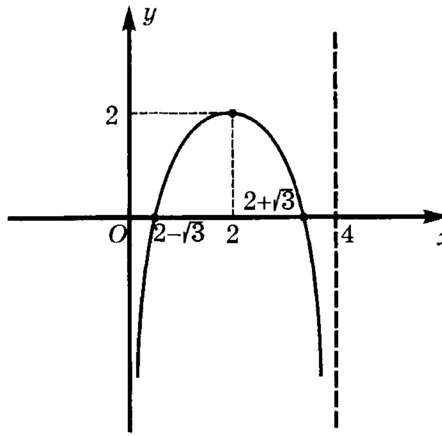
С-43*	Вариант 1	Вариант 2
1	$y = -5x - 6;\ y = -x - 2$	$y = 2x - 5;\ y = 6x - 13$
2	$y = 8x - 20$	$y = 8x + 4$
3	$y = -x - 2{,}25$	$y = -x - 2{,}75$
4	13,5	43,75
5	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{3}$
6	3	3

С-47*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\frac{x^4}{4} - 2\operatorname{arctg} x + c$	$x - 2\operatorname{arctg} x + c$
1б)	$-\operatorname{ctg}\frac{x}{2} + c$	$\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$
1в)	$\frac{3}{8}x - 2\sin\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\sin\frac{x}{2} + c$	$\frac{3}{8}x + \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{64}\sin 8x + c$
1г)	$\arcsin(x - 1) + c$	$\arccos(x + 1) + c$
1д)	$\operatorname{arctg}(x + 3) + c$	$\operatorname{arctg}(x - 2) + c$
1е)	$\frac{1}{15}\left(x^3 - 1\right)^5 + c$	$-\frac{1}{4\left(x^2 + 1\right)^2} + c$
1ж)	$\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{3} + c$	$\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5} + c$
1з)	$\frac{1}{\cos x} + c$	$-\frac{1}{2\sin^2 x} + c$
1и)	$\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$	$\frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + c$

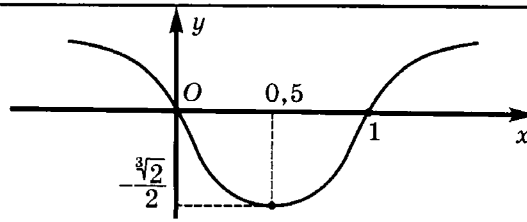
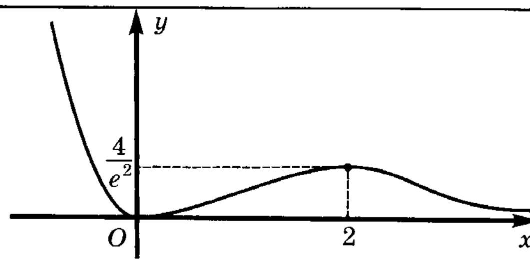
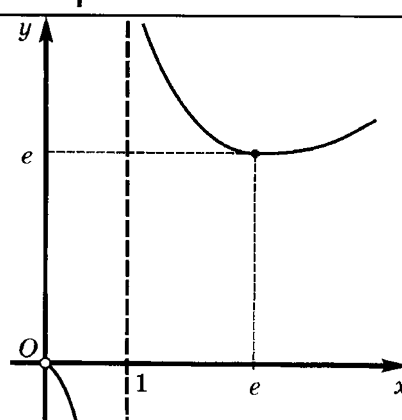
С-47*	Вариант 1	Вариант 2
1к)	$\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+c$	$\frac{2}{5}\sqrt{(x-4)^5}+\frac{8}{3}\sqrt{(x-4)^3}+c$
1л)	$\frac{1}{2}\left(x\sin 2x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)+c$	$9\sin\frac{x}{3}-3x\cos\frac{x}{3}+c$
1м)	$\frac{1}{192}(8x-9)\sqrt{9+16x}+c$	$\frac{1}{120}(2x+1)^5(10x-1)+c$
1н)	$x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+c$	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$
2а)	$\frac{9}{4}\pi$	-18π
2б)	5	5
2в)	0	0
3а)	$4\frac{1}{3}$	$2\frac{1}{3}$
3б)	$2\left(\sqrt{2}-1\right)$	6
3в)	$42\frac{1}{3}$	32
3г)	$8\sqrt{2}-6$	5
4а)	[– 1; 6]	[1; 3]
4б)	$\frac{\pi}{4}$	0
4в)	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

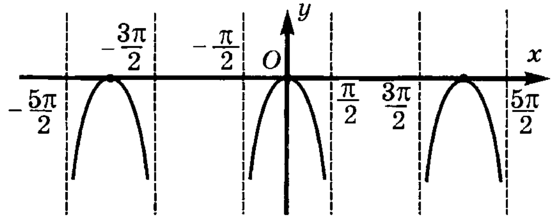
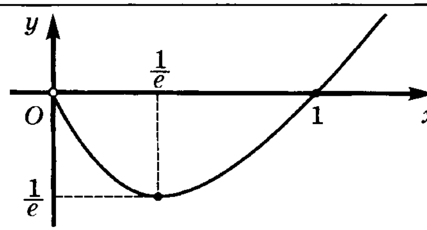
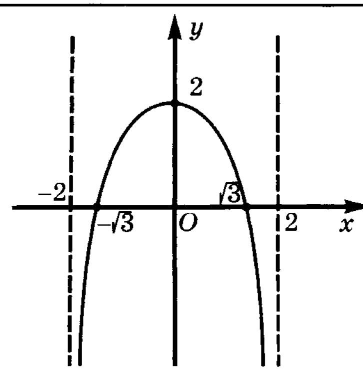
С-51*	Вариант 1	
1а)	$f(x)=\sqrt[3]{4-x^2}$	

С-51*	Вариант 1
1б)	$f(x) = xe^{-x^2}$ 
1в)	$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ 
1г)	$f(x) = \ln \sin x$ 
1д)	$f(x) = x^2 \ln^2 x$ 

С-51*	Вариант 1
1е)	$f(x) = \log_2(4x - x^2)$ 
2а)	$\frac{1}{2}e^{x^2} + c$
2б)	$\ln\lvert\ln x\rvert + c$
2в)	$\ln\lvert\sin x\rvert + c$
2г)	$\frac{1}{3}\ln\lvert x^3 + 1\rvert + c$
2д)	$-\ln\left(1 + \cos^2 x\right) + c$
2е)	$\frac{\left(x^2 + 2x\right)^{\frac{3}{2}}}{3} + c$
2ж)	$\frac{e^{2x}}{4} \cdot \left(2x - 1\right) + c$
2з)	$\frac{-2\ln x - 1}{4x^2} + c$
2и)	$\cos x\left(1 - \ln\cos x\right) + c$
2к)	$x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + c$
2л)	$x^2\operatorname{tg} x^2 + \ln\lvert\cos x^2\rvert + c$

С-51*	Вариант 1
2м*)	$\frac{1}{2}e^{x}(\cos x + \sin x) + c$
3а)	$2e^{3x}$
3б)	$\cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x$
3в)	$\frac{3}{1-x}$
3г)	$-2e^{x^4}$

С-51*	Вариант 2
1а)	$f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x}$ 
1б)	$f(x) = x^2e^{-x}$ 
1в)	$f(x) = \frac{x}{\ln x}$ 

С-51*	Вариант 2
1г)	$f(x) = \ln\cos x$ 
1д)	$f(x) = x\ln x$ 
1е)	$f(x) = \log_2(4 - x^2)$ 
2а)	$-e^{\frac{1}{x}} + c$
2б)	$\frac{1}{3}\ln^3 x + c$
2в)	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$
2г)	$\ln\left(x^2 + 3\right) + c$
2д)	$\ln\left(1 + \sin^2 x\right) + c$
2е)	$\dfrac{2\left(x^2 - 3x + 2\right)^{\frac{3}{2}}}{9} + c$

С-51*	Вариант 2
2ж)	$e^{-x}(x+1)+c$
2з)	$\frac{x^3}{9}(3\ln x-1)+c$
2и)	$\sin x(\ln\sin x-1)+c$
2к)	$x\arccos x-\sqrt{1-x^2}+c$
2л)	$-x^2\operatorname{ctg}x^2+\ln\left\|\sin x^2\right\|+c$
2м*)	$\frac{1}{2}x(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+c$
3а)	$3e^{-4x}$
3б)	$2\cos\sqrt{3}x+2\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x$
3в)	$4x+4$
3г)	$-e^{x^3}$

С-55*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$x^2+y^2+4x=0$ Окружность с центром в точке $(-2;0)$ и $R=2$	$x^2+y^2+4y=0$ Окружность с центром в точке $(0;-2)$ и $R=2$
1б)	$(x^2+y^2-1)\ (x^2+y^2-4)\ \geq 0$ Точки вне кольца, образованного окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=4$	$(x^2+y^2-1)(x^2+y^2-9)\leq 0$ Точки внутри кольца, образованного окружностями $x^2+y^2=1$ и $x^2+y^2=9$
1в)	Точки вне окружности $x^2+(y+1)^2=2$ и сама окружность, кроме точки $(1;0)$	Точки внутри окружности $(x+1)^2+(y-1)^2=1$ и сама окружность, кроме точки $(-1;0)$
1г)	$x^2+y^2=4$ Окружность с центром в т. $(0;0)$ и $R=2$	$x^2+y^2=9$ Окружность с центром в т. $(0;0)$ и $R=3$
4	$z_4=4+i$	$z_4=3+i$
5а)	$-1\pm i\sqrt{5};-3\pm\sqrt{3}$	$-4;-2\ \frac{-5\pm i\sqrt{7}}{2}$
5б)	$5;\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$	$-6;-1\pm i\sqrt{2}$

С-55*	Вариант 1	Вариант 2
5в)	$\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 \pm i\sqrt{5}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{1+4i}}{2}$	$\frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}; 2; -1; \frac{1 \pm \sqrt{1+8i}}{2}; \frac{1 \pm \sqrt{1-8i}}{2}$

С-60*	Вариант 1	Вариант 2
2	3^n	11^n
3	-555	8085
4	$112C_{15}^{8}$	$36 \cdot C_{24}^{10}$
5	$\frac{1}{8}(8!)^2$	$2(11!)^2$
6	30^2+1	30^3+1

С-64*	Вариант 1	Вариант 2
1а)	$\frac{5}{11}$	$\frac{4}{9}$
1б)	1) 0,962 2) 0,025	1) 0,038 2) 0,291
1в)	83%	17%
2а)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$
2б)	$\left(\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\right)^n$	$\left(\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}\right)^n$
2в)	$1-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}$
2г*)	$\frac{1}{12}$	$\frac{11}{12}$
3а)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
3б)	$1-\left(1-\frac{a}{60}\right)^2$	$\left(1-\frac{a}{60}\right)^2$

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Н. Колмогоров и др. Алгебра и начала анализа 10—11. М., 1999
2. Н. Я. Виленкин и др. Алгебра и математический анализ 10, 11. М., 1997
3. Сборник задач по математике для поступающих в вузы. Под ред. М. И. Сканави. Мн, 1990
4. В. В. Вавилов и др. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М., 1988
5. В. В. Вавилов и др. Задачи по математике. Алгебра. М., 1987
6. А. Г. Мерзляк и др. Тригонометрия. М., 1998
7. А. Г. Мерзляк и др. Алгебраический тренажер. М.-Х., 1998
8. А. Г. Мерзляк и др. Учимся решать задачи по началам анализа. К., 1998
9. В. С. Лютикас. Факультативный курс по математике. Теория вероятностей. М., 1990

СОДЕРЖАНИЕ

Алла Петровна Ершова
Вадим Владимирович Голобородько

Самостоятельные и контрольные работы по алгебре и началам анализа для 10–11 классов

Подписано в печать 31.10.2012. Формат 60×88/16.
Усл.-печ. л. 13,69. Тираж 11 000 экз. Заказ № 2019.

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpk.ru, E-mail: marketing@chpk.ru,
факс 8(496) 726-54-10, телефон 8(495) 988-63-87