Б. Г. ЗИВ
В. А. ГОЛЬДИЧ

Дидактические материалы

Алгебра и начала анализа

10-11 классы

Б. Г. Зив

В. А. Гольдич

Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10-11 классов

С.-Петербург

Петроглиф

2013

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72
З 59

Рецензенты:
Заведующий кабинетом математики
Санкт-Петербургского Университета
Педагогического Мастерства **Л.А. Жигулев**;
Методист кабинета математики
Санкт-Петербургского Университета
Педагогического Мастерства **Б.Г. Некрасов**

Рекомендовано кабинетом математики
Санкт-Петербургского
Университета Педагогического Мастерства
в качестве учебного пособия для средней школы

Издание осуществлено при участии
ООО «Виктория плюс»

Зив Б.Г., Гольдич В.А.
З 59 Дидактические материалы по алгебре для 10-11 классов. — СПб. : «Петроглиф», «Виктория плюс», 2013. — 216 с. : ил. — ISBN 978-5-98712-029-3, ISBN 978-5-91673-004-3

Данное пособие содержит самостоятельные и контрольные работы по курсу «Алгебра и начала анализа» для 10-11 классов, составленные в полном соответствии со школьной программой. Пособие может быть использовано как в обычных школах, так и в математических гимназиях и лицеях.

УДК 373.167.1:512
ББК 22.14я72

ISBN 978-5-98712-029-3 («Петроглиф»)
ISBN 978-5-91673-004-3 («Виктория плюс»)

Предисловие

Данная книга рассчитана на всех желающих улучшить свои знания по алгебре и составлена в полном соответствии со школьной программой.

В пособии представлено большое количество самостоятельных работ, проверочных работ на повторение контрольных работ и тестов. Сборник несколько отличается от обычных дидактических материалов тем, что самостоятельные работы в нем приведены в восьми вариантах, четырех уровней сложности.

Чем мы руководствовались? Не секрет, что в последние годы очень существенно возросла сложность вступительных экзаменов в вузы. Одновременно отмечается процесс упрощения содержания школьных учебников математики. Мы полагаем, что в 10-м и 11-м классах необходимо показывать ученикам более содержательные задачи.

Какова же структура наших дидактических материалов?

I уровень сложности (Вариант 1 — Вариант 2) — это минимум того, что должен знать ученик, — база.

II уровень сложности (Вариант 3 — Вариант 4) — «твердая четверка».

III уровень сложности (Вариант 5 — Вариант 6) — «на пятерку».

IV уровень сложности (Вариант 7 — Вариант 8) — для тех, кто всерьез увлечен математикой.

Если подходить к использованию книги формально, то рекомендуется следующее:

I или II уровень — для базовой школы;

II или III уровень — для гимназий;

III или IV уровень — для лицеев или математических школ.

Следует иметь в виду, что все самостоятельные и контрольные работы составлены избыточно. Учителю ни в коем случае не следует считать, что объем работ должен быть именно таким — мы лишь хотели предоставить ему возможность выбора.

Все контрольные составлены в четырех равноценных вариантах.

Вообще, структура книги полностью повторяет "Задачи к урокам геометрии" Б.Г.Зива, а значит, может быть использована как задачник.

Надеемся, что наша книга поможет учителям и учащимся успешно заниматься математикой.

Владимир Гольдич

Рекомендации

Весьма удачным дополнением к дидактическим материалам для 7-11 классов являются книги серии **«Математика. Элективные курсы»** А. Х. Шахмейстера.

По существу это энциклопедия различных методов решения задач, которые чаще всего встречаются непосредственно в школьном курсе.

Это прекрасные самоучители, которые позволят ученикам и абитуриентам без репетитора подготовиться к экзаменам. Естественная логика построения материала «от простого к сложному» позволит учителю использовать эти книги с учениками различного уровня подготовки. Желательно, чтобы работа с материалами этой серии книг была постоянной и планомерной, тогда она даст наибольший эффект.

Книги серии:

Дроби.
Корни.
Уравнения.
Дробно-рациональные неравенства.
Системы уравнений.
Иррациональные уравнения и неравенства.
Множества. Функции. Последовательности. Прогрессии.
Логарифмы.
Тригонометрия.
Построение графиков функций элементарными методами.
Уравнения и неравенства с параметрами.
Задачи с параметрами в ЕГЭ.
Введение в мат анализ.
Комплексные числа.

Б. Г. Зив

10 класс

Самостоятельные работы

1. Действительные числа

Вариант 1

1. Запишите в виде десятичной дроби:

   а) $\frac{3}{5}$, б) $\frac{3}{11}$.

2. Запишите в виде обыкновенной дроби:

   а) 0,(7), б) 1,0(21).

3. Сравните числовые значения выражений:

   а) 4 и $\sqrt{17}$, б) $\sqrt{5}-1$ и $\sqrt{2}$.

4. Вычислите:

   а) $\sqrt{|(\sqrt{3}-\sqrt{7})(\sqrt{3}+\sqrt{7})|}$,

   б) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+1$.

Вариант 2

1. Запишите в виде десятичной дроби:

   а) $\frac{3}{4}$, б) $\frac{7}{11}$.

2. Запишите в виде обыкновенной дроби:

   а) 0,(3), б) 3,2(36).

3. Сравните числовые значения выражений:

   а) 7 и $\sqrt{48}$, б) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ и $\sqrt{10}$.

4. Вычислите:

   а) $\sqrt{|(\sqrt{2}+\sqrt{11})(\sqrt{2}-\sqrt{11})|}$,

   б) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}-1$.

Вариант 3

1. Запишите в виде обыкновенной дроби:
   а) 0,(24), б) 4,11(3).
2. Сравните числа:
   а) $\sqrt{6}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{14}$,
   б) $1+\sqrt{15}$ и $\sqrt{5}+\sqrt{7}$.
3. Вычислите:
   а) $(\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}})^2$,
   б) $\frac{2}{7+4\sqrt{3}}+\frac{2}{7-4\sqrt{3}}$.
4. Упростите: $\sqrt{12}+\sqrt{\frac{1}{12}}+\sqrt{75}+\sqrt{\frac{1}{75}}$.

Вариант 4

1. Запишите в виде обыкновенной дроби:
   а) 0,(51), б) 3,21(6).
2. Сравните числа:
   а) $\sqrt{2}+\sqrt{15}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{10}$,
   б) $1+\sqrt{21}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{15}$.
3. Вычислите:
   а) $(\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2$,
   б) $\frac{3}{5-2\sqrt{6}}+\frac{3}{5+2\sqrt{6}}$.
4. Упростите: $\sqrt{40}+\sqrt{\frac{1}{40}}+\sqrt{90}+\sqrt{\frac{1}{90}}$.

Вариант 5

1. Запишите в виде обыкновенной дроби 3,1(45).
2. Расположите числа в порядке возрастания: $1+\sqrt{11}$; $\sqrt{5}+\sqrt{6}$; $\sqrt{3}+\sqrt{7}$.
3. Приведите пример рационального и иррационального чисел, заключенных между числами:
   а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, б) 7 и 7,01.

4. Вычислите:
   а) $\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{2}-\sqrt{10})$,
   б) $\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}+\frac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}$.

Вариант 6

1. Запишите в виде обыкновенной дроби 2,4(54).
2. Расположите числа в порядке возрастания: $\sqrt{7}+\sqrt{5}$; $\sqrt{2}+\sqrt{12}$; $1+\sqrt{15}$.
3. Приведите пример рационального и иррационального чисел, заключенных между числами:
   а) $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$, б) 5 и 5,01.
4. Вычислите:
   а) $\sqrt{15+6\sqrt{6}}\cdot(\sqrt{6}-3)\cdot\frac{3}{\sqrt{11}+\sqrt{2}}+\sqrt{2}+\sqrt{11}$,
   б) $\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{5}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}-\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}$.

Вариант 7

1. Определите, является ли данное число рациональным?
$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}.$$
2. Сравните числа: $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ и $\frac{2}{1-\sqrt{2}}$.
3. Вычислите:
   а) $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{100}+\sqrt{99}}$,
   б) $\sqrt{\frac{6-\sqrt{32}}{2}}-\sqrt{\frac{6+\sqrt{32}}{2}}$,
   в) $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$.
4. Постройте на координатной прямой при помощи циркуля и линейки число $\sqrt{17}$.
5. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{100}}>10$.

Вариант 8

1. Определите, является ли данное число рациональным?
$$\sqrt{6+4\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$
2. Сравните числа: $\sqrt{2}+\sqrt{11}$ и $\sqrt{3}+3$.
3. Вычислите:
   а) $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{169}+\sqrt{167}}$,

   б) $\sqrt{\frac{3-\sqrt{8}}{2}}-\sqrt{\frac{3+\sqrt{8}}{2}}$,

   в) $\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{17-12\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{17+12\sqrt{2}}}$.
4. Постройте на координатной прямой при помощи циркуля и линейки число $\sqrt{15}$.
5. Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{6}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{400}}>10$.

2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Арифметический корень натуральной степени

Вариант 1

1. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_2=9$; $b_5=\frac{1}{3}$.
2. Упростите:
   а) $3\sqrt{12}-\sqrt{75}+\sqrt{27}$; б) $\sqrt[3]{2\sqrt[3]{2}}$.
3. Найдите область определения выражения $\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{x}$.
4. Сократите дроби:
   а) $\frac{a-b}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$; б) $\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Вариант 2

1. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если $b_3 = 4$; $b_6 = \frac{1}{2}$.
2. Упростите:
   а) $\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18}$; б) $\sqrt[3]{3\sqrt[3]{2}}$.
3. Найдите область определения выражения $\sqrt{1-x^2} \cdot \sqrt{x}$.
4. Сократите дроби:
   а) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}$; б) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}}$.

Вариант 3

1. Произведение первого, третьего и пятого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равно 8, а сумма второго и четвертого равна (-5). Найдите сумму этой прогрессии.
2. Упростите:
   а) $\sqrt[8]{16^7} \cdot \sqrt[4]{4}$; б) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}} \cdot \sqrt[4]{a\sqrt{a}}$.
3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:
   а) $\frac{4}{3-\sqrt{3}}$; б) $\frac{7}{\sqrt{5-\sqrt{11}}}$.
4. Упростите: $\frac{\sqrt{x^2-6x+9}}{(3-x)\sqrt{1-x}}$.

Вариант 4

1. Произведение первого, третьего и пятого членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равно (-8), а сумма второго и четвертого равна 5. Найдите сумму этой прогрессии.
2. Упростите:
   а) $\sqrt[12]{9^{14}} \cdot \sqrt[6]{81}$; б) $\sqrt[6]{b\sqrt[3]{b^2}} \cdot \sqrt[3]{b^2\sqrt[6]{b}}$.
3. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:
   а) $\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$, б) $\frac{3}{\sqrt{4-\sqrt{7}}}$.
4. Упростите: $\frac{\sqrt{2-x}\cdot(x-5)}{\sqrt{x^2-10x+25}}$.

Вариант 5

1. Две бесконечно убывающие геометрические прогрессии таковы, что первый член первой прогрессии является знаменателем второй, а знаменатель первой является первым членом второй прогрессии. Сумма всех членов прогрессий равна 2. Найдите первый член первой прогрессии, если ее знаменатель равен $\frac{1}{3}$.
2. Упростите:

   а) $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{a\sqrt{a}}}$, б) $\dfrac{\sqrt{x^2-2xy+y^2}}{\sqrt[4]{(y-x)^2}}$.
3. Вычислите:

   а) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{3\sqrt[3]{2}} : (\sqrt{2\sqrt{3}}\cdot\sqrt{\sqrt[6]{108}})$,

   б) $\sqrt{22-4\sqrt{30}}-\sqrt{22+4\sqrt{30}}$.

Вариант 6

1. Две бесконечно убывающие геометрические прогрессии таковы, что первый член первой прогрессии является знаменателем второй, а знаменатель первой является первым членом второй прогрессии. Сумма всех членов прогрессий равна 4. Найдите первый член первой прогрессии, если ее знаменатель равен $\frac{2}{3}$.
2. Упростите:

   а) $\sqrt[3]{\frac{x}{y}\sqrt{\frac{x}{y}}}\cdot\sqrt{\frac{y}{x}\sqrt[3]{\frac{y}{x}}}$, б) $\dfrac{\sqrt[4]{(x-2)^2}}{\sqrt{4-4x+x^2}}$.
3. Вычислите:

   а) $\sqrt{27}\cdot\sqrt{2\sqrt[3]{3}} : (\sqrt{3\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\sqrt[6]{72}})$,

   б) $\sqrt{15-4\sqrt{14}}-\sqrt{15+4\sqrt{14}}$.

Вариант 7

1. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый ее член относится к сумме всех последующих членов, как 2 к 3.
2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:

$$\frac{7}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+2}.$$

3. Упростите:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{a-2\sqrt{a-1}}}$;

б) $\sqrt{8+\sqrt{8}+\sqrt{20}+\sqrt{40}}$.

4. Вычислите $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}$.

Вариант 8

1. Найдите знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, у которой каждый ее член относится к сумме всех последующих членов, как 7 к 9.
2. Избавьтесь от иррациональности в знаменателе:
$$\frac{3}{2-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}}.$$
3. Упростите:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{b+4\sqrt{b-4}}}-\dfrac{1}{\sqrt{b-4\sqrt{b-4}}}$,

б) $\sqrt{6+\sqrt{8}+\sqrt{12}+\sqrt{24}}$.

4. Вычислите: $\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}$.

3. Степень с действительным показателем

Вариант 1

1. Вычислите:

а) $16^{-\frac{3}{4}}$, б) $\left(\dfrac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$.

2. Упростите:

а) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b})$;

б) $\left(\dfrac{a^{\frac{1}{4}}}{a^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}}-\dfrac{a^{\frac{3}{4}}}{a-a^{\frac{1}{2}}}\right)(a^{\frac{1}{4}}+1)$.

3. Упростите и вычислите $\left(\dfrac{9a^{-\frac{5}{24}}}{a^{\frac{1}{8}}a^{\frac{5}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}$ при $a=24$.

Вариант 2

1. Вычислите:

   а) $27^{-\frac{4}{3}}$; б) $\left(\frac{1}{32}\right)^{-\frac{3}{5}}$.

2. Упростите:

   а) $(\sqrt[6]{x}-\sqrt[6]{y})(\sqrt[6]{x}+\sqrt[6]{y})(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$,

   б) $\left(\frac{b}{b-b^{\frac{2}{3}}}-\frac{b^{\frac{1}{6}}}{b^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{6}}}\right)$.

3. Упростите и вычислите $\left(\frac{a^{\frac{1}{5}}a^{\frac{2}{3}}}{2a^{\frac{4}{5}}}\right)^{-5}$ при $a=125$.

Вариант 3

1. Вычислите: $\left(27^{\frac{1}{3}}\,8^{\frac{2}{3}}\,32^{\frac{2}{5}}\,81^{\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. Упростите:

   а) $(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{10}+\sqrt[3]{4})$;

   б) $\left(\frac{\left(\sqrt[5]{a^{\frac{4}{3}}}\right)^{\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}\cdot\frac{\left(\sqrt{a\sqrt[3]{a^2b}}\right)^4}{\left(\sqrt[3]{a\sqrt{b}}\right)^6}\right)^{-3}$.

3. Сравните числа $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}-1}$ и $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

4. Упростите и вычислите $\frac{x^2\sqrt{(x+4)^2-16x}}{x-4}$ при $x=\sqrt{7}$.

Вариант 4

1. Вычислите: $\left(25^{\frac{3}{2}}\,4^{\frac{3}{2}}\,625^{\frac{3}{4}}\,32^{\frac{3}{5}}\right)^{\frac{1}{3}}$.

2. Упростите:

   а) $(\sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{7})(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{21}+\sqrt[3]{49})$;

   б) $\left(\frac{\sqrt[3]{a^5b^{\frac{1}{2}}\sqrt[4]{a^{-1}}}}{(a^2\sqrt[5]{ab^3})^2}\right)^{-60}$.

3. Сравните числа $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1}$ и $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$.

4. Упростите и вычислите $\frac{(2y-1)((2y+1)^2-8y)^{-\frac{1}{2}}}{25y^2-3}$ при $y=\frac{\sqrt{2}}{5}$.

Вариант 5

1. Вычислите: $\left(2\sqrt[4]{2\sqrt[8]{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(2\sqrt{2\sqrt[4]{2}}\right)^{\frac{1}{8}}:\left(2\sqrt[8]{2\sqrt{2}}\right)^{\frac{1}{4}}$.

2. Упростите:
$$\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}}{\left(y^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}\right)^{-1}}+\frac{x}{3(3+\sqrt{x})}\cdot\frac{1-9x^{-1}}{x^{-\frac{1}{2}}-3^{-1}}.$$

3. Упростите: $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-2}\cdot\sqrt[4]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt{\sqrt{5}+2}\cdot\sqrt[4]{9-4\sqrt{5}}+a}$.

Вариант 6

1. Вычислите:
$$\left(3\sqrt[4]{4\sqrt[5]{5}}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\left(4\sqrt[5]{5\sqrt[3]{3}}\right)^{\frac{1}{4}}:\sqrt[5]{5\sqrt[3]{3\sqrt[4]{4}}}:\sqrt[5]{(\sqrt[3]{3}\,\sqrt[6]{2})}.$$

2. Упростите: $\frac{ab}{(a^{-1}+b^{-1})^{-1}}+\frac{\sqrt[4]{a^3b}\cdot\sqrt{a}}{2(a+2)\sqrt[4]{a^{-3}b^{-1}}b^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1-4a^{-2}}{a^{-1}-2^{-1}}$.

3. Упростите: $\frac{a+1}{2\sqrt[3]{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\cdot\sqrt[6]{5+2\sqrt{6}}+\frac{1}{a}+a}$.

Вариант 7

1. Сравните числа $\sqrt{37}+2$ и $2\sqrt[3]{63}$.

2. Упростите и вычислите
$$\frac{x^2+2x-3+(x+1)\sqrt{x^2-9}}{x^2-2x-3+(x-1)\sqrt{x^2-9}}\cdot\sqrt{|x-3|}$$
при $x=6$ и $x=-7$.

3. Упростите:

$$\sqrt[3]{\frac{y^3-12y+(y^2-4)\sqrt{y^2-16}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{y^3-12y-(y^2-4)\sqrt{y^2-16}}{2}}.$$

Вариант 8

1. Сравните числа $2\sqrt[5]{244}$ и $\sqrt[3]{26}+3$.
2. Упростите и вычислите
$$\frac{y^2-y-6-(y+3)\sqrt{y^2-4}}{y^2+y-6-(y-3)\sqrt{y^2-4}}\cdot\sqrt{|y-2|}$$
при $y=7$ и $y=-6$.
3. Упростите:
$$\sqrt[3]{\frac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}+\sqrt[3]{\frac{x^3-3x-(x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{2}}.$$

4. Степенная функция и обратная функция

Вариант 1

1. Сравните значения выражений:
а) $\left(\frac{\sqrt{15}}{4}\right)^{3,5}$ и $\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right)^{3,5}$; б) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\sqrt{2}}$.
2. Найдите область определения и область значения функции, обратной данной
а) $y=7x-5$, б) $y=\sqrt{x-2}$.
3. Изобразите схематически график функции:
а) $y=x^{-\sqrt{3}}$, б) $y=x^{\frac{2}{\pi}}$.

Вариант 2

1. Сравните значения выражений:
а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{\sqrt{3}}$ и $\left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{3}}$, б) $\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{-3}$ и $\left(\frac{2\sqrt{7}}{3}\right)^{-3}$.

2. Найдите область определения и область значения функции, обратной данной:
   а) $y = 8 - 3x$, б) $y = \sqrt{3-x}$.
3. Изобразите схематически график функции:
   а) $y = x^{\frac{\pi}{3}}$, б) $y = x^{-\frac{3}{4}}$.

Вариант 3

1. Сравните числа:
   а) $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{1,1}$ и $\left(\frac{\pi}{2}\right)^{1,1}$, б) $(3\sqrt[3]{2})^{-3,4}$ и $(2\sqrt[3]{3})^{-3,4}$.
2. Найдите функцию, обратную данной:
   а) $y = 2x - 7$, б) $y = \frac{1}{3-x}$.
3. Постройте схематически график функции:
   а) $y = (x-\pi)^3$, б) $y = |x+1|^{\frac{1}{5}}$.

Вариант 4

1. Сравните числа:
   а) $\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2,2}$ и $\left(\frac{\pi}{3}\right)^{2,2}$, б) $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2}\right)^{-7,4}$ и $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{3}\right)^{-7,4}$.
2. Найдите функцию, обратную данной:
   а) $y = 3 - 5x$, б) $y = \frac{1}{x-1}$.
3. Постройте схематически график функции:
   а) $y = (\pi - x)^5$, б) $y = |x-2|^{-\frac{1}{4}}$.

Вариант 5

1. Сравните значения выражений:
$$\left(\frac{\sqrt{123}-3}{4}\right)^{-\sqrt{5}} \text{ и } \left(\frac{6\sqrt{7}-10}{3}\right)^{-\sqrt{5}}.$$
2. Найдите область изменения функции $y = \frac{x-3}{2x+2}$.

3. Постройте схематически график функции:

$$y = |x-3|^{\frac{1}{3}} - 1.$$

Вариант 6

1. Сравните значения выражений:

$$\left(\frac{4\sqrt{6}+11}{7}\right)^{-\pi} \text{ и } \left(\frac{3\sqrt{19}-1}{4}\right)^{-\pi}.$$

2. Найдите область изменения функции $y = \frac{2x-7}{x-3}$.
3. Постройте схематически график функции:

$$y = -|x+2|^{\frac{1}{3}} + 1.$$

Вариант 7

1. Найдите обратную функцию и изобразите оба графика в единой координатной системе:

$$y = x^2 + 2x - 3; \quad x \in [-4; -2].$$

2. Найдите область изменения функции $y = \frac{x^2+1{,}25}{x+1}$.
3. Сравните числа:

$$\left(\frac{4\sqrt{39}-3\sqrt{19}}{12}\right)^{\frac{6\sqrt{10}-5}{7}} \text{ и } \left(\frac{4\sqrt{39}-3\sqrt{19}}{12}\right)^{\frac{9\sqrt{6}+2}{12}}.$$

Вариант 8

1. Найдите обратную функцию и изобразите оба графика в единой координатной системе: $y = -x^2 + 8x - 12$; $x \in \in [4; 6]$.
2. Найдите область изменения функции $y = \frac{x^2+3}{x+1}$.
3. Сравните числа:

$$\left(\frac{3\sqrt{59}-4\sqrt{3}}{16}\right)^{\frac{6\sqrt{11}+\sqrt{13}}{7}} \text{ и } \left(\frac{3\sqrt{59}-4\sqrt{3}}{16}\right)^{\frac{8\sqrt{5}+4\sqrt{3}}{7}}.$$

5. Равносильность уравнений и неравенств

Вариант 1

1. Равносильны ли следующие уравнения?

а) $x^2-1=0$ и $x^2+\frac{1}{x}=1+\frac{1}{x}$,

б) $x^2-4x+3=0$ и $\frac{(x-1)(x-3)}{\sqrt{16-x^2}}=0$.

2. Равносильны ли следующие неравенства?

а) $2x-3-\frac{1}{x+5}<x-\frac{1}{x+5}-4$ и $2x-3<x-4$,

б) $(x^2-2x-3)(-x^2+x-2)\leqslant 0$ и $x^2-2x-3\geqslant 0$.

3. Какое из двух данных уравнений является следствием другого?

а) $\frac{x^2}{x-2}=\frac{4}{x-2}$ и $x^2=4$,

б) $(x+2)(x+1)^2=3(x+1)^2$ и $x+2=3$.

Вариант 2

1. Равносильны ли следующие уравнения?

а) $4-x^2=0$ и $x^2+\frac{x}{x-1}=4+\frac{x}{x-1}$,

б) $x^2+5x+4=0$ и $\frac{(x+1)(x+4)}{\sqrt{16-x^2}}=0$.

2. Равносильны ли следующие неравенства?

а) $x+3-\frac{1}{x-7}<2-\frac{1}{x-7}$ и $x+3<2$,

б) $(-x^2+2x-5)(x^2-25)>0$ и $x^2<25$.

3. Какое из двух данных уравнений является следствием другого?

а) $\frac{x^2+x-2}{1-x^2}=0$ и $x^2+x-2=0$,

б) $(x^2-3)(x+5)=x^2-3$ и $x+5=1$.

Вариант 3

1. Равносильны ли следующие уравнения?

   а) $\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{10}$ и $x+1=\sqrt{10}$,

   б) $x^2-7x=8$ и $\sqrt{4-x^2}(x^2-7x)=8\sqrt{4-x^2}$.

2. Равносильны ли следующие неравенства?

   а) $\frac{x+5}{x-3}<0$ и $(x-3)(x+5)<0$,

   б) $\frac{x-8}{(x+7)^2}\leqslant 0$ и $x-8\leqslant 0$.

3. Какое из двух данных уравнений является следствием другого?

   а) $x^2+2x+\frac{1}{x+2}=\frac{1}{x+2}$ и $x^2+2x=0$,

   б) $\sqrt{x^2-5x-6}=4$ и $x^2-5x-6=16$.

Вариант 4

1. Равносильны ли следующие уравнения?

   а) $\sqrt{(x-2)^2}=\sqrt{3}$ и $x-2=\sqrt{3}$,

   б) $x^2=1$ и $x^2\sqrt{6-x^2}=\sqrt{6-x^2}$.

2. Равносильны ли следующие неравенства?

   а) $(1-x)(x+7)\geqslant 0$ и $\frac{1-x}{x+7}\geqslant 0$,

   б) $\frac{x+1}{(x-3)^2}<0$ и $x+1<0$.

3. Какое из двух данных уравнений является следствием другого?

   а) $\frac{x^2+4x+3}{1-x^2}=0$ и $(x+3)(x+1)=0$,

   б) $x^2-3x+2=9$ и $\sqrt{x^2-3x+2}=3$.

Вариант 5

1. Равносильны ли следующие уравнения?

   а) $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{2x+3}=3$ и $\sqrt{2x^2-x-6}=3$,

   б) $\sqrt{x-1}\cdot(x^2+3)=4x\sqrt{x-1}$ и $x^2-4x+3=0$.

2. Какое из двух уравнений является следствием другого:

$$\sqrt{(x-3)(x-1)^2} = (x-3)(x-1) \quad \text{и}$$
$$\sqrt{x-3} \cdot (x-1)(x-4) = 0?$$

3. Равносильны ли следующие неравенства:

$$\sqrt{x-4}\sqrt{x-4} \geqslant 3 \quad \text{и} \quad x \geqslant 7?$$

4. При каких a и b уравнения будут равносильны:

$$x^2 - (2a+3)x + 6a = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - (a+2b)x + 2ab = 0?$$

Вариант 6

1. Равносильны ли следующие уравнения?
   а) $\sqrt{x^2-5x+4} = 2$ и $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x-4} = 2$,
   б) $\sqrt{x-4} \cdot (x^2+4) = 5x\sqrt{x-4}$ и $x^2 - 5x + 4 = 0$.
2. Какое из двух уравнений является следствием другого:

$$\sqrt{x-7} \cdot (x-5)(x-8) = 0 \quad \text{и}$$
$$\sqrt{(x-7)(x-5)^2} = (x-5)(x-7)?$$

3. Равносильны ли следующие неравенства:

$$\sqrt{3-x}\sqrt{3-x} \leqslant 5 \quad \text{и} \quad 3-x \leqslant 5?$$

4. При каких a и b уравнения будут равносильны

$$x^2 - (3b-2a)x - 6ab = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - (2-3a)x - 6a = 0?$$

Вариант 7

1. Равносильны ли следующие уравнения?
   а) $\sqrt{(x-1)^2(x-3)} = x-1$ и $|x-1| \cdot \sqrt{x-3} = x-1$,
   б) $\sqrt{x-4}\sqrt{x-2} + \sqrt{x-1}\sqrt{x-2} = \sqrt{x+4}\sqrt{x-2}$ и $\sqrt{(x-4)(x-2)} + \sqrt{(x-1)(x-2)} = \sqrt{(x+4)(x-2)}$.
2. Какое из двух уравнений является следствием другого:

$$\frac{x-3}{x+1} = \frac{x-1}{x+3} \quad \text{и} \quad (x-3)(x+3) = (x-1)(x+1)?$$

3. При каких a уравнения будут равносильны:

$$\sqrt{x^2+(3a+2)x+6a}=2(x+2) \quad \text{и}$$
$$\sqrt{x^2+3x-3a-a^2}=2(x+2)?$$

Вариант 8

1. Равносильны ли следующие уравнения?

а) $\sqrt{x^2(x-5)}=x$ и $|x|\cdot\sqrt{x-5}=x$,

б) $\sqrt{x+1}\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}=\sqrt{x+6}\sqrt{x-1}$ и $\sqrt{(x+1)(x-1)}+\sqrt{(x-1)(x-2)}=\sqrt{(x+6)(x-1)}$.

2. Какое из двух уравнений является следствием другого $\frac{x+2}{x+1}=\frac{x+3}{x}$ и $2x+3=0$?

3. При каких b уравнения будут равносильны:

$$\sqrt{x^2-(2b+1)x+2b}=2x-2 \quad \text{и}$$
$$\sqrt{x^2-3x+3b-b^2}=2x-2?$$

6. Иррациональные уравнения

Вариант 1

Решите уравнения 1–5:

1. $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$;
2. $\sqrt{2-x}=x$;
3. $\sqrt{3x^2+5x-2}=3x-1$;
4. $\sqrt{x-2}+\sqrt{11-x}=3$;
5. $\sqrt[3]{x^2}-4\sqrt[3]{x}+3=0$.

Вариант 2

Решите уравнения 1–5:

1. $(9-x^2)\sqrt{2-x}=0$;
2. $x+\sqrt{2-x}=0$;
3. $\sqrt{-2x^2+5x+3}=2x+1$;
4. $\sqrt{9-x}+\sqrt{x-5}=2$;
5. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$.

Вариант 3

Решите уравнения 1–5:

1. $x - \sqrt{x+5} - 1 = 0$;
2. $\sqrt{x^2 - 5x + 6}(x^2 - 2x - 1) = 0$;
3. $2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0$;
4. $\sqrt{\frac{3-x}{2+x}} + 3\sqrt{\frac{2+x}{3-x}} = 4$;
5. $\sqrt{3x+6} - \sqrt{6-2x} = 1$.

Вариант 4

Решите уравнения 1–5:

1. $x - 3 + \sqrt{2x-3} = 0$;
2. $\sqrt{x^2 + 7x + 10}(x^2 + 2x - 4) = 0$;
3. $x^2 + 2x + \sqrt{x^2 + 2x + 8} - 12 = 0$;
4. $\sqrt{\frac{2x+2}{2+x}} - \sqrt{\frac{2+x}{2x+2}} = \frac{7}{12}$;
5. $\sqrt{10-3x} - \sqrt{7-x} = 1$.

Вариант 5

Решите уравнения 1–4:

1. $\sqrt{3x - \sqrt{x - \frac{1}{36}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
2. $\sqrt{5 + x - 4\sqrt{x+1}} + \sqrt{10 + x - 6\sqrt{x+1}} = 1$;
3. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{-x^2 + 4x - 3} = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$;
4. $\sqrt[3]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$.
5. При каких a уравнение имеет единственное решение $\sqrt{x^2 - 4x + 3} = \sqrt{3x + a}$?

Вариант 6

Решите уравнения 1–4:

1. $\sqrt{5x - \sqrt{x - \frac{1}{100}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$;
2. $\sqrt{x - 3 - 2\sqrt{x-4}} + \sqrt{x + 8 - 6\sqrt{x+1}} = 1$;
3. $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{-x^2 + 2x} = \sqrt{-x^2 + 5x - 6}$;
4. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt{x-3} = 2$.
5. При каких a уравнение имеет единственное решение $\sqrt{x^2 + 6x + 8} = \sqrt{a - 3x}$?

Вариант 7

Решите уравнения 1–3:

1. $\sqrt{4x^2+4x+1}+\sqrt{4x^2-4x+1}=2$;
2. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})(x-3\sqrt{x-2}+2)=9$;
3. $(x+2)(7-x)(\sqrt{x-9}+1)=12$.
4. При каких a уравнение имеет единственное решение $\sqrt{-8x-x^2-15}=ax+7$?

Вариант 8

Решите уравнения 1–3:

1. $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{x^2+6x+9}=6$;
2. $(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-1})(x+3\sqrt{x-1}+3)=9$;
3. $(x-4)(5-x)(\sqrt{x-6}+3)=24$.
4. При каких a уравнение имеет единственное решение $\sqrt{8x-x^2-15}=ax-1$?

7. Иррациональные неравенства

Вариант 1

Решите неравенства 1–5:

1. $\sqrt{x-2}\leqslant 3$;
2. $\sqrt{x+1}>\sqrt{3-x}$;
3. $\sqrt{x+2}>x$;
4. $x-3\sqrt{x}+2>0$;
5. $\sqrt{3x-x^2}<4-x$.

Вариант 2

Решите неравенства 1–5:

1. $\sqrt{5-x}<2$;
2. $\sqrt{x+2}>\sqrt{6-x}$;
3. $\sqrt{2-x}>x$;
4. $x-4\sqrt{x}+3>0$;
5. $\sqrt{x^2-4x}\leqslant 2-x$.

Вариант 3

Решите неравенства 1–5:

1. $(x+1)\sqrt{9-x^2} \geqslant 0$;
2. $\frac{x+2\sqrt{x}-3}{x-2\sqrt{x}-3} > 0$;
3. $\sqrt{x^2-5x+4} < x-3$;
4. $\sqrt{2-x} + \sqrt{x+1} \geqslant -1$;
5. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+2} > \sqrt{x+7}$.

Вариант 4

Решите неравенства 1–5:

1. $(x-2)\sqrt{16-x^2} \geqslant 0$;
2. $\frac{x+\sqrt{x}-2}{x-\sqrt{x}-2} \leqslant 0$;
3. $\sqrt{x^2-x-2} \leqslant x-1$;
4. $\sqrt{x+4} + \sqrt{1-x} \geqslant -3$;
5. $\sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} > \sqrt{x+6}$.

Вариант 5

Решите неравенства 1–5:

1. $x-3 < \sqrt{x+9}$, в ответ запишите количество целых решений;
2. $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+3} < 3$;
3. $\sqrt{2x^2-2x+5} - \sqrt{2x^2-2x} \geqslant 1$;
4. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} > 1$;
5. $||x+2|-3| \leqslant \sqrt{3x^2-3}$.

Вариант 6

Решите неравенства 1–5:

1. $x+1 < \sqrt{x+16}$, в ответ запишите количество целых решений;
2. $\sqrt{5x-4} + \sqrt{3x+1} < 3$;
3. $\sqrt{x^2+x+10} - \sqrt{x^2+x+3} \geqslant 1$;

4. $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>1{,}5$;
5. $||x+3|-2|\leqslant\sqrt{3x^2-3}$.

Вариант 7

Решите неравенства 1–5:

1. $\sqrt{5x-2x^2+3}\leqslant 3-x$;
2. $\frac{\sqrt{2x+9}-2-\sqrt{1+2x}}{\sqrt{7x+2}}\geqslant 0$;
3. $\frac{1}{\sqrt{x+1}}\geqslant\frac{1}{2-x}$;
4. $3x+4>\sqrt{9+4x(x+3)}+\sqrt{-2x^2-8x+10}$;
5. $\sqrt{9x^2-48x-21}+\sqrt{9x^2-51x-15}\leqslant|3x-6|$.

Вариант 8

Решите неравенства 1–5:

1. $\sqrt{3x^2+5x-2}\leqslant 2+x$;
2. $\frac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{3x-14}-3}{\sqrt{7x+2}}<0$;
3. $\frac{1}{\sqrt{2-x}}\geqslant\frac{1}{x+1}$;
4. $4x-5>\sqrt{1+4x(x-1)}+\sqrt{-8x^2+40x-32}$;
5. $\sqrt{4x^2-4x-84}+\sqrt{4x^2-6x-85}\leqslant|2x+1|$.

8. Показательные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Решите уравнение $7^{x^2-3x+2}=1$.
2. Решите неравенство $\left(\frac{2}{3}\right)^x>\frac{9}{4}$.
3. Решите уравнение $4^{2x}-3\cdot 4^x-4=0$.
4. Решите неравенство $4^{x-1}+4^x+4^{x+1}\leqslant 84$.
5. Решите уравнение $2^{2+x}-2^{2-x}=15$.

Вариант 2

1. Решите уравнение $5^{2x^2-x-1}=1$.
2. Решите неравенство $\left(\frac{9}{4}\right)^x \leqslant \frac{8}{27}$.
3. Решите уравнение $5^{2x}-4\cdot 5^x=5$.
4. Решите неравенство $7^x+7^{x+1}+7^{x+2}>399$.
5. Решите уравнение $2^x-2^{-x}=\frac{15}{4}$.

Вариант 3

1. Решите уравнение $\left(\frac{1}{64}\right)^x=\sqrt{\frac{1}{8}}$.
2. Решите неравенство $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-5x+4}>\frac{25}{4}$.
3. Решите уравнение $3\cdot 2^{-2x+3}=2^{-x+1}+1$.
4. Решите неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^x-2\left(\frac{1}{3}\right)^x>3$.
5. Решите уравнение $64^x=2\cdot 27^x-36^x$.

Вариант 4

1. Решите уравнение $\left(\frac{1}{27}\right)^x=\sqrt[3]{3}$.
2. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2+\frac{2}{x}}>\frac{1}{32}$.
3. Решите уравнение $2\cdot 3^{-2x+2}=3^{-x+1}+1$.
4. Решите неравенство $4^x+2^{x+1}-8\leqslant 0$.
5. Решите уравнение $4^x+10^x-2\cdot 25^x=0$.

Вариант 5

1. Решите уравнение $4^x-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$.
2. Решите неравенство $\sqrt{36^x-6^{x+2}}>36-6^x$.
3. Решите уравнение $(\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}})^x+(\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}})^x=4$.
4. Решите неравенство $\left(\frac{2}{\sqrt{29}-\sqrt{11}}\right)^{x^2+3x}>\frac{20-\sqrt{319}}{2}$.

5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение не имеет корней $(0{,}2)^x = \frac{2a+3}{5-a}$.

Вариант 6

1. Решите уравнение $4 \cdot 7^{2x+4} - 3^{2x+6} - 2 \cdot 7^{2x+3} + 3^{2x+3} = 0$.
2. Решите неравенство $\sqrt{2^{1+2x} - 1} > 2 - 2^x$.
3. Решите уравнение $(\sqrt{4-\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = 8$.
4. Решите неравенство $\left(\frac{\sqrt{31}-\sqrt{13}}{2}\right)^{x^2-x} > \frac{22-\sqrt{403}}{2}$.
5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение не имеет корней $(0{,}6)^x = \frac{3a+4}{4-a}$.

Вариант 7

1. Решите уравнение
$$2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280.$$
2. Решите неравенство
$$3^{2x^2-x+2} - 5^{2x^2-x-1} > 5^{2x^2-x+1} + 3^{2x^2-x-1}.$$
3. Решите уравнение
$$(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1} + (2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1} = \frac{4}{2-\sqrt{3}}.$$
4. Решите неравенство $4^{2x^2+0{,}5} + 9^{x^6} \leqslant 3 - \sin^2 x$.
5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение $\frac{2^{2x+1}}{4^x - 2^{x+1} + 3} = a$.

Вариант 8

1. Решите уравнение $9 \cdot 4^{2x} + 64 \cdot 16^{x-1} + 256 \cdot 2^{4x-8} = 448$.
2. Решите неравенство $2^{x^2+x+1} - 3^{x^2+x-1} \geqslant 3^{x^2+x-1} - 2^{x^2+x}$.
3. Решите уравнение
$$(4-\sqrt{15})^{2x^2-3x+1} + (4+\sqrt{15})^{2x^2-3x-1} = \frac{8}{4+\sqrt{15}}.$$
4. Решите неравенство $27^{3x^2+\frac{1}{3}} + 7^{x^4} > 4 - 3\,\mathrm{tg}^2\, x$.
5. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение имеет единственное решение $\frac{3^{2x}}{9^x - 3^{x+1} + 2} = a$.

9. Системы показательных уравнений и неравенств

Вариант 1

Решите системы уравнений 1–3:

1. $\begin{cases} 3^x 5^y = 75 \\ 3^y 5^x = 45 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 17 \\ 2^{x+2} - 3^{y+1} = 5 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3^x + 3^y = 36 \\ 3^{x-y} = \frac{1}{3} \end{cases}$

4. Решите систему неравенств
$\begin{cases} 4^x - 5 \cdot 2^x + 4 \leqslant 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+1} > \frac{1}{4} \end{cases}$

Вариант 2

Решите системы уравнений 1–3:

1. $\begin{cases} 2^x 3^y = 24 \\ 2^y 3^x = 54 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 5^x - 3^{y-1} = 16 \\ 5^{x-1} + 3^y = 32 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2^x - 2^y = 6 \\ 2^{x+y} = 16 \end{cases}$

4. Решите систему неравенств
$\begin{cases} 3\left(\frac{1}{9}\right)^x - 4\left(\frac{1}{3}\right)^x + 1 > 0 \\ 2^{x^2-3x} \leqslant 16 \end{cases}$

Вариант 3

Решите системы уравнений 1–3:

1. $\begin{cases} 64^{2x} + 64^{2y} = 12 \\ 64^{x+y} = 4\sqrt{2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt[x]{2} \cdot \sqrt[y]{3} = \sqrt[6]{72} \\ \sqrt[2x]{81} \cdot \sqrt[y]{8} = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dfrac{3^{x+y}}{3^{xy}} = \dfrac{1}{3} \\ 2^x 2^y = 32 \end{cases}$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+2x} < \left(\frac{1}{9}\right)^{16-x} \\ \dfrac{2^x-32}{2^{-\frac{x}{5}}-4} \geqslant 0 \end{cases}$$

Вариант 4

Решите системы уравнений 1–3:

1. $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 77 \\ \sqrt{3^x} - 2^y = 7 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt{5^x} \cdot \sqrt[3]{5^y} = 125 \\ \sqrt[4]{11^x} \cdot \sqrt{4^y} = 88 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 8 \cdot 2^y = 4^{1,5x+0,5} \\ 5^{2x} = 0,25 \cdot 5^y \end{cases}$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^{\frac{1}{x+2}} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{3-x}} \\ \dfrac{1-\left(\frac{6}{5}\right)^{x+3}}{1-\left(\frac{2}{9}\right)^{x-5}} \geqslant 0 \end{cases}$$

Вариант 5

Решите системы уравнений 1–3:

1. $\begin{cases} y^{x^2-7x+12} = 1 \\ x + y = 6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \left(\frac{3}{2}\right)^{x-y} - \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{65}{36} \\ xy - x + y = 118 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 11^{xz} - 2 \cdot 5^y = 71 \\ 11^z + 2 \cdot 5^{\frac{y}{2}} = 21 \\ 11^{(x-1)z} + 5^{\frac{y}{2}} = 16 \end{cases}$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} \frac{1}{3^x-1}+\frac{3^x}{3^{2x}-1}<\frac{1}{3^x+1} \\ \frac{\left(\frac{3}{7}\right)^{x+4}-1}{\left(\frac{8}{5}\right)^{x-6}-1}\geqslant 0 \end{cases}$$

Вариант 6

Решите системы уравнений 1–3:

1. $\begin{cases} x^{y^2-9y+20}=1 \\ x-y=5 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^{x+y}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x+y}=\frac{97}{36} \\ 2^{xy}=16^{-6} \end{cases}$

3. $\begin{cases} 7^{xz-z}+3^{\frac{y}{2}}=10 \\ 2\cdot 3^{\frac{y}{2}}+7^z=13 \\ 7^{xz}-2\cdot 3^y=31 \end{cases}$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}+3^{\sqrt{x}-2}<13 \\ 4^{|2x-1|}-2\cdot 2^{|2x-1|}-8\geqslant 0 \end{cases}$$

Вариант 7

Решите системы уравнений 1–3:

1. $\begin{cases} 2^{x(y+1)}-3\cdot 2^x+4=0 \\ 2^{xy}+2^x=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^x b^y=a \\ a^x(1+b^y)=2a \end{cases}$

   при $a>0$; $b>0$

3. $\begin{cases} 2^{x+y}=2^x+2^y \\ \sqrt{2^x-2^y}=\sqrt{2^x}-\sqrt{2^y} \end{cases}$

4. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 9^{\sqrt{x^2-3}}+3<28\cdot 3^{\sqrt{x^2-3}-1} \\ 3^{2|x-1|}+3<4\cdot 3^{|x-1|} \end{cases}$$

Вариант 8

Решите системы уравнений 1–3:

1. $\begin{cases} 6^x + 6^{xy} = 42 \\ 30 + 6^{y(x-1)} = 6^{y+1} \end{cases}$

2. $\begin{cases} a^x(2+b^y) = 3a \\ a^x b^y = a \end{cases}$
   при $a > 0$; $b > 0$

3. $\begin{cases} 3^{x+y} = 3^x - 3^y + 9 \\ \sqrt{3^x - 3^y} = \sqrt{3^x} - \sqrt{3^y} \end{cases}$

4. Решите систему неравенств
   $\begin{cases} 4^{\sqrt{9-x^2}} + 2 < 9 \cdot 3^{\sqrt{9-x^2}} \\ 3^{|x+2|} + 3^{|x-1|} \geqslant 28 \end{cases}$

10. Свойства логарифмов

Вариант 1

1. Вычислите:
   а) $\log_{\frac{1}{2}} 8 - \log_{\frac{1}{3}} 27$, в) $3^{2\log_3 4}$.
   б) $\log_{12} 3 + \log_{12} 4$,
2. Найдите область определения функций:
   а) $y = \log_2(4 - 3x - x^2)$, б) $y = \log_{\frac{1}{7}} \frac{x^2-5x+4}{9-x^2}$.
3. Дано: $\lg 2 = a$; $\lg 3 = b$. Найдите $\lg 24$.

Вариант 2

1. Вычислите:
   а) $\log_3 \frac{1}{9} + \log_5 125$, в) $2^{-\log_2 5}$.
   б) $\log_7 2 - \log_7 \frac{2}{7}$,
2. Найдите область определения функций:
   а) $y = \log_{\frac{1}{3}}(2 - 5x + 2x^2)$, б) $y = \log_2 \frac{16-x^2}{x^2-3x+2}$.
3. Дано: $\lg 2 = a$; $\lg 7 = b$. Найдите $\lg 112$.

Вариант 3

1. Вычислите:
   а) $\log_{\frac{1}{9}} \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$,
   б) $12^{\log_{144} 4+\log_{12} 2}$,
   в) $\frac{\log_3 27-\log_3 8}{\log_3 \frac{9}{4}}$.
2. Постройте график функции $y = \log_2(1-x)$.
3. Дано: $\log_6 2 = a$; $\log_6 5 = b$. Найдите $\log_3 5$.
4. Упростите: $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}\log_3(x^2-6x+9)}$.

Вариант 4

1. Вычислите:
   а) $\log_{\frac{1}{3}}(27\sqrt{3})$,
   б) $7^{\log_7 3+\log_{49} 4}$,
   в) $\frac{\log_3 64}{\log_3 48-\log_3 3}$.
2. Постройте график функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-3)$.
3. Дано: $\log_{14} 7 = a$; $\log_{14} 5 = b$. Найдите $\log_5 28$.
4. Упростите: $4^{-\log_{16}(x^2-4x+4)}$.

Вариант 5

1. Вычислите:
   а) $\log_{27}(5\sqrt{2}-7) + \log_9(3+2\sqrt{2})$,
   б) $\frac{3\log_5 15\log_5 9-2\log_5^2 15-\log_5^2 9}{\log_5 9-\log_5 15}$.
2. Упростите: $\left(\left(\frac{1}{81}\right)^{-\log_3 a} + 4^{1+4\log_4 a}\right)5^{-\frac{1}{\log_a 5}}$.
3. Постройте график функции $y = \left|\log_{\frac{1}{2}}|x| + 2\right|$.
4. Сравните числа $\log_2 5$ и $2\frac{1}{3}$.

Вариант 6

1. Вычислите:
   а) $\log_4(7-4\sqrt{3})+\log_8(26+15\sqrt{3})$,
   б) $\frac{\log_2 14\log_2 7+\log_2^2 14-2\log_2^2 7}{\log_2 14+2\log_2 7}$.
2. Упростите: $\left(\left(\frac{1}{64}\right)^{-\log_4 a}+5^{1+\log_5 a}\right)2^{-\frac{1}{\log_a 2}}$.
3. Постройте график функции $y=|\log_2|x||$.
4. Сравните числа $\log_5 3$ и $\frac{2}{3}$.

Вариант 7

1. Вычислите: $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}5^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ-$ $-(\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}3^\circ+\lg\operatorname{tg}5^\circ+\cdots+\lg\operatorname{tg}89^\circ)$.
2. Сравните числа $\log_8 9$ и $\log_9 10$.
3. Дано: $\log_7 12=a$; $\log_{12}24=b$. Найдите $\log_{54}168$.
4. Упростите: $5^{\sqrt{\log_5 6}}-6^{\sqrt{\log_6 5}}$.

Вариант 8

1. Вычислите: $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdot\ldots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ-$ $-(\lg\operatorname{tg}1^\circ+\lg\operatorname{tg}2^\circ+\lg\operatorname{tg}3^\circ+\cdots+\lg\operatorname{tg}89^\circ)$.
2. Сравните числа $\log_9 10$ и $\lg 11$.
3. Дано: $\log_6 30=a$; $\log_{15}24=b$. Найдите $\log_{12}60$.
4. Упростите: $2^{\sqrt{\log_2 3}}-3^{\sqrt{\log_3 2}}$.

11. Логарифмические уравнения и системы

Вариант 1

1. Решите уравнение $\log_6 x=1-\log_6 3$.
2. Решите систему
   $\begin{cases}\log_3 x+\log_3 y=1+\log_3 2\\ \log_{25}(x+y)=0{,}5\end{cases}$
3. Решите уравнение $\log_6(x+1)+\log_6(2x+1)=1$.

4. Решите уравнение $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = 11$.
5. Решите систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425 \\ \lg x + \lg y = 2 \end{cases}$$

Вариант 2

1. Решите уравнение $\lg x = 2 - \lg 5$.
2. Решите систему
$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9 \\ \log_2(x + y) = \log_2 5 + 2 \end{cases}$$
3. Решите уравнение $\log_2 x + \log_2(x + 2) = 3$.
4. Решите уравнение $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = \frac{22}{3}$.
5. Решите систему
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \lg x + \lg y = \lg 2 \end{cases}$$

Вариант 3

1. Решите уравнение $\log_2(x^2 - 3x) = 2$.
2. Решите систему
$$\begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = 4 \\ 2\lg x - \lg y + \lg 2 = 0 \end{cases}$$
3. Решите уравнение $\log_2 \log_3 \log_4 x = 0$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} x^{\log_2 y} = 3 \\ xy = 6 \end{cases}$$
5. Решите уравнение $\log_4^2 x^2 + \log_4 x^4 = 8$.

Вариант 4

1. Решите уравнение $\log_3(x^2 - 8x) = 2$.
2. Решите систему
$$\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 4 \\ 2\lg y - \lg x + \lg 3 = 0 \end{cases}$$
3. Решите уравнение $\log_4 \log_2 \log_{\sqrt{5}} x = \frac{1}{2}$.

4. Решите систему
$$\begin{cases} x^{\log_5 y} = 64 \\ xy = 500 \end{cases}$$

5. Решите уравнение $\log_9^2 x^2 - \log_9 x^6 + 2 = 0$.

Вариант 5

1. Решите уравнение
$6\log_{\frac{1}{2}}(-x) - \log_{\frac{1}{2}}^2 x^2 = 2$.

2. Решите систему
$$\begin{cases} \log_2(xy) - \frac{1}{2}\log_2 x^2 = 1 \\ \log_{x^2} y^2 + \log_2(y+6) = 4 \end{cases}$$

3. Решите уравнение $x^{\log_2 5} + 5^{\log_2 x} = 10$.

4. Решите систему
$$\begin{cases} \log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y - 2\log_2^2 x = 0 \\ 2x^2 y - xy^2 = 1 \end{cases}$$

5. Решите уравнение
$\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2$.

Вариант 6

1. Решите уравнение
$\log_4^2 x^2 + 3 = 7\log_4(-x)$.

2. Решите систему
$$\begin{cases} \log_{0,5x+3}(x^2 y^6) + 1 = \log_4 y^2 \\ \log_4 \dfrac{x}{y} + \dfrac{1}{4}\log_2 y^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

3. Решите уравнение $x^{\log_3 7} + 7^{\log_3 x} = 14$.

4. Решите систему
$$\begin{cases} \log_3 x \cdot \log_3 y + 2\log_3^2 x - \log_3^2 y = 0 \\ xy + \dfrac{x^2}{y} = 28 \end{cases}$$

5. Решите уравнение
$\log_{3x+7}(9 + 4x^2 + 12x) + \log_{2x+3}(6x^2 + 23x + 21) = 4$.

Вариант 7

1. Решите уравнение $5^{\log_5^2 x} + x^{\log_5 x} = 10$.
2. Решите систему
$$\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y (y - 3x) = 1 \end{cases}$$
3. Сколько различных корней имеет уравнение $\log_2(40 - 5x^2 + x^2 2^x) = x + 3$?
4. Решите систему
$$\begin{cases} \log_2(65 - 2^{2+y}) = 4 - y \\ \log_2\left(\frac{2x+y}{y-2x+6}\right) = \log_2(x-1) - \log_2(2-x) \end{cases}$$
5. При каких a уравнение $2\lg(1 - x) = \lg(ax)$ имеет единственное решение?

Вариант 8

1. Решите уравнение $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} = 12$.
2. Решите систему
$$\begin{cases} x \cdot y^{\log_x y} = y^{\frac{5}{2}} \\ \log_3 x \cdot \log_x (y - 2x) = 1 \end{cases}$$
3. Сколько различных корней имеет уравнение $\log_3(54 - 2x^2 + x^2 3^x) = x + 3$?
4. Решите систему
$$\begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) - \log_2 x = \log_2(3y + x) - 1 \\ \log_2\left(\frac{xy+1}{2y^2+y-x+2}\right) = \log_2 \frac{x}{y} - 1 \end{cases}$$
5. При каких a уравнение $2\lg(1 + x) = \lg(ax)$ имеет единственное решение?

12. Логарифмические неравенства

Вариант 1

Решите неравенства 1–5:

1. $\log_{\frac{1}{2}}(x + 3) \geqslant -2$;
2. $\log^2_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x - 2 \leqslant 0$;
3. $\log_8(x^2 - 4x + 3) < 1$;

4. $\log_2 \frac{3x-1}{2-x} < 1$;

5. $\frac{\lg^2 x+\lg x-3}{2\lg x-1} < 1$.

Вариант 2

Решите неравенства 1–5:

1. $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) \geqslant -1$;
2. $\log_2^2 x - \log_2 x - 6 < 0$;
3. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2) \geqslant -1$;
4. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1-2x}{x} \leqslant 0$;
5. $\frac{\lg^2 x-\lg x-4}{\lg x-1} > 1$.

Вариант 3

Решите неравенства 1–5:

1. $\log_3 \frac{3x-5}{x+1} \leqslant 1$;
2. $(5x-2)\log_{\frac{1}{3}} x < 0$;
3. $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3x+2) > \log_{\frac{1}{2}}(6-x^2+4x)$;
4. $\log_2(x-1) + \log_2 x \leqslant 1$;
5. $\left(\frac{x}{10}\right)^{\lg x-2} < 100$.

Вариант 4

Решите неравенства 1–5:

1. $\log_{\frac{1}{2}} \frac{4x-1}{x+2} \geqslant -2$;
2. $(2x-3)\log_2 x \geqslant 0$;
3. $\log_{\frac{1}{4}}(x^2-x-2) > \log_{\frac{1}{4}}(3-x^2+2x)$;
4. $\log_3(x+2) + \log_3 x \leqslant 1$;
5. $\left(\frac{x}{4}\right)^{\log_2 x-1} < 4$.

Вариант 5

Решите неравенства 1–5:

1. $|x-2|^{x^2-2x-3} > 1$;
2. $\log_{\frac{3}{4}} \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} < 0$;
3. $\log_x(3-x) \cdot \log_{2x-1}(3-x) < \log_x(3-x) \cdot \log_{5-2x}(3-x)$;
4. $\sqrt{7-\log_2 x^x} + \log_2 x^4 > 4$;
5. $(4^{-x} + 3 \cdot 2^{x+1})^{\log_7 x - \log_x 7 - 2} \leqslant 1$.

Вариант 6

Решите неравенства 1–5:

1. $|x|^{x^2-3x+2} < 1$;
2. $\log_{\sqrt{5}} \cdot \log_{\frac{1}{32}} \frac{x-4}{1-x} \geqslant -2$;
3. $\log_{x-2}(5-x) \cdot \log_{x-1}(5-x) < \log_{x-2}(5-x) \cdot \log_{4-x}(5-x)$;
4. $\sqrt{7+\log_2 x^2} > \log_2 x^6 - 3$;
5. $(3^{x+2} + 3^{-x})^{3\lg x - \lg(2x^2+3x)} < 1$.

Вариант 7

Решите неравенства 1–5:

1. $\log_{x+1}(5x^2 - x) \geqslant 2$;
2. $\log_2(2^x - 1) \cdot \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$;
3. $x^{\frac{3}{2} - \log_{\frac{1}{3}} x^2} \geqslant x^{\log^2_{\frac{1}{3}} x - \frac{3}{2}}$;
4. $\log_{|2x+2|}(1-9^x) < \log_{|2x+2|}(1+3^x) + \log_{|2x+2|}\left(\frac{5}{9} + 3^{x-1}\right)$;
5. $49^{\log_x 5} - 5^{\log_x 7} - 2 \geqslant 0$.

Вариант 8

Решите неравенства 1–5:

1. $\log_{1-x}(3x^2 - x) \leqslant 2$;
2. $\log_4(18 - 2^x) \log_2 \frac{18-2^x}{2} \leqslant 1$;
3. $x^{\frac{3}{2} - \log_2 x^2} \geqslant x^{\log_2^2 x - \frac{3}{2}}$;
4. $\log_{|3x-3|}(25^x - 9^x) < \log_{|3x-3|}(5^x + 3^x) +$
   $+ \log_{|3x-3|}(5^{x-1} + 3^{x-1})$;
5. $3^{\log_x 2} + 4^{\log_x 3} \leqslant 20$.

13. Определение тригонометрических функций

Вариант 1

1. Переведите из градусной меры в радианную:
   а) $360°$, б) $120°$, в) $270°$.
2. Переведите из радианной меры в градусную:
   а) $\dfrac{\pi}{3}$, б) $\dfrac{5\pi}{6}$, в) $\dfrac{3\pi}{4}$.
3. Решите уравнения:
   а) $\sin 2x = 0$, б) $\cos(x - \frac{\pi}{4}) = -1$.

Вариант 2

1. Переведите из градусной меры в радианную:
   а) $90°$, б) $210°$, в) $150°$.
2. Переведите из радианной меры в градусную:
   а) $\dfrac{\pi}{6}$, б) $\dfrac{3\pi}{2}$, в) $\dfrac{5\pi}{4}$.
3. Решите уравнения:
   а) $\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 1$, б) $\cos 3x = 0$.

Вариант 3

1. Переведите из радианной меры в градусную:
   а) $\dfrac{7\pi}{4}$, б) $\dfrac{2\pi}{9}$, в) $\dfrac{5\pi}{6}$.
2. На единичной окружности постройте точку, полученную поворотом точки $(1;0)$ на заданный угол:
   а) π, б) $-\dfrac{\pi}{3}$, в) $\dfrac{5\pi}{4}$.
3. Вычислите: $\sin^2 \frac{\pi}{4} - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} - \cos \frac{\pi}{3} + \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}$.

Вариант 4

1. Переведите из радианной меры в градусную:
   а) $\dfrac{11\pi}{18}$, б) $\dfrac{7\pi}{12}$, в) $\dfrac{3\pi}{10}$.
2. На единичной окружности постройте точку, полученную поворотом точки $(1;0)$ на заданный угол:
   а) $\dfrac{\pi}{2}$, б) $\dfrac{7\pi}{4}$, в) $-\dfrac{2\pi}{3}$.
3. Вычислите: $\cos \frac{\pi}{3} + 2\sin \frac{\pi}{2} + 4\cos \pi + \dfrac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{3}$.

Вариант 5

1. Постройте на единичной окружности точки, соответствующие:

   а) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, б) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, в) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{2}$.

2. Вычислите: $\sin^2\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}$.
3. Решите уравнения:

   а) $\cos(2x - \frac{\pi}{3}) = 1$, б) $2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$.

Вариант 6

1. Постройте на единичной окружности точки, соответствующие:

   а) $\sin\alpha = -\frac{3}{4}$, б) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, в) $\operatorname{tg}\alpha = 2$.

2. Вычислите: $3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{6}$.
3. Решите уравнения:

   а) $\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 1$, б) $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$.

Вариант 7

1. Имеется круг радиуса 1. Найдите центральный угол сектора с радиусом 2, если их площади равны.
2. Существует ли такое α, что $\sin\alpha = \frac{6\sqrt{5}-2\sqrt{30}}{2}$?
3. Решите уравнения:

   а) $2\cos^2 2x - \cos 2x = 0$,

   б) $2\sin^3 x - 3\sin^2 x + 1 = 0$.

Вариант 8

1. Имеется круг радиуса 2. Найдите центральный угол сектора с радиусом 3, если их площади равны.
2. Существует ли такое α, что $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{14}-3\sqrt{33}}{2}$?
3. Решите уравнения:

   а) $2\sin^2 2x - \sin 2x = 0$,

   б) $2\cos^3 x - 3\cos^2 x + 1 = 0$.

14. Тригонометрические тождества

Вариант 1

1. Определите знак выражения:
   а) $\sin 182^\circ$, б) $\cos \frac{7\pi}{4}$, в) $\operatorname{tg} 0{,}9\pi$.
2. Вычислите $\sin(-45^\circ) + \cos(-45^\circ) + 3\operatorname{tg}(-45^\circ)$.
3. Упростите:
   а) $\frac{\cos^2 2\alpha - 1}{1 - \sin^2 2\alpha}$, б) $\sin\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

Вариант 2

1. Определите знак выражения:
   а) $\sin 230^\circ$, б) $\sin 97^\circ$, в) $\operatorname{tg} \frac{5\pi}{3}$.
2. Вычислите $4\cos(-60^\circ) + 2\sin(-30^\circ) + 5\operatorname{ctg}(-45^\circ)$.
3. Упростите:
   а) $\frac{1 - \sin^2 3\alpha}{\cos^2 3\alpha - 1}$, б) $\cos\alpha + \sin\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант 3

1. Определите знак выражения:
   а) $\operatorname{tg} 112^\circ \cdot \sin 165^\circ$, б) $\sin 2 \cdot \cos 2 \cdot \operatorname{tg} 4$.
2. Вычислите:
$$2\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) \cdot \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - 5\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right).$$
3. Упростите:
   а) $\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} + \frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 2\alpha}$,
   б) $(1 - \cos^2\alpha)\operatorname{tg}^2\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2\alpha$.

Вариант 4

1. Определите знак выражения:
   а) $\operatorname{tg} 300^\circ \cdot \sin 220^\circ$, б) $\sin 3 \cdot \cos 4 \cdot \operatorname{tg} 5$.
2. Вычислите:
$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) + 3\cos\pi + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

3. Упростите:

а) $\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}}$,

б) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)$.

Вариант 5

1. Дано: $\cos x=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$; $\frac{3\pi}{2}<a<2\pi$. Найдите $\sin x$; $\operatorname{tg}x$; $\operatorname{ctg}x$.
2. а) Дано: $\operatorname{tg}\alpha=5$. Вычислите $\frac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$,

   б) Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=-2$. Вычислите $\frac{2\cos^2\alpha-7\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha}$.
3. Упростите выражение, если $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$.

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}-\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

Вариант 6

1. Дано: $\sin x=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$. Найдите $\cos x$; $\operatorname{tg}x$; $\operatorname{ctg}x$.
2. а) Дано: $\operatorname{tg}\alpha=0{,}5$. Вычислите $\frac{5\cos\alpha+6\sin\alpha}{3\sin\alpha-7\cos\alpha}$,

   б) Дано: $\operatorname{tg}\alpha=2$.
   Вычислите $\frac{3\sin^2\alpha+12\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha}$.
3. Упростите выражение, если $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

$$\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}-\sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}.$$

Вариант 7

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $1-\sqrt{\cos^2\alpha}-2\sin^2\alpha$.
2. Дано: $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=a$. Найдите:

   а) $\operatorname{tg}^2x+\operatorname{ctg}^2x$, б) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$, в) $\cos x+\sin x$.
3. Дано: $\operatorname{ctg}\alpha=2$. Найдите: $\frac{\sin^4\alpha+5\sin^3\alpha\cos\alpha-\cos^4\alpha}{2\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}$.

Вариант 8

1. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $1+\sqrt{\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha}$.

2. Дано: $\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x=b$. Найдите:
   а) $\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{ctg}^2 x$, б) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$, в) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x$.

3. Дано: $\operatorname{tg}\alpha=-4$. Найдите $\frac{2\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha}{5\sin\alpha-\cos\alpha}$.

15. Формулы сложения. Двойные углы

Вариант 1

1. Вычислите по формулам сложения:
   а) $\sin 225^\circ$, б) $\cos 330^\circ$.

2. Упростите:
   а) $\frac{\sin 20^\circ\cos 5^\circ-\cos 20^\circ\sin 5^\circ}{\cos 10^\circ\cos 5^\circ-\sin 10^\circ\sin 5^\circ}$, б) $\frac{\sin 2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$,
   в) $\frac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}$,
   г) $\frac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$.

Вариант 2

1. Вычислите по формулам сложения:
   а) $\cos 240^\circ$, б) $\sin 210^\circ$.

2. Упростите:
   а) $\frac{\cos\frac{\pi}{30}\cos\frac{\pi}{15}+\sin\frac{\pi}{30}\sin\frac{\pi}{15}}{\sin\frac{7\pi}{30}\cos\frac{4\pi}{15}+\cos\frac{7\pi}{30}\sin\frac{4\pi}{15}}$, б) $\frac{\sin\alpha}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$,
   в) $\frac{\cos 3\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin 3\alpha}{\cos\alpha}$,
   г) $\frac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$.

Вариант 3

1. Вычислите:
   а) $\sin 930^\circ$, б) $\cos(-\frac{4\pi}{3})$, в) $\operatorname{ctg}(-\frac{5\pi}{3})$.

2. Упростите:

а) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{6\pi}{7}}{\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}+\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}$,

б) $\dfrac{1-\operatorname{tg}14^\circ\operatorname{tg}46^\circ}{\operatorname{tg}14^\circ+\operatorname{tg}46^\circ}$,

в) $\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$,

г) $\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант 4

1. Вычислите:

а) $\cos(-480^\circ)$, б) $\sin(-\frac{5\pi}{3})$, в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}$.

2. Упростите:

а) $\dfrac{\cos\frac{11\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20}-\sin\frac{11\pi}{20}\sin\frac{9\pi}{20}}{\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{3\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}\sin\frac{3\pi}{8}}$,

б) $\dfrac{1+\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}46^\circ}{\operatorname{tg}1^\circ-\operatorname{tg}46^\circ}$,

в) $\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha$,

г) $\operatorname{ctg}2\alpha-\operatorname{tg}2\alpha$.

Вариант 5

1. Упростите:

а) $\dfrac{\cos 64^\circ\cos 4^\circ-\cos 86^\circ\cos 26^\circ}{\cos 71^\circ\cos 41^\circ-\cos 49^\circ\cos 19^\circ}$,

б) $\dfrac{\cos(30^\circ-\alpha)-\cos 330^\circ\cos\alpha}{\sin(30^\circ-\alpha)+\sin 120^\circ\sin\alpha}$,

в) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$.

2. Вычислите:

$$\sin^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}.$$

Вариант 6

1. Упростите:

а) $\dfrac{\cos 66^\circ\cos 6^\circ+\cos 84^\circ\cos 24^\circ}{\cos 65^\circ\cos 5^\circ+\cos 85^\circ\cos 25^\circ}$, б) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos(45^\circ+\alpha)}{2\sin(45^\circ+\alpha)-\sqrt{2}\sin\alpha}$, в) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\cos^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-4}$.

2. Вычислите: $\cos^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\sin^4\frac{7\pi}{8}$.

Вариант 7

1. Упростите:

   а) $\dfrac{1-\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(45^\circ+3\alpha)}{\operatorname{tg}(45^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(45^\circ-3\alpha)}+\operatorname{tg}4\alpha$,

   б) $\dfrac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}$.

2. Вычислите:

   а) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$, б) $\sin 18^\circ$.

Вариант 8

1. Упростите:

   а) $\dfrac{1-\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ+5\alpha)}{\operatorname{tg}(60^\circ+\alpha)+\operatorname{ctg}(60^\circ-5\alpha)}$,

   б) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$.

2. Вычислите:

   а) $\sin\frac{\pi}{18}\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}$, б) $\cos 18^\circ$.

16. Формулы приведения. Преобразование суммы в произведение

Вариант 1

1. Приведите к наименьшему значению положительного аргумента:

   а) $\cos 123^\circ$, б) $\operatorname{tg}256^\circ$, в) $\sin\frac{14\pi}{15}$.

2. Преобразуйте в произведение:

   а) $\cos 50^\circ+\cos 20^\circ$, б) $\sin 2\alpha-\sin 10\alpha$.

3. Упростите $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$.

Вариант 2

1. Приведите к наименьшему значению положительного аргумента:
   а) $\sin 216^\circ$, б) $\operatorname{tg} 174^\circ$, в) $\cos \frac{17\pi}{14}$.
2. Преобразуйте в произведение:
   а) $\sin 12^\circ + \sin 20^\circ$, б) $\cos 6\alpha - \cos 3\alpha$.
3. Упростите $\frac{\cos 2\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$.

Вариант 3

1. Упростите:
$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)\cos(3\pi - \alpha) + \sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)\sin(3\pi + \alpha).$$
2. Преобразуйте в произведение:
   а) $\sin 50^\circ + \cos 20^\circ$, б) $\operatorname{tg} 25^\circ - \operatorname{ctg} 55^\circ$.
3. Упростите $\frac{\cos\alpha - \cos 2\alpha - \cos 4\alpha + \cos 5\alpha}{\sin\alpha - \sin 2\alpha - \sin 4\alpha + \sin 5\alpha}$.

Вариант 4

1. Упростите:
$$\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\cos\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - 3\pi)\cos\left(\alpha + \frac{7\pi}{2}\right).$$
2. Преобразуйте в произведение:
   а) $\sin 10^\circ + \cos 40^\circ$, б) $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{ctg} 20^\circ$.
3. Упростите: $\frac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}$.

Вариант 5

1. Упростите: $\frac{\sin(x-\pi)\cos(x-2\pi)\sin(2\pi-x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{ctg}(\pi-x)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)}$.
2. Вычислите:
$$\frac{\sin(-1{,}8\pi)\cos 0{,}3\pi + \cos 0{,}2\pi\sin(-1{,}7\pi)}{\cos 0{,}125\pi\cos\left(-\frac{43\pi}{24}\right) - \cos\frac{3\pi}{8}\sin\frac{5\pi}{24}}.$$
3. Преобразуйте в произведение:
$$1 - 2\cos\alpha + \cos 2\alpha.$$

Вариант 6

1. Упростите: $\dfrac{\sin(\alpha+\pi)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}$.
2. Вычислите:
$$\frac{\sin 0{,}3\pi\cos(-2{,}8\pi)+\cos 0{,}3\pi\sin(-2{,}8\pi)}{\cos 0{,}3\pi\cos 2{,}3\pi-\sin 0{,}3\pi\sin(-4{,}3\pi)}.$$
3. Преобразуйте в произведение:
$$1-2\sin\alpha+\cos 2\alpha.$$

Вариант 7

1. Вычислите: $\sin\left(-\frac{7\pi}{4}\right)\cos\frac{7\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.
2. Упростите: $\dfrac{\cos^2(4\alpha-3\pi)-4\cos^2(2\alpha-\pi)+3}{\cos^2(4\alpha+3\pi)+4\cos^2(2\alpha+\pi)-1}$.
3. Преобразуйте в произведение:
$$\operatorname{tg}6\alpha-\operatorname{tg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha.$$

Вариант 8

1. Вычислите:
$$\sin\left(-\frac{11\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{4}\right)\operatorname{ctg}\left(-\frac{5\pi}{3}\right).$$
2. Упростите: $\dfrac{\sin^2(\alpha-\pi)-4\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)+4\cos^2\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)-4}$.
3. Преобразуйте в произведение:
$$\operatorname{ctg}6\alpha-\operatorname{ctg}4\alpha-\operatorname{tg}2\alpha.$$

17. Простейшие тригонометрические уравнения

Вариант 1

1. Вычислите:
   а) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$, б) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$, в) $\sin\left(\arccos\frac{1}{4}\right)$.
2. Решите уравнения:
   а) $\cos 2x=-\dfrac{1}{2}$, б) $\sin x\cos x=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$,
   в) $2\sin x+1=\operatorname{tg}x+2\sin x\operatorname{tg}x$.

Вариант 2

1. Вычислите:
   а) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, в) $\cos\left(\arcsin\frac{1}{5}\right)$.
   б) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,
2. Решите уравнения:
   а) $\sin\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$,
   б) $2\cos^2 x=1-\frac{\sqrt{2}}{2}$,
   в) $2\cos x-1=2\cos x\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}x$.

Вариант 3

1. Решите уравнения:
   а) $\cos^2\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{3}{4}$,
   б) $\sin 7x\cos 3x-\cos 7x\sin 3x=-1$,
   в) $\sin 2x\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x+\sin 2x=1$.
2. Вычислите:
   а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, б) $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Вариант 4

1. Решите уравнения:
   а) $\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{4}$,
   б) $\cos 3x\cos 6x+\sin 6x\sin 3x=-1$,
   в) $\cos 2x\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x-\cos 2x=1$.
2. Вычислите:
   а) $\operatorname{ctg}\left(\arcsin\frac{1}{2}\right)$, б) $\cos\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right)$.

Вариант 5

1. Вычислите:
   а) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arcsin\frac{5}{13}\right)$,
   б) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\frac{10\pi}{13}\right)$.

2. Решите уравнение $\sin 4x - \cos 2x = 0$.
3. Решите уравнение $\cos(\arccos(4x - 9)) = x^2 - 5x + 5$.

Вариант 6

1. Вычислите:
   а) $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{3}{5}\right)$,
   б) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 5)$.
2. Решите уравнение $\sin 6x + \cos 3x = 0$.
3. Решите уравнение $\sin(\arcsin(x - 1)) = x^2 - 4x + 5$.

Вариант 7

1. Вычислите:
   а) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{12}{13}\right) + \arcsin\frac{3}{5}\right)$,
   б) $\arccos(\sin 12)$.
2. Решите уравнение $\sin 2x + \cos 4x = 1$.
3. Решите уравнение $\arccos x = \pi + (x^2 - 1)^2$.

Вариант 8

1. Вычислите:
   а) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right) + \arccos\frac{12}{13}\right)$,
   б) $\arcsin(\cos 8)$.
2. Решите уравнение $\cos 2x - \cos 4x = 1$.
3. Решите уравнение $2\arcsin x = -\pi - (x + 1)^2$.

18. Тригонометрические уравнения

Вариант 1

Решите уравнения 1–5:

1. $\sin^2 x - \sin x - 2 = 0$;
2. $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$;
3. $\sin x - \cos x = 0$;
4. $\sin x - \sin 3x = 0$;
5. $\cos x - \sin x = 1$.

Вариант 2

Решите уравнения 1–5:

1. $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0;$
2. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0;$
3. $\sin x + \cos x = 0;$
4. $\cos x + \cos 3x = 0;$
5. $\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2} = -1.$

Вариант 3

Решите уравнения 1–5:

1. $4\sin^2 x + 3\sin x\cos x - 7\cos^2 x = 0;$
2. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0;$
3. $3\sin x - 4\cos x = 5;$
4. $\cos^2 x + \cos^2 3x = \cos^2 2x + \cos^2 4x;$
5. $\cos 2x = \cos x - \sin x.$

Вариант 4

Решите уравнения 1–5:

1. $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0;$
2. $\sin 3x + \sin 5x = \sin 4x;$
3. $3\sin x + 4\cos x = 3;$
4. $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2;$
5. $\cos 2x = \cos x + \sin x.$

Вариант 5

Решите уравнения 1–3:

1. $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x;$
2. $\sin 2x \sin 6x = \cos x \cos 3x;$
3. $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 4.$
4. Дано: $-2 < x < 2$.
   Решите уравнение $4\sin^2 x(1 + \cos 2x) = 1 - \cos 2x.$
5. Установите, при каких значениях параметра a уравнение имеет решение, и решите его:
   $$\cos x + \cos 5x = a^2 - 2a + 3\,.$$

Вариант 6

Решите уравнения 1–3:

1. $1 + \sin 2x = \cos x + \sin x$;
2. $\cos 4x \cos 7x = \cos 6x \cos 3x$;
3. $\mathrm{tg}^3\, x + \mathrm{ctg}^3\, x + \mathrm{tg}^2\, x + \mathrm{ctg}^2\, x = 0$.
4. Дано: $-1 < x < 1$. Решите уравнение
$$\cos 7x + \cos^2 2x = 2\sin^2 2x - \cos x.$$
5. Установите, при каких значениях параметра a уравнение имеет решение, и решите его:
$$\sin x - \cos 2x = 4a^2 + 4a + 3.$$

Вариант 7

Решите уравнения 1–4:

1. $4\sin^3 x - \sin x + \cos x = 0$;
2. $11\sin x + 11\cos x - 5\sin 2x = 7$;
3. $\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x = -\frac{1}{2}$;
4. $\left(2 + \frac{1}{\cos^2 4x}\right)(4 - 2\cos^2 4x) = 1 + 5\sin^2 x$.
5. Определите количество корней уравнения $\left(\cos x + \frac{1}{2}\right) \times$ $\times (\sin x - a) = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Вариант 8

Решите уравнения 1–4:

1. $\cos^3 2x - \cos 2x + \sin 2x = 0$;
2. $\sin 2x + 5\sin x + 5\cos x = 0$;
3. $\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \cos 8x = -\frac{1}{2}$;
4. $\left(5 + \frac{3}{\sin^2 x}\right)(2 - 2\sin^6 x) = 7 + \cos 4x$.
5. Определите количество корней уравнения $\left(\sin x - \frac{1}{2}\right) \times$ $\times (\cos x - a) = 0$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

19. Тригонометрические системы и неравенства

Вариант 1

Решите неравенства 1–3:

1. $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2}$;
2. $\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) > \frac{1}{2}$;
3. $\operatorname{tg} x \geqslant -1$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25 \\ \cos x \sin y = 0{,}75 \end{cases}$$

Вариант 2

Решите неравенства 1–3:

1. $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > -\frac{1}{2}$;
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2}$;
3. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} < 1$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} \sin x \sin y = 0{,}75 \\ \cos x \cos y = 0{,}25 \end{cases}$$

Вариант 3

Решите неравенства 1–3:

1. $|\sin 2x| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$;
2. $2\cos^2 x + 3\cos x - 2 < 0$;
3. $\sqrt{\cos 2x} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{1}{4\sqrt{2}} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Вариант 4

Решите неравенства 1–3:

1. $|\cos x| > \frac{1}{2}$;
2. $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 > 0$;
3. $\sqrt{\sin 2x} < \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} \cos x \cos y = \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 1 \end{cases}$$

Вариант 5

Решите неравенства 1–3:

1. $\sqrt{2\sin^2 x - \sin x - 1} \leqslant \sin x + 0{,}5$;
2. $\sin^4 x + \cos^4 x < \frac{3}{4}$;
3. $\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 4\cos^2 x > 0$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \cos x - \cos y = \sqrt{3} \end{cases}$$

Вариант 6

Решите неравенства 1–3:

1. $\sqrt{2\cos^2 x + \cos x - 1} \leqslant \cos x - 0{,}5$;
2. $\sin^4 x + \cos^4 x \leqslant \frac{5}{8}$;
3. $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x > 0$.
4. Решите систему
$$\begin{cases} \sin x - \sin y = 0{,}5 \\ \cos x + \cos y = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Вариант 7

Решите неравенства 1–3:

1. $\frac{1-\cos 2x}{2\sin x+1} > 0$;
2. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x < 0$;

3. $\sqrt{5-4x-x^2}(\sin 2x+\sin x)\leqslant 0$.
4. Решите систему
$$\begin{cases}\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y+\operatorname{tg} z=6\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=3\\ x+y+z=\pi\end{cases}$$

Вариант 8

Решите неравенства 1–3:

1. $\frac{1+\cos 2x}{2\cos x+1}>0$;
2. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x\geqslant 2$;
3. $\sqrt{5+9x-2x^2}(\operatorname{ctg}^2 x+\operatorname{ctg} x)\leqslant 0$.
4. Решите систему
$$\begin{cases}\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y\operatorname{tg} z=6\\ \operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y=5\\ x+y+z=\pi\end{cases}$$

20. Свойства тригонометрических функций

Вариант 1

1. Установите область определения функции
$$f(x)=\frac{1}{\sin(3x-2)}.$$
2. Найдите множество значений функции
$$f(x)=1+3\sin(x+1).$$
3. Исследуйте функцию на четность и нечетность
$$f(x)=\frac{x^3+\sin 3x}{\sin 3x-x}.$$
4. Найдите период функции $f(x)=\sin^2 2x$.
5. При каких значениях a возможно равенство
$$\sin x=a^2-1?$$
6. Решите неравенство $x\cdot\cos 3<\sin 6$.
7. Определите знак разности $0{,}5-\sin\frac{11\pi}{12}$.

Вариант 2

1. Установите область определения функции
$$f(x) = \frac{1}{\cos(2x-3)}.$$
2. Найдите множество значений функции
$$f(x) = 2 - 3\cos(x+2).$$
3. Исследуйте функцию на четность и нечетность
$$f(x) = \frac{\cos 4x - x^4}{x^2 - \cos 2x}.$$
4. Найдите период функции $f(x) = \cos^2 3x$.
5. При каких значениях a возможно равенство
$$\cos x = a^2 + 1?$$
6. Решите неравенство $x \cdot \sin 4 \geqslant \sin 8$.
7. Определите знак разности $\operatorname{tg}\frac{9\pi}{8} - 1$.

Вариант 3

1. Установите область определения функции
$$f(x) = \sqrt{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}.$$
2. Найдите множество значений функции
$$y = 1 - \sqrt{\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)}.$$
3. Исследуйте функцию на четность и нечетность
$$f(x) = \frac{(x-1)\cos x}{x-1}.$$
4. При каких значениях a основной период функции $f(x) = 3\sin(a\pi x)$ равен 3?
5. При каких значениях a возможно равенство
$$\cos x = \frac{a}{a-1}?$$
6. Решите неравенство $|x| \cdot \operatorname{ctg} 3 < \cos 3$.
7. Определите знак разности $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{7} - \sqrt{3}$.

Вариант 4

1. Установите область определения функции
$$f(x) = \sqrt{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$
2. Найдите множество значений функции
$$y = 2 + \sqrt{\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)}.$$
3. Исследуйте функцию на четность и нечетность
$$f(x) = \frac{(x+1)\sin x}{x+1}.$$
4. При каких значениях m основной период функции $f(x) = 5\cos(m\pi x)$ равен 7?
5. При каких значениях a возможно равенство
$$\sin x = 2a - a^2 - 2?$$
6. Решите неравенство $|x| \cdot \operatorname{tg} 5 \geqslant \sin 5$.
7. Определите знак разности $\frac{\sqrt{3}}{2} - \cos\frac{23\pi}{12}$.

Вариант 5

1. Установите область определения функции
$$y = 3\sqrt{\sin 2x} - 2\sqrt{\operatorname{ctg} 2x}.$$
2. Найдите множество значений функции
$$y = 2 + 2\cos 8x + 7\sin^2 4x.$$
3. Исследуйте функцию на четность и нечетность
$$f(x) = \sqrt{\cos x} + 5x^2 - 2.$$
4. Найдите период функции
$$y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right).$$
5. Постройте график функции $y = \cos^2\sqrt{\operatorname{tg} x} + \sin^2\sqrt{\operatorname{tg} x}$.
6. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y| = \frac{\cos x}{|\cos x|}$.
7. Определите знак разности $\sin 1 - \sin 2$.

Вариант 6

1. Установите область определения функции
$$y=5\sqrt{\cos 3x}+2\sqrt{\operatorname{tg} 3x}.$$
2. Найдите множество значений функции
$$y=3\cos^2\frac{x}{2}+8\sin^2\frac{x}{4}\cdot\cos^2\frac{x}{4}.$$
3. Исследуйте функцию на четность и нечетность
$$f(x)=\sqrt{\sin x}-5x^2+2.$$
4. Найдите период функции
$$y=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+2\cos\left(5x-\frac{\pi}{4}\right).$$
5. Постройте график функции $y=\cos^2\sqrt{\sin x}+\sin^2\sqrt{\sin x}$.
6. Изобразите множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $|y|=\sin x/|\sin x|$.
7. Определите знак разности $\sin 1-\sin\left(1+\frac{2\pi}{5}\right)$.

Вариант 7

1. Установите область определения функции
$$f(x)=\sqrt{\cos x}-\sqrt{3x-1}.$$
2. Найдите множество значений функции $f(x)=\cos(\sin x)$.
3. Исследуйте функцию на четность и нечетность
$$f(x)=\sqrt{x^2}\cdot\cos 2x\cdot\operatorname{tg} 3x.$$
4. Найдите период функции $f(x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^3\frac{x}{2}$.
5. Постройте график уравнения $x^2+\sin^2 y=0$.
6. Установите промежуток знакопостоянства, возрастания и убывания функции $f(x)=2\left(1+\sin\frac{x}{3}\cdot\cos\frac{x}{3}\right)$.
7. Постройте график функции $y=5x\sqrt{x}\cdot\sqrt{-\sin^2 x}$.

Вариант 8

1. Установите область определения функции
$$f(x)=4\sqrt{\sin x}+\sqrt{2x-5}.$$
2. Найдите множество значений функции $f(x)=\sin(\cos x)$.

3. Исследуйте функцию на четность и нечетность:
$$f(x) = \sqrt{x^4} \cdot \sin 3x \cdot \operatorname{ctg} 2x.$$
4. Найдите период функции $f(x) = \cos \frac{x}{2} \cdot \sin^3 \frac{x}{2}$.
5. Постройте график уравнения $y^2 + \cos^2 x = 0$.
6. Установите промежуток знакопостоянства, возрастания и убывания функции $f(x) = 2(1 - \cos 3x \cdot \sin 3x)$.
7. Постройте график функции $y = 3x\sqrt[3]{-\cos^2 x}$.

21. Графики тригонометрических функций

Вариант 1

1. Постройте графики функций:

   1) $y = \sin 2x$, 3) $y = 2^{\log_2 \sin x}$,

   2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$, 4) $y = \frac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$.

2. Используя графики функций, решите неравенство $\operatorname{tg} x > \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}$.

Вариант 2

1. Постройте графики функций:

   1) $y = \cos \frac{x}{2}$, 3) $y = 0{,}3^{\log_{0,3} \cos x}$,

   2) $y = \operatorname{tg}(-2x) \cdot \operatorname{ctg} 2x$, 4) $y = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$.

2. Используя графики функций, решите неравенство $\operatorname{tg} x < \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}$.

Вариант 3

1. Постройте графики функций:

   1) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 3) $y = \operatorname{tg} x \cdot |\cos x|$,

   2) $y = \sin x + \sqrt{\sin^2 x}$, 4) $y = \operatorname{tg} |x|$.

2. Используя графики функций, решите неравенство $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) > \sin \frac{\pi}{4}$.

Вариант 4

1. Постройте графики функций:

   1) $y = \frac{1}{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, 3) $y = \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x|$,

   2) $y = \cos x + \sqrt{\cos^2 x}$, 4) $y = \operatorname{ctg}|x|$.

2. Используя графики функций, решите неравенство $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) > \cos\frac{\pi}{6}$.

Вариант 5

1. Постройте графики функций:

   1) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x$, 3) $y = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}}$.

   2) $y = \sqrt{\lg \sin \pi x}$,

2. Используя графики функций, решите неравенство $(2\sin x - 1)/(\sin x) < 0$; $x \in (0; \pi)$.

Вариант 6

1. Постройте графики функций:

   1) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$, 3) $y = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 x}}$.

   2) $y = \sqrt{\lg \cos \pi x}$,

2. Используя графики функций, решите неравенство $(2\cos x - 1)/(\cos x) < 0$; $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 7

1. Постройте графики функций:

   1) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$, 3) $y = \frac{2}{\sin x - |\sin x|}$.

   2) $y = |\cos x| \cdot \operatorname{tg}|x|$,

2. Постройте график уравнения $|y - \sin x| = y$.

Вариант 8

1. Постройте графики функций:

   1) $y = 1{,}5\sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right)$, 3) $y = \frac{2}{\sin x + |\sin x|}$.

   2) $y = \dfrac{\sin|2x|}{|\sin x|}$,

2. Постройте график уравнения $|y - \cos x| = y$.

22. Обратные тригонометрические функции

Вариант 1

1. Установите область определения функции
$$y = \arcsin(x-2).$$
2. Установите множество значений функции
$$y = \arccos x - 3.$$
3. Вычислите $\cos\left(\arcsin\frac{4}{5}\right)$.
4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$.
5. Решите уравнение $\arcsin(x^2-4) = \arcsin(2x+4)$.
6. Решите неравенство $\arccos(2x-1) > \dfrac{\pi}{3}$.

Вариант 2

1. Установите область определения функции
$$y = \arccos(x+3).$$
2. Установите множество значений функции
$$y = \arcsin x - 2.$$
3. Вычислите $\sin\left(\arccos\frac{1}{3}\right)$.
4. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{4} + \frac{3\pi}{2}\right)$.
5. Решите уравнение $\arccos(3x-16) = \arccos(x^2-26)$.
6. Решите неравенство $\arcsin 2x > \dfrac{\pi}{6}$.

Вариант 3

1. Установите область определения функции
$$y = \arccos(x-3) + \operatorname{arcctg}\sqrt{x-2}.$$
2. Установите множество значений функции
$$y = \arcsin\sqrt{x} + 4.$$
3. Вычислите $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{8}\right)$.
4. Вычислите $\sin(\operatorname{arctg}(-3))$.
5. Решите уравнение $2\arcsin x = \arcsin 2x$.
6. Решите неравенство $\arcsin(2-3x) < \dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 4

1. Установите область определения функции
$$y = \arcsin(x+2) + \operatorname{arctg}\sqrt{x+2}.$$
2. Установите множество значений функции
$$y = \arccos\sqrt{-x} + 2.$$
3. Вычислите $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$.
4. Вычислите $\cos(\operatorname{arctg} 2)$.
5. Решите уравнение $2\arcsin 3x = \arcsin 2x$.
6. Решите неравенство $\arccos(4-7x) < \dfrac{5\pi}{6}$.

Вариант 5

1. Установите область определения функции
$$y = \arcsin\sqrt{1-x} + 2\arcsin\sqrt{x}.$$
2. Установите множество значений функции
$$y = \frac{1}{\arcsin x}.$$
3. Вычислите $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)$.
4. Вычислите $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5} - \arccos\frac{5}{13}\right)$.
5. Решите уравнение $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2}$.
6. Решите неравенство $\arcsin(3x-2) > \arcsin(5x-3)$.

Вариант 6

1. Установите область определения функции
$$y = \arccos(2x^2 - 1) + \arcsin x.$$
2. Установите множество значений функции
$$y = \frac{1}{\arccos x}.$$
3. Вычислите $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)$.
4. Вычислите $\sin\left(\arcsin\frac{4}{5} + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.
5. Решите уравнение $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{3} = \frac{\pi}{2}$.
6. Решите неравенство $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} \geqslant \operatorname{arctg} x$.

Вариант 7

1. Установите область определения функции
$$y = \sqrt{\arccos x - \pi}.$$
2. Установите множество значений функции
$$y = \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}}.$$
3. Вычислите $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)$.
4. Постройте график функции $y = \cos(2\arcsin x)$.
5. Постройте график функции $y = \arcsin(\sin x)$.
6. Решите уравнение $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Вариант 8

1. Установите область определения функции
$$y = \sqrt{\frac{\pi}{2} - \arcsin x}.$$
2. Установите множество значений функции
$$y = \frac{1}{\sqrt{\arccos x}}.$$
3. Вычислите $\operatorname{arctg}\frac{3}{4} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7}$.
4. Постройте график функции $y = \cos(2\arccos x)$.
5. Постройте график функции $y = \arccos(\cos x)$.
6. Решите уравнение $\arcsin x \cdot \arccos x = \frac{\pi^2}{18}$.

Контрольные работы

1. Действительные числа

Вариант 1

1. Вычислите:

   а) $\dfrac{30^{\frac{2}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}}}{5^{\frac{2}{3}} \cdot 81^{\frac{1}{6}}}$,

   б) $(32^{-\frac{2}{5}} + 8^{-\frac{2}{3}}) \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$,

   в) $4\sqrt{5\sqrt{48}} + 3\sqrt{40\sqrt{12}} - 2\sqrt{15\sqrt{27}}$.

2. Сократите дробь $\dfrac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{ab} - 2\sqrt[3]{b^2}}{a - 8b}$.

3. Сравните числа:

   а) $\sqrt{12} - \sqrt{11}$ и $\sqrt{13} - \sqrt{12}$,

   б) $\sqrt{18} + \sqrt{11}$ и $4 + \sqrt{13}$.

4. Упростите

$$\frac{8-a}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}+4} - \left(a^{\frac{1}{3}} + \frac{2a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{a}-2}\right) \cdot \frac{4-a^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}+2a^{\frac{1}{3}}}.$$

Вариант 2

1. Вычислите:

   а) $\dfrac{40^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{7}{4}}}{10^{\frac{1}{4}} \cdot 64^{\frac{1}{8}}}$, б) $(27^{-\frac{2}{3}} + 81^{-\frac{3}{4}}) \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}$,

   в) $5\sqrt{3\sqrt{32}} - 7\sqrt{15\sqrt{50}} + 4\sqrt{6\sqrt{128}}$.

2. Сократите дробь

$$\frac{27x-y}{9\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}}.$$

3. Сравните числа:
   а) $\sqrt{14}-\sqrt{13}$ и $\sqrt{15}-\sqrt{14}$,
   б) $3+\sqrt{17}$ и $\sqrt{14}+2\sqrt{3}$.
4. Упростите

$$\frac{ab}{(a^{-1}+b^{-1})^{-1}}+\frac{\sqrt[4]{a^3b^2}\cdot\sqrt{a}}{2(a+2)\sqrt[4]{a^{-3}b^{-4}}\cdot ab^{\frac{1}{2}}}\cdot\frac{1-4a^{-2}}{a^{-1}-2^{-1}}.$$

Вариант 3

1. Вычислите:
   а) $125^{\frac{2}{3}}\cdot 625^{-\frac{3}{4}}\cdot 1000^{\frac{2}{3}}$,
   б) $\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}+\frac{4}{\sqrt{11}+\sqrt{7}}+\sqrt{3}$,
   в) $\left(8\sqrt[3]{9}-30\sqrt[3]{\frac{1}{3}}+24\sqrt[3]{\frac{1}{81}}\right):\left(2\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$.
2. Упростите и вычислите:
   а) $\frac{\sqrt[3]{b\sqrt{b}}+\sqrt{b\sqrt[3]{b}}}{4b\sqrt{b}(1+\sqrt[6]{b})}$ при $b=\frac{5}{64}$,
   б) $\frac{\sqrt[3]{x}(8y-x)}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{xy}+4\sqrt[3]{y^2}}:\frac{2y^{\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{x}}-\sqrt[3]{x^2}$
   при $x=\sqrt{7}$ и $y=5$.
3. Сравните числа:
   а) $\sqrt{21}+\sqrt{7}$ и $\sqrt{13}+\sqrt{15}$,
   б) $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ и $\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

Вариант 4

1. Вычислите:
   а) $64^{-\frac{3}{4}}\cdot 4^{\frac{3}{4}}\cdot 16^{\frac{5}{4}}$,
   б) $\frac{6}{\sqrt{13}-\sqrt{7}}-\frac{4}{\sqrt{7}+\sqrt{3}}-\frac{8}{\sqrt{13}+\sqrt{5}}-\sqrt{3}$,

в) $\left(9\sqrt[3]{16}-12\sqrt[3]{\frac{1}{32}}+6\sqrt[3]{2}\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}{3}$.

2. Упростите и вычислите:

а) $\left(\frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[4]{9}}-1\right)\frac{(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{3})^2-\sqrt[4]{3a}}{\sqrt{3}}$ при $a=0{,}6$,

б) $\frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+4\sqrt[3]{b^2}}\cdot\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}-2\sqrt[3]{b}}{a^{\frac{1}{3}}}\right)^{-1}-\sqrt[3]{a^2}$

при $a=2$ и $b=\sqrt{3}$.

3. Сравните числа:

а) $\sqrt{12}+\sqrt{17}$ и $\sqrt{14}+\sqrt{15}$,

б) $\sqrt{11}+\sqrt{5}$ и $\sqrt{8}+\sqrt{7}$.

2. Степенная функция

Вариант 1

1. Найдите область определения функции:

а) $y=\sqrt{\frac{2x^2-5x+3}{4-x^2}}$,

б) $y=\sqrt[3]{\frac{7x}{4-3x-x^2}}+\sqrt[4]{\frac{x^2-8x+15}{x}}$.

2. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-2}=-x$,

б) $\sqrt{2x+1}-\sqrt{2x-4}=1$,

в) $\sqrt{x^2-2x+5}-\sqrt{x^2-2x+1}=2$.

3. Постройте график

$$y=\frac{1}{|x-3|}-1.$$

4. Решите неравенство

$$\sqrt{x^2-x-6}>x-2.$$

Вариант 2

1. Найдите область определения функции:

   а) $y=\sqrt{\frac{16-x^2}{3x^2-5x+2}}$,

   б) $y=\sqrt[6]{\frac{x}{x^2-5x+6}}+\sqrt[5]{\frac{2x}{x^2-4x+3}}$.

2. Решите уравнения:

   а) $\sqrt{12-x}=-x$,

   б) $\sqrt{4-x}-\sqrt{1-x}=1$,

   в) $\sqrt{x^2+3x+5}-\sqrt{x^2+3x}=5$.

3. Постройте график
$$y=-\frac{1}{|x+1|}+1.$$

4. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2+5x+4}>x-3.$$

Вариант 3

1. Найдите область определения функции:

   а) $y=\sqrt[4]{\frac{x^2-8x+16}{x^2-10x+21}}$,

   б) $y=\sqrt[6]{\frac{16-x^2}{\sqrt{x^2-9x-22}}}$.

2. Решите уравнения:

   а) $\sqrt{2+2x}+3x=5$,

   б) $\sqrt{4x^2-25}\cdot(x^2-11x+18)=0$,

   в) $2x^2+\sqrt{2x^2-x}=2+x$.

3. Постройте график
$$y=-\sqrt{|x|}+1.$$

4. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2+6x}<x+3.$$

Вариант 4

1. Найдите область определения функции:

   а) $y = \sqrt[6]{\frac{8-2x-x^2}{x^2-2x+1}}$,

   б) $y = \sqrt{\frac{\sqrt{25-x^2}}{x^2-11x+10}}$.

2. Решите уравнения:

   а) $\sqrt{x-1} = x-3$,

   б) $\sqrt{9-x^2} \cdot (x^2-12x+20) = 0$,

   в) $(2x+1)(x+2) - \sqrt{2x^2+5x+1} = 3$.

3. Постройте график
$$y = \sqrt{|x+1|} - 1.$$

4. Решите неравенство
$$\sqrt{x^2+2x-3} < x.$$

3. Показательная функция

Вариант 1

1. Сравните числа $\left(\frac{4\sqrt{5}-6}{3}\right)^{-\frac{5}{4}}$ и $\left(\frac{4\sqrt{5}-6}{3}\right)^{-\frac{5}{3}}$.

2. Решите уравнения:

   а) $2^{x+1} + 2^{x-2} - 2^{x-3} + 2^{x-4} = 70$,

   б) $4^x + 2^{x+1} = 80$,

   в) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

3. Дано: $2^{1+x} + 2^{1-x} = a$, найдите $2^{2x} + 2^{-2x}$.

4. Решите неравенства:

   а) $0{,}5^{x^2} \cdot 2^{2x+2} \leqslant 8^{-2}$,

   б) $3^{1+x} \cdot 2^{1-x} + 3^x \cdot 2^{-x} < 10{,}5$.

5. Решите систему $\begin{cases} 4^x \cdot 3^y - 48 = 0 \\ 4^y \cdot 3^x - 36 = 0 \end{cases}$

Вариант 2

1. Сравните числа $\left(\frac{3\sqrt{7}-1}{7}\right)^{-\frac{3}{5}}$ и $\left(\frac{3\sqrt{7}-1}{7}\right)^{-\frac{2}{5}}$.
2. Решите уравнения:
   а) $2^{3x} + 2^{3x-1} + 2^{3x-2} + 2^{3x-3} = 120$,
   б) $3^x + 3^{1-x} = 4$,
   в) $2^{4x} - 7 \cdot 4^x \cdot 3^{x-1} + 4 \cdot 3^{2x-1} = 0$.
3. Дано: $5^{1-x} - 5^{1+x} = b$, найдите $5^{-2x} + 5^{2x}$.
4. Решите неравенства:
   а) $0{,}5^{(x^2+x-2)(3-x)} > 1$,
   б) $2^x \cdot 5^{1-x} + 2^{x+1} \cdot 5^{-x} > 2{,}8$.
5. Решите систему $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y - 24 = 0 \\ 2^y \cdot 3^x - 54 = 0 \end{cases}$

Вариант 3

1. Сравните числа $\left(\frac{4\sqrt{3}-2}{5}\right)^{-\frac{7}{4}}$ и $\left(\frac{4\sqrt{3}-2}{5}\right)^{-\frac{7}{3}}$.
2. Решите уравнения:
   а) $\left(\frac{1}{125}\right)^x = \sqrt[3]{25}$,
   б) $9^x - 2^{x+0,5} = 2^{x+3,5} - 3^{2x-1}$,
   в) $3^{2x+3} - 30 \cdot 6^x + 8 \cdot 4^x = 0$.
3. Постройте график $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x-1|}$.
4. Решите неравенства:
   а) $\left(\frac{1}{7}\right)^{x^2+10x+14} \geqslant 49$,
   б) $5^{2x-3} - 2 \cdot 5^{x-2} \geqslant 3$.
5. Решите систему $\begin{cases} 3^{2x-2y} + 2 \cdot 3^{x-y} - 3 = 0 \\ 3^x + 3^{1-y} = 4 \end{cases}$

Вариант 4

1. Сравните числа $\left(\frac{-5+2\sqrt{30}}{6}\right)^{-\frac{3}{10}}$ и $\left(\frac{-5+2\sqrt{30}}{6}\right)^{-\frac{3}{11}}$.
2. Решите уравнения:
   а) $3^{\frac{1}{2}(x-5)}=3\sqrt{3}$,
   б) $4\cdot 3^{2x}-2^{2x-1}-3^{2x+1}-4^{x}=0$,
   в) $2\cdot 81^{x+1}-36^{x+1}-3\cdot 16^{x+1}=0$.
3. Постройте график $y=3^{-|x+1|}$.
4. Решите неравенства:
   а) $(0{,}4)^{2x^2-3x+6}<0{,}4^{5}$,
   б) $9^{x-1}-3^{x-2}-\frac{2}{3}\geqslant 0$.
5. Решите систему $\begin{cases}64^{2x}+64^{2y}=12\\ 64^{x+y}=4\sqrt{2}\end{cases}$

4. Логарифмическая функция

Вариант 1

1. Вычислите значения выражений:
   а) $-\log_2\log_2\sqrt{\sqrt[8]{2}}$,
   б) $\frac{2\log_7 6-\log_7 3}{\log_7 144}$.
2. Решите уравнения:
   а) $\log_2^2 x-4\log_2 x+3=0$,
   б) $\log_3(3^x-8)=2-x$,
   в) $x^{\log_3 x-4}=\frac{1}{27}$.
3. Постройте график $y=4^{\log_2(x-1)}$.
4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-x-2)+2>0$.
5. Решите систему $\begin{cases}x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27\\ \log_3 y-\log_3 x=1\end{cases}$

Вариант 2

1. Вычислите значения выражений:

а) $\log_7 \log_7 \sqrt[7]{\sqrt[7]{7}}$,

б) $\dfrac{\log_5 64}{\log_5 48 - \log_5 3}$.

2. Решите уравнения:

а) $\log_3^2 x - 3\log_3 x + 2 = 0$,

б) $\log_7(6 + 7^{-x}) = 1 + x$,

в) $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10x$.

3. Постройте график $y = 9^{\log_3(1-x)}$.

4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}(x^2 - 2x - 8) + 3 > 0$.

5. Решите систему
$$\begin{cases} x^{\log_2 y} + y^{\log_2 x} = 8 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases}.$$

Вариант 3

1. Вычислите значения выражений:

а) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \sqrt[3]{16} - \log_{\frac{1}{\sqrt{3}}} \sqrt[3]{9} + \frac{1}{3}$,

б) $5^{2\log_{25} 8 + \log_{\frac{1}{5}} 5}$.

2. Решите уравнения:

а) $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$,

б) $x^{2\log_4 x} = \dfrac{8}{x^2}$,

в) $\log_3^2(2x-1)^3 = 9\log_3^2 x$.

3. Постройте график $y = \log_{\frac{1}{2}} |x - 1|$.

4. Решите неравенство $\log_x(3x - 1) > 1$.

5. Решите систему
$$\begin{cases} \log_2^2 y + \log_2 x \cdot \log_2 y = 2\log_2^2 x \\ 9x^2 y - xy^2 = 1 \end{cases}$$

Вариант 4

1. Вычислите значения выражений:

   а) $\log_{\sqrt[3]{3}} 9 - \log_{\sqrt[3]{2}} \frac{1}{4}$,

   б) $25^{\frac{1}{2}\log_5 12} + 7^{2\log_7 2}$.

2. Решите уравнения:

   а) $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$,

   б) $x^{2\log_{16} x} = \frac{64}{\sqrt{x}}$,

   в) $9\log_2^2(2x+1) = \log_2^2 x^3$.

3. Постройте график $y = \log_3|x+1|$.

4. Решите неравенство $\log_x(x+2) > 2$.

5. Решите систему
$$\begin{cases} 2\log_3^2 x + \log_3 x \cdot \log_3 y = \log_3^2 y \\ yx + \frac{x^2}{y} = 28 \end{cases}$$

5. Тригонометрические формулы

Вариант 1

1. Дано: $\operatorname{tg}\alpha = 5$; $\operatorname{ctg}\beta = \frac{2}{3}$; $0 \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 \leqslant \beta < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\alpha + \beta$.

2. Докажите тождество $\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$.

3. Упростите:

   а) $\frac{\sin\alpha-\sin 3\alpha-\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}$,

   б) $\frac{2\sin^2 4\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}$,

   в) $8\cos^6\alpha + 8\sin^6\alpha - 3\cos 4\alpha$.

4. Вычислите $2\sin 10^\circ \cdot \sin 40^\circ + \cos 50^\circ$.

Вариант 2

1. Дано: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{21}}{7}$; $\sin\beta = \frac{\sqrt{21}}{14}$; $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$. Найдите $\alpha+\beta$.
2. Докажите тождество $\frac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$.
3. Упростите:
   а) $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}$,
   б) $\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)\sin^2\left(\frac{5\pi}{4}+4\alpha\right)}{1-2\cos^2 4\alpha}$,
   в) $\sin^6\frac{\alpha}{2} - \cos^6\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$.
4. Вычислите $2\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ - \cos 20^\circ$.

Вариант 3

1. Дано: $\sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Найдите $\sin\alpha$.
2. Докажите тождество $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{ctg} 3\alpha+\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{ctg} 4\alpha$.
3. Упростите:
   а) $\frac{3-4\cos 2x+\cos 4x}{3+4\cos 2x+\cos 4x}$,
   б) $\sin^2\left(\frac{9\pi}{8}+\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{17\pi}{8}-\alpha\right)$.
4. Вычислите:
   а) $\sin 2\alpha$, если $\sin\alpha+\cos\alpha = \frac{5}{4}$,
   б) $6\cos 80^\circ - \frac{3\sqrt{3}}{2\cos 50^\circ}$.

Вариант 4

1. Дано: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$. Найдите $\cos\frac{\alpha}{2}$.
2. Докажите тождество $\frac{1}{\operatorname{tg} 3\alpha+\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg} 5\alpha-\operatorname{tg}\alpha} = \sin 2\alpha$.
3. Упростите:
   а) $\frac{\sin 2x-\sin 3x+\sin x}{\cos 2x-\cos 3x+\cos 4x}$,
   б) $\cos^2\left(\frac{5\pi}{8}+\alpha\right) - \sin^2\left(\frac{15\pi}{8}+\alpha\right)$.
4. Вычислите:
   а) $\sin\alpha$, если $\cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$,
   б) $\frac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ$.

6. Тригонометрические уравнения

Вариант 1

Решите уравнения 1–5:

1. $\cos^2 x = \cos x$.
2. $\cos 2x + 3\sin x = 2$.
3. $\sin^2 x - \sin 2x = 3\cos^2 x$.
4. $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$.
5. $\sin 2x + \sin x + 2\cos x = \cos 2x$.
6. Решите систему
$$\begin{cases} x - y = \dfrac{5}{3}\pi \\ \sin x = 2\sin y \end{cases}$$
7. Вычислите $\arcsin(\cos 10)$.

Вариант 2

Решите уравнения 1–5:

1. $\sin x = \sin^2 x$.
2. $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$.
3. $2\sin 4x - 3\sin^2 2x = 1$.
4. $\cos 7x + \sin 8x = \cos 3x - \sin 2x$.
5. $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos^2 x - 2\cos x$.
6. Решите систему
$$\begin{cases} x + y = \dfrac{\pi}{3} \\ \cos x - 2\cos y = 0 \end{cases}$$
7. Вычислите $\arccos(\sin 15)$.

Вариант 3

Решите уравнения 1–5:

1. $\sin^2 3x = 3\cos^2 3x$.
2. $3\cos^2 2x + 7\sin 2x - 3 = 0$.
3. $\sin 2x + \cos 2x = 1$.
4. $\cos^2 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{3x}{2} - \sin^2 \frac{5x}{2} - \sin^2 \frac{7x}{2} = 0$.

5. $\sin x + \sin 5x + \sqrt{3} \sin 3x = 0$; $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$.
6. Решите систему

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4} \\ \sin^2 x + \sin^2 y = 1 \end{cases}$$

7. Вычислите $\sin\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Вариант 4

Решите уравнения 1–5:

1. $3\sin^2 2x = \cos^2 2x$.
2. $8\sin^2 2x - 2\cos 2x = 5$.
3. $\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} = 1$.
4. $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.
5. $3 + \cos 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0$; $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$.
6. Решите систему

$$\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3} \\ \cos^2 x - \cos^2 y = -\frac{3}{4} \end{cases}$$

7. Вычислите $\cos\left(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$.

7. Тригонометрические функции

Вариант 1

1. Постройте график функции $y = 2\cos(x - \frac{\pi}{4})$.
2. Установите область определения функции

$$y = \sqrt{\sin x} + \log_2(x-2)(4-x).$$

3. Установите множество значений функции

$$y = 3\sin x - 4\cos x.$$

4. Постройте график функции $y = \frac{\sin x}{|\sin x|}$.
5. Решите неравенство $\frac{2\sin x - 1}{\cos^2 x} > 0$; $x \in [0; \pi]$.

6. Вычислите $\operatorname{ctg}\left(\arcsin 1 + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$.
7. Вычислите $\arcsin(\sin 5)$.
8. Постройте график функции $y = \sin(\arcsin(x-2)) + 3$.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
2. Установите область определения функции
$$y = \sqrt{-\operatorname{tg} x} + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}.$$
3. Установите множество значений функции
$$y = \sqrt{3}\sin x - \cos x.$$
4. Постройте график функции $y = \cos x + |\cos x|$.
5. Решите неравенство $\frac{\sqrt{3}-2\cos x}{\sin^2 x} > 0;\ x \in (0; 2\pi)$.
6. Вычислите $\operatorname{tg}(2\arccos 1 - 2\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}))$.
7. Вычислите $\arccos(\cos 4)$.
8. Постройте график функции $y = \cos(\arccos(x+1)) - 2$.

Вариант 3

1. Постройте график функции $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
2. Установите область определения функции
$$y = \sqrt{\cos x} + \sqrt{\frac{x-1}{3-x}}.$$
3. Установите множество значений функции
$$y = 4\sin x + 3\cos x.$$
4. Постройте график функции $y = \frac{\cos x}{|\cos x|}$.
5. Решите неравенство $\frac{2\cos x-1}{1-\cos^2 x} \geqslant 0;\ x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

6. Вычислите $\operatorname{tg}\left(\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \operatorname{arctg} 1\right)$.
7. Вычислите $\arcsin(\sin(-2))$.
8. Постройте график функции $y = \sin(\arcsin(x+2)) - 3$.

Вариант 4

1. Постройте график функции $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
2. Установите область определения функции
$$y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \log_3 \frac{x-1}{2-x}.$$
3. Установите множество значений функции
$$y = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$
4. Постройте график функции $y = \sin x - |\sin x|$.
5. Решите неравенство $\frac{\sqrt{2}-2\sin x}{1-\sin^2 x} \geqslant 0$; $x \in \left(-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Вычислите
$$\cos\left(\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) + \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right).$$
7. Вычислите $\operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} 7)$.
8. Постройте график функции $y = \cos(\arccos(1-x)) + 2$.

8. Итоговая контрольная работа (2 урока)

Вариант 1

1. Упростите $\frac{\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(\pi+\alpha)}{1+\cos\left(\alpha-\frac{5\pi}{2}\right)}$.
2. Решите уравнение $4^x + 3\cdot 2^x - 4 = 0$.
3. Решите уравнение $\log_3 x + \log_3(x-2) = \log_3(2x-3)$.
4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x-1}{16-x^2} \geqslant 2$.
5. Решите уравнение $\sqrt{8x-4} - \sqrt{4x+5} = 1$.

6. Решите уравнение $1+\sin x+\cos x+\sin 2x+\cos 2x=0$.
7. Найдите область изменения функции

$$f(x)=2\cos^2 x+3\sin x-4.$$

8. Постройте график $\cos(\arccos|x+1|)=f(x)$.

Вариант 2

1. Упростите $\frac{\cos(2\pi-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$.
2. Решите уравнение $7^{2x}-8\cdot 7^x+7=0$.
3. Решите уравнение

$$\log_2(x+4)+\log_2(x+1)=1+\log_2 5.$$

4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}}\frac{x-3}{25-x^2}\geqslant 2$.
5. Решите уравнение $\sqrt{3x+4}-\sqrt{x+5}=1$.
6. Решите уравнение

$$(\cos x-\sin x)^2-0{,}5\sin 4x=\sin^4 x-\cos^4 x.$$

7. Найдите область изменения функции

$$f(x)=2\sin^2 x-\cos x-3.$$

8. Постройте график $\sin(\arcsin|x-1|)=f(x)$.

Вариант 3

1. Решите уравнение $x^{\log_3(3x)}=9$.
2. Решите уравнение $3\sin^2 x+\sin x\cdot\cos x=5\cos^2 x-\sin 2x$.
3. Решите неравенство $\log_{x-1}(9-x^2)<0$.
4. Решите уравнение $\sqrt{3x^2-2x}=2x-1$.
5. Решите уравнение $3\cdot 4^x+\frac{1}{3}\cdot 9^{x+2}=6\cdot 4^{x+1}-\frac{1}{2}\cdot 9^{x+1}$.

6. Упростите $\sin 40^\circ + 2\sin 20^\circ - \sqrt{3}\cos 40^\circ$.
7. Решите неравенство $x \geqslant 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} - 1\right)$.
8. Постройте график $y = 2^{\log_{16}(x-1)^2}$.

Вариант 4

1. Решите уравнение $x^{\log_4 x - 2} = 2^{3(\log_4 x - 1)}$.
2. Решите уравнение $3\sin^2 x + \sin 2x = 2$.
3. Решите неравенство $\log_{x+1}(4 - x^2) < 0$.
4. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 + 3x + 4} = 2x + 2$.
5. Решите уравнение $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$.
6. Упростите $\cos 70^\circ + 2\sin 40^\circ - \sqrt{3}\sin 70^\circ$.
7. Решите неравенство $x \geqslant \sqrt{\frac{6x}{x-1}}$.
8. Постройте график $y = -3^{\log_{\frac{1}{81}}(x+1)^2}$.

11 класс

Самостоятельные работы

1. Производная

Вариант 1

1. Найдите по определению производную функции
$$y = 3x^2 - 2x + 3.$$
2. Решите неравенство $f'(x) > -2$, если $f(x) = \frac{1}{x}$.
3. Найдите скорость тела, движущегося по закону $s(t) = 2t^2 - 2$ м в момент $t = 2$ с.
4. Постройте график производной функции $f(x) = |2x - 3|$.
5. Установите область определения функции
$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \log_2(3 - x).$$

Вариант 2

1. Найдите по определению производную функции
$$y = -4x^2 + x - 1.$$
2. Решите неравенство $f'(x) > 1$, если $f(x) = -\frac{1}{x}$.
3. Найдите скорость тела, движущегося по закону $s(t) = t^2 - 5$ м в момент $t = 10$ с.
4. Постройте график производной функции $f(x) = |9 - 3x|$.
5. Установите область определения функции
$$f(x) = \ln(9 - x^2) + \sqrt{x - 2}.$$

Вариант 3

1. Найдите по определению производную функции
$$y = x^3 - 4x^2 + 1.$$
2. Решите неравенство $f'(x) > 2$, если $f(x) = \frac{1}{x^2}$.
3. Какие из функции

   а) $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f(x) = 3x$;

   в) $f(x) = \frac{x^2}{x}$; г) $f(x) = \sqrt{x^2}$

   имеют производную в точке $x = 0$?
4. Постройте график производной функции $y = \sqrt{x^2} - 1$.
5. Установите область определения функции
$$f(x) = \sqrt{4 - \log_2(x+1)}.$$

Вариант 4

1. Найдите по определению производную функции
$$y = x^3 + 3x - 4.$$
2. Решите неравенство $f'(x) \leqslant 2$, если $f(x) = -\frac{1}{x^2}$.
3. Какие из функций

   а) $f(x) = \frac{1}{x-2}$; б) $f(x) = 5(x-2)$;

   в) $f(x) = \frac{(x-2)^4}{x-2}$; г) $f(x) = \sqrt{(x-2)^2}$

   имеют производную в точке $x = 2$?
4. Постройте график производной функции
$$y = \sqrt{(x-1)^2} + 1.$$
5. Установите область определения функции
$$y = \ln\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-2) - 2\right).$$

Вариант 5

1. Найдите по определению производную функции
$$y = \frac{1}{1-x}.$$

2. Решите неравенство $f'(x) > 1$, если $f(x) = \sqrt{2x}$.
3. Среди указанных функций выберите ту, для которой $f'(0) = 0$:

   а) $f(x) = \frac{x^3}{x}$; б) $f(x) = 2x^2 - 3$;
   в) $f(x) = \sqrt{x}$; г) $f(x) = 3\sqrt{15}$.
4. Постройте график производной функции
$$y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x+1)^2}.$$
5. Установите область определения функции
$$f(x) = \ln((x+3)\cdot(9-3^x)).$$

Вариант 6

1. Найдите по определению производную функции
$$y = \frac{1}{1+x}.$$
2. Решите неравенство $f'(x) > 1$, если $f(x) = \sqrt{x-3}$.
3. Среди указанных функций выберите ту, для которой $f'(0) = 0$:

   а) $f(x) = \frac{x^5}{x^2}$; б) $f(x) = -3x^2 + 5$;
   в) $f(x) = \sqrt[3]{x}$; г) $f(x) = -5\sqrt{17}$.
4. Постройте график производной функции
$$y = \sqrt{(x+1)^2} - \sqrt{(x-1)^2}.$$
5. Установите область определения функции
$$f(x) = \sqrt{(x-2)(2-2^x)}.$$

Вариант 7

1. Найдите по определению производную функции
$$y = \sqrt{2-x}.$$
2. Решите неравенство $f'(x) < 4$, если $f(x) = \frac{1}{1-x}$.
3. Постройте график производной функции $y = 2\sqrt{x}$.
4. $f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{при } x \neq 2 \\ A & \text{при } x = 2. \end{cases}$

   При каких A функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 2$.

5. Установите область определения функции
$$y = \log_2\left(2^x - 4 - 5 \cdot 2^{-x}\right).$$

Вариант 8

1. Найдите по определению производную функции
$$y = \sqrt{2x-3}.$$
2. Решите неравенство $f'(x) > -3$, если $f(x) = \frac{1}{3x-1}$.
3. Постройте график производной функции $y = 2\sqrt{-x}$.
4. $f(x) = \begin{cases} 2x-5 & \text{при } x \neq 3 \\ B & \text{при } x = 3. \end{cases}$

   При каких B функция $f(x)$ будет непрерывной в точке $x = 3$.
5. Установите область определения функции
$$y = \sqrt{3^{1-x} - 3^x + 2}.$$

2. Производная степенной функции. Правила дифференцирования. Производная сложной функции

Вариант 1

1. $f(x) = (x^4 - 3x^3 + 2x - 4)(x^2 - 4)$. Найдите $f'(2)$.
2. $f(x) = \frac{2+x^2}{x^3}$. Найдите $f'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
3. Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству $f'(x) \leqslant 0$, где
$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 17.$$
4. $y = (x^3 - 2x + 1)^3$. Найдите $y'(1)$.
5. Прямая $y = kx + b$ составляет с положительным направлением оси OX угол в $60°$ и проходит через точку $A(-2; 4)$. Напишите уравнение этой прямой.

Вариант 2

1. $f(x)=(x^4-3x^2-x+5)(x^2-1)$. Найдите $f'(1)$.
2. $y=\frac{x}{x^2+1}$. Найдите $y'(0{,}5)$.
3. Найдите наименьшее целое значение x, удовлетворяющее неравенству $f'(x)<0$, где $f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{5x^2}{2}-14x+\pi$.
4. $y=(2x^3-4x+2)^4$. Найдите $y'(1)$.
5. Прямая $y=kx+b$ составляет с положительным направлением оси OX угол в $120°$ и проходит через точку $B(2;-4)$. Напишите уравнение этой прямой.

Вариант 3

1. $f(x)=2x\sqrt[3]{x^2}+\frac{4}{x\sqrt[4]{x^2}}$. Найдите $f'(1)$.
2. Найдите производную функции $y=\sqrt{\frac{x-5}{x-2}}$ $(x>5)$.
3. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству $f'(x)\leqslant g'(x)$, где $f(x)=x^3+x^{-1}$, $g(x)=6x+x^{-1}$.
4. $f(x)=(x^2-5)\cdot\sqrt{x}$. Решите неравенство $f'(x)>0$.
5. Прямая проходит через точки $A(-1;3)$ и $B(3;5)$. Напишите уравнение этой прямой.

Вариант 4

1. $f(x)=3x^5\sqrt{x^3}+\frac{2}{x\sqrt[3]{x^{1,5}}}$. Найдите $f'(1)$.
2. Найдите производную функции $y=\sqrt[3]{\frac{x}{x+1}}$ $(x>0)$.
3. Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству $f'(x)+g'(x)\leqslant 0$, где $f(x)=2x^3+12x^2$; $g(x)=9x^2+72x$.
4. $f(x)=(10-x^2)\sqrt{x}$. Решите неравенство $f'(x)\geqslant 0$.
5. Прямая проходит через точки $M(2;-5)$ и $N(9;7)$. Напишите уравнение этой прямой.

Вариант 5

1. $g(x)=4x\sqrt[4]{x}-\frac{128}{\sqrt[4]{x}}$. Найдите $g'(16)$.
2. $f(x)=\frac{\sqrt{x-1}+\sqrt[5]{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}}$. Найдите $f'(2)$.

3. Решите неравенство $f(x) \leqslant g'(x)$, где $f(x) = \frac{2}{x}$; $g(x) = \ = x - x^3$.
4. Решите неравенство $f'(x) < 0$, где
$$f(x) = (2x+1)\sqrt{1-4x}.$$
5. Прямая проходит через точки $A(-3;2)$ и $B(5;6)$. Напишите уравнение прямой, параллельной AB и проходящей через точку $(7;-5)$.

Вариант 6

1. $y = \frac{8}{\sqrt[4]{x}} - \frac{6}{\sqrt[3]{x}}$. Найдите $y'(1)$.
2. $f(x) = 5(x+1)^2 \cdot \sqrt[5]{x-1}$. Найдите $f'(2)$.
3. Решите неравенство $g(x) \geqslant f'(x)$, где
$$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + x; \qquad g(x) = \frac{2}{x}.$$
4. Решите неравенство $f'(x) > 0$, где
$$f(x) = (3x-1)\sqrt{1-2x}.$$
5. Прямая проходит через точки $M(-3;7)$ и $N(1;3)$. Напишите уравнение прямой, параллельной MN и проходящей через точку $(-4;-3)$.

Вариант 7

1. $y = \frac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$. Найдите $y'\left(\frac{1}{4}\right)$.
2. На координатной плоскости изобразите множество точек $A(x;y)$, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} y \leqslant f'(x) \\ y \geqslant g'(x), \end{cases}$, где $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$; $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$.
3. Найдите производную функции $y = \frac{(2x^2-1)\cdot\sqrt{1+x^2}}{3x^3}$.
4. При каких значениях a производная функции
$$y = (a-4)x^3 - 3\sqrt{3}x^2 + 3(a-2)x + 1$$
обращается в нуль в двух различных точках одного знака?
5. $A(-3;5)$; $B(-1;-3)$. Напишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой AB и проходит через середину отрезка AB.

Вариант 8

1. $y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x+7\sqrt{x}}}$. Найдите $y'(1)$.
2. На координатной плоскости изобразите множество точек $B(x,y)$, координаты которых удовлетворяют системе $\begin{cases} y\leqslant f'(x) \\ y\geqslant g'(x), \end{cases}$, где $f(x)=3x+\frac{1}{2}x^2$, $g(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2$.
3. Найдите производную функции $y=\dfrac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{(2+x^3)^2}}$.
4. При каких значениях m производная функции
$$y=(m-3)x^3+3\sqrt{2}x^2-3mx+2$$
обращается в нуль в двух различных точках одного знака?
5. $M(4;-7)$; $N(2;1)$. Напишите уравнение прямой, которая перпендикулярна прямой MN и проходит через середину отрезка MN.

3. Геометрический смысл производной

Вариант 1

1. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к кривой $y=2\sqrt{3}x^2-17$ составляет с положительным направлением оси OX угол в $60°$.
2. Напишите уравнение касательной к кривой
$y=(x^3+3x^2-4x+1)\left(2\sqrt{x}-\dfrac{1}{x}\right)$ в точке $x_0=1$.
3. Напишите уравнение касательной к кривой
$y=-2x^2+3x-5$, которая параллельная прямой
$y=7x-6$.

Вариант 2

1. Найдите абсциссу точки, в которой касательная к кривой $y=-\sqrt{3}x^2+18$ составляет с положительным направлением оси OX угол в $120°$.
2. Напишите уравнение касательной к кривой
$y=(x^3-4x^2+2x-3)\left(2\sqrt{x}+\dfrac{1}{x}\right)$ в точке $x_0=1$.

3. Напишите уравнение касательной к кривой $y = 2x^2 - 5x + 3{,}5$, которая параллельна прямой $y = -3x + 1$.

Вариант 3

1. Составьте уравнение касательной к кривой $y = x - \frac{1}{x}$ в точках ее пересечения с осью OX.
2. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x+1}$ составляет с положительным направлением оси OX угол в $135°$?
3. Напишите уравнения касательных к кривой $y = -2x^2 + 4x - 3$, проходящих через точку $(1;7)$.

Вариант 4

1. Составьте уравнение касательной к кривой $y = x - \frac{4}{x}$ в точках ее пересечения с осью OX.
2. В каких точках касательная к графику функции $y = \frac{x+1}{x+2}$ составляет с положительным направлением оси OX угол в $45°$?
3. Напишите уравнение касательных к кривой $y = 2x^2 - 6x + 3$, проходящих через точку $(-1;3)$.

Вариант 5

1. Найдите точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $f(x) = x^2 - |5x + 9|$ в точках с абсциссами $x_1 = -4$ и $x_2 = 4$.
2. На графике функции $y = -\sqrt{2x+1}$ найдите точку, касательная в которой перпендикулярна прямой
$$y - 2x + 1 = 0.$$
3. Найдите угол между графиками функций $f(x) = x^3 - x$ и $g(x) = \frac{12}{x}$ в точках их пересечения.

Вариант 6

1. Найдите точку пересечения касательных, проведенных к графику функции $f(x) = x^2 + |7 - 4x|$ в точках с абсциссами $x_1 = -3$ и $x_2 = 3$.

2. На графике функции $y=\sqrt{4x-1}$ найдите точку, касательная в которой перпендикулярна прямой
$$y+2x-3=0.$$
3. Найдите угол между графиками функций $f(x)=x^3-6x$ и $g(x)=\dfrac{27}{x}$ в точках их пересечения.

Вариант 7

1. Найдите уравнение общей касательной к параболам
$$y=x^2+2x; \quad y=x^2-4x.$$
2. При каких a прямая $y=ax+8a-1$ касается графика функции $y=\sqrt{x}$?
3. При каких a касательные, проведенные к графику функции $y=x^3-a^2x$, в точках пересечения этого графика с осью OX пересекаются под углом $\dfrac{\pi}{4}$.

Вариант 8

1. Найдите уравнение общей касательной к параболам
$$y=x^2+4x+8; \quad y=x^2+8x+4.$$
2. При каких m прямая $y=mx-5$ касается графика функции $y=3x^2-4x-2$.
3. При каких m касательные, проведенные к графику функции $y=x^3-m^2x$, в точках пересечения этого графика с осью OX пересекаются под углом $\dfrac{\pi}{6}$.

4. Производные некоторых элементарных функций

Вариант 1

1. Найдите производные следующих функций:

а) $f(x)=(2x-1)^5+5^{2x-1}-\cos\dfrac{x}{3}$,

б) $f(x)=\dfrac{\ln 5}{x}+\ln 5x$.

2. $f(x) = \frac{2}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$. Какой угол составляет касательная к графику функции $f(x)$ с положительным направлением оси OX в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$?
3. На каких промежутках касательная к графику функции $y = \log_2(x^2 - 2x)$ составляет с положительным направлением оси OX тупой угол?

Вариант 2

1. Найдите производные следующих функций:
   а) $f(x) = (3x+1)^7 + 7^{3x+1} + \sin 5x$,
   б) $f(x) = \frac{\ln 3}{x^2} + \ln 3x^3$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Какой угол составляет касательная к графику функции $f(x)$ с положительным направлением оси OX в точке $x_0 = \frac{\pi}{3}$?
3. На каких промежутках касательная к графику функции $y = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 4)$ составляет с положительным направлением оси OX острый угол?

Вариант 3

1. Найдите производные следующих функций:
   а) $f(x) = \operatorname{tg} 2x - \operatorname{ctg} 2x$,
   б) $f(x) = (2x-3)^{\sqrt{3}} + (\sqrt{3})^{2x-3}$.
2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{2}$.
3. При каких x $f'(x) > g'(x)$, если $f(x) = x + \ln(x-5)$, $g(x) = \ln(x-1)$?

Вариант 4

1. Найдите производные следующих функций:
   а) $f(x) = \operatorname{tg} 2x + \operatorname{ctg} 2x$,
   б) $f(x) = (3x+4)^{\sqrt{2}} + (\sqrt{2})^{3x+4}$.

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{\sin x}{1+\cos x}$ в точке $x_0=\frac{3\pi}{2}$.
3. При каких x $f'(x)>g'(x)$, если $f(x)=\frac{5^{x+1}}{2}$; $g(x)=5^x+4x\ln 5$?

Вариант 5

1. Найдите производную функции $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin 2x}{1+\sin 2x}}$.
2. В каких точках касательная к графику функции $f(x)=0{,}2^{\cos 2x-x-1941}$ составляет с положительным направлением оси OX острый угол?
3. Прямая $y=8x-7$ параллельна касательной к кривой $y=\frac{3^{x+1}}{\ln 3}+\frac{3^{1-x}}{\ln 3}+3$. Найдите координаты точки касания.

Вариант 6

1. Найдите производную функции $y=\ln\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}}$.
2. В каких точках касательная к графику функции $f(x)=0{,}3^{\sin 2x+x+1945}$ составляет с положительным направлением оси OX тупой угол?
3. Прямая $y=4x+7$ параллельна касательной к кривой $y=\frac{2^{x+1}-2^{1-x}}{\ln 2}+10$. Найдите координаты точки касания.

Вариант 7

1. Найдите производную функции $y=x^{\operatorname{tg} x}$.
2. Под каким углом пересекаются в первой четверти графики функций $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$?
3. При каких значениях a $(a>1)$ график функции $y=a^x$ касается прямой $y=x$?

Вариант 8

1. Найдите производную функции $y=x^{\operatorname{ctg} x}$.
2. Под каким углом пересекаются в первой четверти графики функций $y=\sin x$ и $y=\cos x$?
3. При каких значениях a уравнение $ax^2=\ln x$ имеет один корень?

5. Исследование функции на монотонность и экстремум

Вариант 1

1. Исследуйте функции на монотонность и экстремум:
а) $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$; б) $y=x\cdot e^x$.
2. При каких значениях a функция $y=x\cdot e^x$ убывает на отрезке $[a-5;a+3]$?
3. При каких значениях a функция $ax+\cos x$ возрастает на $\mathbb{R}$?

Вариант 2

1. Исследуйте функции на монотонность и экстремум:
а) $y=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+4$; б) $y=\frac{x}{e^x}$.
2. При каких значениях b функция $y=\frac{x}{e^x}$ возрастает на отрезке $[b-5;b+4]$?
3. При каких значениях p функция $y=a-px+\sin x$ убывает на $\mathbb{R}$?

Вариант 3

1. Исследуйте функции на монотонность и экстремум:
а) $f(x)=\frac{9x^2-x+1}{x}$; б) $y=x\ln x$.
2. При каких значениях a функция $y=\frac{1}{3}x^3+(a-1)x^2+2$ возрастает на $\mathbb{R}$?
3. Найдите критические точки функции
$y=\sin x+0{,}5\sin 2x+5$ и укажите одну точку минимума.

Вариант 4

1. Исследуйте функции на монотонность и экстремум:
а) $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$; б) $y=\frac{\ln x}{x}$.
2. При каких значениях b функция $y=-\frac{1}{3}x^3-(b-2)x^2-2$ убывает на $\mathbb{R}$?
3. Найдите критические точки функции
$y=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x$ и укажите одну точку максимума.

Вариант 5

1. Исследуйте на монотонность и экстремум:
   а) $f(x) = 1{,}5e^{2x} - e^x - 2x + 3$; б) $f(x) = x^3 - ax$.
2. Исследуйте на монотонность:
   а) $f(x) = 0{,}3^{4-2x}$; б) $y = \sin x + \cos x$.

Вариант 6

1. Исследуйте на монотонность и экстремум:
   а) $f(x) = 2{,}5e^{2x} - 2e^x - 3x + 2$; б) $f(x) = ax^3 - x$.
2. Исследуйте на монотонность:
   а) $f(x) = \log_{0,3}(2x - 3)$; б) $y = \sin x - \cos x$.

Вариант 7

1. Исследуйте на монотонность и экстремум функции:
   а) $f(x) = x(\sqrt[3]{x} + 1)$; б) $f(x) = 8^x - 32^x$.
2. При каких a функция $y = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 1$ убывает на $\mathbb{R}$?
3. При каких a функция $y = 2e^x - ae^{-x} + (2a+1)x - 3$ возрастает на $\mathbb{R}$?

Вариант 8

1. Исследуйте на монотонность и экстремум функции:
   а) $f(x) = x(\sqrt[3]{x} - 1)$; б) $f(x) = 27^x - 4 \cdot 3^{x+1}$.
2. При каких a функция $y = \frac{a^2-1}{3}x^3 + (a-1)x^2 + 2x + 1$ возрастает на $\mathbb{R}$?
3. При каких m функция $y = \frac{1}{2}e^x - me^{-x} + \frac{m+2}{2}x + 10$ возрастает на $\mathbb{R}$?

6. Графики функций

Вариант 1

1. Дана функция $y = f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$.
   1) Постройте график функции $y = f(x)$.

2) Сколько корней имеет уравнение

$$f(x)=a; \quad a\in\left[-5;5\frac{2}{3}\right]?$$

3) Постройте график функции $y=-f(x)$.

2. Постройте график функции $y=xe^x$; $x\in[-2;1]$.

Вариант 2

1. Дана функция $y=f(x)=-x^3+3x^2-2$.

1) Постройте график функции $y=f(x)$.

2) Сколько корней имеет уравнение

$$f(x)=a; \qquad a\in[-2;2]?$$

3) Постройте график функции $y=|f(x)|$.

2. Постройте график функции $y=\frac{x}{e^x}$; $x\in[-1;2]$.

Вариант 3

1. Дана функция $y=f(x)=1+4x^3-3x^4$.

1) Постройте график функции $y=f(x)$.

2) Сколько корней имеет уравнение

$$f(x)=a; \qquad a\in(-\infty;2]?$$

3) Постройте график функции $y=f(|x|)$.

2. Постройте график функции $y=x\ln x$; $x\in\left[\frac{1}{4};2\right]$.

Вариант 4

1. Дана функция $y=f(x)=x^4-2x^3+3$.

1) Постройте график функции $y=f(x)$.

2) Сколько корней имеет уравнение

$$f(x)=a; \qquad a\in[1;+\infty)?$$

3) Постройте график функции $y=f(-x)$.

2. Постройте график функции $y=\frac{\ln x}{x}$; $x\in\left[\frac{1}{2};3\right]$.

Вариант 5

1. Постройте график функции $y=\frac{(x-1)^2}{x+1}$.
2. Постройте график функции $y=\frac{x^3}{e^x}$; сколько корней имеет уравнение $ae^x=x^3$ в зависимости от a?

Вариант 6

1. Постройте график функции $y=\frac{(x+1)^2}{x-1}$.
2. Постройте график функции $y=\frac{x^2}{e^x}$; сколько корней имеет уравнение $me^x=x^2$ в зависимости от m?

Вариант 7*

1. Постройте график функции $y=x-\sqrt[3]{x^2}$.
2. Постройте график функции $y=\sqrt[3]{x^2-3x+2}$.

Вариант 8*

1. Постройте график функции $y=\sqrt[3]{x^2}\cdot(x-5)$.
2. Постройте график функции $y=\sqrt[3]{4-x^2}$.

7. Наибольшее и наименьшее значение функции

Вариант 1

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\frac{x^2}{x+5}$ на $[-4;1]$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\sin 2x-x$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.
3. В правильной треугольной призме диагональ боковой грани равна 2. Найдите наибольшее значение площади боковой поверхности призмы.

Вариант 2

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\frac{2}{x+1}+\frac{x}{2}$ на $[0;2{,}5]$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \cos 2x - x$ на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник, а сумма длин всех ее ребер равна m. Найдите наибольшее значение площади ее боковой поверхности.

Вариант 3

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2 \cdot 3^{3x} - 4 \cdot 3^{2x} + 2 \cdot 3^x$ на $[-1; 1]$.
2. Найдите наименьшее значение функции $y = x \ln x - x \ln 5$ на $(1; 5]$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sqrt{1 - 2x + x^2} + 2^{\log_4 (x-5)^2}$ на $[-1; 4]$.

Вариант 4

1. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = e^{-x}(x^2 + x - 5)$ на $[-4; 4]$.
2. Найдите наименьшее значение функции $y = x \ln x + x \ln 2$ на $[1; 2]$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sqrt{4 - 4x + x^2} - 3^{\log_9 (x-6)^2}$ на $[-1; 5]$.

Вариант 5

1. Найдите расстояния между графиками функций $y = x^2$ и $y = x - 1$.

2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \frac{1}{2} \cos 2x + \cos x$ на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

3. Через точку $M(2; 6)$ проведите прямую так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых ею на положительных координатных полуосях, была наименьшей.

Вариант 6

1. Найдите расстояния между графиками функций $y=-x$ и $y=\dfrac{1}{x}$.
2. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}2x$ на $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{3}\right]$.
3. Через точку $M(1;4)$ проведите прямую так, чтобы сумма длин отрезков, отсекаемых ею на положительных координатных полуосях, была наименьшей.

Вариант 7

1. Решите уравнение $\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}=x^2-4x+6$.
2. Докажите, что если $f(x)=\cos^2 x\cdot\sin x$, то
$$\min_{[-\pi;\pi]} f(x) > -\frac{7}{18}.$$
3. Трактор, находящийся на пересеченной местности в 27 км от прямолинейного шоссе, направляется в населенный пункт, расположенный на шоссе. Расстояние от точки шоссе, ближайшей к трактору, до населенного пункта равно 45 км. По пересеченной местности трактор едет со скоростью 44 км/ч, а по шоссе — со скоростью 55 км/ч. На каком расстоянии от населенного пункта трактор должен въехать на шоссе, чтобы время его движения было наименьшим?

Вариант 8

1. Решите уравнение $\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}=x^4+2$.
2. Докажите, что если $f(x)=\sin x\cdot\sin 2x$, то
$$\max_{[\pi;\pi]} f(x) < 0{,}77.$$
3. Расстояние от базы до магазина, расположенного на прямолинейном шоссе, равно 30 км. База удалена от шоссе на 24 км. На каком расстоянии от магазина должна находиться развилка дорог, чтобы время доставки грузов от базы до магазина было наименьшим, если известно, что машина может развить по шоссе скорость 52 км/ч, а по подъездной дороге — 20 км/ч.

8. Первообразные

Вариант 1

1. Найдите первообразные для функций:

   1) $f(x)=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^4}+\frac{5}{x^6}$; 2) $f(x)=\cos^2\frac{x}{2}$;

   3) $f(x)=\frac{3}{x}$; 4) $f(x)=1{,}5^x$.

2. Для функции $f(x)=\sin 4x$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку $A(\frac{\pi}{12};\frac{1}{2})$.
3. Постройте график кривой, которая проходит через точку $A(1;1)$ и у которой угловой коэффициент в любой ее точке равен удвоенной абсциссе этой точки.

Вариант 2

1. Найдите первообразные для функций:

   1) $f(x)=\frac{2}{x^3}-\frac{4}{x^5}+\frac{6}{x^7}$; 2) $f(x)=\sin^2\frac{x}{2}$;

   3) $f(x)=\frac{1}{2x}$; 4) $f(x)=0{,}7^x$.

2. Для функции $f(x)=\cos 4x$ найдите ту первообразную, график которой проходит через точку $A(\frac{\pi}{24};\frac{1}{4})$.
3. Постройте график кривой, которая проходит через точку $M(1;0)$ и у которой угловой коэффициент в любой ее точке равен $3x^2$.

Вариант 3

1. Найдите первообразные для функций:

   1) $f(x)=\frac{6x^4-8x^3-4x^2+3x-5}{x^2}$;

   2) $f(x)=\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}$; 3) $f(x)=\sin 7x\cdot\sin 5x$.

2. Для функции $f(x)=-1-\frac{1}{x\ln 4}$ $(x>0)$ найдите первообразную $F(x)$, которая при $x=2$ принимает значение, равное 2,5.
3. При каких значениях x $\left(\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}\right)$ обращается в нуль та из первообразных функции

$$f(x)=2\cos 2x-\sin x,$$

которая при $x=\pi$ имеет значение, равное -1.

Вариант 4

1. Найдите первообразные функций:

   1) $f(x)=\frac{9x^5+12x^4-6x^3+7x^2-4x+2}{x^3}$;

   2) $f(x)=\sqrt{x^5}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; 3) $f(x)=\sin 3x\cdot\cos 5x$.

2. Для функции $f(x)=\frac{x+1}{x}$ $(x>0)$ найдите первообразную $F(x)$, которая при $x=e$ принимает значение, равное e.
3. При каких значениях x $(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ обращается в нуль та из первообразных функции $f(x)=\cos x-\sin x$, которая при $x=\frac{3\pi}{2}$ имеет значение, равное -2.

Вариант 5

1. Найдите первообразные для функций:

   1) $f(x)=\sqrt{1-\sin 2x}$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$, $F(0)=0$;

   2) $f(x)=2^x\cdot\left(1+\frac{2^{-x}}{\sqrt[4]{x^3}}\right)$; 3) $f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$.

2. Найдите ту первообразную функции $f(x)=x^2-x$, для которой
$$\min_{[\frac{1}{2};3]}F(x)=2.$$
3. Сколько существует касательных к графику одной из первообразных функции $f(x)=\frac{x-1}{x^2+3x+11}$, которая параллельна прямой $y=\frac{1}{21}x$ (или совпадает с ней).

Вариант 6

1. Найдите первообразные для функций:

   1) $f(x)=\sqrt{1+\sin 2x}$, $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$, $F(0)=1$;

   2) $f(x)=e^x\cdot\left(5-\frac{3e^{-x}}{x^4}\right)$; 3) $f(x)=\frac{x^4}{x^2-1}$.

2. Найдите ту первообразную функции $f(x)=x^2+x$, для которой
$$\max_{[-\frac{1}{2};\,2]}F(x)=\frac{16}{3}.$$

3. Сколько существует касательных к графику одной из первообразных функции $f(x)=\frac{x}{x^2+5x+9}$, которая параллельна прямой $y=\frac{1}{11}x$ (или совпадает с ней).

Вариант 7

1. Найдите первообразные функций:

   1) $f(x)=\operatorname{tg}^2 x$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+5x+4}$;

   3) $f(x)=\frac{x^3+x^2+2x+1}{x+1}$.
2. Найдите ту первообразную функции $f(x)=2x+5$, для которой прямая $y=7x-3$ является касательной.
3. Найдите первообразную функции $f(x)=|x-1|(2x-1)$ на $\mathbb{R}$.

Вариант 8

1. Найдите первообразные функций:

   1) $f(x)=\operatorname{ctg}^2 x$; 2) $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$;

   3) $f(x)=\frac{x^3+x^2-3x+1}{x+1}$.
2. Найдите ту первообразную функции $f(x)=-4x+1$, для которой прямая $y=5x+1$ является касательной.
3. Найдите первообразную функции $f(x)=|x-4|x$ на $\mathbb{R}$.

9*. Интеграл

Вариант 1

1. Вычислите $\int\limits_1^2 (3x^2-x-1)\,dx$.
2. Вычислите $\int\limits_0^\pi \cos^2 x\,dx$.
3. Найдите $\int\limits_1^3 |x-2|\,dx$.
4. Сравните $A=\int\limits_0^1 x^2\,dx$ и $B=\int\limits_0^1 \sqrt{x}\,dx$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+1$ и $y=2$.

Вариант 2

1. Вычислите $\int\limits_{-2}^{-1}(3x^2+x-1)\,dx$.
2. Вычислите $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sin^2 x\,dx$.
3. Найдите $\int\limits_{-3}^{-1}|x+2|\,dx$.
4. Сравните $A=\int\limits_0^1 x^3\,dx$ и $B=\int\limits_0^1\sqrt[3]{x}\,dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=x+2$.

Вариант 3

1. Вычислите $\int\limits_{\frac{1}{3}}^{3}(27x^3-27x^2+9x-1)\,dx$.
2. Найдите $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\cos x\cdot\cos 3x\,dx$.
3. Вычислите $\int\limits_{-7}^{2}f(x)\,dx$, где $f(x)=\begin{cases}3x & \text{при } x<1\\ x^2+2 & \text{при } x\geqslant 1\end{cases}$
4. Сравните $A=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}x\,dx$ и $B=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\operatorname{ctg}x\,dx$.
5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2\cos x$ и $y=1$; $x\in[0;\pi]$.

Вариант 4

1. Вычислите $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2}(8x^3-12x^2+6x-1)\,dx$.
2. Найдите $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\sin x\cdot\cos 5x\,dx$.
3. Вычислите $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f(x)\,dx$, где $f(x)=\begin{cases}\cos x & \text{при } x\leqslant\frac{\pi}{4}\\ \sin x & \text{при } x>\frac{\pi}{4}\end{cases}$.

4. Сравните $A = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \operatorname{tg} x\,dx$ и $B = \int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x\,dx$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sin x$ и $y = 1$; $x \in [0; \pi]$.

Вариант 5

1. Вычислите $\int\limits_{-2}^{1} |x| \cdot (x-2)\,dx$.

2. Найдите $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$.

3. При каких a выполняется неравенство $\int\limits_{3}^{a} (x-5)\,dx < 6$.

4. Сравните $A = \int\limits_{0,1}^{1} 2^{\log_5 x}\,dx$ и $B = \int\limits_{0,1}^{1} 5^{\log_2 x}\,dx$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком $y = \sqrt{1-3x}$, касательной к нему, проходящей через точку $(5; 0)$, и прямой $y = 0$.

Вариант 6

1. Вычислите $\int\limits_{-1}^{3} x \cdot |x-2|\,dx$.

2. Найдите $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x\right) dx$.

3. При каких a выполняется неравенство $\int\limits_{a}^{3} (x-5)\,dx \leqslant 6$.

4. Сравните $A = \int\limits_{0,2}^{1} 7^{\log_5 x}\,dx$ и $B = \int\limits_{0,2}^{1} 5^{\log_7 x}\,dx$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком $y = \frac{x+1}{x-1}$, касательной к нему в точке $x_0 = 2$ и прямой $x = 4$.

Вариант 7

1. Вычислите $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{2} \sqrt{2x - x^2}\,dx$.

2. Вычислите $\int\limits_0^{\ln 2} (e^x + e^{-x})\,dx$.

3. Вычислите $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x+1}$.

4. Вычислите $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx$.

5. Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 1)

Вариант 8

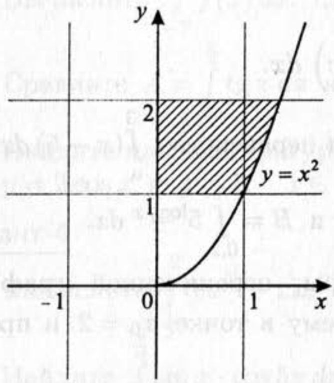
1. Вычислите $\int\limits_3^4 \sqrt{4x - x^2}\,dx$.

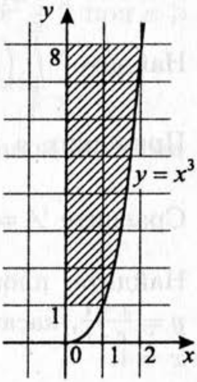
2. Вычислите $\int\limits_0^{\log_3 2} (3^x - 1)^2\,dx$.

3. Вычислите $\int\limits_{-3}^{-2} \frac{xdx}{x+1}$.

4. Вычислите $\int\limits_1^e \ln x\,dx$.

5. Найдите площадь заштрихованной фигуры (рис. 2)





Проверочные работы на повторение

1. Рациональные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Решите уравнения:

   а) $\frac{4x}{4x^2-8x+7}+\frac{3x}{4x^2-10x+7}=1$;

   б) $|x-2|+3x=|x-5|-18$.

2. Найдите рациональные решения системы уравнений:
$$\begin{cases} x^2+y^2+x+y=32 \\ 12(x+y)=7xy \end{cases}.$$

3. Решите неравенство $\frac{14x}{x+1}-\frac{9x-30}{x-4}<0$.

4. При каких a функция
$$f(x)=\frac{(a+4)x^3}{3}-ax^2+(2a-6)x+10$$
возрастает на $\mathbb{R}$?

Вариант 2

1. Решите уравнения:

   а) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1$;

   б) $|x-2|+|x-1|=x-3$.

2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x+y+x^2+y^2=18 \\ xy(x+y)=30 \end{cases}.$$

3. Решите неравенство $\frac{5x+4}{x+3} - \frac{x+2}{1-x} \leqslant 0$.
4. При каких a функция
$$f(x) = \frac{a-3}{3}x^3 - ax^2 + (3a-6)x - 10$$
убывает на $\mathbb{R}$?

Вариант 3

1. Решите уравнения:
   а) $\frac{2x}{3x^2-x+2} - \frac{7x}{3x^2+5x+2} = 1$;
   б) $|x-3| + 2|x+1| = 4$.
2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 17 \\ x + xy + y = 9 \end{cases}.$$
3. Решите неравенство $\frac{1}{x+2} < \frac{3}{x-3}$.
4. При каких a функция
$$f(x) = \frac{(a-1)x^3}{3} - (a+1)\frac{x^2}{2} + (a+1)x - 15$$
возрастает на $\mathbb{R}$?

Вариант 4

1. Решите уравнения:
   а) $\frac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2} + \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3} = \frac{7}{6}$;
   б) $|x-3| - |x-1| = 6$.
2. Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} x + y + xy = 7 \\ x^2 + y^2 + xy = 13 \end{cases}.$$
3. Решите неравенство $\frac{x-1}{x} - \frac{x+1}{x-2} < 2$.
4. Найдите наименьшее целое k, при котором функция
$$f(x) = \frac{(k-2)x^3}{3} + 4x^2 + (k+4)x + 7$$
возрастает на $\mathbb{R}$?

2. Иррациональные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Решите уравнения:
   а) $\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5$;
   б) $\frac{2}{x}=\frac{\sqrt{5-4x}}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{5-4x}}$.
2. Решите неравенства:
   а) $\sqrt{5x^2-4}>3x-2$;
   б) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{5x+1}\leqslant\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+6}$.
3. При каких a уравнение $\sqrt{x^2+7a-6}-x+5=0$ не имеет корней?
4. Установите множество значений функции
$$y=\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1}.$$

Вариант 2

1. Решите уравнения:
   а) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{6+x}=3$;
   б) $\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{7-6x}}{x^2}=\frac{1}{\sqrt{7-6x}}$.
2. Решите неравенства:
   а) $\sqrt{x^2-3x-10}<8-x$;
   б) $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x+3}\leqslant 1$.
3. При каких a уравнение $\sqrt{x^2-9a+5}-x+4=0$ имеет корни?
4. Найдите наибольшее значение функции $y=x+\sqrt{2-x}$.

Вариант 3

1. Решите уравнения:
   а) $\sqrt{3x-2}+\sqrt{x-1}=3$;
   б) $\frac{\sqrt{6-5x}}{x^2}=\frac{2}{x}-\frac{1}{\sqrt{6-5x}}$.

2. Решите неравенства:
   а) $\sqrt{8+2x-x^2} > 6-3x$;
   б) $\frac{\sqrt{6-x-x^2}}{-2x+5} \geqslant \frac{\sqrt{6-x-x^2}}{x+4}$.
3. При каких a уравнение $\sqrt{x^2+6a+4}-x-7=0$ не имеет корней?
4. Установите множество значений функции
$$y=\sqrt{x+4}+\sqrt{2-x}.$$

Вариант 4

1. Решите уравнения:
   а) $\sqrt{x+6}-\sqrt{2x-5}=2$;
   б) $\frac{x^2}{\sqrt{3-2x}}=2x-\sqrt{3-2x}$.
2. Решите неравенства:
   а) $\sqrt{3x-x^2} < 4-x$;
   б) $\frac{\sqrt{10-3x-x^2}}{x+5} \geqslant \sqrt{2}$.
3. При каких a уравнение $\sqrt{x^2-3a+7}-x+3=0$ имеет корни?
4. Найдите наибольшее значение функции $y=x+\sqrt{9-3x}$.

3. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Вариант 1

1. Решите уравнение $\left(\frac{9}{25}\right)^{x+0,5}\cdot\left(\frac{125}{27}\right)^{x}=\frac{3\lg 8}{5\lg 32}$.
2. Решите неравенство $5\cdot 4^x-7\cdot 10^x+2\cdot 25^x<0$.
3. Решите уравнение $\log_2(x+4)+\log_2(x+1)=1+\log_2 5$.
4. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3-\frac{5}{2}$.
5. При каких значениях a уравнение $0{,}2^x=\frac{2a+3}{5-a}$ имеет отрицательный корень?

6. Найдите наибольшее значение функции
$$y = 10 + 4x\ln 9 - 3^{x-1} - 3^{3-x}.$$

Вариант 2

1. Решите уравнение $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$.
2. Решите неравенство $(3 \cdot 6^x + 4) \cdot (6^x - 4)^{-1} > 4$.
3. Решите уравнение $4\log_4^2(-x) + 2\log_4 x^2 + 1 = 0$.
4. Решите неравенство $\log_{0,1} \log_2 \frac{x^2+1}{x-1} < 0$.
5. При каких значениях a уравнение $\log_2(5a - x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ имеет единственное решение?
6. На каких промежутках убывает функция
$$y = \log_{\frac{1}{2}}^2 x + 2\log_{\frac{1}{2}} x + 60.$$

Вариант 3

1. Решите уравнение $\left(\frac{5}{6}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{8\lg 9}{15\lg 27}$.
2. Решите неравенство $3^{2x-1} + 4 \cdot 21^{x-1} - 7^{2x-1} < 0$.
3. Решите уравнение $\log_3(x+2) + \log_3(5x+4) = 5^{\log_5 3}$.
4. Решите неравенство $-\log_{\frac{1}{2}} x - \log_x 32 \leqslant 4$.
5. При каких значениях a уравнение $8^x = \frac{3a-2}{4-a}$ имеет положительный корень?
6. Найдите наименьшее значение функции
$$y = 3^x + 2 \cdot 3^{3-x} - x\ln 27 - 9.$$

Вариант 4

1. Решите уравнение $2^x \cdot 27^{5-x} = 2^3 \cdot 3^6$.
2. Решите неравенство $(2^x - 1) \cdot (2^x - 6)^{-1} > 2$.
3. Решите уравнение $3\lg x^2 - \lg^2(-x) = 9$.
4. Решите неравенство $\log_{0,5} \log_8 \frac{x^2-2x}{x-3} \leqslant 0$.
5. При каких значениях a уравнение $\log_3(4a - x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ имеет единственное решение?
6. На каких промежутках возрастает функция
$$y = \frac{3}{2}\lg^2 x + \lg^3 x.$$

4. Тригонометрия

Вариант 1

1. Упростите
$$\frac{2\sin^2 4\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+4\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\frac{5\pi}{4}-4\alpha\right)}.$$

2. Решите уравнения:

   а) $\sin^2 x + \sin^2 2x + \sin^2 3x = 1{,}5$;

   б) $3\sin x + 4\cos x = 2$.

3. Решите неравенство $\cos 2x - 5\sin x < 3$.

4. При каких значениях a имеет решение уравнение
$$\frac{\cos x - a}{\sqrt{\cos x - 3a + 1}} = 0?$$

5. Найдите критические точки функции и укажите одну точку минимума $y = \sin x + 0{,}5\sin 2x + 5$.

Вариант 2

1. Упростите $\frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}$.

2. Решите уравнения:

   а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos 4x$;

   б) $\cos 3x \cdot \cos 6x = \cos 4x \cdot \cos 7x$.

3. Решите неравенство $\operatorname{tg} x > 2\operatorname{ctg} x$.

4. При каких значениях a имеет решение уравнение
$$\frac{\sin\frac{x}{2} - a}{\cos x - 1} = 0?$$

5. Найдите критические точки функции и укажите одну точку максимума $y = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x - \sin x$.

Вариант 3

1. Упростите
$$\frac{1-2\cos^2 2\alpha}{2\operatorname{tg}\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}.$$

2. Решите уравнения:

   а) $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1{,}5$;

   б) $3\sin 2x+4\cos 2x=5$.

3. Решите неравенство $\cos 2x+3\sin x\geqslant -1$.

4. При каких значениях a имеет решение уравнение
$$\frac{\sin x-a}{\sqrt{\sin x-\frac{1}{2}}}=0?$$

5. Найдите критические точки функции и укажите одну точку минимума $y=1{,}5\sin 2x-3\sin x-5$.

Вариант 4

1. Упростите
$$\frac{1-\cos(8\alpha-3\pi)}{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha}.$$

2. Решите уравнения:

   а) $\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{7}{8}$;

   б) $\sin x\cdot\sin 7x=\sin 3x\cdot\sin 5x$.

3. Решите неравенство $\frac{2}{\operatorname{tg}x+1}<2-\operatorname{tg}x$.

4. При каких значениях a имеет решение уравнение
$$\frac{\cos\frac{x}{2}+a}{\sin x}=0?$$

5. Найдите критические точки функции и укажите одну точку максимума $y=-\frac{1}{2}\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x$.

Контрольные работы

1. Производная и ее геометрический смысл

Вариант 1

1. Какой угол с положительным направлением оси OX составляет касательная к графику функции
$$f(x) = -\frac{8+x}{3+x} - \left(\frac{5}{4} - \sqrt{3}\right)x + 32$$
в точке $x_0 = -1$.
2. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x + 2x$ параллельна оси OX.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 2^{x^2-4x} - 1$ в точках ее пересечения с осью OX.
4. На каких промежутках касательная к графику функции $y = \log_{0,7}(x^2 - 4x)$ составляет с положительным направлением оси OX тупой угол?
5. Решите неравенство $f'(x) < 0$, где
$$f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos^2 x - \sin^2 x) - x + 10.$$

Вариант 2

1. Какой угол с положительным направлением оси OX составляет касательная к графику функции
$$f(x) = \frac{4-x}{x+1} + \frac{6}{5}x + 7$$
в точке $x_0 = 4$.

2. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \cos 2x + \sin 2x + 2x$ параллельна оси OX.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = (0{,}2)^{x^2+2x} - 1$ в точке ее пересечения с осью OX.
4. На каких промежутках касательная к графику функции $y = \log_2(x^2 - 3x)$ составляет с положительным направлением оси OX острый угол?
5. Решите неравенство $f'(x) > 0$, где
$$f(x) = -2\sin^2 x - x + 1.$$

Вариант 3

1. Какой угол с положительным направлением оси OX составляет касательная к графику функции
$$f(x) = \frac{3-x}{5+x} + \left(\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)x + 10$$
в точке $x_0 = 1$.
2. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x - 2x$ параллельна оси OX.
3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = 3^{x^2-2x} - 1$ в точке ее пересечения с осью OX.
4. На каких промежутках касательная к графику функции $f(x) = \log_{0,3}(x^2 + 3x)$ составляет с положительным направлением оси OX тупой угол?
5. Решите неравенство $f'(x) > 0$, где
$$f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x + x - 20.$$

Вариант 4

1. Какой угол с положительным направлением оси OX составляет касательная к графику функции
$$f(x) = \frac{x+2}{3-x} - \frac{21}{16}x + 3$$
в точке $x_0 = -1$.
2. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = \sin 2x - \cos 2x + 2x$ параллельна оси OX.

3. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x}-1$ в точке ее пересечения с осью OX.
4. На каких промежутках касательная к графику функции $y=\log_3(4x-x^2)$ составляет с положительным направлением оси OX острый угол?
5. Решите неравенство $f'(x)<0$, где
$$f(x)=2\sin x\cdot\cos x+x-5.$$

2. Исследование функции с помощью производной

Вариант 1

1. Постройте график функции $y=x(x^2+3x+2)$.
2. Докажите, что функция $f(x)=\sin(2x+5)-6x$ убывает на $\mathbb{R}$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=\sqrt{x}-2\sqrt[4]{x}$ на $[0;100]$.
4. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, а каждая боковая грань имеет периметр 6. Найдите параллелепипед с наибольшим объемом и вычислите этот объем.

5*. На графике функции $f(x)=x^2-2$ найдите точки, ближайшие к точке $A(2;-1{,}5)$.

Вариант 2

1. Постройте график функции $y=\frac{x^4-2x^2}{4}$.
2. Докажите, что функция $f(x)=x\ln x$ убывает на $(0;\frac{1}{e})$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=e^{x^2-4x+3}$ на $[-5;5]$.
4. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 4. Основанием служит квадрат. Найдите параллелепипед с наименьшим периметром боковой грани и вычислите этот периметр.

5*. На графике функции $f(x)=x^2-3$ найдите точки, ближайшие к началу координат.

Вариант 3

1. Постройте график функции $y=(x^2+x)(x-2)$.
2. Докажите, что функция $f(x)=\cos(4-2x)+4x$ возрастает на $\mathbb{R}$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=2x-\sqrt{x}$ на $[0;4]$.
4. Определите размеры отрытого бассейна с квадратным дном объемом 32 м^3 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.
5.* На графике функции $f(x)=x^2+2$ найдите точки, ближайшие к точке $A(16;2{,}5)$.

Вариант 4

1. Постройте график функции $y=\frac{6x^2-x^4}{9}$.
2. Докажите, что функция $f(x)=x-\ln(2x-1)$ убывает на $(0{,}5;1{,}5)$.
3. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $f(x)=e^{-x^2-2x-3}$ на $[-2;2]$.
4.* Найдите наибольший объем треугольной пирамиды $MABC$, в основании которой лежит равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ $(AB=BC)$, если $MB\perp ABC$ и $MA=\sqrt{3}$.
5.* На графике функции $f(x)=1-x^2$ найдите точки, ближайшие к началу координат.

3. Первообразные и интегралы

Вариант 1

1. Найдите первообразные для функций:

   а) $f(x)=x^{\frac{3}{2}}+\left(\frac{3}{2}\right)^x$;

   б) $f(x)=\sin x\cdot\cos 3x$.

2. Найдите корни первообразной для функции $f(x) = 3x^2 - 2x - 9$, если один из них равен 1.
3. Вычислите:

   а) $\int\limits_a^{2a} (x^2 + 2ax)\, dx$;

   б) $\int\limits_1^5 \sqrt{3x+1}\, dx$;

   в)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=5$ и $y = 6 - x$.

5* Вычислите $\int\limits_0^2 \sqrt{4x - x^2}\, dx$.

Вариант 2

1. Найдите первообразные для функций:

   а) $f(x) = x^2 \sqrt[3]{x\sqrt[4]{x}}$;

   б) $f(x) = \dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right)}{\cos^3\left(\frac{\pi}{3} + 2x\right)}$.
2. Найдите корни первообразной для функции $f(x) = -3x^2 - 2x + 16$, если один из них равен -1.
3. Вычислите:

   а) $\int\limits_{-1}^{1} (x^4 + a^2 x)\, da$;

   б) $\int\limits_0^3 \sqrt[3]{3x-1}\, dx$;

   в)* $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\varphi \, d\varphi$.
4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y = 2\sqrt{x};\quad y = 3 - x;\quad x = 0.$$

5* Вычислите $\int\limits_1^2 \sqrt{2x - x^2}\, dx$.

Вариант 3

1. Найдите первообразные для функций:

   а) $f(x) = x^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{5}{2}\right)^x$;

   б) $f(x) = \sin 2x \cdot \cos 5x$.

2. Найдите корни первообразной для функции $f(x) = x^2 - 4x + 1$, если один из них равен 2.

3. Вычислите:

   а) $\int\limits_{-1}^{1} (x^4 + a^2x)\,da$;

   б) $\int\limits_{1}^{5} \sqrt{(2x-1)^3}\,dx$;

   в)* $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi\,d\varphi$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=2$ и $y = 3 - x$.

5.* Вычислите $\int\limits_{-4}^{0} \sqrt{-x^2 - 4x}\,dx$.

Вариант 4

1. Найдите первообразные для функций:

   а) $f(x) = x^3\sqrt{x^5\sqrt[3]{x}}$;

   б) $f(x) = \dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)}{\sin^3\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)}$.

2. Найдите ту первообразную для функции $f(x) = 3x - 1$, для которой уравнение $F(x) = 5$ имеет единственный корень.

3. Вычислите:

   а) $\int\limits_{x}^{2x} (x^2 + 2ax)\,da$;

   б) $\int\limits_{-2}^{5} \dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+3)^2}}$;

   в)* $\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos^3\varphi\,d\varphi$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{x}$; $y = x$; $x = e$.

5.* Вычислите $\int\limits_{-2}^{-1} \sqrt{-x^2 - 2x}\, dx$.

4. Контрольная работа № 1 на повторение пройденного материала

Вариант 1

1. Решите уравнение $3 \cdot 2^{2x} + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 3^{2x+2}$.
2. Решите уравнение $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{\log_4 y} + y^{\log_{\frac{1}{4}} x} = \frac{26}{5} \\ \sqrt{\log_5 x} + \sqrt{\log_4 y} = 2 \end{cases}$.
4. Решите уравнение $\sin 7x - \sin x + 2\cos^2 2x = 1$.
5. Напишите уравнение всех касательных к графику функции $y = \sqrt{4x - 3}$, которые проходят через точку $A(2; 3)$.
6. На каких промежутках возрастает функция
$$y = -\cos x - \sqrt{3}\sin x - x + 5?$$
7. Исследуйте на монотонность и экстремум функцию
$$y = \ln(5 - 3x) + 2x^2.$$
8. Сумма двух сторон треугольника равна a, угол между ними — $30°$. Найдите длины сторон треугольника наибольшей площади.
9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y^2 = x + 3 \quad \text{и} \quad x + 2y = 5.$$
10. Найдите все действительные значения b, при которых уравнение $\frac{3^{2x}}{9^x - 3^{x+1} + 2} = b$ имеет только одно решение.

Вариант 2

1. Решите уравнение $2 \cdot 3^{2x+1} + 5 \cdot 21^x = 49^x$.
2. Решите уравнение $\log_2(x^2-4) + \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-2}{x+6} = 5$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} y^{1-\frac{2}{5}\log_x y} = x^{\frac{2}{5}} \\ 1 + \log_x(1 - \frac{3y}{x}) = \log_x 4 \end{cases}$.
4. Решите уравнение $1 - \sin x = \cos x - \sin 2x$.
5. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x^2}$ $(x > 0)$, отсекающей на осях координат треугольник площадью $S = 2\frac{1}{4}$.
6. На каких промежутках возрастает функция
$$y = \frac{1}{2}\sin 2x - 7\sin x + 4x - 9^2?$$
7. Исследуйте на монотонность и экстремум функцию
$$y = (2x+1)e^{3x^2-4x+1}.$$
8. Найдите высоту конуса наибольшего объема, образующая которого равна l.
9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y = \sqrt{x}; \quad y = \sqrt{-2x}; \quad y = 2.$$
10. Найдите все действительные значения a, при которых уравнение $2\lg(x+1) = \lg ax$ имеет единственное решение.

Вариант 3

1. Решите уравнение $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.
2. Решите уравнение $4(1 + 2\log_2 x) = 3\log_2 x \cdot \log_x^2 4$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^{\log_3 y} + y^{\log_{\frac{1}{3}} x} = \frac{5}{2} \\ \sqrt{\log_2 x} + \sqrt{\log_3 y} = 2 \end{cases}$.
4. Решите уравнение $\sin 7x + \sin 3x + 2\sin^2 x = 1$.
5. Напишите уравнение всех касательных к графику функции $y = \sqrt{2x+1}$, которые проходят через точку $A(1; 2)$.
6. На каких промежутках убывает функция
$$y = -\sqrt{3}\cos x + \sin x - x + 10?$$

7. Исследуйте на монотонность и экстремум функцию
$$y = \ln(4-3x) - 2x^2.$$
8. Найдите стороны параллелограмма $ABCD$ наибольшей площади, у которого периметр равен P, а угол A равен 30°.
9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 3 - x$ и $2y - x = 5$.
10. Найдите все действительные значения a, при которых уравнение $\frac{2^{2x+1}}{4^x - 2^{x+1} + 3} = a$ имеет только одно решение.

Вариант 4

1. Решите уравнение $2 \cdot 81^{x+1} - 36^{x+1} - 3 \cdot 16^{x+1} = 0$.
2. Решите уравнение $\log_4(x^2 - 16) + \log_{\frac{1}{4}} \frac{x+4}{x+2} = 2$.
3. Решите систему уравнений $\begin{cases} y \cdot x^{\log_y x} = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y(y - 3x) = 1 \end{cases}$.
4. Решите уравнение $\sin x - \cos x = \sin 2x - \frac{1}{2}$.
5. Напишите уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ $(x \geqslant 0)$, отсекающей на осях координат треугольник площадью $S = \frac{2}{3}$.
6. На каких промежутках убывает функция
$$y = \frac{1}{2}\sin 2x - 3\sin x - x + 7?$$
7. Исследуйте на монотонность и экстремум функцию
$$y = (2x+3)e^{3x^2+2x-1}.$$
8. В равнобедренной трапеции нижнее основание равно l, угол при основании равен α. Диагональ трапеции перпендикулярна боковой стороне. Найдите наибольшую площадь трапеции.
9. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{-x}$; $y = \sqrt{3x}$; $y = 3$.
10. Найдите все действительные значения b, при которых уравнение $2\lg(1-x) = \lg bx$ имеет единственное решение.

5. Контрольная работа № 2 на повторение пройденного материала

Вариант 1

1. Вычислите $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^0\right)^{-0,5} - 7,5 \cdot 4^{-\frac{3}{2}} - (-2)^{-4} + 81^{0,25}$.
2. Упростите $\frac{a-1}{a+a^{\frac{1}{2}}+1} : \frac{a^{0,5}+1}{a^{1,5}-1} + \frac{2}{a^{-0,5}}$.
3. Вычислите $\sqrt{\log_{\frac{1}{2}} 9 - 2\lg_{\frac{1}{2}} 12}$.
4. Решите неравенство $\frac{7}{(x-2)(x-3)} + \frac{9}{x-3} + 1 < 0$.
5. Найдите те решения уравнения $\sin 3x \cdot \cos 3x = \sin 2x$, для которых определено выражение $g(x) = \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Решите уравнение $8 \cdot 9^x + 6^{x+1} = 27 \cdot 4^x$.
7. Решите уравнение $\lg^2(4x-5) = \lg^2(3x-1)$.
8. Установите область определения функции
$$f(x) = \sqrt{-7 - 2x^2 - 9x} + \lg(2x+5).$$
9. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $y = 2x^2 + (\sqrt{3} - 8)x + \sqrt{3}$ образует угол в 60° с осью OX.
10. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12 - 2$, $x \in [-2; 1]$.

Вариант 2

1. Вычислите $\frac{1}{\sqrt{2}-1} - 2^{0,2} \cdot \frac{1-2^{0,5}}{2^{-0,3}}$.
2. Упростите $\frac{b-1}{b^{0,5}-1} \cdot \frac{b^{1,5}+1}{b-b^{0,5}+1} - \frac{2}{b^{-0,5}}$.
3. Вычислите $\sqrt{25^{\frac{1}{\log_5 6}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}}$.
4. Решите неравенство $\frac{20}{(x-3)(x-4)} + \frac{10}{x-4} + 1 < 0$.

5. Найдите те решения уравнения
$$\sin 6x \cdot \cos 6x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right),$$
для которых определено выражение $g(x) = \operatorname{tg}\left(4x + \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Решите уравнение $\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x + \left(\sqrt{5+\sqrt{24}}\right)^x = 10$.
7. Решите уравнение $6\log_{0,5}(-x) - \log_{0,5}^2 x^2 = 2$.
8. Установите область определения функции
$$f(x) = \log_{x(x-5)} \frac{x+4}{2-x}.$$
9. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = 2^{3x+4}$ в точке ее пересечения с кривой $y = 4^{x+2}$.
10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2x - \sqrt{x}$, $x \in [0; 4]$.

Вариант 3

1. Вычислите $3^{0,3} : \frac{3^{-0,2}}{1-3^{0,5}} + \frac{2}{1-\sqrt{3}}$.
2. Упростите $\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}}+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}}$ и вычислите для $a = \frac{1}{16}$, $b = \frac{1}{8}$.
3. Вычислите $\sqrt{36^{\frac{1}{\log_3 6}} + 81^{\frac{1}{\log_4 9}}}$.
4. Решите неравенство $\frac{\sqrt{17-15x-2x^2}}{x+3} < 0$.
5. Решите уравнение $\sin 3x \cdot \sqrt{4-x^2} = 0$.
6. Решите уравнение $\left(\sqrt{6-\sqrt{35}}\right)^x + \left(\sqrt{6+\sqrt{35}}\right)^x = 12$.
7. Решите уравнение $\log_4^2 x^2 + 3 = 7\log_4(-x)$.
8. Установите область определения функции
$$f(x) = \log_{-x^2-4x}(6 - x^2 - 5x).$$
9. Найдите абсциссу точки, в которй касательная к графику функции $y = (x^2 + x)^{-1}$ параллельна оси OX.
10. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2\sqrt{x} - x$ $x \in [0; 9]$.

Вариант 4

1. Вычислите $0{,}5\sqrt[3]{96}\cdot\sqrt[3]{5+\frac{1}{3}}-\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{5^4}}{\sqrt[3]{5}}$.
2. Упростите $\frac{m^{-\frac{3}{2}}-m^{-\frac{5}{2}}}{m^{-\frac{5}{2}}-m^{-3}}-\frac{m^{\frac{1}{2}}-m^{-1}}{m^{-\frac{1}{2}}-m^{-1}}$ и вычислите при $m=0{,}81$.
3. Вычислите $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_3\cos\frac{\pi}{6}-\log_3\sin\frac{\pi}{6}\right)$.
4. Решите неравенство $1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2$.
5. Решите уравнение $\sin 2x\cdot\sqrt{7+6x-x^2}=0$.
6. Решите уравнение $2\cdot 3^{x-3}-4=a+a\cdot 3^{x-3}$.
7. Решите уравнение $\lg_x 2\cdot\lg_{2x}2=\lg_{4x}2$.
8. Найдите сумму целых значений x из области определения $f(x)=\frac{\lg_2 x}{\arcsin(x-3)}$.
9. Найдите абсциссы точек, в которых касательная к графику функции $f(x)=\sqrt{2x^2+1}$ параллельна оси OX.
10. Найдите наименьшее значение функции
$$f(x)=x+\ln\frac{1}{x-2}.$$

Примечание. Работы рассчитаны на 5 часов. Оценка "5" ставится за верное решение любых 9 заданий, оценка "4" — за 7–8 заданий, оценка "3" — за 4–6 заданий.

6. Контрольные тесты

Вариант 1

1. Упростите $\frac{3-2a^{-\frac{1}{2}}+a^{-1}}{1-2\sqrt{a}+3a}$.
2. Сравните $a=1-2\sin 28^\circ$ и $b=2\sin 32^\circ-1$.
3. Решите уравнение $\frac{\cos x-2}{\cos\frac{x}{2}}=2$.

4. Найдите область определения функции
$$y=\sqrt{(9-3^x)\log_2(x+2)}.$$
5. Решите уравнение $2\log_x 8 - 3\log_8 x = 1$.
6. Найдите расстояние от начала координат до касательной, проведенной к графику функции $y=\sqrt{x}$ в точке $(1;1)$.
7. При каком значении a функция $y=ax+\cos x$ возрастает на $\mathbb{R}$?
8. Найдите экстремумы функции $y=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$.
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[-3;0]$, если
$$f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x+3.$$
10. Вычислите $\int\limits_{-2}^{2}\frac{x\cos x}{x^4+3}\,dx$.
11. Решите уравнение $x\sqrt{2-x}=4\sqrt{2-x}$.
12. Решите неравенство $1+\sqrt{x^2-6x+8}>0$.
13. Решите систему уравнений $\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{y}}=1\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$.
14. Вычислите $\log_6 2-\sqrt{\log_6^2 3+2\log_6 4}$.
15. Решите неравенство $\log_x 2x>1$.
16. При каких значениях a уравнение $(0{,}2)^x=\frac{2a+3}{5-a}$ не имеет корней?
17. Покажите, что число A целое, и найдите его:
$$A=4\cos 20^\circ-\operatorname{cosec}10^\circ.$$
18. При каких значениях a имеет решение уравнение
$$5\sin 3x-6\cos 3x=a?$$
19. Решите уравнение $\arccos(-x^2)+\arcsin x=\frac{\pi}{2}$.
20. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее второй член равен 2, а третий $\frac{1}{4}$.

Вариант 2

1. Упростите $\frac{2}{\sqrt{a}} - \frac{a-4a^{-1}}{\sqrt{a-2a^{-\frac{1}{2}}}}$.
2. Вычислите $\sin 60^\circ \cdot \cos^{-1} 10^\circ - 2\cos 20^\circ$.
3. Решите уравнение $\frac{\cos x+1}{\sin\frac{x}{2}} = 4$.
4. Найдите область определения функции
$$y = \log_2 \frac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)}{3x-x^2}.$$
5. Решите уравнение
$$\log_{\frac{1}{\sqrt{x}}}(x-6) - \log_{x-6}\sqrt{x} = -2.$$
6. На каком расстоянии от начала координат проходит касательная, проведенная к графику функции $y=\sqrt{2-x}$ в точке его пересечения с осью OY?
7. При каком значении b функция $y = a - bx + \sin x$ убывает на $\mathbb{R}$?
8. Найдите экстремумы функции
$$y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x - 1.$$
9. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = f(x)$ на отрезке $[2;4]$, если $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$.
10. Вычислите $\int\limits_{-1}^{1} \frac{\sin^3 x}{2+x^2+\cos x}\,dx$.
11. Решите уравнение $(2x-3)\sqrt{x-5} = x\sqrt{x-5}$.
12. Решите неравенство $3 + \sqrt{12-x-x^2} \geqslant 0$.
13. Решите систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{6} \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \end{cases}$.
14. Вычислите $2^{\lg 5+1} \cdot 5^{1-\lg 2}$.
15. Решите нервенство $\log_{2x} x < 1$.

16. При каких значениях a уравнение $(0{,}2)^x = \frac{2a+3}{5-a}$ имеет отрицательные корни?
17. Покажите, что число A целое, и найдите его
$$A = \sqrt{3}(\operatorname{ctg} 70^\circ + 4\cos 70^\circ).$$
18. При каких значениях a имеет решение уравнение
$$7\cos\frac{x}{2} - 3\sin\frac{x}{2} = a?$$
19. Решите уравнение $(\arcsin x)^2 + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.
20. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее второй член равен 9, а третий $\frac{1}{3}$.

Вариант 3

1. Число 40 составляет 10% от числа N^2. Найдите N.
2. Решите уравнение $x^2 - 2x = (x^2-2)(x-2)$.
3. Найдите наименьшее целое число, удовлетворяющее неравенству $(x+4)(x^2-4) > 0$.
4. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 - y^4 = 15 \end{cases}$.
5. Вычислите $\left(\frac{64\sqrt[6]{a}\cdot a^{-\frac{17}{5}}}{a^{-\frac{7}{30}}}\right)^{-\frac{1}{6}}$ при $a = 25$.
6. Установите область определения функции
$$y = \sqrt{|x-3| - 2x^0}.$$
7. График функции $y = a^x$ проходит через точку $\left(-\frac{\pi}{2}; 3^\pi\right)$. Найдите a.
8. Решите неравенство $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-1} < \cos\frac{\pi}{6}$.
9. $\lg 5 = m$; $\lg 3 = n$. Вычислите $\lg 75$.
10. Решите уравнение $\log_{\sqrt{3}} x = 6 - \log_3 x$.

11. Установите множество значений функции
$$y = \frac{\pi}{3} - 2\arccos x.$$

12. Расположите числа $\sin 1$; $\sin 3$; $\sin\frac{\pi}{5}$ в порядке возрастания.

13. Вычислите $\cos 75°$.

14. Решите уравнение $\sin x = \sin 2$.

15. Прямая $y = 5x - 4$ касается графика функции $y = x^2 - x + 5$. Найдите абсциссу точки касания.

16. На каких промежутках возрастает функция
$$y = -x^3 + 4x^2 - 5x + 1?$$

17. Найдите критические точки функции
$$y = \sin x - \sqrt{3}\cos x.$$

18. Найдите первообразные для функции $y = \sqrt{2x+1}$.

19. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$; $y = e$; $x = 0$.

20. Вычислите $\int\limits_{-2}^{2} \sqrt{4 - x^2}\,dx$.

Вариант 4

1. Число A составляет 25% от числа B. Сколько процентов от числа $A + B$ составляет число A.

2. Решите уравнение $\frac{x^2-2x}{x-2} = x^2 - 2$.

3. Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству $(x - 3)(x^2 - 25) < 0$.

4. Решите систему уравнений $\begin{cases} xy + 2 = 0 \\ x^4y^3 - x^3y^4 = -24 \end{cases}$.

5. Вычислите $\left(\frac{9a^{-\frac{5}{24}}}{\sqrt[8]{a}\cdot a^{\frac{5}{3}}}\right)^{\frac{1}{3}}$ при $a = 24$.

6. Установите область определения функции
$$y = \sqrt{3x^0 - |x + 2|}.$$

7. График функции $y = a^x$ проходит через $B\left(-\frac{\pi}{3}; 2^{\pi}\right)$. Найдите a.
8. Решите неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x} > \sin\frac{\pi}{4}$.
9. $\lg 2 = a$; $\lg 15 = b$. Вычислите $\lg 60$.
10. Решите уравнение $\log_{\sqrt{2}} x + \log_2 x = 9$.
11. Установите множество значений функции
$$y = \pi - 2\arcsin x.$$
12. Расположите числа $\cos 1$; $\cos 5$; $\cos\frac{\pi}{5}$ в порядке возрастания.
13. Вычислите $\cos 15°$.
14. Решите уравнение $\cos x = \cos 3$.
15. Прямая $y = 3x + 6$ касается графика функции
$$y = -x^2 - x + 2.$$
Найдите абсциссу точки касания.
16. На каких промежутках убывает функция
$$y = -x^3 + 2x^2 - x + 3?$$
17. Найдите критические точки функции
$$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$$
18. Найдите первообразные для функции $y = \frac{1}{2x+1}$.
19. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \left(\frac{1}{e}\right)^x$; $y = e$; $x = 0$.
20. Вычислите $\int\limits_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$.

ответы
указания
решения

10 класс. Ответы к самостоятельным работам

1. Действительные числа

Вариант 1

1. а) $0{,}6$, б) $0{,}(27)$. **2.** а) $\frac{7}{9}$, б) $1\frac{7}{330}$. **3.** а) $4 < \sqrt{17}$, б) $\sqrt{5} - 1 < \sqrt{2}$. **4.** а) 2, б) $\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. а) $0{,}75$, б) $0{,}(63)$. **2.** а) $\frac{1}{3}$, б) $3\frac{13}{55}$. **3.** а) $7 > \sqrt{48}$, б) $\sqrt{3} + \sqrt{2} < \sqrt{10}$. **4.** а) 3, б) $\sqrt{2}$.

Вариант 3

1. а) $\frac{8}{33}$, б) $4\frac{17}{150}$. **2.** а) $\sqrt{6} + \sqrt{7} < \sqrt{3} + \sqrt{14}$, б) $1 + \sqrt{15} < \sqrt{5} + \sqrt{7}$. **3.** а) 2, б) 28. **4.** $\frac{217\sqrt{3}}{30}$.

Вариант 4

1. а) $\frac{17}{33}$, б) $4\frac{13}{60}$. **2.** а) $\sqrt{2} + \sqrt{15} > \sqrt{3} + \sqrt{10}$, б) $1 + \sqrt{21} < \sqrt{3} + \sqrt{15}$. **3.** а) 4, б) 30. **4.** $\frac{61\sqrt{10}}{12}$.

Вариант 5

1. $3\frac{8}{55}$. **2.** $1 + \sqrt{11}$; $\sqrt{3} + \sqrt{7}$; $\sqrt{5} + \sqrt{6}$. **3.** а) $1{,}5$ и $\sqrt{2{,}5}$, б) $7{,}005$ и $\sqrt{49{,}1}$. **4.** а) -8, б) 0.

Вариант 6

1. а) $2\frac{5}{11}$. **2.** $1 + \sqrt{15}$; $\sqrt{2} + \sqrt{12}$; $\sqrt{5} + \sqrt{7}$. **3.** а) $2{,}5$ и $\sqrt{6{,}5}$, б) $5{,}005$ и $\sqrt{25{,}1}$. **4.** а) $2\sqrt{2}$, б) 0.

Вариант 7

1. а) да. **2.** $\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} > \frac{2}{1-\sqrt{2}}$. **3.** а) 9, б) -2, в) $\sqrt{6}+\sqrt{2}$. **4.** Указание. Постройте прямоугольный треугольник с катетами 1 и 4. **5.** Решение. Заметим, что $\frac{1}{\sqrt{1}} > \frac{1}{10}$ (1); $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{10}$ (2); $\frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{10}$ (3) ... $\frac{1}{\sqrt{100}} \geqslant \frac{1}{10}$ (100). $(1)+(2)+(3)+\dots+(100)$ и получим искомый результат.

Вариант 8

1. а) да. **2.** $\sqrt{2}+\sqrt{11} < \sqrt{3}+3$. **3.** а) 6, б) $-\sqrt{2}$, в) 2. **4.** Указание. Постройте прямоугольный треугольник с катетом 1 и гипотенузой 4.

2. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Арифметический корень натуральной степени

Вариант 1

1. 40,5. **2.** а) $4\sqrt{3}$, б) $\sqrt[9]{16}$. **3.** $x \geqslant 1$. **4.** а) $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, б) $\frac{1}{\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{b}}$.

Вариант 2

1. 32. **2.** а) $-4\sqrt{2}$, б) $\sqrt[9]{54}$. **3.** $0 \leqslant x \leqslant 1$. **4.** а) $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$, б) $\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}$.

Вариант 3

1. $\frac{16}{3}$. **2.** а) 16, б) a.

3. а) $\frac{2(3+\sqrt{3})}{3}$, б) $\frac{\sqrt{14}\sqrt{5+\sqrt{\pi}}}{2}$. **4.** $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$.

Вариант 4

1. $-\frac{16}{3}$. **2. а)** 27, **б)** b.

3. а) $3(3\sqrt{2}-4)$, **б)** $\frac{\sqrt{4+\sqrt{7}}}{3}$. **4.** $-\sqrt{2-x}$.

Вариант 5

1. $\frac{2}{3}$. **2. а)** $\sqrt[3]{a^5}$, **б)** $\sqrt{|x-y|}$. **3. а)** 2, **б)** $-2\sqrt{10}$.

Вариант 6

1. $\frac{2}{3}$. **2. а)** $\sqrt[6]{\frac{y}{x}}$, **б)** $\frac{1}{\sqrt{|x-2|}}$. **3. а)** 3, **б)** $-2\sqrt{7}$.

Вариант 7

1. $\frac{3}{5}$. **2.** $7(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)$. **3. а)** Если $1 \leqslant a < 2$, то $\frac{2}{2-a}$; если $a > 2$, то $\frac{2\sqrt{a-1}}{a-2}$, **б)** $1+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.
4. 4. Решение. Пусть

$$\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}=x, \qquad (1)$$

тогда $52+3\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}\cdot(\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}+$ $+\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}})=x^3$; $52+3x=x^3$; $x=4$.

Вариант 8

1. $\frac{9}{16}$. **2.** $-3(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{2}+1)$. **3. а)** Если $4 \leqslant b < 8$, то $\frac{2\sqrt{b-4}}{b-8}$; если $b > 8$, то $\frac{4}{8-b}$, **б)** $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. **4.** 3.

3. Степень с действительным показателем

Вариант 1

1. а) $\frac{1}{8}$, **б)** 25. **2. а)** $a-b$, **б)** -1. **3.** 0,25.

Вариант 2

1. а) $\frac{1}{81}$, **б)** 8. **2. а)** $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}$, **б)** 1. **3.** 6,4.

Вариант 3

1. 36. **2.** **а)** 3, **б)** a^2b. **3.** $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{3}-1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$. **4.** −7.

Вариант 4

1. **а)** 100. **2.** **а)** −4, **б)** $a^{169}b^{62}$. **3.** $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{2}+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}$. **4.** 1.

Вариант 5

1. $2^{\frac{35}{64}}$. **2.** $\sqrt{y}$. **3.** $\frac{1}{1+\sqrt[3]{a}}$.

Вариант 6

1. $2^{\frac{3}{5}} \cdot 3^{\frac{13}{60}} \cdot 5^{-\frac{2}{15}}$. **2.** b. **3.** $\frac{a}{1+a}$.

Вариант 7

1. $\sqrt{37}+2 > 2\sqrt[3]{63}$, т.к. $\sqrt{37}+2 > \sqrt{36}+2 = 8$, а $2\sqrt[3]{63} < 2\sqrt[3]{64} = 8$. **2.** 3; -2. **3.** y. Указание. Первое подкоренное выражение равно $\left(\frac{y+\sqrt{y^2-16}}{2}\right)^3$.

Вариант 8

1. $2\sqrt[5]{244} > \sqrt[3]{26}+3$. **2.** 3; 2. **3.** x.

4. Степенная функция и обратная функция

Вариант 1

1. **а)** Первое число больше второго, **б)** Первое число меньше второго. **2.** **а)** $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$, **б)** $x \geqslant 0$; $y \geqslant 2$. **3.** **а)** см. рис. 1, **б)** см. рис. 2.

Вариант 2

1. **а)** Первое число больше второго, **б)** Первое число меньше второго. **2.** **а)** $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}$, **б)** $x \geqslant 0$; $y \leqslant 3$. **3.** **а)** см. рис. 3, **б)** см. рис. 4.

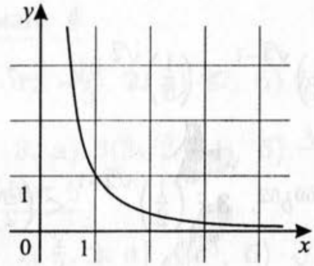


рис. 1

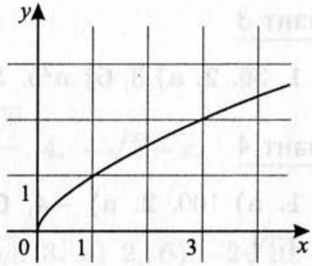


рис. 2

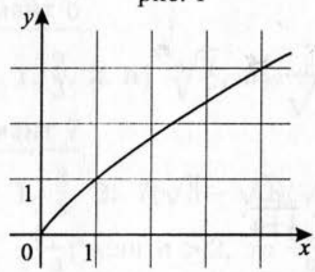


рис. 3

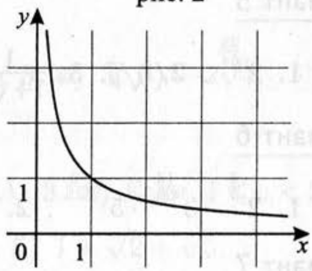


рис. 4

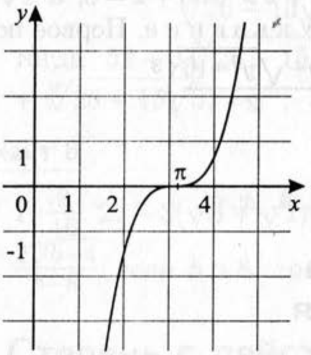


рис. 5

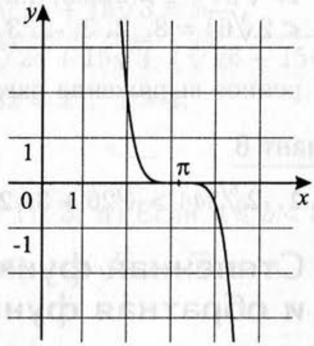


рис. 7

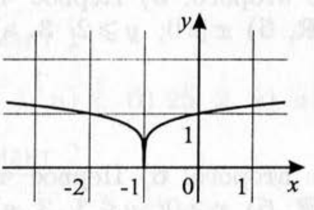


рис. 6

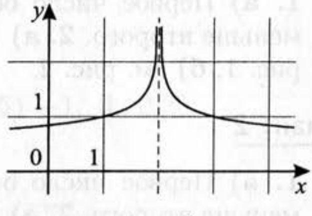


рис. 8

Вариант 3

1. а) Первое число меньше второго, **б)** Первое число меньше второго. **2. а)** $y=0{,}5x+3{,}5$, **б)** $y=3-\frac{1}{x}$. **3. а)** см. рис. 5, **б)** см. рис. 6.

Вариант 4

1. а) Первое число меньше второго, **б)** Первое число меньше второго. **2. а)** $y=0{,}6-0{,}2x$, **б)** $y=1+\frac{1}{x}$. **3. а)** см. рис. 7, **б)** см. рис. 8.

Вариант 5

1. а) Первое число меньше второго. **2.** $y<0{,}5$; $y>0{,}5$. **3.** $y=|x-3|^{\frac{1}{3}}-1$, см. рис. 9.

Вариант 6

1. а) Первое число больше второго. **2.** $y<2$; $y>2$. **3.** $y=-|x+2|^{\frac{3}{2}}+1$, см. рис. 10.

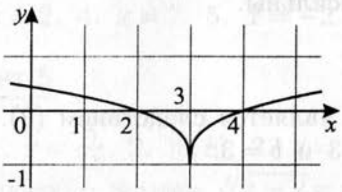


рис. 9

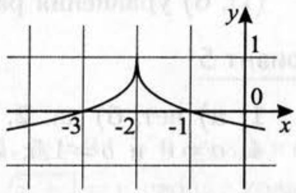


рис. 10

Вариант 7

1. $y=-1-\sqrt{y+4}$. **2.** $y\leqslant-5$; $y\geqslant1$. **3.** Первое число больше второго. У к а з а н и е.

$$\frac{4\sqrt{39}-3\sqrt{19}}{12}=\frac{\sqrt{624}-\sqrt{171}}{12}<\frac{\sqrt{625}-\sqrt{169}}{12}=1;\ \frac{6\sqrt{10}-5}{7}=$$
$$=\frac{\sqrt{360}-5}{7}<\frac{\sqrt{361}-5}{7}=2;\ \frac{9\sqrt{6}+2}{12}=\frac{\sqrt{486}+2}{12}>\frac{\sqrt{484}+2}{12}=2.$$

Вариант 8

1. $y=4+\sqrt{4-y}$. **2.** $y\leqslant-6$; $y\geqslant2$. **3.** Первое число меньше второго.

5. Равносильность уравнений и неравенств

Вариант 1

1. а) да, б) да. **2.** а) нет, б) да. **3.** а) (2) следует из (1), б) (1) следует из (2).

Вариант 2

1. а) да, б) нет. **2.** а) да, б) да. **3.** а) (2) следует из (1), б) (1) следует из (2).

Вариант 3

1. а) нет, б) нет. **2.** а) да, б) нет. **3.** а) (2) следует из (1), б) уравнения равносильны.

Вариант 4

1. а) нет, б) нет. **2.** а) нет, б) да. **3.** а) (2) следует из (1), б) уравнения равносильны.

Вариант 5

1. а) нет, б) да. **2.** (1) является следствием (2). **3.** да. **4.** $a=0$ и $b=1{,}5$; $a=3$ и $b=3$.

Вариант 6

1. а) нет, б) нет. **2.** (2) является следствием (1). **3.** да. **4.** $a=-1$ и $b=1$; $a=0$ и $b=\frac{2}{3}$.

Вариант 7

1. а) нет, б) нет. **2.** уравнения равносильны. **3.** $a=-2$; $a=-1$.

Вариант 8

1. а) нет, б) нет. **2.** уравнения равносильны. **3.** $b=1$; $b=2$.

6. Иррациональные уравнения

Вариант 1

1. $x=-1$; $x=2$. **2.** $x=1$. **3.** $x=\frac{1}{3}$; $x=1{,}5$. **4.** $x=2$; $x=11$. **5.** $x=1$; $x=27$.

Вариант 2

1. $x=-3$; $x=2$. **2.** $x=-2$. **3.** $x=-\frac{1}{2}$; $x=\frac{2}{3}$. **4.** $x=5$; $x=9$. **5.** $x=-8$; $x=27$.

Вариант 3

1. $x=4$. **2.** $x=1-\sqrt{2}$; $x=2$; $x=3$. **3.** $x=-4{,}5$; $x=3$. **4.** $x=-1{,}5$; $x=0{,}5$. **5.** $x=1$.

Вариант 4

1. $x=2$. **2.** $x=-1+\sqrt{5}$; $x=-5$; $x=-2$. **3.** $x=-4$; $x=2$. **4.** $x=7$. **5.** $x=-2$.

Вариант 5

1. $x=\frac{5}{18}$. **2.** $[3;8]$. **3.** $x=1$. **4.** $x=3$. Указание. 1 способ — замена $\sqrt[3]{x-2}=u$; $\sqrt{x+1}=v$ сводит уравнение к системе $\begin{cases} u+v=3 \\ u^3-v^2=-3 \end{cases}$.

2 способ — $x=3$ корень уравнения (подбором). Поскольку левая часть уравнения есть сумма двух возрастающих функций, а правая — число, то уравнение может иметь только одно решение.

5. $a\in\left\{-\frac{37}{4}\right\}\cup(-9;-3)\cup[3;+\infty)$.

Вариант 6

1. $x=\frac{1}{10}$. **2.** $[5;10]$. **3.** $x=2$. **4.** $x=3$.

5. $a\in\left\{-\frac{49}{4}\right\}\cup(-12;-6)\cup[8;+\infty)$.

Вариант 7

1. $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$. **2.** $x = \frac{5+3\sqrt{5}}{2}$. Указание. Домножьте левую и правую части уравнения на $(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-2})$. **3.** Решений нет. **4.** $\left\{\frac{4}{3}\right\} \cup \left(\frac{7}{5}; \frac{7}{3}\right]$. Решение. Постройте графики (1) $y = \sqrt{-8x - x^2 - 15}$ (полуокружность с центром в точке $Q(-4;0)$ и $r = 1$) и (2) $y = ax + 7$ (прямая, проходящая через точку $A(0;7)$) см. рис. 11.

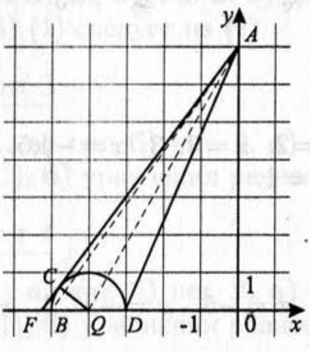


Рис. 11

1. Если прямая (2) проходит через точку $B(-5;0)$, то решений 2. При движении к точке $D(-3;0)$ решение получится единственное, то есть $a \in \left(\frac{7}{5}; \frac{7}{3}\right]$ (значения a легко находятся при подстановке координат точек B и D в (2)). При движении прямой от точки B к точке C будет два решения.

2. Осталось рассмотреть случай касания в точке C. Пусть $\angle AFO = \rho$, тогда $\operatorname{tg}\rho = a$. Пусть $\angle AQC = m$, а $\angle AQO = n$, тогда $a = \operatorname{tg}\rho = \operatorname{tg}(90° - m - n) = \operatorname{ctg}(m+n) = \frac{1}{\operatorname{tg}(m+n)} = \frac{1 - \operatorname{tg} m \cdot \operatorname{tg} n}{\operatorname{tg} m + \operatorname{tg} n}$.

Из геометрических соображений легко найти QC, QA, AC, OD и OA, а также $\operatorname{tg} m = \frac{1}{8}$ и $\operatorname{tg} n = \frac{4}{7}$. Откуда $a = \operatorname{tg}\rho = \frac{1 - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{1}{8} + \frac{4}{7}} = \frac{4}{3}$.

Вариант 8

1. $[-3;3]$. **2.** $x = \frac{3(1+\sqrt{5})}{2}$. **3.** Решений нет.

4. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right) \cup \left\{\frac{8}{15}\right\}$.

7. Иррациональные неравенства

Вариант 1

1. $2 \leqslant x \leqslant 11$. **2.** $(1;3]$. **3.** $[-2;2)$. **4.** $[0;1) \cup (4;+\infty)$. **5.** $[0;3]$.

Вариант 2

1. $4 \leqslant x \leqslant 5$. **2.** $(2;6]$. **3.** $(-\infty;1)$. **4.** $[0;1) \cup (9;+\infty)$. **5.** $(-\infty;0]$.

Вариант 3

1. $\{-3\} \cup [-1;3]$. **2.** $[0;1) \cup (9;+\infty)$. **3.** $[4;5)$. **4.** $[-1;2]$. **5.** $(2;+\infty)$.

Вариант 4

1. $\{4\} \cup [2;4]$. **2.** $[1;4)$. **3.** $[2;3]$. **4.** $[-4;1]$. **5.** $(3;+\infty)$.

Вариант 5

1. 16. **2.** $[0{,}5;1)$. **3.** $[-1;0] \cup [1;2]$. **4.** $[1;5) \cup (10;+\infty)$. **5.** $(-\infty;-2] \cup [1;+\infty)$.

Вариант 6

1. 20. **2.** $[0{,}8;1)$. **3.** $[-3;2]$. **4.** $[1;+\infty)$. **5.** $(-\infty;-1] \cup [2;+\infty)$.

Вариант 7

1. $\left[-\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right] \cup \{3\}$. **2.** $\left(-\frac{2}{7};0\right]$.

3. $\left(-1;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right] \cup (2;+\infty)$. **4.** $\left(\frac{2\sqrt{13}-5}{3};1\right]$.

5. $\left[\frac{27-4\sqrt{66}}{9};\frac{8-\sqrt{85}}{3}\right] \cup \left[\frac{7+\sqrt{349}}{6};\frac{27+4\sqrt{66}}{9}\right]$.

Вариант 8

1. $\{-2\} \cup \left[\frac{1}{3};\frac{3}{2}\right]$. **2.** $(5;+\infty)$.

3. $(-\infty;-1) \cup \left(\frac{\sqrt{13}-3}{2};2\right)$. **4.** $\left(\frac{7+\sqrt{13}}{3};4\right]$.

5. $\left[\frac{3-\sqrt{264}}{3};\frac{1-\sqrt{85}}{2}\right] \cup \left[\frac{3+\sqrt{349}}{4};\frac{3+\sqrt{264}}{3}\right]$.

8. Показательные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. $x=1$; $x=2$. **2.** $x<-2$. **3.** $x=1$. **4.** $x\leqslant 2$. **5.** $x=2$.

Вариант 2

1. $x=-\frac{1}{2}$; $x=1$. **2.** $x\leqslant -1{,}5$. **3.** $x=1$. **4.** $x>1$. **5.** $x=2$.

Вариант 3

1. $x=\frac{1}{4}$. **2.** $(2;3)$. **3.** $x=2$. **4.** $x<-1$. **5.** $x=0$.

Вариант 4

1. $x=-\frac{1}{9}$. **2.** $x<0$; $1<x<2$. **3.** $x=1$. **4.** $x\leqslant 1$. **5.** $x=0$.

Вариант 5

1. $x=1{,}5$. **2.** $x>2$. **3.** $x=-2$; $x=2$. **4.** $(-2;-1)$. **5.** $a\leqslant -1{,}5$; $a>5$.

Вариант 6

1. $x=-1{,}5$. **2.** $x>0$. **3.** $x=-2$; $x=2$. **4.** $(-1;2)$. **5.** $a<-\frac{4}{3}$; $a>4$.

Вариант 7

1. $x=1$. **2.** $\left(-\frac{1}{2};1\right)$. **3.** $x=1-\sqrt{2}$; $x=1$; $x=1+\sqrt{2}$. **4.** $x=0$. **5.** $a\in(0;2]\cup\{3\}$.

Вариант 8

1. $x=1{,}25$. **2.** $[-2;1]$. **3.** $x=\frac{1}{2}$; $x=1$; $x=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$. **4.** $x\neq 0$; $x\neq \pi k+\frac{\pi}{2}$, $x\in\mathbb{Z}$. **5.** $a\in\{-8\}\cup(0;1]$.

9. Системы показательных уравнений и неравенств

Вариант 1

1. $(1;2)$. **2.** $(3;2)$. **3.** $(2;3)$. **4.** $[0;1)$.

Вариант 2

1. $(3;1)$. **2.** $(2;3)$. **3.** $(3;1)$. **4.** $[-1;0)\cup(1;4]$.

Вариант 3

1. $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$. **2.** $(2;3)$. **3.** $(2;3)$; $(3;2)$.
4. $(-10;-8)\cup(4;5]$.

Вариант 4

1. $(4;1)$. **2.** $(4;3)$. **3.** $(4;10)$. **4.** $[-3;-2)\cup(3;5)$.

Вариант 5

1. $(5;1)$; $(3;3)$; $(4;2)$. **2.** $(-10;-12)$; $(12;10)$. **3.** $(2;2;1)$. **4.** $[-4;0)$.

Вариант 6

1. $(1;-4)$; $(9;4)$; $(10;5)$. **2.** $(6;-4)$; $(-4;6)$; $(-6;4)$; $(4;-6)$. **3.** $(2;2;1)$. **4.** $[1{,}5;4)$.

Вариант 7

1. $(2;0{,}5)$. **2.** Если $a=1$, $b\neq 1$, тогда $x\in\mathbb{R}$, $y=0$. Если $a\neq 1$, $b=1$, тогда $x=1$, $y\in\mathbb{R}$. Если $a=b=1$, то x и y — любые; если $a\neq 1$ и $b\neq 1$, то $(1;0)$. **3.** $(1;1)$. **4.** $[\sqrt{3};2)$.

Вариант 8

1. $(2;1)$. **2.** Если $a=b=1$, то x и y — любые; если $a\neq 1$ и $b\neq 1$, то $(1;0)$. **3.** $(1;1)$. **4.** $[-3;-2\sqrt{3})\cup(2\sqrt{2};3]$.

10. Свойства логарифмов

Вариант 1

1. а) 0, б) 1, в) 16. **2.** а) $(-4;1)$, б) $(-3;1)\cup(3;4)$. **3.** $3a+b$.

Вариант 2

1. а) 1, б) 1, в) 0,2. **2.** а) $(-\infty;0{,}5)\cup(2;+\infty)$, б) $(-4;1)\cup(2;4)$. **3.** $4a+b$.

Вариант 3

1. а) $\frac{1}{3}$, б) 4, в) 1,5. **2.** см. рис. 12. **3.** $\frac{b}{1-a}$. **4.** $\frac{1}{|x-3|}$.

Вариант 4

1. а) $-3{,}5$, б) 6, в) 1,5. **2.** см. рис. 13. **3.** $\frac{2-a}{b}$. **4.** $\frac{1}{|x-2|}$.

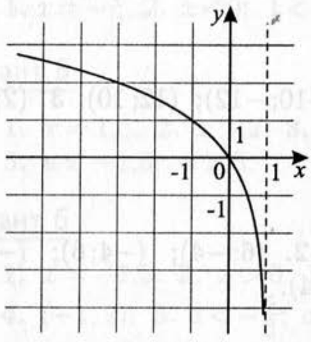


Рис. 12

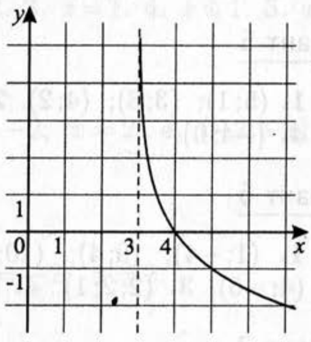


Рис. 13

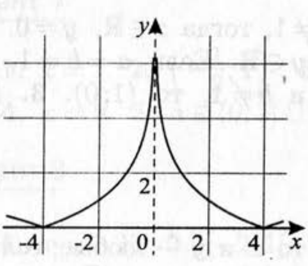


Рис. 14

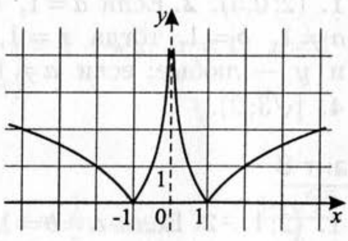


Рис. 15

Вариант 5

1. а) 0, б) 2. **2.** $5a^3$. **3.** см. рис. 14. **4.** $\log_2 5 < 2\frac{1}{3}$.
Решение. Рассмотрим

$$3(\log_2 5 - 2\tfrac{1}{3}) = \log_2 125 - 7 < \log_2 128 - 7 = 0.$$

Вариант 6

1. а) 0, б) 1. **2.** $a^2 + 5$. **3.** см. рис. 15. **4.** $\log_5 3 > \frac{2}{3}$.

Вариант 7

1. 0. **2.** $\log_8 9 > \log_9 10$. Решение. Рассмотрим
$\sqrt{\frac{\log_9 10}{\log_8 9}} = \sqrt{\log_9 10 \cdot \log_9 8} \leqslant \frac{\log_9 10+\log_9 8}{2} = \frac{\log_9 80}{2} <$
$< \frac{\log_9 81}{2} = 1$. **3.** $\frac{1+ab}{a(8-5b)}$.

4. 0. Решение. Пусть $5^{\sqrt{\log_5 6}} = x$; $6^{\sqrt{\log_6 5}} = y$.
Тогда $\sqrt{\log_5 6} \cdot \log_5 5 = \log_5 x$ или $\sqrt{\log_5 6} = \log_5 x$;
$\sqrt{\log_6 5} \cdot \log_5 6 = \log_5 y$ или $\sqrt{\frac{1}{\log_5 6}} \log_5 6 = \log_5 y$ или
$\sqrt{\log_5 6} = \log_5 y$, то есть $\log_5 x = \log_5 y$ и $x = y$.

Вариант 8

1. 0. **2.** $\log_9 10 > \lg 11$. **3.** $\frac{2a+2ab-1}{ab+b+1}$. **4.** 0.

11. Логарифмические уравнения и системы

Вариант 1

1. 2. **2.** $(2;3)$; $(3;2)$. **3.** 1. **4.** 64. **5.** $(5;20)$; $(20;5)$.

Вариант 2

1. 20. **2.** $(2;18)$; $(18;2)$. **3.** 2. **4.** 81. **5.** $(1;2)$; $(2;1)$.

Вариант 3

1. $x = -1$; $x = 4$. **2.** $(2;8)$. **3.** 64. **4.** $(3;2)$, $(2;3)$.
5. $x = -4$; $x = -\frac{1}{16}$; $x = \frac{1}{16}$; $x = 4$.

Вариант 4

1. $x=-1$; $x=9$. **2.** $(27;3)$. **3.** 25. **4.** $(4;125)$, $(125;4)$. **5.** $x=-9$; $x=-3$; $x=3$; $x=9$.

Вариант 5

1. $x=-0{,}5$; $x=-\sqrt{0{,}5}$. **2.** $(-\sqrt{2};-2)$; $(2;2)$. **3.** 2. **4.** $(1;1)$. **5.** 0,25.

Вариант 6

1. $x=-4$; $x=-2\sqrt{2}$. **2.** $\left(-2;-\frac{1}{\sqrt[5]{8}}\right)$; $(2;0{,}5)$. **3.** 3. **4.** $\left(3;\frac{1}{3}\right)$; $(3;9)$. **5.** $-0{,}25$.

Вариант 7

1. $x=\frac{1}{5}$; $x=5$. **2.** $(4;16)$. **3.** 3.
4. $(a;-2)$; $(1{,}5;4)$, где $1<a<2$.
5. $\{4\}\cup(0;+\infty)$. Решение.

$$(1-x)^2=ax;\ x^2-(a+2)x+1=0;\ D=a^2+4a.$$

$D=0$ при $a=0$ (не удовлетворяет ОДЗ) и при $a=-4$, $x=-1$ (подходит). $D>0$, тогда $a<-4$ или $a>0$. Рассмотрим $f(x)=x^2-(a+2)x+1$. Если $D>0$ и $f(1)<0$, то уравнение имеет 1 корень. $f(1)=1-a-2+1<0$, то есть $a>0$.

Вариант 8

1. $x=\frac{1}{6}$; $x=6$. **2.** $(3;9)$. **3.** 3. **4.** $(2;1)$; $(a;a)$, где $a>0$. **5.** $(+\infty;0)\cup\{4\}$.

12. Логарифмические неравенства

Вариант 1

1. $(-3;1]$. **2.** $\left[\frac{1}{2};4\right]$. **3.** $(-1;1)$; $(3;5)$. **4.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$. **5.** $(0;0{,}1)\cup(\sqrt{10};100)$.

Вариант 2

1. $(-1;2]$. **2.** $\left(\frac{1}{4};8\right)$. **3.** $[0;1)\cup(2;3]$. **4.** $\left(\frac{1}{3};1\right)$.
5. $(0{,}1;10)\cup(10^3;+\infty)$.

Вариант 3

1. $x>\frac{5}{3}$. **2.** $(0;0{,}4)\cup(1;+\infty)$. **3.** $(-0{,}5;1)\cup(2;4)$.
4. $(1;2]$. **5.** $(0;1)\cup(10^3;+\infty)$.

Вариант 4

1. $x>\frac{1}{4}$. **2.** $(0;1]\cup(1{,}5;+\infty)$. **3.** $(2;2{,}5)$. **4.** $(0;1]$.
5. $(0;1)\cup(8;+\infty)$.

Вариант 5

1. $x<-1;\ 1<x<2;\ 2<x<3;\ x>3$.
2. $(-4;-3)\cup(8;+\infty)$. **3.** $(1{,}5;2)$.
4. $[-2^{3,5};-2^{\frac{3}{8}})\cup(2^{\frac{3}{8}};2^{3,5}]$. **5.** $(0;1)\cup\{7\}$.

Вариант 6

1. $-1<x<1;\ 1<x<2$. **2.** $[3;4)$. **3.** $(2;2{,}5)$.
4. $(-2;-2^{-3,5}]\cup[2^{3,5};2)$. **5.** $(0;3)$.

Вариант 7

1. $\left[-\frac{1}{4};0\right)\cup[1;+\infty)$. **2.** $\left(\log_2\frac{5}{4};\log_2 3\right)$.
3. $\left(0;\frac{1}{3}\right]\cup[1;27]$. **4.** $(-1{,}5;-1)\cup(-0{,}5;0)$.
5. $(1;5^{\log_2 7}]$.

Вариант 8

1. $[-1;0)\cup[0{,}5;1)$. **2.** $[\log_2 14;\log_2\frac{3\pi}{2}]$. **3.** $\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup[1;2]$.
4. $\left(0;\frac{2}{3}\right)\cup\left(1;\frac{4}{3}\right)$. **5.** $(0;1)\cup[\sqrt{3};+\infty)$.

13. Определение тригонометрических функций

Вариант 1

1. а) 2π, б) $\frac{2\pi}{3}$, в) $\frac{3\pi}{2}$. **2.** а) $60°$, б) $150°$, в) $135°$. **3.** а) $\frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$, б) $2\pi k + \frac{5\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. а) $\frac{\pi}{2}$, б) $\frac{7\pi}{6}$, в) $\frac{5\pi}{6}$. **2.** а) $30°$, б) $270°$, в) $225°$.
3. а) $2\pi k + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$, б) $\frac{\pi k}{3} + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 3

1. а) $315°$, б) $40°$, в) $150°$. **3.** 0.

Вариант 4

1. а) $110°$, б) $105°$, в) $54°$. **3.** $-\frac{1}{2}$.

Вариант 5

2. -2. **3.** а) $\pi k + \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$, б) $2\pi k + \frac{\pi}{6}$; $2\pi k + \frac{5\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 6

2. 0. **3.** а) $\pi k + \frac{\pi}{8}, k \in \mathbb{Z}$, б) $2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 7

1. $\frac{\pi}{2}$. **2.** Нет. Указание. $6\sqrt{5} = \sqrt{180} > \sqrt{169} = 13$; $2\sqrt{30} = \sqrt{120} < \sqrt{121} = 11$, следовательно $\frac{6\sqrt{5}-2\sqrt{30}}{2} > 1$.
3. а) $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$; $\pi k \pm \frac{\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$, б) $2\pi k + \frac{7\pi}{6}$; $2\pi k - \frac{\pi}{6}$; $2\pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 8

1. $\frac{8\pi}{9}$. **2.** Нет.
3. а) $\frac{\pi k}{2}$; $\pi k + \frac{\pi}{12}$; $\pi k + \frac{5\pi}{12}, k \in \mathbb{Z}$, б) $2\pi k$; $2\pi k \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

14. Тригонометрические тождества

Вариант 1

1. а) выражение отрицательно, **б)** выражение положительно, **в)** выражение отрицательно. **2.** -3.

3. а) $-\operatorname{tg}^2 2\alpha$, **б)** $2\sin\alpha$.

Вариант 2

1. а) выражение отрицательно, **б)** выражение положительно, **в)** выражение отрицательно. **2.** -4.

3. а) $-\operatorname{ctg}^2 3\alpha$, **б)** $2\cos\alpha$.

Вариант 3

1. а) выражение отрицательно, **б)** выражение отрицательно. **2.** $\frac{-6-\sqrt{3}}{2}$. **3. а)** 1, **б)** $\cos^2\alpha$.

Вариант 4

1. а) выражение положительно, **б)** выражение положительно, **2.** -2. **3. а)** 1, **б)** 1.

Вариант 5

1. $\sin x = -\frac{|b|}{a}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{|b|}{\sqrt{a^2-b^2}}$; $\operatorname{ctg} x = -\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{|b|}$.

2. а) 2, **б)** $\frac{1}{4}$. **3.** $2\operatorname{ctg}\alpha$.

Вариант 6

1. $\cos x = -\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$; $\operatorname{tg} x = -\frac{a}{|b|}$; $\operatorname{ctg} x = -\frac{|b|}{a}$.

2. а) $-\frac{16}{11}$, **б)** $\frac{37}{4}$. **3.** $-2\operatorname{tg}\alpha$.

Вариант 7

1. 0; $-\frac{9}{8}$. **2. а)** a^2-2, **б)** $\pm\sqrt{a^2-4}$, **в)** $\pm\sqrt{\frac{a+2}{a}}$. **3.** 0,1.

Вариант 8

1. $\frac{25}{8}$; 2. **2. а)** b^2+2, **б)** $\pm\sqrt{b^2+4}$, **в)** b^4+4b^2+2.

3. $\frac{125}{357}$.

15. Формулы сложения. Двойные углы

Вариант 1

1. а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, **б)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **2. а)** $\operatorname{tg} 15°$, **б)** $\operatorname{tg} 2\alpha$, **в)** 2, **г)** 1.

Вариант 2

1. а) $-\frac{1}{2}$, **б)** $-\frac{1}{2}$. **2. а)** $\cos\frac{\pi}{30}$, **б)** $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, **в)** $2\operatorname{ctg} 2\alpha$, **г)** $\operatorname{tg}\alpha$.

Вариант 3

1. а) $-\frac{1}{2}$, **б)** $-\frac{1}{2}$, **в)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2. а)** -1, **б)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$, **в)** 1, **г)** $-2\operatorname{ctg} 2\alpha$.

Вариант 4

1. а) $-\frac{1}{2}$, **б)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **в)** $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. **2. а)** $\sqrt{2}$, **б)** -1, **в)** $\operatorname{ctg}\alpha$, **г)** $2\operatorname{ctg} 4\alpha$.

Вариант 5

1. а) -1, **б)** $\operatorname{tg}\alpha$, **в)** $\operatorname{tg}^4\alpha$. **2.** $\frac{3}{2}$.

Вариант 6

1. а) 1, **б)** $\operatorname{tg}\alpha$, **в)** $\operatorname{ctg}^4\alpha$. **2.** $\frac{3}{2}$.

Вариант 7

1. а) 0, **б)** -1.

2. а) $\frac{1}{8}$, Указание. $\cos\frac{5\pi}{7} = \cos\left(\pi - \frac{2\pi}{7}\right) = -\cos\frac{2\pi}{7}$. Затем домножьте числитель и знаменатель выражения на $8\sin\frac{\pi}{7}$ и трижды примените формулу синуса двойного угла. **б)** $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Указание. Заметим, что $\sin 36° = \cos 54°$; $2\sin 18° \cdot \cos 18° = \cos 18°(4\cos^2 18° - 3)$. Теперь задача сводится к решению квадратного уравнения относительно $\sin 18°$.

Вариант 8

1. а) $-\operatorname{tg} 6\alpha$, **б)** $-\frac{1}{2}$. **2. а)** $\frac{1}{8}$, **б)** $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$.

16. Формулы приведения. Преобразование суммы в произведение

Вариант 1

1. а) $-\sin 33^\circ$, б) $\operatorname{ctg} 14^\circ$, в) $\sin\frac{\pi}{15}$.

2. а) $2\cos 35^\circ\cdot\cos 15^\circ$, б) $-2\sin 4\alpha\cdot\cos 6\alpha$. **3.** $\operatorname{tg} 2\alpha$.

Вариант 2

1. а) $-\sin 36^\circ$, б) $-\operatorname{tg} 6^\circ$, в) $-\cos\frac{3\pi}{14}$.

2. а) $2\sin 16^\circ\cdot\cos 4^\circ$, б) $-2\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\sin\frac{9\alpha}{2}$.

3. $\operatorname{tg} 3\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$.

Вариант 3

1. 0. **2.** а) $\sqrt{3}\cos 10^\circ$, б) $-\frac{\sin 10^\circ}{\cos 25^\circ\cdot\cos 35^\circ}$.

3. $\operatorname{ctg} 3\alpha$.

Вариант 4

1. 0. **2.** а) $\cos 20^\circ$, б) $\frac{\sin 110^\circ}{\cos 70^\circ\cdot\cos 40^\circ}$.

3. $\operatorname{tg}\alpha$.

Вариант 5

1. $\sin^2 x$. **2.** 2. **3.** $-4\cos\alpha\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Вариант 6

1. $\operatorname{ctg}^2\alpha$. **2.** -1. **3.** $-4\sin\alpha\cdot\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Вариант 7

1. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$. **2.** $\operatorname{tg}^4 2\alpha$.

3. $\operatorname{tg} 6\alpha\cdot\operatorname{tg} 4\alpha\cdot\operatorname{tg} 2\alpha$. Указание.

$$(\operatorname{tg} 6\alpha-\operatorname{tg} 4\alpha)-\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 6\alpha\cdot\cos 4\alpha}-\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=$$
$$=\frac{\sin 2\alpha(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha\cdot\cos 4\alpha)}{\cos 6\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 2\alpha}=$$
$$=\frac{\sin 2\alpha(\cos(6\alpha-4\alpha)-\cos 6\alpha\cdot\cos 4\alpha)}{\cos 6\alpha\cdot\cos 4\alpha\cdot\cos 2\alpha}=\ldots$$

Вариант 8

1. $-\frac{1}{4}$. **2.** $\operatorname{tg}^4\frac{\alpha}{2}$.
3. $-\operatorname{ctg}6\alpha\cdot\operatorname{ctg}4\alpha\cdot\operatorname{tg}2\alpha$.

17. Простейшие тригонометрические уравнения

Вариант 1

1. а) $\frac{1}{2}$, **б)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **в)** $\frac{\sqrt{15}}{4}$.
2. а) $\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$, **б)** $\frac{\pi k}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$,
в) $\pi k+\frac{\pi}{4}$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, **б)** $\frac{1}{2}$, **в)** $\frac{2\sqrt{6}}{5}$. **2. а)** $(-1)^{k+1}\frac{2\pi}{3}+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$,
б) $\pi k\pm\frac{3\pi}{8}, k\in\mathbb{Z}$, **в)** $\pi k+\frac{\pi}{4}$; $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 3

1. а) $\frac{2\pi k}{3}\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{12}$; $\frac{2\pi k}{3}\pm\frac{5\pi}{18}+\frac{\pi}{12}, k\in\mathbb{Z}$, **б)** $\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{8}, k\in\mathbb{Z}$,
в) $\pi k\pm\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **2. а)** 1, **б)** $\frac{24}{25}$.

Вариант 4

1. а) $\frac{\pi k}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi k}{2}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{12}-\frac{\pi}{8}, k\in\mathbb{Z}$,
б) $\frac{2}{3}\pi k+\frac{\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$, **в)** $\pi k+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **2. а)** $\sqrt{3}$, **б)** $\frac{7}{25}$.

Вариант 5

1. а) $\frac{63}{65}$, **б)** $-\frac{3\pi}{13}$. **2.** $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi k}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}, k\in\mathbb{Z}$.
3. 2. Указание. Учтите, что $|4x-9|\leqslant 1$, кроме того, левая часть меньше или равна 1, а правая часть больше или равна 1.

Вариант 6

1. а) $\frac{24}{25}$, б) $5-2\pi$.

2. $\frac{\pi k}{3}+\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi k}{3}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}, k\in\mathbb{Z}$. **3.** 2.

Вариант 7

1. а) $-\frac{33}{56}$, б) $\frac{9\pi}{2}-12$. Р е ш е н и е. $\arccos(\sin 12) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-12\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}-12+4\pi\right)\right) = \frac{9\pi}{2}-12$, так как $\left(\frac{9\pi}{2}-12\right)\in[0;\pi]$.

2. $\frac{\pi k}{2}$; $\frac{\pi k}{2}+(-1)^k\frac{\pi}{12}, k\in\mathbb{Z}$.

3. -1. Р е ш е н и е. $\arccos x \leqslant \pi$; $\pi+(x^2-1)^2\geqslant\pi$, следовательно, $\arccos x=\pi$ и $\pi+(x^2-1)^2=\pi\ldots$

Вариант 8

1. а) $-\frac{33}{56}$, б) $\frac{5\pi}{2}-8$. **2.** $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$; $\pi k\pm\frac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$. **3.** -1.

18. Тригонометрические уравнения

Вариант 1

1. $2\pi k-\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **3.** $\pi k+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **4.** πk; $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **5.** $2\pi k-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. $2\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\pi k+(-1)^k\frac{\pi}{6}, k\in\mathbb{Z}$. **3.** $\pi k-\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **4.** $\pi k+\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **5.** $4\pi k+\frac{\pi}{2}\pm\frac{3\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 3

1. $\pi k+\frac{\pi}{4}$; $\pi k-\operatorname{arctg}\frac{7}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}$; $2\pi k\pm\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}$. **3.** $2\pi k+2\operatorname{arctg}3, k\in\mathbb{Z}$. **4.** $\frac{\pi k}{5}+\frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **5.** $\pi k+\frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{4}, k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 4

1. $\pi k + \frac{\pi}{4}$; $\pi k - \operatorname{arctg}\frac{1}{4}, k \in \mathbb{Z}$. **2.** $\frac{\pi k}{4}$; $2\pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. **3.** $2\pi k + \frac{\pi}{2}$; $2\pi k - 2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $\frac{\pi k}{7} + \frac{\pi}{14}$; $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$. **5.** $\pi k - \frac{\pi}{4}$; $2\pi k$; $\pi k - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 5

1. $\pi k + \frac{\pi}{4}$; $2\pi k - \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\frac{\pi k}{5} + \frac{\pi}{10}$; $\frac{\pi k}{3} + \frac{\pi}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. **3.** $\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$.
Указание. Сделайте замену $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = u$, тогда $\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{ctg}^4 x = u^2 - 2\ldots$

4. $-\frac{\pi}{3}$; 0; $\frac{\pi}{3}$. **5.** $a = 1$; $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
Указание. Левая часть меньше или равна 2, а правая часть больше или равна 2.

Вариант 6

1. $\pi k - \frac{\pi}{4}$; $2\pi k + \frac{\pi}{4} \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. **2.** πk; $\frac{\pi k}{10}, k \in \mathbb{Z}$.

3. $\pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. **4.** $-\frac{2\pi}{9}$; $-\frac{\pi}{8}$; $\frac{\pi}{8}$; $\frac{2\pi}{9}$.

5. $a = -\frac{1}{2}$; $x = 2\pi k + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 7

1. $\pi k - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. Указание. Уравнение сводится к однородному — $4\sin^3 x - (\sin x - \cos x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$.
2. $2\pi k + \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{\sqrt{2}}{10}, k \in \mathbb{Z}$. Указание. Замените $\sin x + \cos x = u$.

3. $\frac{2\pi k}{9}$, где $k \neq 9n, k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$. Указание. Домножьте обе части уравнения на $2\sin\frac{x}{2}$ и преобразуйте все четыре произведения в сумму.

4. $2\pi k \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Решение. $2 + \frac{1}{\cos^2 4x} \geqslant 3$ и $4 - 2\cos^2 4x \geqslant 2$, следовательно,

$$\left(2 + \frac{1}{\cos^2 4x}\right)(4 - 2\cos^2 4x) \geqslant 6,$$

но $1+5\sin^2 x \leqslant 6$, поэтому $2+\frac{1}{\cos^2 4x}=3$,
$4-2\cos^2 4x=2$ и $\sin^2 x=1$.

5. Если $|a|>1$, то 2 корня; если $|a|=1$ или $|a|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корня; если $|a|<1$ и $|a|\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 4 корня.

Вариант 8

1. $\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\pi k-\frac{\pi}{4}+(-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{29}-5}{\sqrt{2}}, k\in\mathbb{Z}$.

3. $\frac{\pi k}{9}$, где $k\neq 9n, k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}$. **4.** $2\pi k\pm\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

5. Если $|a|>1$, то 2 корня; если $|a|=1$ или $|a|=\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 3 корня; если $|a|<1$ и $|a|\neq\frac{\sqrt{3}}{2}$, то 4 корня.

19. Тригонометрические системы и неравенства

Вариант 1

1. $\left[2\pi k+\frac{13\pi}{12}; 2\pi k+\frac{29\pi}{12}\right], k\in\mathbb{Z}$.

2. $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k; 2\pi k+\frac{\pi}{2}\right), k\in\mathbb{Z}$.

3. $\left[\pi k-\frac{\pi}{4}; \pi k+\frac{\pi}{2}\right], k\in\mathbb{Z}$.

4. $\left(\pi(k+n)+\frac{\pi}{6}; \pi(k-n)+\frac{\pi}{3}\right)$;
$\left(\pi(k+n)-\frac{\pi}{6}; \pi(k-n)+\frac{2\pi}{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z},\ n\in\mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. $\left(2\pi k-\frac{11\pi}{12}; 2\pi k+\frac{5\pi}{12}\right), k\in\mathbb{Z}$.

2. $\left[-\frac{17\pi}{12}+2\pi k; 2\pi k-\frac{\pi}{12}\right), k\in\mathbb{Z}$.

3. $\left(2\pi k-\pi; 2\pi k-\frac{\pi}{2}\right), k\in\mathbb{Z}$.

4. $\left(\pi(k+n)+\frac{\pi}{3}; \pi(k-n)+\frac{\pi}{3}\right)$;
$\left(\pi(k+n)-\frac{\pi}{3}; \pi(k-n)-\frac{\pi}{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Вариант 3

1. $\left[\pi k+\frac{\pi}{3}; \pi k+\frac{2\pi}{3}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{6}+\pi k; \pi k+\frac{\pi}{6}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\left(2\pi k+\frac{\pi}{3}; 2\pi k+\frac{5\pi}{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
3. $\left[\pi k-\frac{\pi}{4}; \pi k-\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\pi k+\frac{\pi}{6}; \pi k+\frac{\pi}{4}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.
4. $\left(2\pi(k+n)+\frac{\pi}{2}; 2\pi(k-n)+\frac{\pi}{6}\right)$;
$\left(2\pi(k+n)+\frac{\pi}{6}; 2\pi(k-n)+\frac{\pi}{2}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Вариант 4

1. $\left(2\pi k-\frac{\pi}{6}; 2\pi k+\frac{\pi}{6}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k; 2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\left(2\pi k-\frac{7\pi}{6}; 2\pi k+\frac{\pi}{6}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
3. $\left[\pi k; \pi k+\frac{\pi}{12}\right)\cup\left(\pi k+\frac{5\pi}{12}; \pi k+\frac{\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.
4. $\left(\frac{\pi}{2}(k+2n)+\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}(k-2n)+\frac{\pi}{6}\right)$;
$\left(\frac{\pi}{2}(k+2n)+\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}(k-2n)+\frac{\pi}{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Вариант 5

1. $\left[2\pi k-\frac{\pi}{6}; 2\pi k+\frac{7\pi}{6}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\left(\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{8}; \frac{\pi k}{2}+\frac{3\pi}{8}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$.
3. $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi k+\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(\pi k+\operatorname{arctg}4; \pi k+\frac{\pi}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.
4. $\left(\pi(2n+k)+(-1)^k\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}; \pi(2n-k)+(-1)^k\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$.

Вариант 6

1. $2\pi k\pm\frac{\pi}{3}$, $k\in\mathbb{Z}$.
2. $\left[\frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{6}; \frac{\pi k}{2}+\frac{\pi}{3}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi k+\frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\pi k+\operatorname{arctg} 3; \pi k+\frac{\pi}{2}\right], k \in \mathbb{Z}.$

4. $\left(2\pi k+\frac{\pi}{2}; 2\pi n+\frac{\pi}{6}\right)$; $\left(2\pi k-\frac{\pi}{6}; 2\pi n-\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Вариант 7

1. $\left(-\frac{\pi}{6}+2\pi k; 2\pi k\right) \cup (2\pi k; 2\pi k+\pi) \cup$
$\cup \left(2\pi k+\pi; 2\pi k+\frac{7\pi}{6}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\left(2\pi k-\frac{2\pi}{5}; 2\pi k\right) \cup \left(2\pi k+\frac{2\pi}{5}; 2\pi k+\frac{\pi}{2}\right) \cup$
$\cup \left(2\pi k+\frac{4\pi}{5}; 2\pi k+\pi\right) \cup \left(2\pi k+\frac{6\pi}{5}; 2\pi k+\frac{3\pi}{2}\right), k \in \mathbb{Z}.$

Указание. Решите уравнение

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$$

и примените метод интервалов.

3. $\{-5\} \cup \left[-\frac{4\pi}{3}; -\pi\right] \cup \left[-\frac{2\pi}{3}; 0\right] \cup \{1\}$.

4. $\left(\pi k+\frac{\pi}{4}; \pi n+\operatorname{arctg} 2; \pi l+\operatorname{arctg} 3\right)$,
$\left(\pi k+\operatorname{arctg} 2; \pi n+\frac{\pi}{4}; \pi l+\operatorname{arctg} 3\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Указание. Воспользуйтесь тождеством

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x \times \operatorname{tg} y \cdot \operatorname{tg} z$$

при $x+y+z=\pi$.

Вариант 8

1. $\left(-\frac{2\pi}{3}+2\pi k; 2\pi k-\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(2\pi k-\frac{\pi}{2}; 2\pi k+\frac{\pi}{2}\right) \cup$
$\cup \left(2\pi k+\frac{\pi}{2}; 2\pi k+\frac{2\pi}{3}\right)$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $\left[\pi k+\frac{\pi}{4}; \pi k+\frac{3\pi}{10}\right] \cup \left[\pi k+\frac{7\pi}{10}; \pi k+\frac{3\pi}{4}\right] \cup$
$\cup \left[\pi k+\frac{9\pi}{10}; \pi k+\frac{11\pi}{10}\right] \cup \left\{\pi k+\frac{\pi}{2}\right\}, k \in \mathbb{Z}.$

3. $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 5\right] \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

4. $\left(\pi k+\operatorname{arctg} 2; \pi n+\operatorname{arctg} 3; \frac{\pi}{4}-\pi(k+n)\right)$;
$\left(\pi k+\operatorname{arctg} 3; \pi n+\operatorname{arctg} 2; \frac{\pi}{4}-\pi(k+n)\right)$, $k \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Z}$.

20. Свойства тригонометрических функций

Вариант 1

1. $x \neq \frac{2}{3} + \frac{\pi k}{3}, k \in \mathbb{Z}$. **2.** $[-2; 4]$. **3.** Четная функция. **4.** $T_0 = \frac{\pi}{2}$. **5.** $-\sqrt{2} \leqslant a \leqslant \sqrt{2}$. **6.** $x > 2\sin 3$. **7.** Плюс.

Вариант 2

1. $x \neq \frac{3}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **2.** $[-1; 5]$. **3.** Четная функция. **4.** $T_0 = \frac{\pi}{3}$. **5.** $a = 0$. **6.** $x \leqslant 2\cos 4$. **7.** Минус.

Вариант 3

1. $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$. **2.** $[0; 1]$. **3.** Функция общего вида. **4.** $a = \frac{2}{3}$. **5.** $a \leqslant \frac{1}{2}$. **6.** $(-\infty; -\sin 3)$; $(\sin 3; +\infty)$. **7.** Плюс.

Вариант 4

1. $\left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}$. **2.** $[2; 3]$. **3.** Функция общего вида. **4.** $m = \frac{2}{7}$. **5.** $a = 1$. **6.** $(-\infty; -\cos 5)$; $(\cos 5; +\infty)$. **7.** Минус.

Вариант 5

1. $\left(\pi k; \frac{\pi}{4} + \pi k\right], k \in \mathbb{Z}$. **2.** $[4; 7]$. **3.** Четная функция. **4.** $T_0 = 2\pi$. **5.** $y = 1$ при $\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. **6.** $y = \pm 1$ при $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **7.** Минус.

Вариант 6

1. $\left[\frac{2\pi k}{3}; \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right), k \in \mathbb{Z}$. **2.** $[2; 3]$. **3.** Функция общего вида. **4.** $T_0 = 2\pi$. **5.** $y = 1$ при $2\pi k \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. **6.** $y = \pm 1$ при $2\pi k < x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

7. Плюс. У к а з а н и е. Поскольку $\frac{3\pi}{5}-1<1$,

$$\sin\left(1+\frac{2\pi}{5}\right)=\sin\left(\pi-\left(1+\frac{2\pi}{5}\right)\right)=$$

$$=\sin\left(\frac{3\pi}{5}-1\right)<\sin 1,$$

Вариант 7

1. $\left[\frac{1}{3};\frac{\pi}{2}\right]\cup\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right], k\in N$. **2.** $[\cos 1; 1]$.
3. Нечетная функция. **4.** $T_0=2\pi$.
У к а з а н и е.

$$f(x)=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^3\frac{x}{2}=$$

$$=\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2}\sin x\cdot\frac{1+\cos x}{2}=$$

$$=\frac{\sin x+\sin x\cdot\cos x}{4}=\frac{\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x}{4}.$$

5. Множество точек $x=0;\ y=\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.
6. $f(x)>0$ при $x\in R$. Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{3\pi}{4}+3\pi k;\frac{3\pi}{4}+3\pi k\right], k\in\mathbb{Z}$ и убывает на промежутках $\left[\frac{3\pi}{4}+3\pi k;\frac{9\pi}{4}+3\pi k\right], k\in\mathbb{Z}$.
7. $y=0$ при $x=\pi k, k\in\mathbb{Z};\ x\geqslant 0$; при других x функция не определена.

Вариант 8

1. $[2{,}5;\pi]\cup[2\pi k;\pi+2\pi k], k\in N$. **2.** $[-\sin 1;\sin 1]$.
3. Четная функция.
4. $T_0=2\pi$. У к а з а н и е. См. решение примера 4 из варианта 7.
5. Множество точек $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ y=0$.
6. $f(x)>0$ при $x\in\mathbb{R}$. Функция возрастает на промежутках $\left[\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3};\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{3}\right], k\in\mathbb{Z}$ и убывает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3};\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\right], k\in\mathbb{Z}$.
7. $y=0$ при $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$; при других x функция не определена.

21. Графики тригонометрических функций

Вариант 1

1. 2) Прямая $y=1$ с "выколотыми" точками $x=\pi k, k\in\mathbb{Z}$. **3)** График $y=\sin x$ на интервалах $(2\pi k;\pi+2\pi k), k\in\mathbb{Z}$. **4)** График $y=\operatorname{tg}x$; $x\neq\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$.
2. $\left(\frac{\pi}{3}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. 2) Прямая $y=-1$ с "выколотыми" точками $x=\frac{\pi k}{4}, k\in\mathbb{Z}$. **3)** График $y=\cos x$ на интервалах $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$. **4)** График $y=\operatorname{ctg}x$; $x\neq\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;\frac{\pi}{6}+\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 3

1. 2) $y=\sin x+\sqrt{\sin^2 x}=\sin x+|\sin x|=$

$$=\begin{cases}2\sin x \text{ при } 2\pi k\leqslant x<\pi+2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\\ 0 \quad\quad \text{ при } \pi+2\pi k\leqslant x<2\pi+2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

3) $y=\operatorname{tg}x\cdot|\cos x|=$

$$=\begin{cases}\sin x \quad \text{ при } -\frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{\pi}{2}+2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\\ -\sin x \text{ при } \frac{\pi}{2}+2\pi k<x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

4) см. рис. 16.

2. $\left(2\pi k;\frac{\pi}{2}+2\pi k\right), k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 4

1. 2) $y=\cos x+\sqrt{\cos^2 x}=\cos x+|\cos x|=$

$$=\begin{cases}2\cos x \text{ при } -\frac{\pi}{2}+2\pi k\leqslant x<\frac{\pi}{2}+2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\\ 0 \quad\quad \text{ при } \frac{\pi}{2}+2\pi k\leqslant x<\frac{3\pi}{2}+2\pi k, & k\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

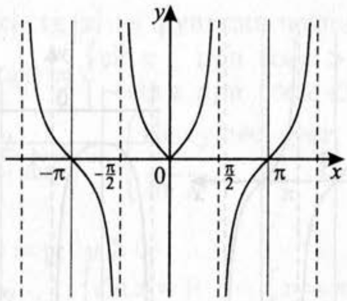


Рис. 16

3) $y = \operatorname{ctg} x \cdot |\sin x| =$
$$= \begin{cases} \cos x & \text{при } 2\pi k < x < \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ -\cos x & \text{при } \pi + 2\pi k < x < 2\pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
4) см. рис. 17. **2.** $\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k; 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 5

1. 1) $y = \sin x - \sqrt{3}\cos x = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
2) $y = \sqrt{\lg\sin x}$; $\lg\sin\pi x \geqslant 0$; $\sin\pi x \geqslant 1$. Отсюда возможно только $\sin\pi x = 1$; $\pi x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$; $x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$ множество точек $x = \frac{1}{2} + 2k, k \in \mathbb{Z}$, $y = 0$.
3) $y = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}} = |\cos x|$, где $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
2. $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$; $\left(\frac{5\pi}{6}; \pi\right)$.

Вариант 6

1. 1) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
2) Множество точек $x = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$; $y = 0$. Указание. См. решение задачи 1. 2) из варианта 5. **3)** $y = |\sin x|$, где $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.
2. $\left(-\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{3}\right)$; $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Вариант 7

1. 1) $y = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Порядок построений: а) $y = 2\sin x$, б) $y = 2\sin 2x$, в) $y = 2\sin 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

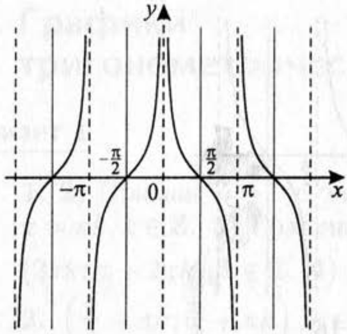


Рис. 17

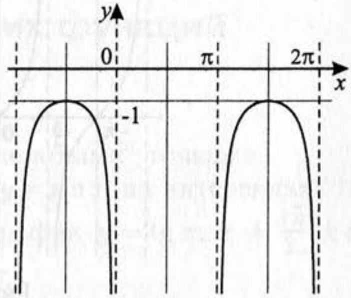


Рис. 19

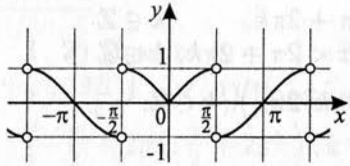


Рис. 18

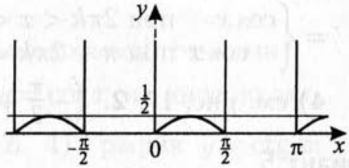


Рис. 20

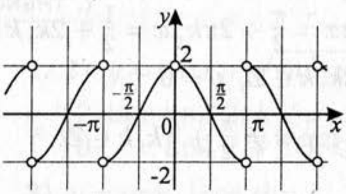


рис. 21

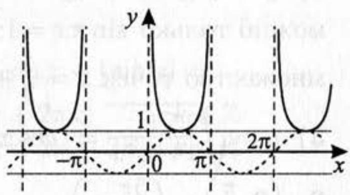


рис. 22

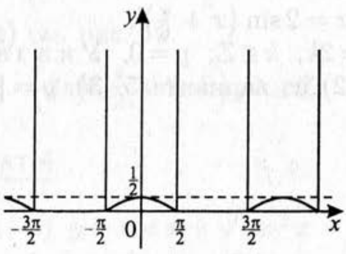


рис. 23

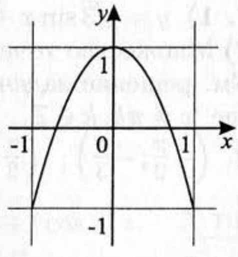


рис. 24

2) $y = |\cos x| \cdot \operatorname{tg} |x|$ — функция четная. Если $x \geqslant 0$, то $y = |\cos x| \cdot \operatorname{tg} x = \begin{cases} \sin x & \text{при } \cos x > 0 \\ -\sin x & \text{при } \cos x < 0 \end{cases}$, см. рис. 18.

3) $y = \dfrac{2}{\sin x - |\sin x|} = \begin{cases} \text{Не существует, если} \sin x \geqslant 0 \\ \dfrac{1}{\sin x}, \qquad \text{если } \sin x < 0 \end{cases}$, см. рис. 19.

2. $|y - \sin x| = y;\ y \geqslant 0.$

$\left[\begin{array}{l} y - \sin x = y \\ y - \sin x = -y \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2}\sin x \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, \\ y = \dfrac{1}{2}\sin x \end{array}\right., \quad y = 0,$ см. рис. 20.

Вариант 8

1. 1) $y = 1{,}5 \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{6}\right) = 1{,}5\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$. Порядок построений: а) $y = 1{,}5\sin x$, б) $y = 1{,}5\sin\frac{x}{2}$, в) $y = 1{,}5\sin\left(\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\right)$.

2) $y = \dfrac{\sin|2x|}{|\sin x|}$ — функция четная. Если $x > 0$, то $y = \dfrac{\sin 2x}{|\sin x|} = \begin{cases} 2\cos x & \text{при } \sin x > 0 \\ -2\cos x & \text{при } \sin x < 0 \end{cases}$, см. рис. 21.

3) См. рис. 22.

$$y = \frac{2}{\sin x + |\sin x|} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x}, \qquad \text{если } \sin x > 0 \\ \text{Не существует, если} \sin x \leqslant 0 \end{cases}.$$

2. $|y - \cos x| = y;\ y \geqslant 0.$

$\left[\begin{array}{l} y - \cos x = y \\ y - \cos x = -y \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ y = \dfrac{1}{2}\cos x \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ y = \dfrac{1}{2}\cos x \end{array}\right.,$

$y \geqslant 0$, см. рис. 23.

22. Обратные тригонометрические функции

Вариант 1

1. $[1; 3]$. **2.** $[-3; \pi - 3]$. **3.** $\frac{3}{5}$. **4.** $2\sqrt{2}$. **5.** $x = -2$.
6. $\left[0; \frac{3}{4}\right)$.

Вариант 2

1. $[-4;-2]$. **2.** $\left[-\frac{\pi}{2}-2;\frac{\pi}{2}-2\right]$. **3.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **4.** $-\frac{\sqrt{7}}{3}$.
5. $x=5$. **6.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right]$.

Вариант 3

1. $[2;4]$. **2.** $\left[4;4+\frac{\pi}{2}\right]$. **3.** $\frac{3}{4}$. **4.** $\frac{-3}{\sqrt{10}}$. **5.** $x=0$.
6. $\left(\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6};1\right]$.

Вариант 4

1. $[-2;-1]$. **2.** $\left[2;2+\frac{\pi}{2}\right]$. **3.** $\frac{5}{\sqrt{26}}$. **4.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **5.** $x=0$.
6. $\left[\frac{3}{7};\frac{4}{7}+\frac{\sqrt{3}}{14}\right)$.

Вариант 5

1. $[0;1]$. **2.** $\left(-\infty;-\frac{2}{\pi}\right]\cup\left[\frac{2}{\pi};+\infty\right)$. **3.** $\arcsin\left(\sin\frac{4\pi}{7}\right)=$
$=\arcsin\left(\sin\left(\pi-\frac{4\pi}{7}\right)\right)=\arcsin\left(\sin\frac{3\pi}{7}\right)=\frac{3\pi}{7}$. **4.** $\frac{56}{65}$.
5. $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Р е ш е н и е. $\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{2}$;
$\sin(\arcsin x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arcsin\frac{x}{2}\right)$; $x=\cos\arcsin\frac{x}{2}$;
$x=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$; $x\geqslant 0$; $x^2=1-\frac{x^2}{4}$; $x=\frac{2}{\sqrt{5}}$.
6. $\left[\frac{2}{5};\frac{1}{2}\right)$. Р е ш е н и е. $\begin{cases}3x-2>5x-3\\-1\leqslant 3x-2\leqslant 1\\-1\leqslant 5x-3\leqslant 1\end{cases}$

Вариант 6

1. $[-1;1]$. **2.** $\left[\frac{1}{\pi};+\infty\right)$.
3. $\arccos\left(\cos\frac{11\pi}{9}\right)=\arccos\left(\cos\left(2\pi-\frac{11\pi}{9}\right)\right)=$
$=\arccos\left(\cos\frac{7\pi}{9}\right)=\frac{7\pi}{9}$. **4.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

5. $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$. Решение. $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{3}$;
$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{x}{3}\right)$; $x = \cos\arcsin\frac{x}{3}$;
$x = \sqrt{1 - \frac{x^2}{9}}$; $x \geqslant 0$; $3x = \sqrt{9 - x^2}$; $x = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

6. $(-\infty; -1] \cup (0; 1]$.
Решение. $\frac{1}{x} \geqslant x$; $\frac{1-x^2}{x} \geqslant 0$; $\frac{x^2-1}{x} \leqslant 0$.

Вариант 7

1. $\{-1\}$. **2.** $\left[\sqrt{\frac{2}{\pi}}; +\infty\right)$.

3. $\frac{\pi}{4}$. Решение. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1)) = \frac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{1+2-1} = 1$. Отсюда следует, что $\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1) - \operatorname{arctg}(\sqrt{2}-1) = \frac{\pi}{4}$.

4. $y = \cos(2\arcsin x) = 1 - 2x^2$; $-1 \leqslant x \leqslant 1$ (рис. 24).

5. Решение. $T_0 = 2\pi$. $y = \arcsin(\sin x)$. При $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ $\arcsin(\sin x) = x$; при $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$ $\arcsin(\sin(\pi - x)) = \pi - x$; если $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{3\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{2} \leqslant \pi - x \leqslant \frac{\pi}{2}$. См. рис. 25.

6. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. Решение. $\arcsin x + \arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{2} - \arccos x + \arcsin\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}$; $\arcsin\frac{x}{2} = \arccos x$; $\frac{x}{2} = \sqrt{1 - x^2}$; $x \geqslant 0$. $x^2 = 4 - 4x^2$; $5x^2 = 4$; $x = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Вариант 8

1. $[-1; 1]$. **2.** $\left[\frac{1}{\sqrt{\pi}}; +\infty\right)$.

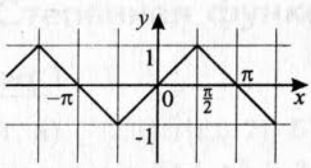


Рис. 25

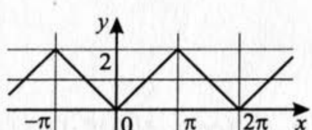


Рис. 26

3. $\frac{\pi}{4}$. Решение. $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)=\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1+\frac{3}{28}}=1$. Отсюда следует, что $\operatorname{arctg}\frac{3}{4}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\frac{\pi}{4}$.

4. $y=\cos(2\arccos x)=2x^2-1;\ \ -1\leqslant x\leqslant 1$.

5. $y=\arccos(\cos x)$. Решение. $T_0=2\pi$. При $0\leqslant x\leqslant\pi$ $y=x$; при $\pi\leqslant x\leqslant 2\pi$ $y=\arccos(\cos(2\pi-x))=2\pi-x$. Тогда $0\leqslant 2\pi-x\leqslant\pi$. См. рис. 26.

6. $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x=\frac{1}{2}$. Решение. $\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)\arccos x=$ $=\frac{\pi^2}{18}$; $(\arccos)^2-\frac{\pi}{2}\arccos x+\frac{\pi^2}{18}=0$.

Отсюда $\arccos x=\frac{\pi}{6}$; $\arccos x=\frac{\pi}{3}$. Тогда $x_1=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $x_2=\frac{1}{2}$.

10 класс. Ответы к контрольным работам

1. Действительные числа

Вариант 1

1. а) 2, **б)** 32, **в)** $14\sqrt[4]{75}$. **2.** $\dfrac{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{b}+4\sqrt[3]{b^2}}$.
3. а) $\sqrt{12}-\sqrt{11}>\sqrt{13}-\sqrt{12}$, **б)** $\sqrt{18}+\sqrt{11}<4+\sqrt{13}$.
4. 2.

Вариант 2

1. а) $8\sqrt{5}$, **б)** $\frac{1}{2}$, **в)** $-\sqrt[4]{18}$. **2.** $3\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}$.
3. а) $\sqrt{14}-\sqrt{13}>\sqrt{15}-\sqrt{14}$, **б)** $3+\sqrt{17}<\sqrt{14}+2\sqrt{3}$.
4. a.

Вариант 3

1. а) 20, **б)** $\sqrt{11}$, **в)** 1. **2. а)** $\frac{1}{4b}$; $\frac{16}{5}$, **б)** 0.
3. а) $\sqrt{27}+\sqrt{7}<\sqrt{13}+\sqrt{15}$, **б)** $\sqrt{7}+\sqrt{10}<\sqrt{3}+\sqrt{19}$.

Вариант 4

1. а) 4, **б)** $\sqrt{5}$, **в)** 7. **2. а)** $\frac{a-3}{3}$; $-0{,}8$, **б)** 0.
3. а) $\sqrt{12}+\sqrt{17}<\sqrt{14}+\sqrt{15}$, **б)** $\sqrt{11}+\sqrt{5}>\sqrt{8}+\sqrt{7}$.

2. Степенная функция

Вариант 1

1. а) $(-2;1]\cup[1{,}5;2)$, **б)** $(0;1)\cup(1;3]\cup[5;+\infty)$. **2. а)** решений нет, **б)** 4, **в)** 1. **3.** См. рис. 27. **4.** $x\leqslant-2$; $x>3\frac{1}{3}$.

Вариант 2

1. а) $\left[-4; \frac{2}{3}\right) \cup (1; 4]$, **б)** $[0; 1) \cup (1; 2) \cup (3; +\infty)$. **2. а)** -4, **б)** 0, **в)** $-4; 1$. **3.** См. рис. 28. **4.** $x \leqslant -4;\ \ x \geqslant -1$.

Вариант 3

1. а) $(-\infty; 3) \cup \{4\} \cup (7; +\infty)$, **б)** $[-4; -2)$. **2. а)** 1, **б)** $-2{,}5;\ \ 2{,}5;\ \ 9$, **в)** $-\frac{1}{2}; 1$. **3.** См. рис. 29. **4.** $x \geqslant 0$.

Вариант 4

1. а) $[-4; 1) \cup (1; 2]$, **б)** $[-5; 1) \cup \{5\}$. **2. а)** 5, **б)** $-3;\ 2;\ 3$, **в)** $-3; \frac{1}{2}$. **3.** См. рис. 30. **4.** $1 \leqslant x < 1{,}5$.

3. Показательная функция

Вариант 1

1. $\left(\frac{4\sqrt{5}-6}{3}\right)^{-\frac{5}{4}} < \left(\frac{4\sqrt{5}-6}{3}\right)^{-\frac{5}{3}}$. **2. а)** 5, **б)** 3, **в)** $0; \frac{1}{2}$.

3. $\frac{a^2}{4} - 2$. **4. а)** $x \leqslant -2;\ \ x \geqslant 4$, **б)** $x < 1$. **5.** $(2; 1)$.

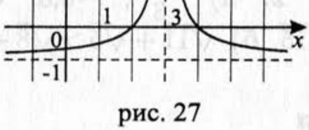


рис. 27

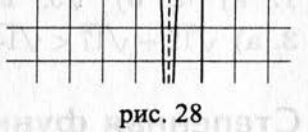


рис. 28

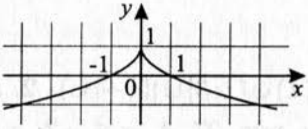


Рис. 29

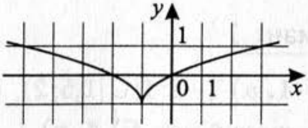


Рис. 30

Вариант 2

1. $\left(\frac{3\sqrt{7}-1}{7}\right)^{-\frac{3}{5}} > \left(\frac{3\sqrt{7}-1}{7}\right)^{-\frac{2}{5}}$.

2. **а)** 2, **б)** 0; 1, **в)** 0; 1. **3.** $\frac{b^2}{25}+2$. **4.** **а)** $(-2;1)\cup(3;+\infty)$, **б)** $(-\infty;1)$. **5.** $(3;1)$.

Вариант 3

1. $\left(\frac{4\sqrt{3}-2}{5}\right)^{-\frac{7}{4}} < \left(\frac{4\sqrt{3}-2}{5}\right)^{-\frac{7}{3}}$.

2. **а)** $-\frac{2}{9}$, **б)** 1,5, **в)** -2; -1. **3.** См. рис. 31.
4. **а)** $[-8;-2]$, **б)** $[2;+\infty)$. **5.** $(0;0)(1;1)$.

Вариант 4

1. $\left(\frac{2\sqrt{30}-5}{6}\right)^{-\frac{3}{10}} > \left(\frac{2\sqrt{30}-5}{6}\right)^{-\frac{3}{11}}$

2. **а)** 8, **б)** 0,5, **в)** $-0{,}5$. **3.** См. рис. 32. **4.** **а)** $x<\frac{1}{2}$; $x>1$, **б)** $x\geqslant 1$. **5.** $\left(\frac{1}{6};\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{4};\frac{1}{6}\right)$.

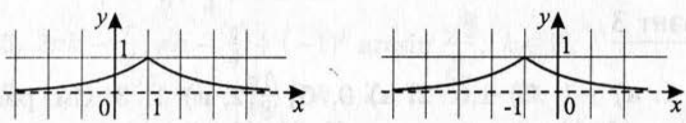


Рис. 31 Рис. 32

4. Логарифмическая функция

Вариант 1

1. **а)** 4, **б)** 0,5. **2.** **а)** 2; 8, **б)** 2, **в)** 3; 27. **3.** См. рис. 33.
4. $(-2;-1)\cup(2;3)$. **5.** $\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right)(3;9)$.

Вариант 2

1. **а)** -2, **б)** 1,5. **2.** **а)** 3; 9, **б)** 0, **в)** 10^{-4}; 10. **3.** См. рис. 34. **4.** $(-5;-2)\cup(4;7)$. **5.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)(2;4)$.

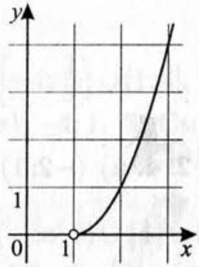


Рис. 33

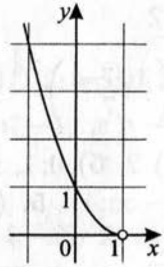


Рис. 34

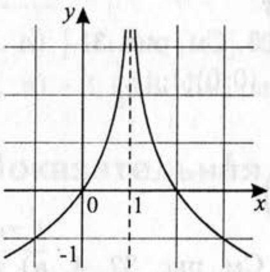


Рис. 35

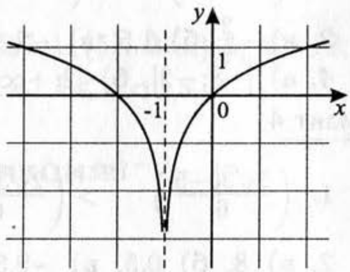


Рис. 36

Вариант 3

1. а) -1, б) 1,6. **2.** а) 0, б) $\frac{1}{8};2$, в) 1. **3.** См. рис. 35. **4.** $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$. **5.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2};4\right)$.

Вариант 4

1. а) 12, б) 16. **2.** а) -1, б) $\frac{1}{16};8$, в) $\frac{1}{2}$. **3.** См. рис. 36. **4.** $(1;2)$. **5.** $\left(3;\frac{1}{3}\right)(3;9)$.

5. Тригонометрические формулы

Вариант 1

1. $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$. **3.** а) $-\operatorname{tg}2\alpha$, б) -1, в) 5. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Вариант 2

1. $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$. **3. а)** $\operatorname{tg}4\alpha$, **б)** $-\frac{1}{2}$, **в)** $\frac{\sin^2\alpha}{4}$. **4.** $\frac{1}{2}$.

Вариант 3

1. $\sin\alpha=\frac{1}{2}$. **3. а)** $\operatorname{tg}^4\alpha$, **б)** $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$. **4. а)** $\frac{9}{16}$, **б)** -3.

Вариант 4

1. $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{2}$. **3. а)** $\operatorname{tg}3\alpha$, **б)** $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$. **4. а)** $\frac{7}{16}$, **б)** 1.

6. Тригонометрические уравнения

Вариант 1

1. $\pi k+\frac{\pi}{2};2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\pi k+(-1)^k\frac{\pi}{6};2\pi k+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.
3. $\pi k-\frac{\pi}{4};\pi k+\operatorname{arctg}3,\ k\in\mathbb{Z}$.
4. $\pi k;\frac{\pi k}{3}+\frac{\pi}{6};\frac{\pi k}{3},\ k\in\mathbb{Z}$.
5. $2\pi k-\frac{\pi}{2};\pi k-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\frac{\sqrt{2}}{4},\ k\in\mathbb{Z}$.
6. $\left(\pi k+\frac{3\pi}{2};\pi k-\frac{\pi}{6}\right),\ k\in\mathbb{Z}$. **7.** $\frac{5\pi}{2}-10$.

Вариант 2

1. $\pi k;2\pi k+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **2.** $\pi k+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6},\ k\in\mathbb{Z}$.
3. $\frac{\pi k}{2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}2,\ k\in\mathbb{Z}$. **4.** $\frac{\pi k}{5};\frac{2\pi k}{5}+\frac{\pi}{10};\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$.
5. $2\pi k;\pi k-\frac{\pi}{4};\pi k+\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **6.** $\left(\pi k;-\pi k+\frac{\pi}{3}\right),\ k\in\mathbb{Z}$.
7. $\frac{11\pi}{2}-15$.

Вариант 3

1. $\frac{\pi k}{3}\pm\frac{\pi}{9},\ k\in\mathbb{Z}$.
2. $\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **3.** $\pi k;\pi k+\frac{\pi}{4},\ k\in\mathbb{Z}$.

4. $\frac{\pi k}{4} + \frac{\pi}{8}; \frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{4}; \pi k + \frac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$.
5. $\frac{2\pi}{3}; \frac{7\pi}{12}; \pi$.
6. $\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; -\frac{\pi}{8} - \frac{\pi k}{2}\right)\ k \in \mathbb{Z}$. **7.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

Вариант 4

1. $\frac{\pi k}{2} \pm \frac{\pi}{12},\ k \in \mathbb{Z}$. **2.** $\pi k \pm \frac{\pi}{6};\ 2\pi k \pm \left(\pi - \arccos\frac{3}{4}\right),\ k \in \mathbb{Z}$. **3.** $4\pi k - \frac{\pi}{2} \pm \frac{3\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. **4.** $\frac{\pi k}{2}; \frac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z}$. **5.** $\frac{5\pi}{4}$. **6.** $\left(\frac{\pi k}{2} + \frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{6}; \frac{\pi k}{2} - \frac{\pi}{6} - (-1)^k\frac{\pi}{6}\right)$. **7.** $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

7. Тригонометрические функции

Вариант 1

2. $(2; \pi]$. **3.** $[-5; 5]$.
4. $y = \begin{cases} 1 & \text{при } 2\pi k \leqslant x < \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{при } -\pi + 2\pi k < x < 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
5. $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}\right)$. **6.** $\sqrt{3}$. **7.** $5 - 2\pi$.
8. $y = x + 1;\ 1 \leqslant x \leqslant 3$.

Вариант 2

2. $(-1; 0]$. **3.** $[-2; 2]$.
4. $y = \begin{cases} 2\cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 0 & \text{при } \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$
5. $\left(\frac{\pi}{6}; \pi\right) \cup \left(\pi; \frac{11\pi}{6}\right)$. **6.** $-\sqrt{3}$. **7.** $2\pi - 4$.
8. $y = x - 1;\ -2 \leqslant x \leqslant 0$.

Вариант 3

2. $\left[1; \frac{\pi}{2}\right]$. **3.** $[-5; 5]$.
4. $y = \begin{cases} 1 & \text{при } -\frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{при } \frac{\pi}{2} + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

5. $\left[-\frac{\pi}{3};0\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{3}\right]$. **6.** $-\sqrt{3}$. **7.** $2-\pi$.
8. $y=-x+3;\ 0\leqslant x\leqslant 2$.

Вариант 4

2. $\left(1;\frac{\pi}{2}\right]$. **3.** $[-2;2]$.

4. $y=\begin{cases}0 & \text{при } 2\pi k\leqslant x\leqslant \pi+2\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ 2\sin x & \text{при } -\pi+2\pi k<x<2\pi k, k\in\mathbb{Z}\end{cases}$

5. $\left[-\frac{5\pi}{4};-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{4}\right]$. **6.** $-\frac{1}{2}$. **7.** $2{,}5\pi-7$.
8. $y=-x+3;\ 0\leqslant x\leqslant 2$.

8. Итоговая контрольная работа

Вариант 1

1. $\sin\alpha-1$. **2.** 0. **3.** 3. **4.** $\frac{1}{2}<x\leqslant 2;\ x\leqslant -10$. **5.** 5. **6.** $\pi k-$ $-\frac{\pi}{4};2\pi k\pm\frac{2\pi}{3},k\in\mathbb{Z}$. **7.** $\left[-7;\frac{1}{8}\right]$. **8.** См. рис. 37.

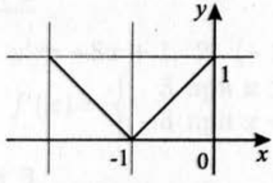


Рис. 37

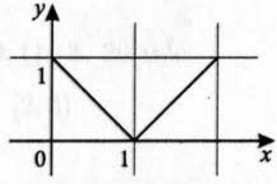


Рис. 38

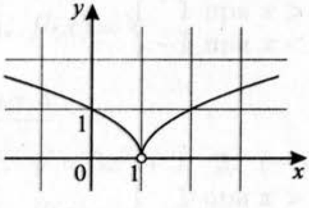


Рис. 39

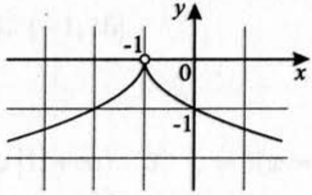


Рис. 40

Вариант 2

1. -1. **2.** $0; 1$. **3.** 1. **4.** $x \leqslant -13; 3 < x \leqslant 4$. **5.** 4. **6.** $\pi k + \frac{\pi}{2}; \pi k + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$. **7.** $\left[-8; -4\frac{7}{8}\right]$. **8.** См. рис. 38.

Вариант 3

1. $\frac{1}{9}$. **2.** $\pi k + \operatorname{arctg} \frac{-3 \pm \sqrt{69}}{6}, k \in \mathbb{Z}$.
3. $1 < x < 2$; $2\sqrt{2} < x < 3$. **4.** 1. **5.** $-\frac{1}{2}$. **6.** 0.
7. $x = -2$; $x \geqslant 2$. **8.** См. рис. 39.

Вариант 4

1. $2; 64$. **2.** $\pi k + \operatorname{arctg}(-1 \pm \sqrt{3}), k \in \mathbb{Z}$. **3.** $-1 < x < 0$; $\sqrt{3} < x < 2$. **4.** 0. **5.** $1{,}5$. **6.** 0. **7.** $x = 0$; $x \geqslant 3$.
8. См. рис. 40.

11 класс. Ответы к самостоятельным работам

1. Производная

Вариант 1

1. $y' = 6x - 2$. **2.** $\left(-\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right)$. **3.** 8 м/с.
4. $f'(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } x > 1{,}5 \\ -2 \text{ при } x < 1{,}5 \end{cases}$.
5. $(-\infty; -2] \cup [2; 3)$.

Вариант 2

1. $y' = -8x + 1$. **2.** $(-1; 0) \cup (0; 1)$. **3.** 20 м/с.
4. $f'(x) = \begin{cases} 3 \text{ при } x > 3 \\ -3 \text{ при } x < 3 \end{cases}$. **5.** $[2; 3)$.

Вариант 3

1. $y' = 3x^2 - 8x$. **2.** $(-1; 0)$. **3.** $y = 3x$.
4. $f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 0 \\ -1 \text{ при } x < 0 \end{cases}$. **5.** $(-1; 15]$.

Вариант 4

1. $y' = 3x^2 + 3$. **2.** $(-\infty; 0) \cup [1; +\infty)$. **3.** $y = 5(x - 2)$.
4. $f'(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 1 \\ -1 \text{ при } x < 1 \end{cases}$. **5.** $\left(2; 2\frac{1}{4}\right)$.

Вариант 5

1. $y' = \frac{1}{(1-x)^2}$. **2.** $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.
3. $f(x) = 2x^2 - 3$; $f(x) = 3\sqrt{15}$.
4. $f'(x) = \begin{cases} -2 \text{ при } x < -1 \\ 0 \text{ при } -1 < x < 0 \\ 2 \text{ при } x > 0 \end{cases}$. **5.** $(-3; 2)$.

Вариант 6

1. $y' = -\frac{1}{(1+x)^2}$. **2.** $\left(3; 3\frac{1}{4}\right)$. **3.** $f(x) = -3x^2 + 5$, $f(x) = -5\sqrt{17}$. **4.** $f'(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < -1 \\ 2 \text{ при } -1 < x < 1 \\ 0 \text{ при } x > 1 \end{cases}$. **5.** $[1; 2]$.

Вариант 7

1. $y' = -\frac{1}{2\sqrt{2-x}}$. **2.** $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$. **3.** см. рис. 1.
4. $A = 4$. **5.** $(\log_2 5; +\infty)$.

Вариант 8

1. $y' = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$. **2.** $(-\infty; 0) \cup \left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. **3.** см. рис. 2.
4. $B = 1$. **5.** $(-\infty; 1]$.

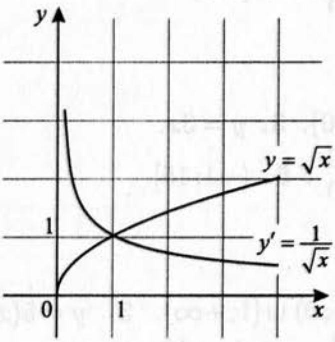


рис. 1

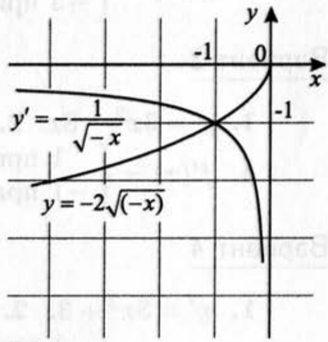


рис. 2

2. Производная степенной функции. Правила дифференцирования. Производная сложной функции

Вариант 1

1. -32. **2.** -26. **3.** 3. **4.** 0. **5.** $y=\sqrt{3}x+4+2\sqrt{3}$.

Вариант 2

1. 4. **2.** 0,48. **3.** -1. **4.** 0. **5.** $y=-\sqrt{3}x+2\sqrt{3}-4$.

Вариант 3

1. $-2\frac{2}{3}$. **2.** $\frac{3\sqrt{x-2}}{2(x-2)^2\cdot\sqrt{x-5}}$. **3.** 1. **4.** $(1;+\infty)$. **5.** $y=\frac{1}{2}x+\frac{7}{2}$.

Вариант 4

1. 16,5. **2.** $\frac{1}{3}\sqrt[3]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{(x+1)^2}$. **3.** -3. **4.** $(0;\sqrt{2}]$. **5.** $y=$ $=\frac{12}{7}x-\frac{59}{7}$.

Вариант 5

1. 11. **2.** $\frac{1}{30}$. **3.** $[-1;0)$. Указание. $3x^3-x+2=(x+$ $+1)(3x^2-3x+2)$. **4.** $\left(0;\frac{1}{4}\right)$. **5.** $y=\frac{1}{2}x-\frac{17}{2}$.

Вариант 6

1. 0. **2.** 39. **3.** $(0;1]$. Указание. $2x^3-x^2+x-2=$ $=(x-1)(2x^2+x+2)$. **4.** $(-\infty;\frac{4}{9})$. **5.** $y=-x-7$.

Вариант 7

1. 4. **2.** см. рис. 3.

3. $\frac{1}{x^4\sqrt{x^2-1}}$. Решение.

Пусть $u=(2x^2-1)\cdot\sqrt{1+x^2}$, тогда $u'=4x\sqrt{1+x^2}+$ $+(2x^2-1)\cdot\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{4x(1+x^2)+2x^3-x}{\sqrt{1+x^2}}=\frac{3x(2x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$y' = \frac{\frac{3x(2x^2+1)}{\sqrt{1+x^2}}\cdot 3x^3 - 9x^2(2x^2-1)\cdot\sqrt{x^2+1}}{9x^6} =$$
$$= \frac{9x^2(2x^4+x^2-2x^4+x^2-2x^2+1)}{9x^6\cdot\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x^4\cdot\sqrt{x^2+1}}.$$

4. $a \in (1;2) \cup (4;5)$. **5.** $y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

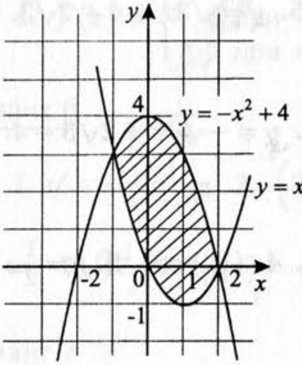


рис. 3

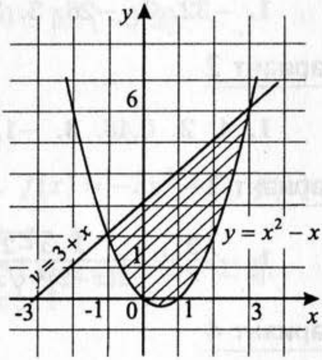


рис. 4

Вариант 8

1. $-\frac{3}{32}$. Указание. $y' = -\frac{7+2\sqrt{x}}{6\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{(x+7\sqrt{x})^4}}$.

2. см. рис. 4. **3.** $-\frac{8}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}$.

Решение. Пусть $u = x\sqrt[3]{(2+x^3)^2} = x(2+x^3)^{\frac{2}{3}}$. Тогда $u' = (2+x^3)^{\frac{2}{3}} + x\cdot\frac{2}{3}(2+x^3)^{-\frac{1}{3}}\cdot 3x^2 = (2+x^3)^{\frac{2}{3}} + \frac{2x^3}{(2+x^3)^{\frac{1}{3}}} =$
$$= \frac{2+x^3+2x^3}{(2+x^3)^{\frac{1}{3}}} = \frac{2+3x^3}{(2+x^3)^{\frac{1}{3}}}.$$
$$y' = \frac{9x^2\cdot x\sqrt[3]{(2+x^3)^2} - (4+3x^3)\cdot\frac{2+3x^3}{(2+x^3)^{\frac{1}{3}}}}{x^2(2+x^3)^{\frac{4}{3}}} =$$
$$= \frac{9x^3(2+x^3)-(4+3x^3)(2+3x^3)}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}} =$$
$$= \frac{18x^3+9x^6-8-6x^3-12x^3-9x^6}{x^2(2+x^3)^{\frac{5}{3}}} = -\frac{8}{x^2\sqrt[3]{(2+x^3)^5}}.$$

4. $m \in (0;1) \cup (2;3)$. **5.** $y = \frac{1}{4}x - \frac{15}{4}$.

3. Геометрический смысл производной

Вариант 1

1. $\frac{1}{4}$. **2.** $y = 7x - 6$. **3.** $y = 7x - 3$.

Вариант 2

1. $\frac{1}{2}$. **2.** $y = -9x - 3$. **3.** $y = -3x + 3$.

Вариант 3

1. $y = 2x - 2$; $y = 2x + 2$. **2.** $(0; 2)$; $(-2; 0)$. **3.** $y = -8x + 15$; $y = 8x - 1$.

Вариант 4

1. $y = 2x + 4$; $y = 2x - 4$. **2.** $(-1; 0)$; $(-3; 2)$. **3.** $y = -2x + 1$; $y = -18x - 15$.

Вариант 5

1. $(3; -16)$. **2.** $(1{,}5; -2)$. Указание. Если касательная перпендикулярна прямой $y = 2x - 1$, то ее угловой коэффициент $k = -\frac{1}{2}$ и значение производной в точке касания равно $-\frac{1}{2}$. **3.** $\operatorname{arctg}\frac{7}{16}$. Решение. Угол между графиками равен углу между касательными, проведенными в точке их пересечения. Найдем абсциссы точек пересечения: $x^3 - x = \frac{12}{x}$. Отсюда $x_{1,2} = \pm 2$. $f'(x) = 3x^2 - 1$; $g'(x) = -\frac{12}{x^2}$. Тогда угловые коэффициенты касательных в точке их пересечения равны $k_1 = 11$; $k_2 = -3$. Первая касательная составляет с осью OX угол $\varphi_1 = \operatorname{arctg} 11$, а второй угол $\varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} 3$. Если α — угол между касательными, то $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{-3-11}{1-3\cdot 11} = \frac{7}{16}$. Отсюда $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{7}{16}$.

Вариант 6

1. $(0{,}7; -9)$. **2.** $(4{,}25; 4)$. Указание. См. пояснения к задаче 2 варианта 5.

3. $\operatorname{arctg}\frac{12}{31}$. Указание. См. решение задачи 3 варианта 5 .

Вариант 7

1. $y=-x-\frac{9}{4}$. Решение. Пусть прямая l касается первого графика в точке x_1, а второго — в точке x_2. Уравнение касательной к первому графику имеет вид $y=(2x_1+2)x-x_1^2$, а ко второму — $y=(2x_2-4)x-x_2^2$. Т.к. это одна прямая, то

$$\begin{cases} 2x_1+2=2x_2-4 \\ x_1^2=x_2^2 \end{cases},\ x_1=x_2-3 \text{ и } (x_2-3)^2=x_2^2.$$

Отсюда $x_2=\frac{3}{2}$. Тогда уравнение касательной имеет вид $y=-x-\frac{9}{4}$.

2. $\frac{1}{4}$.

3. $a=\pm\frac{\sqrt{-3+\sqrt{17}}}{2}$. Решение. Абсцисса точки пересечения $x_1=0$; $x_{2,3}=\pm a$. Пусть x_0 — точка касания. Уравнение касательной имеет вид $y=(3x_0^2-a^2)x-2x_0^3$. При $x_0=a$ $y=2a^2x-2a^3$, при $x_0=-a$ $y=2a^2x+2a^3$. При $x_0=0$ $y=-a^2x$. Первая и вторая касательные параллельны, поэтому достаточно найти угол между первой и третьей касательной. $\operatorname{tg}\varphi_{2,3}=2a^2$; $\operatorname{tg}\varphi_1=-a^2$. Тогда $1=\frac{2a^2+a^2}{1-2a^4}$; $1-2a^4=3a^2$, откуда

$$a^2=\frac{-3+\sqrt{17}}{4};\ a^2=\frac{-3-\sqrt{17}}{4}<0,$$

окончательно $a=\pm\frac{\sqrt{-3+\sqrt{17}}}{2}$.

Вариант 8

1. $y=8x+4$. Указание. См. решение задачи 1 варианта 7. **2.** $m=2$; $m=-10$. **3.** $m=\pm\sqrt{\frac{-3\sqrt{3}+\sqrt{35}}{4}}$. Указание. См. решение задачи 2 варианта 7.

4. Производные некоторых элементарных функций

Вариант 1

1. а) $f'(x) = 10(2x-1)^4 + 2\cdot 5^{2x-1}\cdot \ln 5 + \frac{1}{3}\sin\frac{x}{3}$;
б) $f'(x) = -\frac{\ln 5}{x^2} + \frac{1}{x}$. **2.** $135°$. **3.** $(-\infty; 0)$.

Вариант 2

1. а) $f'(x) = 21(3x+1)^6 + 3\cdot 7^{3x+1}\cdot \ln 7 + 5\cos 5x$;
б) $f'(x) = -\frac{2\ln 3}{x^3} + \frac{3}{x}$. **2.** $120°$. **3.** $(-\infty; -2)$.

Вариант 3

1. а) $f'(x) = \frac{8}{\sin^2 4x}$; б) $f'(x) = 2\sqrt{3}(2x-3)^{\sqrt{3}-1} + 2(\sqrt{3})^{2x-3}\cdot\ln\sqrt{3}$. **2.** $y = -x + \frac{\pi}{2} + 1$. **3.** $(5; +\infty)$.

Вариант 4

1. а) $f'(x) = -\frac{8\cos 4x}{\sin^2 4x}$; б) $f'(x) = 3\sqrt{2}(3x+4)^{\sqrt{2}-1} + 3(\sqrt{2})^{3x+4}\cdot\ln\sqrt{2}$. **2.** $y = x - \frac{3\pi}{2} - 1$. **3.** $(\log_5\frac{8}{3}; +\infty)$.

Вариант 5

1. $-\frac{2}{\cos 2x}$. Указание. Запишите функцию в виде $y = \frac{1}{2}\ln(1-\sin 2x) - \frac{1}{2}\ln(1+\sin 2x)$, а потом возьмите производную.

2. $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{7\pi}{12} + \pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. Решение. $f'(x) = 0{,}2^{\cos 2x - x - 1941}\cdot(-2\sin 2x - 1)\ln 0{,}2$. Необходимо решить неравенство $f'(x) > 0$. При его решении нужно учесть, что $\ln 0{,}2 < 0$ и $0{,}2^{\cos 2x - x - 1941} > 0$. Тогда $-2\sin 2x - 1 < 0$ и $-\frac{\pi}{12} + \pi k < x < \frac{7\pi}{12} + \pi k$, $k\in\mathbb{Z}$.

3. $\left(1; \frac{10}{\ln 3} + 3\right)$. Указание. $y' = \frac{3^{x+1}\ln 3}{\ln 3} - \frac{3^{1-x}\ln 3}{\ln 3} = 3^{x+1} - 3^{1-x}$. Теперь решите уравнение $3^{x+1} - 3^{1-x} = 8$.

Вариант 6

1. $\frac{2}{\sin 2x}$. Указание. См. пояснения к задаче 1 варианта 5. **2.** $\left(-\frac{\pi}{3}+\pi k; \frac{\pi}{3}+\pi k\right)$, $k \in \mathbb{Z}$. Указание. См. решение задачи 2 варианта 5. **3.** $(0; 10)$. Указание. См. пояснения к задаче 3 варианта 5.

Вариант 7

1. $x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)$. Решение.

$y = x^{\operatorname{tg} x} = (e^{\ln x})^{\operatorname{tg} x} = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln x}$;

$$y'(x) = e^{\operatorname{tg} x \cdot \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x}\operatorname{tg} x + \frac{\ln x}{\cos^2 x}\right) = x^{\operatorname{tg} x}\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right).$$

2. $\operatorname{arctg}\frac{4}{3}$. Решение. Графики $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ пересекаются в точке $x = \frac{\pi}{4}$. Пусть φ_1 — угол, составленный касательной с положительным направлением оси OX к кривой $y = \operatorname{tg} x$, а φ_2 — к кривой $y = \operatorname{ctg} x$.

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}; \quad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{4}} = 2.$$

$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}; \quad \operatorname{tg}\varphi_2 = -\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{4}} = -2.$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg} 2; \quad \varphi_2 = \pi - \operatorname{arctg} 2.$$

Пусть угол между касательными ϑ. Тогда

$$\operatorname{tg}\vartheta = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{-2-2}{1+2\cdot(-2)} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

Отсюда $\vartheta = \operatorname{arctg}\frac{4}{3}$.

3. $a = e^{\frac{1}{e}}$. Решение. Пусть x_0 — абсцисса точки касания. Уравнение касательной имеет вид $y = (a^{x_0} \cdot \ln a)x + a^{x_0} - x_0 \cdot a^{x_0} \cdot \ln a$. Эта касательная должна совпасть с прямой $y = x$. Тогда $a^{x_0} \cdot \ln a = 1$, а $a^{x_0}(1 - x_0 \cdot \ln a) = 0$. Прологарифмируем первое равенство по основанию e, тогда $x_0 \cdot \ln a + \ln\ln a = 0$. Из второго равенства следует, что $x_0 = \frac{1}{\ln a}$. В таком случае $\frac{1}{\ln a} \cdot \ln a + \ln\ln a = 0$. $\ln\ln a = -1$, $\ln a = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Отсюда $a = e^{\frac{1}{e}}$.

Вариант 8

1. $x^{\operatorname{ctg} x}\left(-\frac{\ln x}{\sin^2 x}+\frac{\operatorname{ctg} x}{x}\right)$. Указание. См. решение задачи 1 варианта 7. **2.** $\pi - \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}$. Указание. См. решение задачи 2 варианта 7.

3. $a \in (-\infty; 0] \cup \left\{\frac{1}{2e}\right\}$.

Решение. При $a \leqslant 0$ графики функций $y = ax^2$ и $y = \ln x$ имеют одну общую точку. Тогда уравнение имеет один корень. При $a > 0$ уравнение имеет один корень, когда графики касаются в некоторой точке $M = (x_0; y_0)$. Уравнение касательной к кривой $y = ax^2$ имеет вид

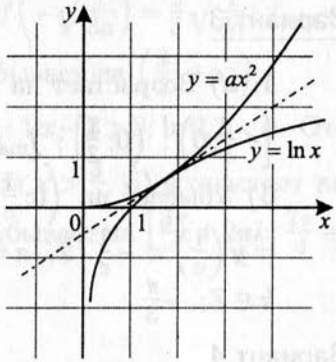


рис. 5

$$y = y_0 + 2ax_0(x - x_0),$$

а к кривой $y = \ln x$ —

$$y = y_0 + \frac{1}{x_0}(x - x_0).$$

В точке $M = (x_0; y_0)$ значения рассматриваемых функций равны. Тогда $\begin{cases} 2ax_0 = \frac{1}{x_0} \\ -ax_0^2 = \ln x_0 - 1 \end{cases}$.

Отсюда $x_0 = e^{1/2}$, $a = \frac{1}{2e}$.

5. Исследование функции на монотонность и экстремум

Вариант 1

1. а) Возрастает на $(-\infty; -2]$; $[1; +\infty)$; убывает на $[-2; 1]$; $y_{\max} = y(-2) = \frac{10}{3}$; $y_{\min} = y(1) = -\frac{7}{6}$; **б)** Убывает на $(-\infty; -1]$; возрастает на $[-1; +\infty)$; $y_{\min} = y(-1) = -\frac{1}{e}$. **2.** $a \in (-\infty; -4)$. **3.** $a \in [1; +\infty)$.

Вариант 2

1. а) Возрастает на $(-\infty;-1]$; $[2;+\infty)$; убывает на $[-1;2]$; $y_{\max}=y(-1)=7{,}5$; $y_{\min}=y(2)=-6$; **б)** Возрастает на $(-\infty;1]$; убывает на $[1:+\infty)$; $y_{\max}=y(1)=\frac{1}{e}$. **2.** $b\in(-\infty;-3)$. **3.** $p\in[1;+\infty)$.

Вариант 3

1. а) Возрастает на $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]$; $\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$; убывает на $\left[-\frac{1}{3};0\right)$; $\left(0;\frac{1}{3}\right]$; $f_{\max}=f\left(-\frac{1}{3}\right)=-7$; $f_{\min}=f\left(\frac{1}{3}\right)=5$; **б)** Убывает на $\left(0;\frac{1}{e}\right]$; возрастает на $\left[\frac{1}{e};+\infty\right)$; $y_{\min}=$ $=y\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$. **2.** $a=1$. **3.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}$.

Вариант 4

1. а) Возрастает на $(-\infty;0)$; $[2;+\infty)$; убывает на $(0;2]$; $f_{\min}=f(2)=3$; **б)** Возрастает на $(0;e]$; убывает на $[e;+\infty)$; $f_{\max}=f(e)=\frac{1}{e}$. **2.** $b=2$. **3.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3}$.

Вариант 5

1. а) Возрастает на $[0;+\infty)$; убывает на $(-\infty;0]$; $f_{\min}=f(0)=3{,}5$; **б)** При $a\leqslant 0$ возрастает на $\mathbb{R}$; при $a>0$ возрастает на $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{a}{3}}\right]$; $\left[\sqrt{\frac{a}{3}};+\infty\right)$; убывает на $\left[-\sqrt{\frac{a}{3}};\sqrt{\frac{a}{3}}\right]\cdot f_{\max}=f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$; $f_{\min}=$ $=f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=-\frac{2a}{3}\sqrt{\frac{a}{3}}$. Указание. $f'(x)=3x^2-a$. При $a\leqslant 0$ $f'(x)\geqslant 0$, т.е. функция возрастает. При $a>0$ нужно решить неравенства $3x^2-a\geqslant 0$ и $3x^2-a\leqslant$ $\leqslant 0$. **2. а)** возрастает на $\mathbb{R}$. Решение. $f'(x)=-2\times$ $\times 0{,}3^{4-2x}\cdot\ln 0{,}3$. $0{,}3^{4-2x}>0$; $\ln 0{,}3<0$. В таком случае $f'(x)>0$ на $\mathbb{R}$. **б)** возрастает на $\left[-\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\frac{\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$ и убывает на $\left[\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{5\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 6

1. **а)** Возрастает на $[0;+\infty)$; убывает на $(-\infty;0]$; $f_{\min}=f(0)=2{,}5$; **б)** При $a\leqslant 0$ убывает на $\mathbb{R}$; при $a>0$ возрастает на $\left(-\infty;-\sqrt{\frac{1}{3a}}\right]$; $\left[\sqrt{\frac{1}{3a}};+\infty\right)$; убывает на $\left[-\sqrt{\frac{1}{3a}};\sqrt{\frac{1}{3a}}\right]$ $f_{\max}=f\left(-\sqrt{\frac{1}{3a}}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3a}}$; $f_{\min}=$ $=f\left(\sqrt{\frac{1}{3a}}\right)=-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{1}{3a}}$. **2.** **а)** убывает на $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. Решение. $f'(x)=\frac{2}{(2x-3)\cdot\ln 0{,}3}$; $2x-3>0$; $\ln 0{,}3<0$. Отсюда следует, что $f'(x)<0$ при $x>\frac{3}{2}$. **б)** возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4}+2\pi k;\frac{3\pi}{4}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$ и убывает на $\left[\frac{3\pi}{4}+2\pi k;\frac{7\pi}{4}+\right.$ $\left.+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

Вариант 7

1. **а)** Убывает на $\left(-\infty;-\frac{27}{64}\right]$; возрастает на $\left[-\frac{27}{64};+\infty\right)$; $f_{\min}=f\left(-\frac{27}{64}\right)=-\frac{27}{256}$; **б)** Возрастает на $\left(-\infty;\log_2\sqrt{\frac{3}{5}}\right]$; убывает на $\left[\log_2\sqrt{\frac{3}{5}};+\infty\right)$; $f_{\max}=f\left(\log_2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)=\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$. Решение. $f'(x)=3\cdot 2^{3x}\ln 2-5\cdot 2^{5x}\ln 2=2^{3x}\ln 2(3-$ $-5\cdot 2^{2x})$. $f'(x)=0$, $2^{2x}=\frac{3}{5}$, $x=\log_2\sqrt{\frac{3}{5}}$. $f'(x)>0$, если $x<\log_2\sqrt{\frac{3}{5}}$. $f'(x)<0$, если $x>\log_2\sqrt{\frac{3}{5}}$. В таких случаях функция достигает максимума в точке $x=\log_2\sqrt{\frac{3}{5}}$; $f_{\max}=2^{3\log_2\sqrt{\frac{3}{5}}}-2^{5\log_2\sqrt{\frac{3}{5}}}=\frac{6}{25}\sqrt{\frac{3}{5}}$. **2.** $(-\infty;-3]$. Указание. $y'(x)=3(a+2)x^2-6ax+9a$. $y'(x)\leqslant 0$, если $\begin{cases} a+2<0 \\ D\leqslant 0\end{cases}$.

3. $a\geqslant 0$. Решение. $y'(x)=2e^x+\frac{a}{e^x}+2a+1=$ $=\frac{2e^{2x}+a+2ae^x+e^x}{e^x}=\frac{2e^x(e^x+a)+(e^x+a)}{e^x}=\frac{(e^x+a)(2e^x+1)}{e^x}$. Т.к. $\frac{2e^x+1}{e^x}>0$, то $e^x+a>0$ при любом x, если $a\geqslant 0$.

Вариант 8

1. 1) Убывает на $\left(-\infty; \dfrac{27}{64}\right]$; возрастает на $\left[\dfrac{27}{64}; +\infty\right)$; $f_{\min} = f\left(\dfrac{27}{64}\right) = -\dfrac{27}{256}$; **2)** убывает на $(-\infty; \log_3 2]$; возрастает на $[\log_3 2; +\infty)$; $f_{\min} = f(\log_3 2) = -16$. **2.** $(-\infty; -3]$; $[1; +\infty)$. Указание. $y'(x) = (a^2-1)x + 2(a-1)x + 2$. При $a = 1$, $y' = 2 > 0$. Кроме того, $\begin{cases} a^2 - 1 > 0 \\ D \leqslant 0 \end{cases}$.

3. $m \geqslant 0$. Указание. Представьте $f'(x)$ в виде $\dfrac{(e^x+m)(e^x+2)}{2e^x}$.

6. Графики функций

Вариант 1

1. 1) см. рис. 6; **2)** Если $a = 5\frac{2}{3}$ — два корня, если $a \in (-5; 5\frac{2}{3})$ — три корня, если $a = -5$ — два корня; **3)** см. рис. 7. **2.** см. рис. 8.

Вариант 2

1. 1) см. рис. 9; **2)** Если $a = 2$ — два корня, если $a \in (-2; 2)$ — три корня, если $a = -2$ — два корня; **3)** см. рис. 10. **2.** см. рис. 11.

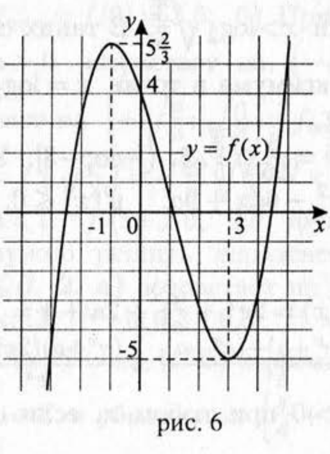


рис. 6

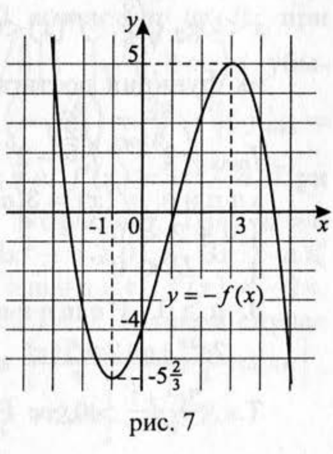


рис. 7

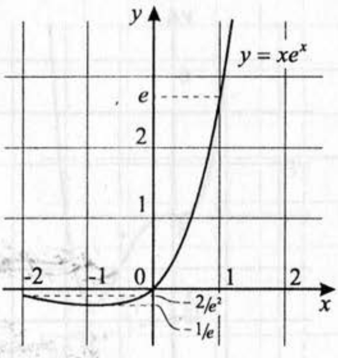


рис. 8

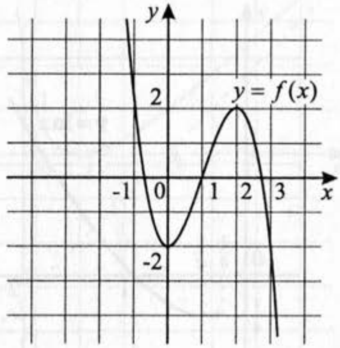


рис. 9

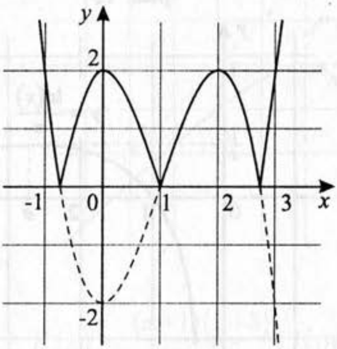


рис. 10

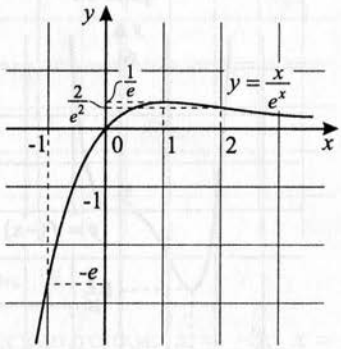


рис. 11

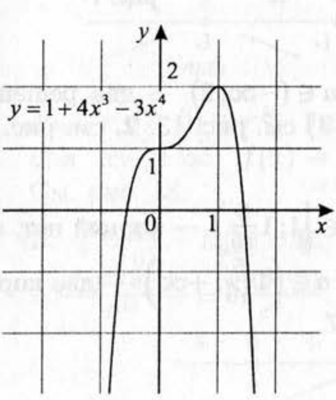


рис. 12

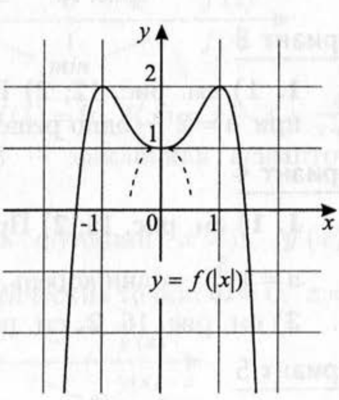


рис. 13

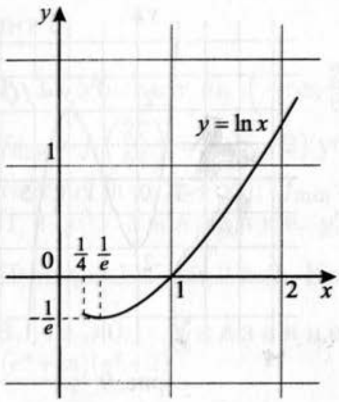


рис. 14

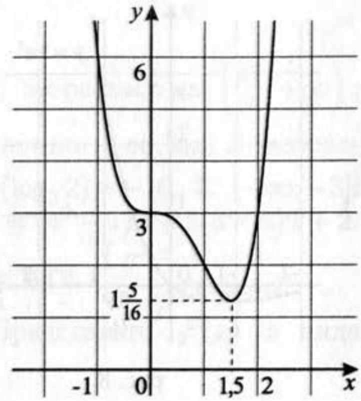


рис. 15

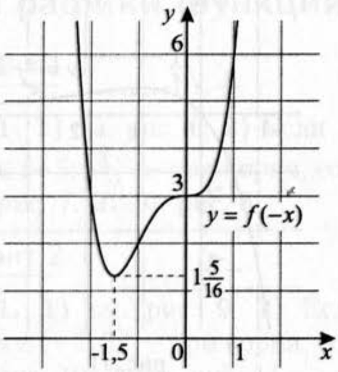


рис. 16

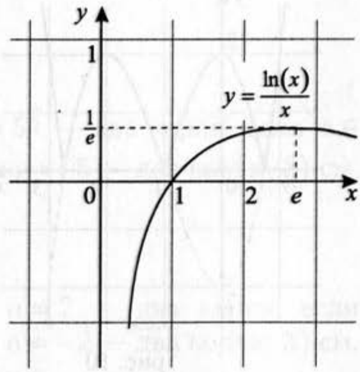


рис. 17

Вариант 3

1. 1) см. рис. 12; **2)** При $a \in (-\infty; 2)$ — два решения, при $a = 2$ — одно решение; **3)** см. рис. 13. **2.** см. рис. 14.

Вариант 4

1. 1) см. рис. 15; **2)** При $a \in \left[1; 1\frac{5}{16}\right)$ — корней нет, при $a = 1\frac{5}{16}$ — один корень, при $a \in \left(1\frac{5}{16}; +\infty\right)$ — два корня; **3)** см. рис. 16. **2.** см. рис. 17.

Вариант 5

1. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$, $D(f): x \neq -1$, нуль функции $x = 1$.

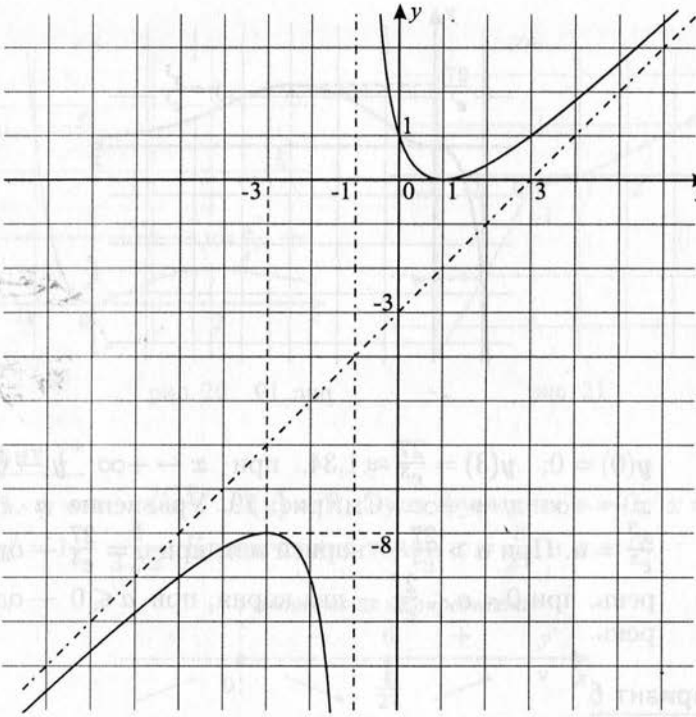
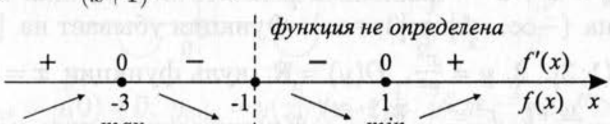


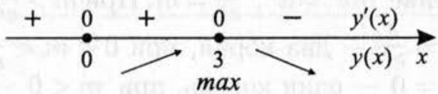
рис. 18

$f'(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$. Критические точки: $x = -3$; $x = 1$.



$y_{\max} = f(-3) = -8$; $y_{\min} = f(1) = 0$. $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x+1}$, при $x \to \pm\infty$ $f(x) \to x - 3$ — наклонная асимптота. См. рис. 18.

2. $y = \dfrac{x^3}{e^x}$, $D(y) = \mathbb{R}$, нуль функции $x = 0$. $y'(x) = = \dfrac{e^x \cdot x^2(3-x)}{e^{2x}} = \dfrac{x^2(3-x)}{e^x}$. Критические точки: $x = 0$; $x = 3$.



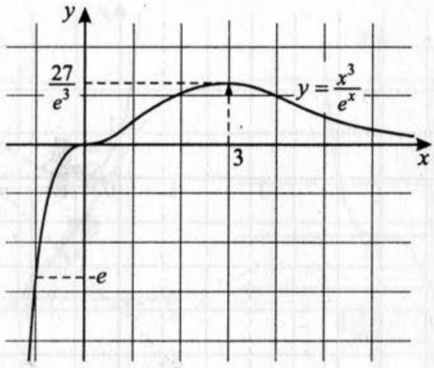
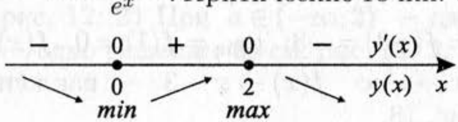


рис. 19

$y(0)=0$; $y(3)=\frac{27}{e^3}\approx 1{,}34$, при $x\to+\infty$ $y\to 0$; при $x\to-\infty$ $y\to-\infty$. См. рис. 19. Уравнение $a\cdot e^x=x^3$; $\frac{x^3}{e^x}=a$. При $a>\frac{27}{e^3}$ — корней нет, при $a=\frac{27}{e^3}$ — один корень, при $0<a<\frac{27}{e^3}$ — два корня, при $a\leqslant 0$ — один корень.

Вариант 6

1. Аналогично примеру 1 из варианта 5. $D(f): x\neq 1$, нуль функции $x=-1$. $y_{\max}=y(-1)=0$; $y_{\min}=y(3)=8$. $y=x+3$ — наклонная асимптота. Функция возрастает на $(-\infty;-1]$ и $[3;+\infty)$. Функция убывает на $[-1;-1)$ и $(1;3]$. **2.** $y=\frac{x^2}{e^x}$, $D(y)=\mathbb{R}$, нуль функции $x=0$. $y'(x)=$ $=\frac{2x\cdot e^x-x^2\cdot e^x}{e^{2x}}=\frac{x(2-x)}{e^x}$. Критические точки: $x=0$; $x=2$.



$y_{\min}(0)=0$; $y_{\max}(2)=\frac{4}{e^2}\approx 0{,}54$, при $x\to+\infty$ $y\to 0$; при $x\to-\infty$ $y\to+\infty$. См. рис. 20.

Уравнение $me^x=x^2$; $\frac{x^2}{e^x}=m$. При $m>\frac{4}{e^2}$ — один корень, при $m=\frac{4}{e^2}$ — два корня, при $0<m<\frac{4}{e^2}$ — три корня, при $m=0$ — один корень, при $m<0$ — корней нет.

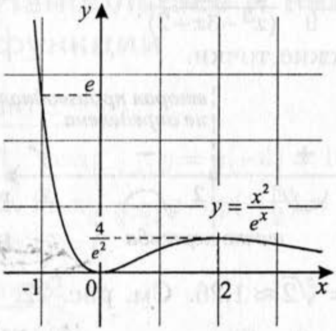


рис. 20

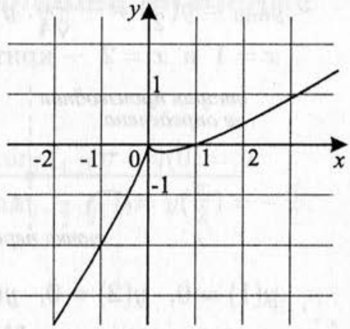
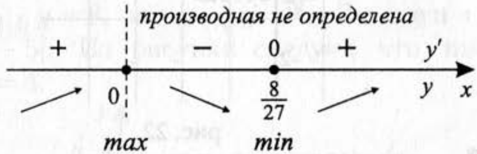


рис. 21

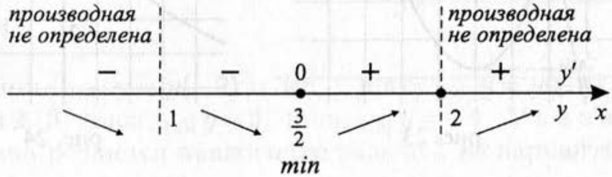
Вариант 7*

1. $y = x - \sqrt[3]{x^2}$; $D(y)=\mathbb{R}$, нуль функции $x=0$, $x=1$. $y' = 1 - \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Критические точки $x=\frac{8}{27}$ и $x=0$.



$y_{\max} = y(0) = 0$; $y_{\min} = y(\frac{6}{27}) = -\frac{4}{27}$. $y'' = \frac{2}{9x^{\frac{4}{3}}}$, $y''>0$ при $x \neq 0$. См. рис. 21. **2.** $y = \sqrt[3]{x^2-3x+2}$, $D(y)=\mathbb{R}$, нуль функции $x=2$; $x=1$. $y'(x) = \frac{2x-3}{3\sqrt[3]{(x^2-3x+2)^2}}$.

Критические точки: $x=\frac{3}{2}$; $x=1$; $x=2$.



$y_{\min} = y\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$. $y'' = -\frac{2}{9} \cdot \frac{x^2-3x+3}{(x^2-3x+2)}$.

$x = 1$ и $x = 2$ — критические точки.

$y(1) = 0$, $y(2) = 0$, $y(0) = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}26$. См. рис. 22.

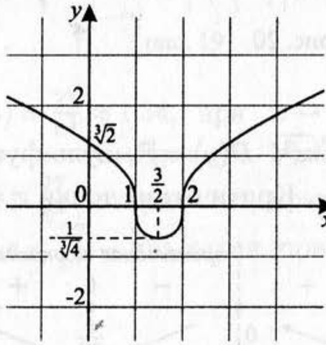


рис. 22

Вариант 8*

1. Решается аналогично заданию 1 из варианта 7. См. рис. 23. **2.** Решается аналогично заданию 2 из варианта 7. См. рис. 24.

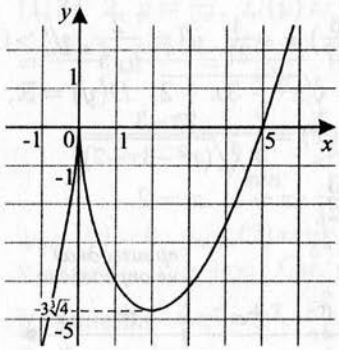


рис. 23

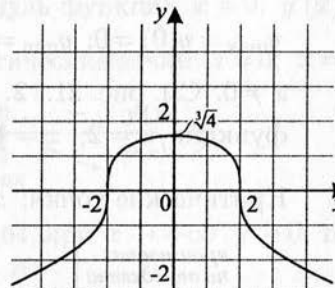


рис. 24

7. Наибольшее и наименьшее значение функции

Вариант 1

1. $\max_{[-4;1)} y = y(-4) = 16$, $\min_{[-4;1]} y = y(0) = 0$.

2. $\max_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} y = y(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, $\min_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} y = y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$.

3. $S = 6$.

Вариант 2

1. $\max_{[0;2,5]} y = y(0) = 2$, $\min_{[0;2,5]} y = y(1) = 1{,}5$.

2. $\max_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} y = 1 + \frac{\pi}{2}$, $\min_{[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]} y = y(\frac{\pi}{2}) = -1 - \frac{\pi}{2}$.

3. $S = \frac{m}{24}$.

Вариант 3

1. $\min_{[-1;1]} y = y(0) = 0$, $\max_{[-1;1]} y = y(1) = 24$. **2.** $-\frac{5}{e}$.
3. $\max_{[-1;4]} y = 8$, $\min_{[-1;4]} y = 4$. Решение. $y = |x - 1| + |x - 5|$. Из рисунка следует, что $\max_{[1;4]} y = 8$, $\min_{[1;4]} y = 4$.

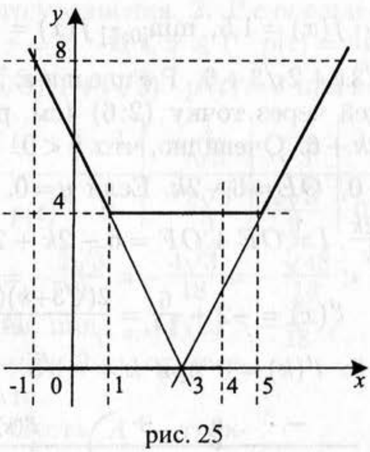


рис. 25

Вариант 4

1. $\min_{[-4;4]} y = y(-2) = 3e^2$, $\max_{[-4;4]} y = y(-4) = 7e^4$.
2. $\ln 2$. **3.** $\max_{[-1;5]} y = 2$, $\min_{[-1;5]} y = -4$. Указание. Задача решается аналогично задаче 3 из варианта 3.

Вариант 5

1. $\frac{3\sqrt{2}}{8}$. Решение. См. рис. 26. $PM = \frac{3}{4}$; $PK = \frac{3}{4}\sin 45^\circ = \frac{3\sqrt{2}}{8}$.

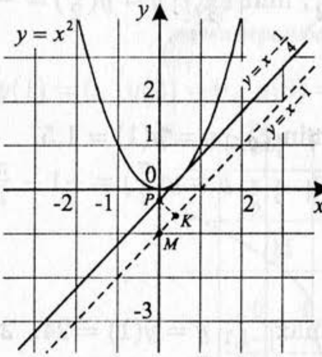


рис. 26

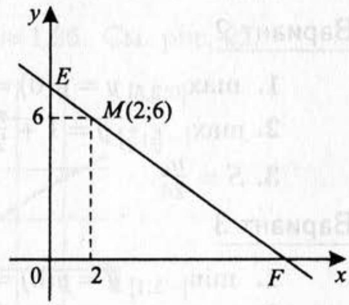


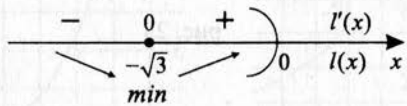
рис. 27

2. $\max_{[0;\frac{\pi}{2}]} f(x) = 1{,}5$, $\min_{[0;\frac{\pi}{2}]} f(x) = -\frac{1}{2}$.

3. $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 6$. Решение. Уравнение прямой, проходящей через точку $(2;6)$ (см. рис. 27), имеет вид $y = kx - 2k + 6$. Очевидно, что $k < 0$. Если $x = 0$, то $y = 6 - 2k > 0$, $OE = 6 - 2k$. Если $y = 0$, то $x = \frac{6-2k}{-k}$, $OF = x = \frac{6-2k}{-k}$. $l = OE + OF = 6 - 2k + 2 - \frac{6}{k} = 8 - 2k - \frac{6}{k}$;

$$l'(x) = -2 + \frac{6}{k^2} = \frac{2(\sqrt{3}+k)(\sqrt{3}-k)}{k^2};$$

$\sqrt{3} - k > 0$. $l'(k) = 0$ при $k = -\sqrt{3}$.



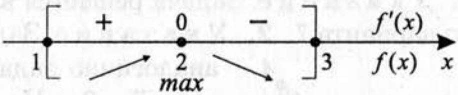
В точке $k = -\sqrt{3}$ функция достигает наименьшего значения, тогда $y = -\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + 6$.

Вариант 6

1. $\sqrt{2}$. Указание. См. решение задачи 1 из варианта 5. **2.** $\max_{[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}]} f(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$, $\min_{[\frac{\pi}{6};\frac{\pi}{3}]} f(x) = 1$.
3. $y = -2x + 6$. Указание. См. решение задачи 3 из варианта 5.

Вариант 7

1. $x = 2$. Решение. **1)** Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{3-x} + \sqrt{x-1}$; $D(f) = [1;3]$. $f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{3-x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{3-x}\cdot\sqrt{x-1}}$; $f'(x) = 0$ при $x = 2$.



$\max_{[1;3]} f(x) = f(2) = 2$. **2)** Рассмотрим функцию $g(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2$. $\min_{[1;3]} g(2) = 2$. Учитывая пункты 1) и 2), можно сделать вывод, что $x = 2$ — решение данного уравнения. **2.** Решение. $f(x) = \sin x - \sin^3 x$; $\sin x = t$, $-1 \leqslant x \leqslant 1$. $p(t) = t - t^3$; $p'(t) = 1 - 3t^2 = (1 - t\sqrt{3})(1 + t\sqrt{3})$. $p'(t) = 0$ при $t = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $t = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

t	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
$p(t)$	0	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0

$\min_{[-1;1]} p(t) = -\frac{2\sqrt{3}}{9} = -\frac{4\sqrt{3}}{18} = -\frac{\sqrt{48}}{18} > \frac{\sqrt{49}}{18} = -\frac{7}{18}$.
Следовательно, $\min_{[-\pi;\pi]} f(x) > -\frac{7}{18}$.

3. На расстоянии 9 км от населенного пункта.
Решение. Пусть A — трактор, C — населенный пункт, M — место выезда на шоссе. Пусть $BM = x$ км. $AM = \sqrt{27^2 + x^2}$; $t_1 = \frac{\sqrt{729+x^2}}{44}$ ч.
$t_2 = \frac{45-x}{55}$ ч.

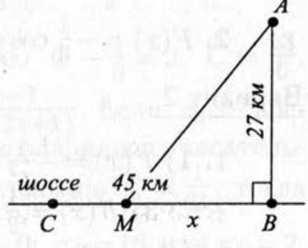
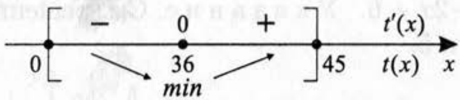


рис. 28

$t = t_1 + t_2 = \frac{\sqrt{729+x^2}}{44} + \frac{45-x}{55}$ (см. рис. 28);

$t'(x) = \frac{x}{44\sqrt{729+x^2}} - \frac{1}{55} = \frac{55x-44\sqrt{729+x^2}}{44\cdot55\sqrt{729+x^2}}$. $t'(x) = 0$ при $x = 36$.



Следовательно, $BM = 36$ км, т.е. на шоссе нужно въехать на расстоянии 9 км от населенного пункта C.

Вариант 8

1. $x = 0$. Указание. Задача решается аналогично задаче 1 из варианта 7. **2.** Указание. Задача решается аналогично задаче 2 из варианта 7. **3.** На шоссе нужно въехать на расстоянии 8 км от магазина. Указание. Задача решается аналогично задаче 3 из варианта 7 (см. рис. 29). A — база, C — магазин, M — место выезда на шоссе.

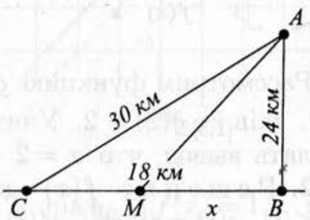


рис. 29

8. Первообразные

Вариант 1

1. 1) $F(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^5} + C$; **2)** $F(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x + C$; **3)** $F(x) = 3\ln|x| + C$; **4)** $F(x) = \frac{1{,}5^x}{\ln 1{,}5} + C$.

2. $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 4x + \frac{5}{8}$. **3.** $y = x^2$.

Вариант 2

1. 1) $F(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} - \frac{1}{x^6} + C$; **2)** $F(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x + C$; **3)** $F(x) = \frac{1}{2}\ln|x| + C$; **4)** $F(x) = \frac{0{,}7^x}{\ln 0{,}7} + C$.

2. $F(x) = \frac{1}{4}\sin 4x + \frac{1}{8}$. **3.** $y = x^3 - 1$.

Вариант 3

1. 1) $F(x) = 2x^3 - 4x^2 - 4x + 3\ln|x| + \frac{5}{x} + C$; **2)** $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - 6\sqrt{x} + C$; **3)** $F(x) = \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{24}\sin 12x + C$;
2. $F(x) = -x - \log_4 x + 5$. **3.** $\frac{\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{6}$.

Вариант 4

1. 1) $F(x) = 3x^3 + 6x^2 - 6x + 7\ln|x| + \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2} + C$; **2)** $F(x) = \frac{2}{7}x^3 \cdot \sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + C$; **3)** $F(x) = \frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C$;
2. $F(x) = x + \ln x - 1$. **3.** 0; $\frac{\pi}{2}$; 2π.

Вариант 5

1. 1) $F(x) = \sin x + \cos x - 1$; Указание. $f(x) = \sqrt{1 - \sin 2x} = \sqrt{(\cos x - \sin x)^2} = |\cos x - \sin x| = \cos x - \sin x$, т.к. при $-\frac{3\pi}{4} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}$ $\cos x \geqslant \sin x$. **2)** $F(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + 4\sqrt[4]{x} + C$; **3)** $F(x) = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$. Решение. $f(X) = \frac{x^2}{x^2-1} = \frac{x^2-1+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$;
$F(x) = x + \frac{1}{2}(\ln|x-1| - \ln|x+1|) = x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$.

2. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{13}{6}$. Решение. $F(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + C$. Критические точки $x = 0$ и $x = 1$.

x	$\frac{1}{2}$	1	3
$F(x)$	$C - \frac{1}{12}$	$C - \frac{1}{6}$	$C + \frac{9}{2}$

$\min_{[\frac{1}{2};3]} F(x) = C - \frac{1}{6}$. По условию $C - \frac{1}{6} = 2$; $C = \frac{13}{6}$.

3. Две. Решение. $F'(x) = \frac{x-1}{x^2+3x+11}$. Если x_0 — абсцисса точки касания, то угловой коэффициент касательной $R = F(x_0) = \frac{x_0-1}{x_0^2+3x_0+11}$. По условию $K = \frac{1}{21}$, тогда $\frac{x_0-1}{x_0^2+3x_0+11} = \frac{1}{21}$ и $x_0^2 - 18x_0 + 32 = 0$; $x_0 = 16$ или $x_0 = 2$, т.е. две касательные.

Вариант 6

1. 1) $F(x)=\sin x-\cos x+2$; Указание. См. решение 1 1) из варианта 5. **2)** $F(x)=5e^x+\frac{1}{x^3}+C$; **3)** $F(x)=\frac{x^3}{3}+$ $+x+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$. Указание. См. решение 1 3) из варианта 5. **2.** $F(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}$. Указание. См. решение примера 2 из варианта 5. **3.** Одна. Указание. См. решение примера 3 из варианта 5.

Вариант 7

1. 1) $F(x)=\operatorname{tg}x-x+C$. Решение. $f(x)=\operatorname{tg}^2x=$ $=\frac{1}{\cos^2 x}-1$. Отсюда $F(x)=\operatorname{tg}x-x+C$. **2)** $F(x)=$ $=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|+C$. Решение.

$$f(x)=\frac{1}{x^2+5x+4}=\frac{1}{(x+1)(x+4)}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+4}\right).$$

Отсюда

$$F(x)=\frac{1}{3}(\ln|x+1|-\ln|x+4|)+C=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x+1}{x+4}\right|+C.$$

3) $F(x)=\frac{x^3}{3}+2x-\ln|x+1|+C$. Указание. Выражение $\frac{x^3+x^2+2x+1}{x+1}$ представьте в виде $x^2+2-\frac{1}{x+1}$.
2. $F(x)=x^2+5x-2$. Решение. $F(x)=x^2+5x+$ $+C$. Пусть x_0 — абсцисса точки касания. Тогда уравнение касательной имеет вид $y=x_0^2+5x_0+C+(2x_0+5)\times$ $\times(x-x_0)=(2x_0+5)x-x_0^2+C$. Т.к. $y=7x-3$ является касательной, то $\begin{cases}2x_0+5=7\\-x_0^2+C=-3\end{cases}$, отсюда $\begin{cases}x_0=1\\-1+C=-3\end{cases}$; $C=-2$. Тогда $F(x)=x^2+5x-2$.

3. $F(x)=\begin{cases}\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+x+C & x\geqslant 1\\ -\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{3}+C & x<1\end{cases}$.

Решение. $f(x)=\begin{cases}-2x^2+3x-1 & x<1\\ 2x^2-3x+1 & x\geqslant 1\end{cases}$.

$F_1(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + C_1$; $x < 1$; $F_2(x) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C_2$; $x \geqslant 2$. Найдем соотношение между C_1 и C_2, при котором $F_1(1) = F_2(1)$, $C_1 = \frac{1}{3} + C_2$. Тогда

$$F(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C & x \geqslant 1 \\ -\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{3} + C & x < 1 \end{cases}.$$

Вариант 8

1. 1) $F(x) = -\operatorname{ctg} x - x + C$. Указание. См. решение 1 1) из варианта 7. **2)** $F(x) = \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| + C$. Указание. См. решение 1 2) из варианта 7. **3)** $F(x) = \frac{x^3}{3} - 3x + 4\ln|x+1| + C$. Указание. См. решение 1 3) из варианта 7. **2.** $F(x) = -2x^2 + x - 1$. Указание. См. решение примера 2 из варианта 7. **3.**

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2 - \frac{x^3}{3} + C & x < 4 \\ \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 21\frac{1}{3} + C & x \geqslant 4 \end{cases}.$$

Указание. См. решение примера 3 из варианта 7.

9*. Интеграл

Вариант 1

1. 4,5. **2.** $\frac{\pi}{2}$. **3.** 1. **4.** $B > A$. **5.** $\frac{4}{3}$.

Вариант 2

1. 4,5. **2.** $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}$. **3.** 1. **4.** $B > A$. **5.** $\frac{9}{2}$.

Вариант 3

1. $341\frac{1}{3}$. **2.** $\frac{\sqrt{3}}{8}$. **3.** $-67\frac{2}{3}$. **4.** $A = B$. **5.** $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.

Вариант 4

1. $10\frac{1}{8}$. **2.** $-\frac{7}{48}$. **3.** $\sqrt{2} + 1$. **4.** $A = B$. **5.** $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$.

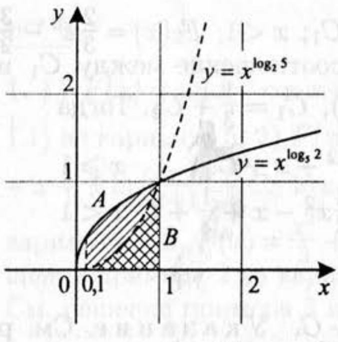


рис. 30

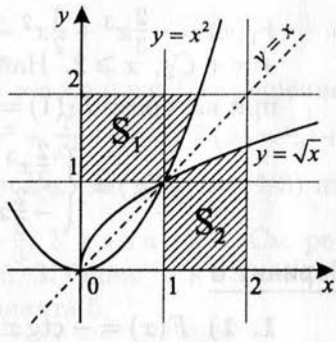


рис. 31

Вариант 5

1. $-\frac{22}{3}$. **2.** 0. **3.** $a \in (1; 9)$. **4.** $A > B$. Решение. $2^{\log_5 x} = x^{\log_5 2}$; $5^{\log_2 x} = x^{\log_2 5}$; $\log_5 2 < 1$; $\log_2 5 > 1$, см. рис. 30. **5.** $7\frac{1}{9}$.

Вариант 6

1. $\frac{4}{3}$. **2.** 2. **3.** $\mathbb{R}$. **4.** $A < B$. Указание. См. решение примера 4 из варианта 5. **5.** $\ln 9$.

Вариант 7

1. $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$. Решение. $y = \sqrt{2x - x^2}$; $y \geqslant 0$, $y^2 = 2x - x^2$, $x^2 - 2x + y^2 = 0$, $(x-1)^2 + y^2 = 1$. $S_1 = 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$, $S_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{8}$, $S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{8}$ (см. рис. 32).

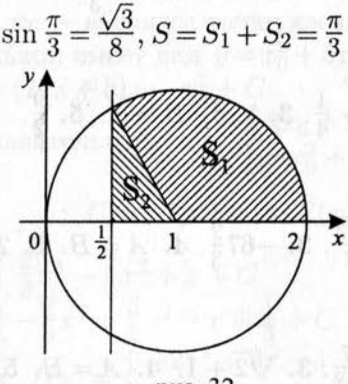


рис. 32

2. $\frac{3}{2}$. **3.** $1-\ln 2$. Решение. $\int\limits_0^1 \frac{xdx}{x+1} = \int\limits_0^1 \frac{x+1-1}{x+1}\,dx =$ $= \int\limits_0^1 (1-\frac{1}{x+1})\,dx = (x-\ln|x+1|)\,\Big|_0^1 = (1-\ln 2) - 0 = 1 -$ $-\ln 2$. **4.** 1. Решение. $\int\limits_0^1 \arccos x\,dx = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx =$ $= \sin x\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. **5.** $\frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$. Решение. Строим график функции, обратной функции $y=x^2$. Очевидно, что $S_1 =$ $= S_2$. $S_2 = \int\limits_1^2 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\,\Big|_1^2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$, см. рис. 31.

Вариант 8

1. $\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. Указание. См. решение примера 1 из варианта 7. **2.** $\log_3 2 - \frac{1}{2\ln 3}$. **3.** $1+\ln 2$. Указание. См. решение примера 3 из варианта 7. **4.** 1. Решение. $\int\limits_1^e \ln x\,dx = e - \int\limits_0^1 e^x\,dx = e - e^x\,\Big|_0^1 = 1$. **5.** $11\frac{1}{4}$. Указание. См. решение примера 5 из варианта 7.

11 класс. Ответы к проверочным работам на повторение

1. Рациональные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. 1) $\left\{\frac{1}{2}; \frac{7}{2}\right\}$; Указание. Числитель и знаменатель каждой дроби разделите на x $(x \neq 0)$. $\frac{4}{4x-8+\frac{7}{x}} + \frac{3}{4x-10+\frac{7}{x}} = 1$; $4x + \frac{7}{x} = t$ и т.д. **2)** -5. **2.** $(3;4)$; $(4;3)$. **3.** $(-1;1) \cup (4;6)$. **4.** $a \in (4;+\infty)$.

Вариант 2

1. 1) $\{0;1\}$; Указание. x^2-x принять за t. **2)** $\varnothing$. **2.** $(2;3)$; $(3;2)$. **3.** $(-3;1)$. **4.** $a \in (-\infty;1{,}5)$.

Вариант 3

1. 1) $\left\{\frac{-11+\sqrt{97}}{6}; \frac{-11-\sqrt{97}}{6}\right\}$; Указание. См. решение примера 1 1) из варианта 2. **2)** $\{-1\}$. **2.** $(4;1)$; $(1;4)$. **3.** $\left(-\frac{9}{2};-2\right) \cup (3;+\infty)$. **4.** $a \in \left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Вариант 4

1. 1) $\{0;-2\}$; Указание. x^2+2x+2 принять за t. **2)** $\varnothing$. **2.** $(1;3)$; $(3;1)$. **3.** $(-\infty;-1) \cup (0;1) \cup (2;+\infty)$. **4.** $k=5$.

2. Иррациональные уравнения и неравенства

Вариант 1

1. **1)** $x=2$; **2)** $x=1$. **2.** **1)** $\left(-\infty;-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cup(1;2)$. **2)** $\{4\}\cup\left(-3;-\frac{1}{5}\right)\cup\left[\frac{5}{3};2\right]$. **3.** $\left(-\frac{19}{7};+\infty\right)$. Решение.
$\sqrt{x^2+7a-6}=x-5\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+7a-6=x^2-10x+25\\ x\geqslant 5\end{cases}$;
$\begin{cases}10x=31-7a\\ x\geqslant 5\end{cases}$; $\begin{cases}x=\frac{31-7a}{10}\\ x\geqslant 5\end{cases}$. Уравнение не будет иметь решения, если $\frac{31-7a}{10}<5$, при $a>-\frac{19}{7}$.

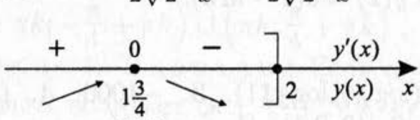
4. $E(y)=[\sqrt{2};2]$. Решение. $D(y)=[1;3]$,
$y'=-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}+\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{3-x}}$; $y'=0$ при $x=2$.

x	1	2	3
y	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{2}$

$\max_{[1;3]}y=2$; $\min_{[1;3]}y=\sqrt{2}$. Отсюда следует, что $E(y)=[\sqrt{2};2]$.

Вариант 2

1. **1)** $x=-2$; **2)** $x=1$. **2.** **1)** $(-\infty;-2)\cup\left[5;\frac{74}{13}\right)$; **2)** $\left[-\frac{1}{2};2\right]$. **3.** $a\in\left[\frac{7}{3};+\infty\right)$. Указание. См. решение примера 3 из варианта 1. **4.** $\frac{4}{9}$. Решение. $D(y)=$ $=(-\infty;2]$, $y'=1-\frac{1}{2\sqrt{2-x}}=\frac{2\sqrt{2-x}-1}{2\sqrt{2-x}}$; $y'=0$ при $x=1\frac{3}{4}$.



Отсюда $\max y=y(1\frac{3}{4})=\frac{9}{4}$.

Вариант 3

1. **1)** $x=2$; **2)** $x=1$. **2.** **1)** $(1;4]$; **2)** $\left[\frac{1}{3};2\right]\cup$ $\cup\{-3\}$. **3.** $a\in\left(-\frac{53}{6};\infty\right)$. Указание. См. решение примера 3 из варианта 1. **4.** $E(y)=[\sqrt{6};2\sqrt{3}]$. Указание. См. решение примера 4 из варианта 1.

Вариант 4

1. **1)** $x=3$; **2)** $x=1$. **2.** **1)** $[0;3]$; **2)** $\left(-5;-\frac{8}{9}\right]$. **3.** $a\in$ $\in\left[\frac{16}{3};+\infty\right)$. Указание. См. решение примера 3 из варианта 1. **4.** $\frac{15}{4}$. Указание. См. решение примера 4 из варианта 2.

3. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Вариант 1

1. -1. **2.** $(0;1)$. **3.** 1. **4.** $(0;1)\cup(\sqrt{3};9)$. **5.** $\left(\frac{2}{3};5\right)$.
6. $\max y=y(3)=24\ln 3$.

Вариант 2

1. 4. **2.** $(\log_6 4;\log_6 20)$. **3.** $-0{,}5$. **4.** $(1;+\infty)$. **5.** $a=$ $=0{,}4$. **6.** $(0;2]$. Решение. $y'=2\log_{\frac{1}{2}} x\cdot\frac{1}{x\cdot\ln\frac{1}{2}}+\frac{2}{x\cdot\ln\frac{1}{2}}=$ $=\frac{2(\log_{\frac{1}{2}} x+1)}{x\cdot\ln\frac{1}{2}}$; $y'<0$. $\frac{2(\log_{\frac{1}{2}}+1)}{x\cdot\ln\frac{1}{2}}<0$. Нужно учитывать, что $x>0$ и $\ln\frac{1}{2}<0$. Тогда $\log_{\frac{1}{2}} x+1>0$ и $0<x<2$.

Вариант 3

1. 3. **2.** $(1;+\infty)$. **3.** 1. **4.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)\cup(1;32)$. **5.** $\left(\frac{3}{2};4\right)$.
6. $\min y=y(2)=6(1-\ln 3)$.

Вариант 4

1. 3. **2.** $(\log_2 6;\log_2 11)$. **3.** -1000. **4.** $(3;4]\cup[6;+\infty)$. **5.** $a=0{,}5$. **6.** $(0;0{,}1]$; $[1;+\infty)$. Указание. См. решение примера 6 из варианта 2.

4. Тригонометрия

Вариант 1

1. -1. **2. 1)** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.
2) $2\operatorname{arctg}\frac{3\pm\sqrt{21}}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **3.** $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** $-1\leqslant a<\frac{1}{2}$. Решение. $\begin{cases}\cos x=a\\ \cos x>3a-1\end{cases}$; $\begin{cases}-1\leqslant a\leqslant 1\\ a>3a-1\end{cases}$. Отсюда $-1\leqslant a<\frac{1}{2}$. **5.** $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{3}$.

Вариант 2

1. $\frac{1}{2}\sin 4\alpha$. **2.1)** $\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **2)** $\frac{\pi k}{10}$, $k\in\mathbb{Z}$.
3. $\left(\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi k\right)\cup\left(-\operatorname{arctg}\sqrt{2}+\pi k;\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** $-1\leqslant a<0$; $0<a\leqslant 1$. **5.** $\pm\frac{\pi}{6}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pm\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}$.

Вариант 3

1. 1. **2.1)** $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **2)** $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **3.** $\left[-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** $\frac{1}{2}<a\leqslant 1$. Указание. См. решение примера 4 из варианта 1. **5.** $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{2\pi k}{3}$.

Вариант 4

1. $-\frac{1}{2}\sin 8\alpha$. **2.1)** $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$. **2)** $\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$. **3.** $\left(-\frac{\pi}{2}+\pi k;-\frac{\pi}{4}+\pi k\right)\cup\left(\pi k;\frac{\pi}{4}+\pi k\right)$, $k\in\mathbb{Z}$. **4.** $-1<a<0$; $0<a<1$. Указание. Если $a=\pm 1$, то $\sin x=0$, чего быть не может. **5.** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\frac{2\pi}{3}$ или $\frac{2\pi k}{3}$.

11 класс. Ответы к контрольным работам

1. Производная и ее геометрический смысл

Вариант 1

1. $60°$. **2.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{5\pi}{12} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **3.** $y = (-4\ln 2) \cdot x$; $y = (4\ln 2) \cdot x - 16\ln 2$. **4.** $(4; \infty)$. **5.** $\left(-\frac{\pi}{8} + \pi k; \frac{5\pi}{8} + \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 2

1. $45°$. **2.** $x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **3.** $y = (2\ln 0{,}2) \cdot x$; $y = (-2\ln 0{,}2) \cdot x - 4\ln 0{,}2$. **4.** $(3; +\infty)$. **5.** $\left(-\frac{5\pi}{12} + \pi k; -\frac{\pi}{12} + \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 3

1. $150°$. **2.** $x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{2\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **3.** $y = (-2\ln 3) \cdot x$; $y = (2\ln 3) \cdot x - 4\ln 3$. **4.** $(0; +\infty)$. **5.** $\left(-\frac{\pi}{12} + \pi k; \frac{7\pi}{12} + \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

Вариант 4

1. $135°$. **2.** $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ и $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$. **3.** $y = (-3\ln \frac{1}{3}) \cdot x$; $y = (3\ln \frac{1}{3}) \cdot x - 9\ln \frac{1}{3}$. **4.** $(-\infty; 2)$. **5.** $\left(\frac{\pi}{3} + \pi k; \frac{2\pi}{3} + \pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Исследование функции с помощью производной

Вариант 1

1. $A\left(-1-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$ $B\left(-1+\frac{1}{\sqrt{3}};-\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ (см. рис. 33).

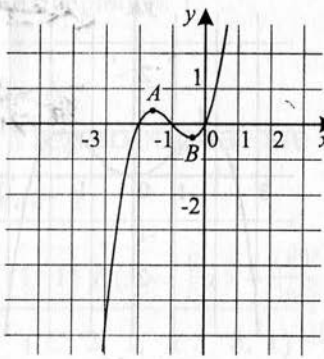


рис. 33

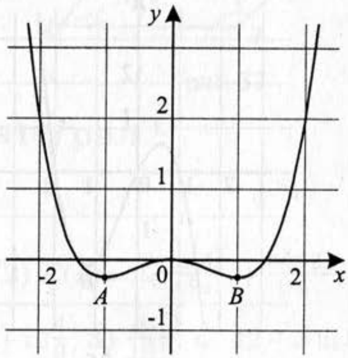
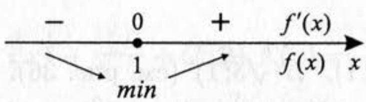


рис. 34

3. $\max_{[0;100]} f(x) = f(100) = 10 - 2\sqrt{10}$, $\min_{[0;100]} f(x) = f(1) = -1$. **4.** $V = 4$. **5.** $(1;-1)$. Решение. $d(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^4 - 4x + 4\frac{1}{4}}$. $f(x) = x^4 - 4x + 4\frac{1}{4}$, $f'(x) = 4x^3 - 4 = 4(x^3 - 1)$. $f'(x) = 0$ при $x = 1$.



Отсюда $x = 1$; $y = -1$.

Вариант 2

1. $A(-1;-\frac{1}{4})$, $B(+1;-\frac{1}{4})$ (см. рис. 34)

3. $\max_{[-5;5]} f(x) = f(-5) = e^{48}$, $\min_{[-5;5]} f(x) = f(2) = \frac{1}{e}$.

4. $P = 6$. **5.** $\left(\sqrt{\frac{5}{2}};-\frac{1}{2}\right)$; $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}};-\frac{1}{2}\right)$. Указание. См. решение задачи 5 из варианта 1.

Вариант 3

1. $A\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{14\sqrt{7}-20}{27}\right)$ $B\left(\frac{1+\sqrt{7}}{3}; -\frac{14\sqrt{7}+20}{27}\right)$ (см. рис. 35).

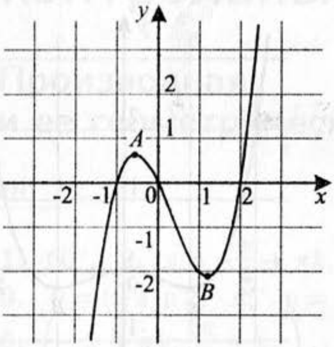


рис. 35

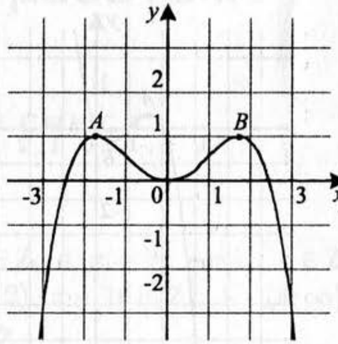


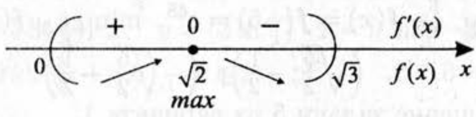
рис. 36

3. $\max_{[0;4]} f(x) = f(4) = 6$, $\min_{[0;4]} f(x) = f\left(\frac{1}{16}\right) = -\frac{1}{8}$.
4. $a=4$ м, $h=2$ м. **5.** $(2;6)$. Указание. См. решение задачи 5 из варианта 1.

Вариант 4

1. $A(-\sqrt{3};1)$, $B(\sqrt{3};1)$ (см. рис. 36).

3. $\max_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = e^{-2}$, $\min_{[-2;2]} f(x) = f(2) = e^{-11}$. **4.** $V = \frac{1}{3}$. Решение. $MB = \sqrt{3-x^2}$; $0 < x < \sqrt{3}$. $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{x^2}{2}\sqrt{3-x^2} = \frac{1}{6}\sqrt{3x^4 - x^6}$ (см. рис. 37). $f(x) = 3x^4 - x^6$; $f'(x) = 12x^3 - 6x^5 = 6x^3(2-x^2)$.



$AB = BC = \sqrt{2}$, $MB = 1$,
$V = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$.

5. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Указание. См. решение задачи 5 из варианта 1.

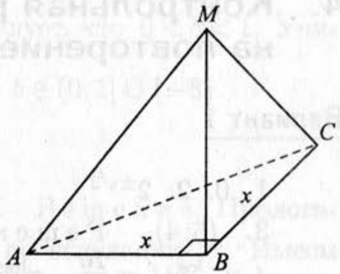


рис. 37

3. Первообразные и интеграл

Вариант 1

1. 1) $F(x) = \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{(\frac{3}{2})^x}{\ln\frac{3}{2}} + C$; **2)** $F(x) = -\frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{4} + C$. **2.** 1; ± 3. **3. 1)** $\frac{16a^3}{3}$; **2)** $12\frac{4}{9}$; **3)** $\frac{3}{16}\pi$. **4.** $12 - 5\ln 5$. **2.** π.

Вариант 2

1. 1) $F(x) = \frac{12}{41}x^{\frac{41}{12}} + C$; **2)** $F(x) = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + C$. **2.** -1; ± 4. **3. 1)** $2x^4 + \frac{2x}{3}$; **2)** $\frac{17}{4}$; **3)** $\frac{2}{3}$. **4.** $S = 3\frac{1}{3}$. **2.** $\frac{\pi}{4}$.

Вариант 3

1. 1) $F(x) = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{(\frac{5}{2})^x}{\ln\frac{5}{2}} + C$; **2)** $F(x) = -\frac{\cos 7x}{14} + \frac{\cos 3x}{6} + C$. **2.** -1; 2; 5. **3. 1)** $2x^4 + \frac{2x}{3}$; **2)** 48,4; **3)** $\frac{3\pi}{8}$. **4.** $1{,}5 - 2\ln 2$. **2.** 2π.

Вариант 4

1. 1) $F(x) = \frac{3}{20}x^{\frac{20}{3}} + C$; **2)** $F(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) + C$. **2.** $F(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + 5\frac{1}{6}$. **3. 1)** $4x^3$; **2)** 3; **3)** $\frac{5\sqrt{2}}{6}$. **4.** $S = \frac{e^2 - 3}{2}$. **2.** $\frac{\pi}{4}$.

4. Контрольная работа № 1 на повторение пройденного материала

Вариант 1

1. 0. **2.** $2^{\pm\sqrt{2}}$.

3. $(5;4)$. Решение. ОДЗ $x>1$; $y>1$. $x^{\log_4 y}+y^{-\log_4 x}=\frac{26}{5}$, $x^{\log_4 y}+\frac{1}{x^{\log_4 y}}=\frac{26}{5}$. Отсюда $x^{\log_4 y}=5$ или $x^{\log_4 y}=\frac{1}{5}$, чего быть не может. Из того, что $x^{\log_4 y}=5$, следует, что $\log_4 y\cdot\log_4 x=\log_4 5$. Тогда $\log_4 y=\frac{\log_4 5}{\log_4 x}=\frac{1}{\log_5 x}$. Подставив это выражение во второе уравнение, получаем $\sqrt{\log_5 x}+\frac{1}{\sqrt{\log_5 x}}=2$, $\sqrt{\log_5 x}=t>0$. $t+\frac{1}{t}=2$, $t^2-2t+1=0$, $t=1$. $\sqrt{\log_5 x}=1$ и $x=5$; $y=4$.

4. $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$; $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3}$, $n\in\mathbb{Z}$.

5. $y=2x-1; y=\frac{2}{5}x+\frac{11}{5}$. **6.** $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{7\pi}{6}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

7. Функция возрастает на промежутке $\left[\frac{1}{6};\frac{3}{2}\right]$ и убывает на промежутках $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right]$, $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right)$. $y_{\max}=y\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\frac{1}{2}+\frac{9}{2}$; $y_{\min}=y\left(\frac{1}{6}\right)=\ln\frac{9}{2}+\frac{1}{18}$. **8.** $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2}$; $\frac{a}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$. **9.** 36. Указание. Необходимо найти площадь равновеликой фигуры, ограниченной линиями $x^2=y+3$ и $y+2x=5$, т.е. $y=x^2-3$ и $y=-2x+5$.

10. $b\in(0;1]\cup\{-8\}$. Решение. $3^x=t>0$; $\frac{t^2}{t^2-3t+2}=b$ $(b\neq 0)$. $(1-b)t^2+3bt-2b=0$. $D=b^2+8b$: $D=0$ при $b=0$ и $b=-8$, но $b\neq 0$. При $b=-8$ уравнение имеет одно положительное решение. При $b=1$; $t=\frac{2}{3}$, т.е. уравнение $3^x=\frac{2}{3}$ имеет одно решение. При $b\neq 1$; $f(t)=t^2+\frac{3b}{1-b}\cdot t-\frac{2b}{1-b}=0$. Уравнение имеет один положительный корень в том случае, если $f(0)<0$ и $D=b^2+8b>0$. $f(0)=-\frac{2b}{1-b}=$

$= \begin{cases} -\frac{2b}{1-b} < 0 \\ b < -8; b > 0 \end{cases}$. Отсюда следует, что $0 < b < 1$. Учитывая все условия, имеем, что $b \in (0;1] \cup \{-8\}$.

Вариант 2

1. $\log_{\frac{7}{3}} 6$. **2.** -10. **3.** $(16;4)$. Решение. Прологарифмируем первое уравнение по основанию x. Имеем $\left(1 - \frac{2}{5}\log_x y\right) \cdot \log_x y = \frac{2}{5}$ и $2\log_x^2 y - 5\log_x y + 2 = 0$ (1). Из второго уравнения имеем $x\left(1 - \frac{3y}{x}\right) = 4$, т.е. $x - 3y = 4$ (2). Уравнения (1) и (2) образуют систему. Дальнейшее решение очевидно. **4.** $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

5. $y = -2x + 3$. Решение. Уравнение касательной в точке x_0 имеет вид $y = -\frac{2}{x_0^3} \cdot x + \frac{3}{x_0^2} \cdot x_0 > 0$; $y(0) = \frac{3}{x_0^2}$; $OA = \frac{3}{x_0^2}$, $OB = \frac{3x_0}{2}$. $S_{AOB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{x_0^2} \cdot \frac{3x_0}{2} = \frac{9}{4x_0}$ (см. рис. 38). По условию $\frac{9}{4x_0} = \frac{9}{4}$. Отсюда $x_0 = 1$. Тогда $y = -2x + 3$.

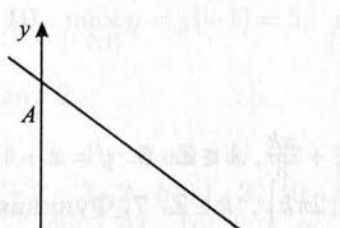


рис. 38

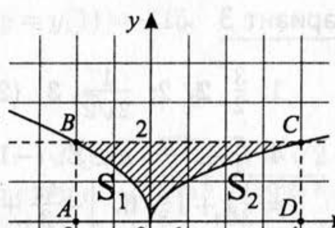


рис. 39

6. $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi k; \frac{5\pi}{3} + 2\pi k\right]$, $k \in \mathbb{Z}$. **7.** Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; -\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right]$. $y_{\max} = y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{\frac{8}{3}}$; $y_{\min} = y\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{1}{4}}$. **8.** $\frac{l}{\sqrt{3}}$.

9. $S=4$. Решение. $S_{\text{фигуры}}=S_{ABCD}-S_1-S_2$ (см. рис. 39). $S_1=\int\limits_{-2}^{0}\sqrt{-2x}\,dx=\frac{8}{3}$; $S_2=\int\limits_{0}^{4}\sqrt{x}\,dx=\frac{16}{3}$. S_1+ $+S_2=8$. $S_{ABCD}=12$. Тогда $S_{\text{фигуры}}=4$.

10. $a\in(-\infty;0)\cup\{4\}$. Решение. $2\lg(x+1)=$ $=\lg ax \Leftrightarrow \begin{cases}(x+1)^2=ax\\ x>-1\\ ax>0\end{cases}$. $f(x)=x^2-(a-2)x+1=0$; $D=(a-2)^2-4$. Если $D=0$, то уравнение имеет одно решение. Тогда $a=4$ и $a=0$, но $a\neq 0$. Если $a=4$, то $x=2$. $D=a^2-4a$. $D>0$ при $a<0$ и $a>4$. При $a>4$ уравнение имеет два решения, что противоречит условию. При $a<0$ $\begin{cases}x>-1\\ x<0\end{cases}$ т.е. $-1<x<0$.

Уравнение будет иметь одно решение, если парабола пересекает промежуток $(-1;0)$ в одной точке. Это возможно, если $f(0)>0$ и $f(-1)<0$. $f(0)=1>0$, $f(-1)=$ $=1+a-2+1<0$. Отсюда $a<0$. Итак, уравнение будет иметь одно решение при $a<0$ и $a=4$.

Вариант 3

1. $\frac{3}{2}$. **2.** 2; $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. **3.** $(2;3)$.

4. $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $n\in\mathbb{Z}$; $(-1)^k\frac{\pi}{30}+\frac{\pi k}{5}$, $k\in\mathbb{Z}$. **5.** $y=x+1$; $y=$ $=\frac{1}{3}x+1\frac{2}{3}$. **6.** $\left[-\frac{4\pi}{3}+2\pi k;2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$. **7.** Функция возрастает на промежутке $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right]$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{1}{6};\frac{4}{3}\right)$. $y_{\max}=y\left(-\frac{1}{6}\right)=\ln\frac{9}{2}-\frac{1}{18}$. **8.** $\frac{P}{4}$; $\frac{P}{4}$. **9.** 36. **10.** $a\in(0;2]\cup\{3\}$.

Вариант 4

1. $-\frac{1}{2}$. **2.** 6. **3.** $(4;16)$. **4.** $(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $\pm\frac{\pi}{3}+$ $+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **5.** $y=3x-2$.

6. $\left[-\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\frac{2\pi}{3}+2\pi k\right]$, $k\in\mathbb{Z}$.

7. Функция возрастает на промежутках $\left(-\infty; -\frac{4}{3}\right]$; $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ и убывает на промежутке $\left[-\frac{4}{3}; -\frac{1}{2}\right]$. $y_{\max} = y\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{3}e^{\frac{5}{3}}$; $y_{\min} = y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2e^{-\frac{5}{4}}$. **8.** $S = \frac{3l^2\sqrt{3}}{16}$, $\alpha = \frac{\pi}{3}$. **9.** 12. **10.** $b \in (0; +\infty) \cup \{-4\}$.

Задачи вариантов 3 и 4 решаются аналогично задачам первых двух вариантов.

5. Контрольная работа № 2 на повторение пройденного материала

Вариант 1

1. 3. **2.** $a+1$. **3.** 2. **4.** $(-5; 1) \cup (2; 3)$. **5.** $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. **6.** 1. Пояснение. $8 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x + 6\left(\frac{3}{2}\right)^x - 27 = 0$. $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t > 0$. $\begin{cases} 8t^2 - 6t - 27 = 0 \\ t > 0 \end{cases}$, откуда $t = \frac{3}{2}$, и $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{3}{2}$, $x = 1$. **7.** 4, $\frac{4}{3}$. **8.** $\left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. **9.** $x = 2$.

10. $\max\limits_{[-2;1]} y = y(-1) = 5$; $\min\limits_{[-2;1]} y = y(1) = -15$.

Вариант 2

1. 3. Решение. $\sqrt{2} + 1 - (1 - \sqrt{2})\sqrt{2} = \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} + 2 = 3$. **2.** $b + 1$. **3.** 10. Решение. $\sqrt{25^{\lg_5 6} + 49^{\lg_7 8}} = \sqrt{36 + 64} = 10$. **4.** $(-2; -1) \cup (3; 4)$. **5.** $\pm\frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$, где $k \in \mathbb{Z}$. **6.** ± 2. Решение. $\left(\sqrt{5 - \sqrt{24}}\right)^x + \frac{1}{\left(\sqrt{5-\sqrt{24}}\right)^x} = 10$. $\left(\sqrt{5 - \sqrt{24}}\right)^x = t > 0$. $t + \frac{1}{t} = 10$. $t^2 - 10t + 1 = 0$. $t = 5 \pm \sqrt{24}$.

а) $\left(\sqrt{5 - \sqrt{24}}\right)^x = 5 - \sqrt{24}$. $x = 2$.

б) $\left(\sqrt{5 - \sqrt{24}}\right)^x = 5 + \sqrt{24} = \frac{1}{5+\sqrt{24}} = \left(5 - \sqrt{24}\right)^{-1}$, отсюда $x = -2$.

7. $-0{,}5$; $-\sqrt{0{,}5}$. Решение. ОДЗ $x<0$. $\log_{0,5}x^2 = 2\log_{0,5}(-x)$. В таком случае уравнение имеет вид $6\log_{0,5}(-x) - 4\log^2_{0,5}(-x) = 2$; $\log_{0,5}(-x) = t$; $2t^2 - 3t + 1 = 0$; $t_1 = 1$; $t_2 = 0{,}5$. Тогда $\log_{0,5}(-x) = 1$, $x = -0{,}5$; $\log_{0,5}(-x) = 0{,}5$; $x = -\sqrt{0{,}5}$.

8. $\left(-4; \frac{5-\sqrt{29}}{2}\right) \cup \left(\frac{5-\sqrt{29}}{2}; 0\right)$.

Пояснение. $\begin{cases} \frac{x+4}{2-x} > 0 \\ x(x-5) > 0 \\ x(x-5) \neq 1 \end{cases}$

9. $y = 16 + x(48\ln 2)$.

10. $\min\limits_{[0;4]} y = -\frac{1}{8}$; $\max\limits_{[0;4]} y = 6$.

Вариант 3

1. -4. **2.** $\frac{2}{27}$. **3.** 5. **4.** $[-8{,}5; -3)$. **5.** $0; \pm\frac{\pi}{3}; \pm 2$. **6.** ± 2. **7.** $-4; -2\sqrt{2}$. **8.** $(-4; -2-\sqrt{3}) \cup (-2-\sqrt{3}; -2+\sqrt{3}) \cup (-2+\sqrt{3}; 0)$. **9.** $-0{,}5$. **10.** $\min\limits_{[0;9]} y = -3$; $\max\limits_{[0;9]} y = 1$.

Вариант 4

1. 8. **2.** 0,8. **3.** 1. Решение.
$\lg_{\frac{1}{2}} \lg_3 \operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \log_{\frac{1}{2}} \lg_3 \sqrt{3} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} = 1$.

4. $(1; 6)$. **5.** $-1; 7; \frac{\pi k}{2}$, где $k \in \{0; 1; 2; 3\}$. **6.** при $a \in (-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$ $\varnothing$; при $a \in (-4; 2)$ $x = 3 + \lg_3 \frac{a+4}{2-a}$.

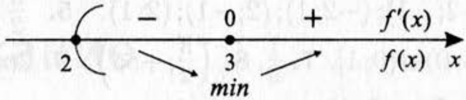
7. $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$. Пояснение. $\frac{1}{\lg_2 x} \cdot \frac{1}{\lg_2 2x} = \frac{1}{\lg_2 4x}$; $\frac{1}{\lg_2 x} \cdot \frac{1}{1+\lg_2 x} = \frac{1}{\lg_2 x + 2}$, отсюда находим $\lg_2 x$.

8. 6. Решение. $\begin{cases} x > 0 \\ -1 \leqslant x - 3 \leqslant 1 \\ x \neq 3 \end{cases}$ $\begin{cases} x > 0 \\ 2 \leqslant x \leqslant 4 \\ x \neq 3 \end{cases}$.

Отсюда целые решения $x = 2$, $x = 4$, их сумма равна 6.

9. $x = 0$.

10. $\min f(x) = f(3) = 3$. Решение. ОДЗ $x > 2$; $f'(x) = 1 - \frac{1}{x-2} = \frac{x-3}{x-2}$.



Отсюда следует, что $\min\limits_{(2;+\infty)} = f(3) = 3$.

6. Контрольные тесты

Вариант 1

1. a^{-1}. **2.** $a > b$. **3.** $\pm 2\arccos\frac{1-\sqrt{7}}{2} + 4\pi k,\ \ k \in \mathbb{Z}$. **4.** $[-1; 2]$. **5.** $x = 4;\ x = \frac{1}{8}$. **6.** $\frac{1}{\sqrt{5}}$. **7.** $a \in [1; +\infty)$. **8.** $y_{\max} = y(-2) = \frac{10}{3}$, $y_{\min} = y(1) = -\frac{7}{6}$. **9.** $\max\limits_{[-3;0]} f = 8\frac{1}{3}$, $\min\limits_{[-3;0]} f = \frac{3}{2}$. **10.** 0. **11.** $x = 2$. **12.** $(-\infty; 2] \cup [4; +\infty)$. **13.** $(4; 4)$. **14.** -1. **15.** $(1; +\infty)$. **16.** $a \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right] \cup \cup (5; +\infty)$. **17.** -2. **18.** $-\sqrt{61} \leqslant a \leqslant \sqrt{61}$. **19.** $\{0; -1\}$. **20.** $\frac{128}{7}$.

Вариант 2

1. $-\sqrt{a}$. **2.** -1. **3.** $(-1)^{k+1} 2\arcsin(\sqrt{2} - 1) + 2\pi k,\ \ k \in \in \mathbb{Z}$. **4.** $(-\infty; -2) \cup (\sqrt{3}; 2) \cup (2; +\infty)$.

5. $x = 9$. **6.** $\frac{4}{3}$. **7.** $b \in [1; +\infty)$.

8. $y_{\max} = y(2) = 3\frac{2}{3}$, $y_{\min} = y(3) = 3\frac{1}{2}$.

9. $\max\limits_{[2;4]} f = 2\frac{1}{3}$, $\min\limits_{[2;4]} f = 1$. **10.** 0. **11.** $x = 5$. **12.** $[-4; 3]$. **13.** $(9; 4)$. **14.** 10. **15.** $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. **16.** $a \in \left(\frac{2}{3}; 5\right)$. **17.** 3. **18.** $-\sqrt{58} \leqslant a \leqslant \sqrt{58}$. **19.** $\{0; \sin 1\}$. **20.** $\frac{6561}{26}$.

Вариант 3

1. ± 20. **2.** $x_1 = -1;\ x_2 = 2$. **3.** $x = -3$. **4.** $(-2;-1); (-2;1); (2;-1); (2;1)$. **5.** $\frac{5}{2}$. **6.** $[5;+\infty)\cup\cup(-\infty;0)\cup(0;1]$. **7.** $\frac{1}{9}$. **8.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. **9.** $2m+n$. **10.** $x=9$. **11.** $\left[-\frac{5\pi}{3};\frac{\pi}{3}\right]$. **12.** $\sin 3 < \sin\frac{\pi}{5} < \sin 1$. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$. **14.** $x = \pi - 2 + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z};\ x = 2\pi n + 2,\ n\in\mathbb{Z}$. **15.** $x_0 = 3$. **16.** $\left[1;\frac{5}{3}\right]$. **17.** $-\frac{\pi}{6}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **18.** $\frac{(2x+1)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$. **19.** $S=1$. **20.** 2π.

Вариант 4

1. 20%. **2.** $x=-1$. **3.** $x=4$. **4.** $(1;-2); (2;-1)$. **5.** $\frac{1}{4}$. **6.** $[-5;0)\cup(0;1]$. **7.** $\frac{1}{8}$. **8.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$. **9.** $b+2a$. **10.** $x = 8$. **11.** $[0;2\pi]$. **12.** $\cos 5 < \cos 1 < \cos\frac{\pi}{5}$. **13.** $\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$. **14.** $\pm 3 + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **15.** $x_0=-2$. **16.** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right];\ [1;+\infty)$. **17.** $\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$. **18.** $\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$. **19.** $S=1$. **20.** $\frac{\pi}{4}$.

Содержание

10-й кл. Контрольные работы ... 63

11-й кл. Самостоятельные работы ... 80

11-й кл. Проверочные работы на повторение ... 103

11-й кл. Контрольные работы ... 110

Учебное издание

Зив Борис Германович
Гольдич Владимир Анатольевич

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО АЛГЕБРЕ И НАЧАЛАМ АНАЛИЗА ДЛЯ 10-11 КЛАССОВ

Редактор *А.С. Пивоварова*
Компьютерная верстка *В.Р. Мешков*
Художник *Е.Т. Киселев*
Корректор *Н.В. Евстигнеева*

Подписано к печати 03.10.2012г. Формат 60×90/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Объем 13,5 печ. л. Тираж 3 000 экз. Заказ № 828.

По вопросам приобретения просьба обращаться:

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВИКТОРИЯ ПЛЮС»
В Санкт-Петербурге: (812) 292-3660, (812) 292-3661.
В Москве (филиал): (499) 488-3005.
E-mail: victory@mailbox.alkor.ru; www.victory.sp.ru.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ПЕТРОГЛИФ»
С.-Петербург, пр. Обуховской обороны,
д.86, лит. «А», пом. № 204.
Тел.: (812) 943-8076.
E-mail: spb@petroglyph.ru; www.petroglyph.ru.

КНИГОТОРГОВАЯ ФИРМА «АБРИС Д»
(495) 615-29-01, 616-23-62, тел./факс: (495) 616-26-75
E-mail: abrisd@textbook.ru

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР НЕПРЕРЫВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБРАЗОВАНИЯ
119002, Москва, Б. Власьевский пер., 11.
Тел.: (495) 241-7285; факс: (499) 795-1015.
E-mail: biblio@mccme.ru; www.mccme.ru.

Налоговая льгота — ОКП 005-93-95-3005

Отпечатано с диапозитивов в ГППО «Псковская областная типография». 180004, г. Псков, ул. Ротная, 34

Вы держите в руках единственное в своем роде пособие по алгебре и началам анализа, задачи в котором строго разделены на четыре уровня сложности.

I уровень – это минимум того, что должен знать ученик, – база.

II уровень – "твердая четверка".

III уровень – "на пятерку".

IV уровень – для тех, кто всерьез увлечен математикой.

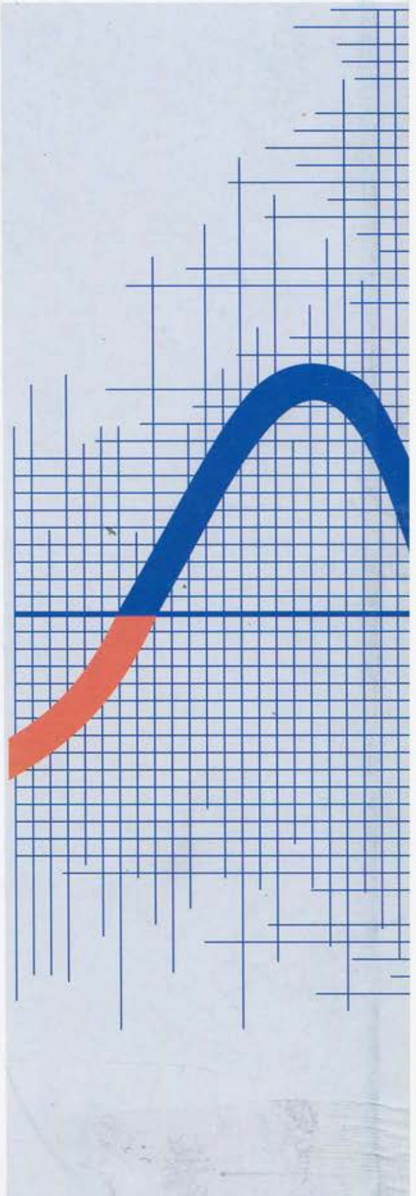
В серии "Дидактические материалы" мы предлагаем Вашему вниманию классические многоуровневые пособия по математике:

Б. Г. Зив, В. А. Гольдич.

- *Алгебра 7 класс*
- *Алгебра 8 класс*
- *Алгебра 9 класс*
- *Алгебра и начала анализа 10-11 класс*

Б. Г. Зив.

- *Задачи к урокам геометрии для 7-11 классов.*



ISBN 978-59871-2-029-3