Е. В. Галкин

НЕстандартные задачи по математике

АЛГЕБРА

Учебное пособие для учащихся 7-11 классов

- Подготовка к ЕГЭ (ЧАСТЬ С)
- Подготовка к олимпиадам

Е. В. Галкин

НЕстандартные задачи по математике

Учебное пособие
для учащихся
7-11
классов

АЛГЕБРА

Челябинск
«Взгляд»
2004

УДК 512(079.1)
ББК 22.14я721.6
Г16

Рецензент А. К. Дьячков,
заведующий лабораторией методики преподавания предметов
образовательной области «Математика» ИДПОПР, заслуженный учитель РФ

Галкин Е. В.

Г16 Нестандартные задачи по математике. Алгебра: Учеб. пособие для учащихся 7–11 кл. Челябинск: «Взгляд», 2004. — 448 с.
ISBN 5–93946–049–6

Учебное пособие предназначено для подготовки учащихся к олимпиадам по математике и к единому государственному экзамену по математике (часть С).

Значительная часть книги может быть использована в профильных классах и классах с углубленным изучением математики.

Система расположения материала, наличие теоретических сведений и опорных задач дают возможность самостоятельно обучаться решению задач повышенной трудности по математике.

УДК 512(079.1)
ББК 22.14я721.6

ИД № 01459 от 05.04.2000 г. Подписано в печать 27.01.04 г. Формат 70x90 1/16. Бумага Гознак для ВХИ. Гарнитура «NewtonC». Печать офсетная. Усл-печ. л. 32,76. Тираж 5000 экз. Заказ № 82. ООО «Издательский центр «Взгляд» 454048, Челябинск, ул. Худякова, 10, тел. (3512) 60-71-55. Отпечатано с готового оригинал-макета в ГУП ЧПО «Книга». 454000, Челябинск, ул. Постышева, 2.

ISBN 5–93946–049–6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Для жизни в современном обществе важным является формирование математического стиля мышления, проявляющегося в определенных умственных навыках: обобщении, конкретизации, анализе, синтезе и др. Книга, которую вы держите в руках, создана для реализации именно этих задач математического образования.

Она предназначена для учителей и учащихся 7–11 классов и содержит задачи по математике, которые можно использовать при подготовке к олимпиадам различного уровня.

Кроме того, особую важность книга имеет в связи с проведением эксперимента по внедрению процедуры итоговой аттестации выпускников и вступительных экзаменов в формате ЕГЭ. В части С этого экзамена предлагаются именно нестандартные задачи, содержащие несколько этапов и ключевых моментов, аналогичных тем, которые возникают в период решения олимпиадных заданий.

Подбор, систематизация и описание методов решения задач в пособии делают его полезным для профильных классов и классов с углубленным изучением математики.

При решении данных задач развивается творческое и логическое мышление, формируются способности нестандартно мыслить, проявляется самостоятельность, умение применять способы решения задач в практической деятельности, использовать полученные знания и умения в решении прикладных и практических задач.

Отмечу некоторые особенности книги.

Задачи сборника предназначены главным образом для самостоятельного решения их школьниками и учителями. Сказанное не исключает того, что учитель будет широко использовать эти задачи для занятий с учащимися на уроках, в кружках или на факультативах.

Задачи изложены в системе: близкие по характеру расположены рядом и, в общем, задачи следуют в порядке возрастания трудности.

Для книги характерна система опорных задач. Утверждения этих задач, а также формулировки некоторых теорем, приводящихся в книге, читателю полезно выписать в отдельную тетрадь, с тем, чтобы облегчить себе их использование. Если решение задач проходит на уроках, занятиях кружка или факультатива, имеет смысл такие утверждения написать на плакатах и повесить их на стенах класса.

В каждом параграфе указываются классы, для которых он предназначен. При этом, если параграф написан, например, для 9–11 классов, то в полной мере это относится лишь к начальным задачам параграфа; начиная с некоторого места, задачи лучше решать в 10–11, а последние – только в 11 классе.

Не нужно стремиться решить все задачи, помещенные в книге, да это и вряд ли возможно. Для основательной ее проработки достаточно решить примерно третью часть имеющихся в ней задач (выбирая наиболее характерные и важные). Остальную часть пособия учителя и методисты могут использовать для составления задач школьных и районных олимпиад.

В заключение назову наиболее важные на сегодняшний день параграфы с точки зрения подготовки к ЕГЭ (раздел С): глава I, §§ 1, 3, 4; глава II, §§ 7–11; глава III, §§ 17, 18, 21; глава IV, §§ 23–26. Впрочем, со временем характер задач, предлагаемых на ЕГЭ, может измениться, а тогда должен измениться и список соответствующих параграфов.

Желаю удачи!

Е. В. Галкин

УСЛОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

9—11 — в заголовке параграфа: он предназначен для учащихся 9—11 классов;

в — в номере источника из списка литературы к параграфу: важный источник, который нужно использовать в параграфе в первую очередь;

о — в номере задачи: опорная задача, утверждение которой следует использовать при решении нескольких последующих задач;

* — в номере задачи (или параграфа): задача (или задачи) повышенной трудности;

△ — начало решения задачи;

▲ — окончание решения задачи.

ГЛАВА I. ТОЖДЕСТВА

§ 1. Делимость многочленов 9—11

Литература: [14], [15], [24^{e}], [32], [37^{e}], [38].

1.1. 9—11

Сначала познакомимся с теоретическими сведениями, относящимися к делимости многочленов.

Каноническим видом многочлена с переменной x называется представление его в виде суммы одночленов по убывающей (или возрастающей) степени x.

Общий вид многочлена $P(x)$, расположенного по убывающей степени x, —

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 \neq 0).$$

Наибольшая из степеней одночленов, составляющих многочлен, называется **степенью многочлена.** В данном случае она равна n. (При этом предполагается, что n — натуральное число или нуль.)

Теорема 1. Два многочлена с одной и той же переменной, представленные в каноническом виде, тождественны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых членов.

Доказательство теоремы непросто. Его можно найти, например, в учебнике [15] (или в книге [38]).

Говорят, что многочлен $f(x)$ **делится** на многочлен $\varphi(x)$, если существует такой многочлен $q(x)$, что

$$f(x)=\varphi(x) \cdot q(x). \tag{1}$$

При этом многочлен $f(x)$ называется **делимым,** многочлен $\varphi(x)$ — **делителем,** $q(x)$ — **частным.**

Делимость многочленов обладает свойствами, похожими на свойства делимости целых чисел. Например, если многочлены $f_1(x)$ и $f_2(x)$ делятся на многочлен $\varphi(x)$, то на $\varphi(x)$ делятся и многочлены

$$f_1(x) \pm f_2(x), \quad f_1(x) \cdot f(x), \quad Cf_1(x),$$

где $f(x)$ — любой многочлен, C — любая постоянная. Докажите самостоятельно это утверждение, скажем, для случая суммы.

Справедлива следующая теорема о делении многочленов с остатком.

Т е о р е м а 2. Для любых двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(x)$ существует и притом единственная пара многочленов $q(x)$ и $r(x)$, где степень $r(x)$ меньше степени $\varphi(x)$ или $r(x)$ тождественно равен нулю, такая, что выполняется тождество

$$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x). \qquad (2)$$

Многочлен $f(x)$ называется **делимым,** многочлен $\varphi(x)$ — **делителем,** $q(x)$ — **частным (неполным частным,** если многочлен $r(x)$ не равен тождественно нулю), $r(x)$ — **остатком.**

Доказательство теоремы можно найти в книгах [15], [24] или [38].

Равенство (1) можно рассматривать как частный случай равенства (2), когда остаток $r(x)$ тождественно равен нулю.

На практике деление многочлена на многочлен с остатком выполняется «углом» — по правилу, весьма похожему на правило деления натуральных чисел с остатком.

П р и м е р. Найдите частное и остаток от деления многочлена $f(x) = 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1$ на многочлен $\varphi(x) = x^2 + x + 2$.

△ Рассмотрим следующую схему деления:

$$\begin{array}{rl|l}
 & 2x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 1 & x^2 + x + 2 \\ \cline{3-3}
- & 2x^4 + 2x^3 + 4x^2 & 2x^2 - 3x - 4 \\ \cline{2-2}
 & -3x^3 - 7x^2 + x + 1 & \\
- & -3x^3 - 3x^2 - 6x & \\ \cline{2-2}
 & -4x^2 + 7x + 1 & \\
- & -4x^2 - 4x - 8 & \\ \cline{2-2}
 & 11x + 9 &
\end{array}$$

Понимать ее нужно таким образом. Делим старший член $2x^4$ делимого на старший член x^2 делителя. Полученное частное $2x^2$ подписываем под делителем, умножаем его на делитель и пишем произведение под делимым. Находим разность делимого и этого произведения и старший член — $3x^3$ разности делим на старший член x^2 делителя. И т. д. Последняя разность $11x + 9$ имеет степень, меньшую степени делителя, поэтому деление окончено.

О т в е т: частное равно $2x^2 - 3x - 4$, остаток — $11x + 9$. ▲

Интересен случай, когда в равенстве (2) делитель $\varphi(x)$ равен линейному двучлену $x - a$. Справедлива следующая т е о р е м а Б е з у, названная по имени французского математика Этьена Безу (1730—1783).

Т е о р е м а 3. Остаток от деления многочлена $f(x)$ на разность $x - a$ равен значению делимого при $x = a$.

Для доказательства теоремы положим в тождестве (2) $x = a$. При этом остаток $r(x)$ или тождественно равен нулю, или его степень меньше степе-

ни делителя $x - a$. В обоих случаях он постоянен: $r(x) \equiv r$, где r — число. Получаем:

$$f(a) = (a - a)\varphi(a) + r, \quad r = f(a).$$

Число a называется **корнем многочлена** $f(x)$, если значение $f(x)$ в точке $x = a$ равно нулю.

Другими словами, корень многочлена $f(x)$ — это корень уравнения $f(x) = 0$.

Из теоремы Безу вытекает такая теорема.

Т е о р е м а 4. Число a является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x)$ делится на $x - a$.

Действительно, из тождества

$$f(x) = (x - a)\varphi(x) + f(a)$$

видно, что равенство $f(a) = 0$ равносильно делимости $f(x)$ на $x - a$.

Например, число 2 является корнем многочлена $f(x) = x^3 - 3x - 2$, так как $f(2) = 0$.

Отсюда, в частности, получаем такие делимости:

1) $x^n - a^n$ делится на $x - a$ ($n \in N$, $x \neq a$);

2) $x^n + a^n$ делится на $x + a$ ($n \in N$, n нечетно, $x \neq -a$);

3) $x^n - a^n$ делится на $x + a$ ($n \in N$, n четно, $x \neq -a$).

Как найти частное от такого деления? Можно, например, разделить $x^n - a^n$ на $x - a$ «углом».

Справедливы следующие тождества:

1) $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-1})$
($n \in N$) (3),

2) $x^n + a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots + a^{n-1})$
($n \in N$, n нечетно) (4),

3) $x^n - a^n = (x + a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \cdots - a^{n-1})$
($n \in N$, n четно) (5).

Эти тождества уже встречались в книге [20] (§ 7).

Попробуйте доказать их самостоятельно.

Корень $x = a$ многочлена $f(x)$ называется **корнем кратности** k ($k \in N$), если многочлен $f(x)$ делится на $(x - a)^k$, но не делится на $(x - a)^{k+1}$.

Т е о р е м а 5. Если многочлен $f(x)$ имеет корни $x = a_1$ и $x = a_2$ то он делится на произведение $(x - a_1)(x - a_2)$.

В самом деле, если $a_1 = a_2$, то утверждение теоремы следует из определения кратного корня для случая $k = 2$.

Пусть теперь a_1 и a_2 — разные числа. Так как $x = a_1$ — корень многочлена $f(x)$, то по теореме 4

$$f(x) = (x - a_1)\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — многочлен. Положим в этом тождестве $x = a_2$:

$$f(a_2) = (a_2 - a_1)\varphi(a_2), \quad (a_2 - a_1)\varphi(a_2) = 0.$$

Поскольку $a_2 - a_1 \neq 0$, то $\varphi(a_2) = 0$. Тогда многочлен $\varphi(x)$ делится на $x - a_2$: $\varphi(x) = (x - a_2)q(x)$, где $q(x)$ — многочлен. Получаем:

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)q(x),$$

а это значит, что многочлен $f(x)$ делится на произведение $(x - a_1)(x - a_2)$.

Теорему 5, очевидно, можно обобщить на случай, когда многочлен имеет несколько корней.

1.2. 9—11

Займемся нахождением целых и рациональных корней многочленов с целыми коэффициентами. Для этой цели рассмотрим еще две теоремы.

Теорема 6. Целый корень $x = a$, отличный от нуля, многочлена с целыми коэффициентами

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \ (a_0 \neq 0)$$

находится среди делителей его свободного члена a_n.

Действительно, так как $x = a$ есть корень многочлена $f(x)$, то

$$a_0a^n + a_1a^{n-1} + \cdots + a_{n-1}a + a_n = 0.$$

Все слагаемые суммы слева, кроме последнего, делятся на a; сама сумма, равная 0, также делится на a. Следовательно, и свободный член a_n делится на a.

Отметим, что многочлен с целыми коэффициентами может вообще не иметь целых корней. Это произойдет тогда, когда ни один из делителей свободного члена не является корнем многочлена.

Многочлен $f(x)$ называется **приведенным,** если коэффициент a_0 его старшего члена равен 1.

Теорема 7. Все рациональные корни приведенного многочлена

$$f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

с целыми коэффициентами являются целыми числами.

В самом деле, пусть несократимая дробь $\frac{k}{l}$ ($k \in Z$, $l \in N$) есть корень многочлена $f(x)$. Получаем:

$$\left(\frac{k}{l}\right)^n + a_1\left(\frac{k}{l}\right)^{n-1} + a_2\left(\frac{k}{l}\right)^{n-2} + \dots + a_{n-1}\frac{k}{l} + a_n = 0,$$

$$k^n + a_1k^{n-1}l + a_2k^{n-2}l^2 + \dots + a_{n-1}kl^{n-1} + a_nl^n = 0.$$

Все слагаемые последней суммы слева, начиная со второго, делятся на l; сама сумма, равная нулю, также делится на l. Значит, и первое слагаемое k^n суммы делится на l. Но дробь $\frac{k}{l}$ несократима, поэтому делимость k^n на l возможна только при $l = 1$, т. е. когда дробь $\frac{k}{l}$ равна целому числу k.

Перейдем к задачам.

1. Найдите все целые корни многочлена:

$$f(x) = 4x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 4x - 3.$$

△ По теореме 6 все целые корни данного многочлена находятся среди делителей свободного члена, т. е. среди чисел ± 1, ± 3.

Проверим, является ли $x = 1$ корнем многочлена. Будем иметь:

$$f(1) = 4 - 16 + 11 + 4 - 3 = 0.$$

Следовательно, $x = 1$ есть корень многочлена.

При $x = -1$, $x = 3$ и $x = -3$ получаем:

$f(-1) = 4 + 16 + 11 - 4 - 3 > 0,$

$f(3) = 324 - 432 + 99 + 12 - 3 = 0,$

$f(-3) = 324 + 432 + 99 - 12 - 3 > 0.$

Из этих трех значений x только $x = 3$ оказалось корнем многочлена.

Ответ: 1, 3. ▲

2. Найдите все целые корни многочленов:

а) $x^3 - 2x - 1$;
б) $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$;
в) $x^3 + 8x^2 + 10x - 4$;
г) $x^4 - 4x + 3$;
д) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 12x - 8$;
е) $2x^4 - 5x^3 - 16x^2 + 45x - 18$;
ж) $x^5 + x - 2$;
з) $x^5 - 5x^2 + 16x - 12$;
и) $x^5 - 2x^4 - 12x^3 + 11x^2 + 14x + 24$.

3. Найдите все рациональные корни многочленов:

а) $x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 12x + 16$;
б) $8x^3 - 20x^2 - 2x + 5$;
в) $4x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 4x - 3$.

△ а) Многочлен является приведенным, поэтому по теореме 7 все его рациональные корни — целые числа. Находим их уже знакомым способом; получаем корни -1, 2, -2, 4.

б) Рассмотрим уравнение

$$8x^3 - 20x^2 - 2x + 5 = 0.$$

Сделаем многочлен в его левой части приведенным. Для этого положим $2x = y$. Будем иметь:

$$y^3 - 5y^2 - y + 5 = 0.$$

Находим целые корни последнего уравнения: $y_{1,2} = \pm 1$, $y_3 = 5$. Отсюда корни исходного многочлена $x_{1,2} = \pm 1/2$, $x_3 = 5/2$.

в) Рассмотрим уравнение

$$4x^4 - 16x^3 + 11x^2 + 4x - 3 = 0.$$

Сначала умножим его на 4, а затем введем подстановку $2x = y$:

$$y^4 - 8y^3 + 11y^2 + 8y - 12 = 0.$$

Корни последнего уравнения — $y_{1,2} = \pm 1$, $y_3 = 2$, $y_4 = 6$. Тогда корни исходного многочлена — $x_{1,2} = \pm 1/2$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

Ответ: а) -1, ± 2, 4; б) $\pm 1/2$, $5/2$; в) $\pm 1/2$, 1, 3. ▲

4. Найдите все рациональные корни многочленов:

а) $x^3 - 3x + 2$;

б) $2x^3 - 3x^2 - 2x + 3$;

в) $3x^3 - x^2 - 12x + 4$;

г) $27x^4 - 108x^3 - 126x^2 - 44x - 5$;

д) $8x^4 - 20x^3 - 10x^2 + 45x - 18$.

5. Решите уравнения:

а) $2x^3 + 7x^2 + 7x + 2 = 0$;

б) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$;

в) $2x^4 - 3x^3 - 6x^2 + 4x + 3 = 0$;

г) $12x^5 - 68x^4 + 57x^3 + 45x^2 - 15x - 7 = 0$.

6. Корнем какой кратности для многочлена

$$f(x) = x^5 - x^4 - 6x^3 + 14x^2 - 11x + 3$$

является число 1?

7. Докажите, что многочлен $f(x) = x^n + 3x - 4$ при любом натуральном n делится на $x - 1$.

8. Найдите остатки от деления многочлена

$$f(x) = x^{243} + x^{81} + x^{27} + x^9 + x^3 + 1$$

на а) $x - 1$; б) $x^2 - 1$.

△ а) По теореме Безу остаток от деления данного многочлена на $x - 1$ равен $f(1) = 6$.

б) Возможно разделить данный многочлен на $x^2 - 1$ «углом», но это слишком длинный путь. Проще выделить из суммы слагаемые, делящиеся на $x^2 - 1$:

$$f(x) = (x^{243}-x) + (x^{81}-x) + (x^{27}-x) + (x^9-x) + (x^3-x) + (5x+1).$$

Каждое из первых пяти слагаемых последней суммы делится на $x^2 - 1$ (подумайте, почему); следовательно, остаток от деления $f(x)$ на $x^2 - 1$ равен шестому слагаемому $5x + 1$.

Ответ: а) 6; б) $5x + 1$. ▲

9. Найдите остатки от деления многочлена

$$f(x) = x^{60} - x^{40} - x^{20} - x^{10} + 2x^2 + x + 3$$

на а) $x + 1$; б) $x - 1$; в) $x^2 + 1$.

10. Найдите все значения параметров a и b, при которых многочлен

$$f(x) = x^5 - 3x^4 + ax^3 + bx^2 - 5x - 5$$

делится на $x^2 - 1$ без остатка.

△ Многочлен $f(x)$ по условию делится на $x + 1$ и $x - 1$. Тогда на основании теоремы 4 значения $x = -1$ и $x = 1$ являются его корнями. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} -1-3-a+b+5-5=0, \\ 1-3+a+b-5-5=0. \end{cases}$$

Решая ее, находим a и b.

Ответ: $a = 4$, $b = 8$. ▲

11. Найдите все значения коэффициентов p и q квадратного трехчлена $y = x^2 + px + q$, если его остатки при делении на $x - p$ и $x - q$ равны соответственно p и q.

12. Найдите все значения коэффициентов a, b и c многочлена

$$f(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c,$$

если известно, что он делится на многочлен $\varphi(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ без остатка.

△ Разделим первый многочлен на второй с остатком:

$$x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c = (x^3 - 2x^2 - 5x + 6)(x + 1) + \\ + (a + 7)x^2 + (b - 1)x + (c - 6).$$

Остаток должен быть тождественно равным нулю:

$$(a + 7)x^2 + (b - 1)x + (c - 6) \equiv 0.$$

Так как два многочлена тождественны тогда и только тогда, когда они состоят из одинаковых членов (теорема 1), то

$$a + 7 = 0, \quad b - 1 = 0, \quad c - 6 = 0.$$

Отсюда находим a, b и c.
Ответ: $a = -7$, $b = 1$, $c = 6$. ▲

13. Найдите все значения коэффициентов a и b, при которых многочлен $y = ax^4 + bx^3 + 1$ делится без остатка на $(x - 1)^2$.

14. Найдите все значения коэффициентов a и b, при которых многочлен

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + ax + b$$

делится на трехчлен $x^2 - 2x + 2$:
а) без остатка; б) с остатком, равным 3; в) с остатком, равным $x + 1$.

15. Найдите все значения коэффициентов a, b и c многочлена

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

если он делится на $x^2 - 3x + 2$, а при делении на двучлен $x - 4$ дает в остатке 6.

16. Число $x = -3$ является двукратным корнем многочлена

$$f(x) = x^3 + x^2 + ax + b.$$

Найдите коэффициенты a и b, а также третий корень многочлена.

17. Один из корней многочлена

$$y = x^3 - (a^2 - a + 7)x - (3a^2 - 3a - 6)$$

равен -1. Найдите все значения параметра a и два других корня многочлена.

18. Многочлен

$$f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 12$$

имеет корни $x_1 = 1$, $x_2 = -2$. Найдите третий его корень.

19. Многочлен при делении на $x - 1$ и $x - 2$ дает в остатке соответственно 2 и 1. Найдите остаток при делении этого многочлена на трехчлен $x^2 - 3x + 2$.

20. Остаток от деления многочлена на трехчлен $x^2 + 4x + 3$ равен $2x + 1$. Найдите остатки от деления этого многочлена на $x + 1$ и $x + 3$.

21. Докажите, что среди корней многочлена

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

имеются два противоположных числа тогда и только тогда, когда $ab = c$, где $b \le 0$.

△ При доказательстве рассмотрим два случая.

1) Пусть выполняется равенство $ab = c$, где $b \le 0$. Тогда равенство $f(x) = 0$ принимает такой вид:

$$x^3 + ax^2 + bx + ab = 0, \quad (x + a)(x^2 + b) = 0.$$

Корни последнего уравнения — $x_1 = -a$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{-b}$.

Получилось, что среди корней многочлена $f(x)$ имеются два противоположных числа $x_2 = \sqrt{-b}$ и $x_3 = -\sqrt{-b}$. (Вы видите, что условие $b \le 0$ здесь существенно).

2) Обратно, пусть многочлен $f(x)$ имеет корни x_1, x_2 и $x_3 = -x_2$.

Отсюда

$$f(x) = (x - x_1)(x^2 - x_2{}^2),$$

$$x^3 + ax^2 + bx + c = x^3 - x_1x^2 - x_2^2x + x_1x_2^2.$$

Тогда

$$a = -x_1, \quad b = -x_2^2 \le 0, \quad c = x_1x_2^2.$$

Следовательно, $ab = c$. ▲

22. Три корня многочлена

$$y = x^4 + x^3 - 18x^2 + ax + b$$

равны. Найдите все значения коэффициентов a и b.

23. Среди корней многочлена

$$y = x^4 - 10x^3 + 37x^2 + ax + b$$

имеются две пары равных между собой чисел. Найдите все значения коэффициентов a и b.

24. Докажите, что многочлен $f(x) = x^{72} + 1$ делится на многочлен $x^{16} - x^8 + 1$.

25. Даны многочлены:

$$f(x) = 8x^4 - 28x^3 + 18x^2 + 27x - 27,$$

$$\varphi(x) = 2x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x.$$

Найдите все многочлены наименьшей степени, которые делятся на $f(x)$ и на $\varphi(x)$.

26*. Существует ли целое число a, при котором многочлен $f(x) = x^{13} + x + 90$ делится на трехчлен $x^2 - x + a$?

△ Так как многочлен $f(x)$ делится на $x^2 - x + a$, то при любом целом x число $f(x)$ делится на число $x^2 - x + a$ (в смысле делимости целых чисел):

$$(x^{13} + x + 90) \vdots (x^2 - x + a).$$

Положим здесь $x = 1$, а затем $x = 0$:

$$92 \vdots a, \quad 90 \vdots a.$$

Из делимостей чисел 92 и 90 на a следует, что $2 \vdots a$. Отсюда $a = \pm 1, \pm 2$.

Дальше нужно перебрать четыре случая, в зависимости от a. Доведите решение до конца самостоятельно.

Ответ: существует и единственно — $a = 2$. ▲

27*. Существует ли такое целое a, при котором многочлен $f(x) = x^{10} + x^5 + 7$ делится на трехчлен $x^2 + x + a$?

28*. Докажите, что если многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами при трех различных целых значениях аргумента принимает одно и то же значение, равное 1, то он не имеет целых корней.

△ Многочлен $p(x) - 1$ по условию имеет три различных корня. Обозначим их через a, b и c. Тогда

$$p(x) - 1 = (x - a)(x - b)(x - c)\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами.

Допустим, что многочлен $p(x)$ имеет целый корень m. Положим $x = m$ в записанном выше тождестве:

$$-1 = (m - a)(m - b)(m - c)\varphi(x).$$

Если -1 равна произведению четырех целых чисел, то это могут быть только числа 1, 1, 1, -1 или -1, -1, -1, 1. Получается, что среди линейных множителей с m имеются два равных, например, $m - a = m - b$. Но тогда $a = b$, а это противоречит условию. ▲

29*. Докажите, что многочлен $f(x) = x^{2n} + x^n + 1$ при любом натуральном n, не делящемся на 3, делится на трехчлен $x^2 + x + 1$.

30*. Докажите, что если многочлен $p(x)$ имеет корень $x = a$ кратности k ($k > 1$), то его производная имеет корень $x = a$ кратности $k - 1$.

31°. Докажите, что если $f(x)$ — многочлен с рациональными коэффициентами и

$$f(a + b\sqrt{c}) = P + Q\sqrt{c},$$

где числа a, b, c, P, Q рациональны, $c > 0$, $\sqrt{c}$ — иррациональное число, то

$$f(a - b\sqrt{c}) = P - Q\sqrt{c}.$$

△ Достаточно доказать это утверждение для степени x^n ($n \in N$). Применим метод математической индукции.

(О методе математической индукции см. [15] или [19].)

При $n = 1$ наше утверждение, разумеется, справедливо. Справедливо оно и при $n = 2$:

$$(a + b\sqrt{c})^2 = (a^2 + b^2c) + 2ab\sqrt{c},$$
$$(a - b\sqrt{c})^2 = (a^2 + b^2c) - 2ab\sqrt{c}.$$

Допустим, что это утверждение справедливо при некотором $n = k$:

$$(a + b\sqrt{c})^k = P + Q\sqrt{c} \Rightarrow (a - b\sqrt{c})^k = P - Q\sqrt{c}.$$

Тогда при $n = k + 1$ получаем:

$$(a + b\sqrt{c})^{k+1} = (a + b\sqrt{c})^k \cdot (a + b\sqrt{c}) = (P + Q\sqrt{c})(a + b\sqrt{c}) =$$
$$= (aP + bcQ) + (bP + aQ)\sqrt{c},$$

$$(a - b\sqrt{c})^{k+1} = (a - b\sqrt{c})^k \cdot (a - b\sqrt{c}) = (P - Q\sqrt{c})(a - b\sqrt{c}) =$$
$$= (aP + bcQ) - (bP + aQ)\sqrt{c}.$$

Оказалось, что тогда и при $n = k + 1$ утверждение справедливо.

Следовательно, оно справедливо при любом натуральном n. ▲

32°. Докажите, что если $x = a + b\sqrt{c}$, где a, b, c — рациональные числа, $c > 0$, $\sqrt{c}$ — иррациональное число, является корнем многочлена $f(x)$ с рациональными коэффициентами, то и $x = a - b\sqrt{c}$ является корнем этого многочлена.

△ На основании утверждения задачи 31

$$f(a + b\sqrt{c}) = P + Q\sqrt{c} \Rightarrow f(a - b\sqrt{c}) = P - Q\sqrt{c},$$

где числа P и Q рациональны. Но равенство $P + Q\sqrt{c} = 0$ возможно только при $P = Q = 0$ (подумайте, почему). Тогда

$$f(a - b\sqrt{c}) = P - Q\sqrt{c} = 0 - 0 \cdot \sqrt{c} = 0. ▲$$

33°. Докажите, что если $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a и b — числа целые, c — натуральное, $\sqrt{c}$ — число иррациональное, то

$$f(a + b\sqrt{c}) = P + Q\sqrt{c},$$

где числа P и Q — целые.

34. Число $2 + \sqrt{3}$ — корень многочлена

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + ax + b \ (a \in Q,\ b \in Q).$$

Найдите остальные его корни.

△ Сначала найдем значения параметров a и b.

На основании утверждения опорной задачи 32, если $x_1 = 2 + \sqrt{3}$ является корнем данного многочлена, то и $x_2 = 2 - \sqrt{3}$ является его корнем. Тогда многочлен $f(x)$ делится на выражение

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 2 - \sqrt{3})(x - 2 + \sqrt{3}) = (x - 2)^2 - 3 = x^2 - 4x + 1.$$

Разделим $f(x)$ на $x^2 - 4x + 1$ с остатком:

$$x^3 + 4x^2 + ax + b = (x^2 - 4x + 1)(x + 8) + (a + 31)x + (b - 8).$$

Остаток от этого деления должен быть тождественно равным нулю:

$$(a + 31)x + (b - 8) \equiv 0,$$

откуда $a = -31$, $b = 8$.

Тогда $x + 8 = 0$, т. е. $x_3 = -8$.

Ответ: $2 - \sqrt{3}$, -8. ▲

35. Число $3 - \sqrt{2}$ — корень многочлена

$$f(x) = x^4 - 7x^3 + ax^2 + bx - 14 \ (a \in Q,\ b \in Q).$$

Найдите остальные его корни.

36. Число $1 + \sqrt{2}$ — корень многочлена

$$f(x) = x^5 + ax^3 + bx^2 + 5x + 2 \ (a \in Q,\ b \in Q).$$

Найдите остальные его корни.

37. Докажите, что если $f(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, a и b — целые числа, c — натуральное, $\sqrt{c}$ — число иррациональное, то числа

$$f(a + b\sqrt{c}) + f(a - b\sqrt{c}), \quad f(a + b\sqrt{c}) \cdot f(a - b\sqrt{c})$$

являются целыми.

38. Составьте приведенный многочлен наименьшей степени с целыми коэффициентами, одним из корней которого является:

а) $3 - \sqrt{5}$; б) $\sqrt[3]{5}$; в) $2 - \sqrt[3]{3}$; г) $\sqrt[4]{2} - 1$.

1.3. 9—11

Здесь мы займемся задачами на разложение многочленов на множители.

Если многочлен с целыми коэффициентами имеет целые или рациональные корни, то задача разложения его на множители упрощается. В ряде случаев для этой цели нужно ввести новую переменную.

39. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) $x^3 + 3x^2 - 4$; б) $x^3 + 9x^2 + 11x - 21$;

в) $x^4 - 5x^2 + 4$; г) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 12$;

д) $(x + 1)(x + 3)(x + 5)(x + 7) - 1920$;

е) $(x^2 + x - 1)(x^2 + 3x - 1) + x^2$;

ж) $x^4 + 5x^2 + 9$; з) $(x + 1)^4 + 2(x + 1)^3 + x(x + 2)$.

40. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) $x^2 - 3xy + 2y^2 - 2x + 4y$; б) $2x^2 - 21xy - 11y^2 - x + 34y - 3$;

в) $x^3 + 2y^3 - 3xy^2$; г) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;

д) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$.

41*. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлен:

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2).$$

△ У этой суммы можно выделить множитель $y - z$. Будем иметь:

$$x(y^2 - z^2) + y(z^2 - x^2) + z(x^2 - y^2) = x(y + z)(y - z) + yz^2 - yx^2 + zx^2 - zy^2 =$$
$$= (y - z)(xy + xz) - yz(y - z) - x^2(y - z) = (y - z)(xy + xz - yz - x^2) =$$
$$= (y - z)(x(z - x) - y(z - x)) = (y - z)(z - x)(x - y).$$

Ответ: $(x - y)(y - z)(z - x)$. ▲

42*. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) $(x + y)(y + z)(z + x) + xyz$;

б) $x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 2xyz$;

в) $x(y - z)^3 + y(z - x)^3 + z(x - y)^3$;

г) $(x + y)^4 + x^4 + y^4$.

43°. Докажите тождество:

$$x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2).$$

44. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) $x^4 + x^2 + 1$; б) $x^8 + x^4y^4 + y^8$.

45. Вычислите произведение:

$$(2^2 - 2 + 1)(2^4 - 2^2 + 1)(2^8 - 2^4 + 1)(2^{16} - 2^8 + 1).$$

46. Представьте выражение

$$xy(3x + 2)(5y + 2)$$

в виде разности квадратов двух многочленов с целыми коэффициентами.

47. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлен $x^4 + 4y^4$.

△ Имеем:

$x^4 + 4y^4 = (x^4 + 4y^4 + 4x^2y^2) - 4x^2y^2 = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 =$
$= (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$.

Ответ: $(x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$. ▲

48. Разложите на множители с действительными коэффициентами многочлены:

а) $x^4 + 64$; б) $x^4 + 1$; в) $x^4 - x^2 + 1$.

49*. Разложите на множители с целыми коэффициентами многочлен:

$$x^5 + x + 1.$$

△ Вычтем и прибавим x^2. Получаем:

$x^5 + x + 1 = (x^5 - x^2) + (x^2 + x + 1) = x^2(x^3 - 1) + (x^2 + x + 1) =$
$= x^2(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$.

Ответ: $(x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1)$. ▲

50*. Разложите на множители с целыми коэффициентами многочлены:

а) $x^5 + x^4 + 1$; б) $x^4 + x^3 + x^2 + 2$; в) $x^5 + x^4 - 2x + 1$.

51. Найдите все целые a, при которых многочлен

$$y = x^4 - 3x^3 + ax^2 - 9x - 2$$

разлагается в произведение двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами.

△ Коэффициенты при x^2 у обоих квадратных трехчленов можно положить равными 1. Что касается свободных членов, то, поскольку их произведение равно -2, то они равны или 2 и -1, или 1 и -2.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть свободные члены квадратных трехчленов равны 2 и -1. Получаем:

$$x^4 - 3x^3 + ax^2 - 9x - 2 = (x^2 + px + 2)(x^2 + qx - 1),$$

где числа p и q — целые. Раскроем скобки в правой части этого тождества:

$$x^4 - 3x^3 + ax^2 - 9x - 2 = x^4 + (p + q)x^3 + (1 + pq)x^2 + (2q - p)x - 2.$$

На основании теоремы о тождественности двух многочленов будем иметь:

$$p + q = -3, \quad 1 + pq = a, \quad 2q - p = -9.$$

Из первого и третьего уравнений этой системы найдем p и q: $p = 1$, $q = -4$. Из второго уравнения найдем a: $a = 1 - 4 = -3$.

2) Пусть свободные члены квадратных трехчленов равны 1 и -2. Получаем:

$$x^4 - 3x^3 + ax^2 - 9x - 2 = (x^2 + px + 1)(x^2 + qx - 2),$$

$$x^4 - 3x^3 + ax^2 - 9x - 2 = x^4 + (p + q)x^3 + (pq - 1)x^2 + (q - 2p)x - 2.$$

Тогда

$$p + q = -3, \quad pq - 1 = a, \quad q - 2p = -9.$$

Отсюда

$$p = 2, \quad q = -5, \quad a = -11.$$

Ответ: -3, -11. ▲

52*. Разложите в произведение двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами многочлены:

а) $x^4 - 2x^3 - 2x + 15$; б) $x^4 + x^3 - 5x^2 + 5x + 12$.

53. Найдите все значения a и b, при которых многочлены:

а) $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 1$; б) $x^4 + 24x^3 + ax^2 + 1992x + b$

являются квадратами квадратных трехчленов.

§ 2. Другие задачи на многочлены 10—11

Литература: [14], [15], [32], [33], [37^e].

54. Составьте какой-либо многочлен $p(x)$ степени, большей 2, который при $x = 1, 2, 3$ принимает соответственно значения 1, 2 и 3.

55°. Докажите, что если $p(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, то для любых различных целых чисел b и c разность $p(b) - p(c)$ делится на $b - c$.

Эта задача встречалась в книге [20] (§ 7).

△ Рассмотрим многочлен

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

где все коэффициенты $a_0, a_1, a_2,\dots, a_n$ — числа целые, $a_0 \neq 0$. Вычислим $p(b)$ и $p(c)$:

$$p(b) = a_0b^n + a_1b^{n-1} + a_2b^{n-2} + \dots + a_{n-1}b + a_n,$$

$$p(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + a_2c^{n-2} + \dots + a_{n-1}c + a_n.$$

Вычтем эти равенства почленно:

$$p(b) - p(c) = a_0(b^n - c^n) + a_1(b^{n-1} - c^{n-1}) + \dots + a_{n-1}(b - c).$$

Каждая из разностей $b^k - c^k$ ($k = 1, 2,\dots, n$) делится на $b - c$ (см. § 1, п. 1.1, следствия из теоремы 4). Поэтому и разность $p(b) - p(c)$ делится на $b - c$. ▲

56. Существует ли многочлен третьей степени

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

где a, b, c, d — целые числа, $a \neq 0$, такой, что $p(15) = 3$, $p(21) = 12$?

△ Здесь

$$p(21) - p(15) = 12 - 3 = 9, \quad 21 - 15 = 6.$$

Получилось, что разность $p(21) - p(15)$ не делится на $21 - 15$, а это противоречит утверждению задачи 55.

Ответ: не существует. ▲

57. Существует ли многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами такой, что:

а) $p(1) = 19$, $p(19) = 99$; б) $p(0) = 19$, $p(1) = 99$, $p(2) = 1999$?

58°. Докажите, что сумма всех коэффициентов любого многочлена $p(x)$ равна его значению при $x = 1$.

△ В самом деле, положим в равенстве

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$$

$x = 1$. Получим:

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Наше утверждение доказано. ▲

59. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена:

$$p(x) = (2x^2 - 2x + 1)^{1999} \cdot (x^3 - 2x^2)^{2001}.$$

60. Найдите сумму всех коэффициентов многочлена:

$$z = (5x^2 - xy - 2y)^{12}.$$

61. У одного из двух многочленов сумма всех коэффициентов равна 2, у другого — 3. Найдите сумму всех коэффициентов:

а) произведения; б) суммы этих многочленов.

62. У многочлена $P(x)$ сумма всех коэффициентов равна нулю. Докажите, что и у произведения $P(x)Q(x)$, где $Q(x)$ — любой многочлен, сумма всех коэффициентов равна нулю.

63. Дан многочлен:

$$f(x) = (x^4 - x - 1)^{25} + (x^3 - x + 1)^{25}.$$

Найдите сумму всех коэффициентов многочлена:

а) при четных; б) при нечетных степенях x.

64*. В многочлен

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

вместо a, b, c и d подставляют числа 3, 2, -1, -4 (в каком угодно порядке). Докажите, что все такие многочлены имеют общий корень.

65. Найдите все целые a такие, что квадратный трехчлен

$$y = (x - a)(x - 6) + 1$$

можно представить в виде произведения $(x + b)(x + c)$, где b и c — целые числа.

△ Положим в тождестве

$$(x - a)(x - 6) + 1 = (x + b)(x + c)$$

$x = -b$. Получим:

$$(-b - a)(-b - 6) + 1 = 0, \quad (b + a)(b + 6) = -1.$$

Отсюда или $b + a = 1$, $b + 6 = -1$, т. е. $b = -7$, $a = 8$, или $b + a = -1$, $b + 6 = 1$, т. е. $b = -5$, $a = 4$.

Задачу можно было решить другим способом: в записанном выше тождестве раскроем скобки, приравняем коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях и т. д.

Ответ: 4 или 8. ▲

66*. Найдите все целые a и b такие, что квадратный трехчлен

$$y = (x - a)(x - b) + 2$$

можно представить в виде произведения $(x + c)(x + d)$, где c и d — целые числа.

67. Многочлен $p(x)$ при всех целых значениях x принимает целые значения. Может ли хотя бы один из его коэффициентов равняться 1/7?

68*. Все коэффициенты многочлена $p(x)$ — натуральные числа, меньшие 10. Известно, что $p(10) = 1248$. Найдите этот многочлен.

△ Запишем $p(x)$ в виде

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n.$$

Положим здесь $x = 10$. Тогда

$$a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \dots + a_{n-1}10 + a_n = 1248.$$

Отсюда

$$a_0 10^n + a_1 10^{n-1} + \dots + a_{n-1} \cdot 10 = 1240 + (8 - a_n).$$

Следовательно, разность $8 - a_n$ делится на 10. Но так как a_n — натуральное число, меньшее 10, то

$$8 - a_n = 0, \quad a_n = 8.$$

Получаем равенство:

$$a_0 \cdot 10^{n-1} + a_1 \cdot 10^{n-2} + \dots + a_{n-1} = 124.$$

Здесь по аналогичной причине $a_{n-1} = 4$. Тогда

$$a_0 \cdot 10^{n-2} + a_1 \cdot 10^{n-3} + \dots + a_{n-2} = 12.$$

Отсюда $a_{n-2} = 2$, $a_{n-1} = 1$. Продолжать дальше не имеет смысла.
Ответ: $p(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 8$. ▲

69. Можно ли многочлен $y = 5x^{20} + 2$ представить в виде суммы квадратов двух многочленов с целыми коэффициентами?

△ Допустим, что это возможно:

$$5x^{20} + 2 = P^2(x) + Q^2(x),$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами. Положим здесь $x = 1$. Тогда

$$P^2(x) + Q^2(x) = 7.$$

Но сумма двух точных квадратов не может быть равной 7. Мы пришли к противоречию.

Ответ: нельзя. ▲

70*. Докажите, что многочлен $P(x,y) = x^{10}y^{10} + 1$ нельзя представить в виде произведения двух многочленов $f(x)$ и $\varphi(y)$.

71*. Существуют ли многочлены $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ с двумя переменными x и y такие, что при всех действительных x и y выполняется равенство

$$(x + y)P(x,y) + (2x - y - 3)Q(x,y) = x^2 + y^2?$$

△ Подберем значения x и y так, чтобы

$$x + y = 0, \quad 2x - y - 3 = 0.$$

Решая эту систему уравнений, будем иметь: $x = 1$, $y = -1$.

Теперь положим в тождестве $x = 1$, $y = -1$. Получим неверное равенство $0 = 2$. Следовательно, такие многочлены не существуют.

Ответ: не существуют. ▲

72*. Существуют ли многочлены $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ с двумя переменными x и y такие, что при всех действительных x и y выполняется равенство

$$(x - y)P(x,y) + (2x - 2y + 1)Q(x,y) = x^2 + y^2 - 2xy + x + y?$$

73*. Многочлен

$$y = x^3 - 18x^2 + ax + 1784$$

принимает в трех последовательных целых точках три последовательных целых (в том же порядке) значения. Найдите эти значения.

△ Обозначим три последовательные целые значения аргумента через $k - 1$, k и $k + 1$, а соответствующие значения многочлена — через $n - 1$, n и $n + 1$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} (k-1)^3 - 18(k-1)^2 + a(k-1) + 1784 = n - 1, \\ k^3 - 18k^2 + ak + 1784 = n, \\ (k+1)^3 + 18(k+1)^2 + a(k+1) + 1784 = n + 1. \end{cases}$$

Для того чтобы исключить из нее a и n, сложим первое и третье уравнения и вычтем удвоенное второе. После упрощений будем иметь:

$$6k - 18 \cdot 2 = 0, \quad k = 6.$$

Система принимает следующий вид:

$$\begin{cases} 125 - 18 \cdot 25 + 5a + 1784 = n - 1, \\ 216 - 18 \cdot 36 + 6a + 1784 = n, \\ 343 - 18 \cdot 49 + 7a + 1784 = n + 1. \end{cases}$$

Вычитая из третьего уравнения этой системы второе, получаем:

$$127 - 18 \cdot 13 + a = 1, \quad a = 108.$$

Тогда

$$n = 216 - 18 \cdot 36 + 6 \cdot 108 + 1784 = 2000.$$

Нужно сделать еще проверку по первому и третьему уравнениям. Проделайте ее самостоятельно.

Ответ: 1999, 2000, 2001. ▲

74*. Многочлен

$$y = x^3 + ax^2 + bx - 100$$

в точках $x = 4, 5, 6$ принимает три последовательных целых значения. Найдите эти значения.

75*. Докажите, что если многочлен $p(x)$ с целыми коэффициентами при $x = 0$ и $x = 1$ принимает нечетные значения, то он не имеет целых корней.

△ Положим

$$p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n,$$

где коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа, $a_0 \neq 0$.

Так как $p(0) = a_n$ и $p(0)$ по условию нечетно, то a_n нечетно. Если многочлен имеет целый корень, то он является делителем свободного члена a_n и, следовательно, тоже нечетен.

Так как $p(1)$ нечетно, то сумма $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ нечетна, откуда сумма $a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}$ четна. Тогда при любом нечетном x сумма

$$S = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x$$

также четна, поскольку разность

$$S - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}) = a_0(x^n - 1) + a_1(x^{n-1} - 1) + \cdots + a_{n-1}(x - 1)$$

четна.

Отсюда многочлен $p(x)$ при любом нечетном (и любом целом) значении x может принимать только нечетные значения, а значит, не может равняться нулю. ▲

76*. Даны два многочлена $P_1(x)$ и $P_2(x)$ с целыми коэффициентами. Их произведение есть многочлен, у которого все коэффициенты делятся на 3. Докажите, что по меньшей мере у одного из данных многочленов все коэффициенты делятся на 3.

77*. Квадратный трехчлен

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

таков, что уравнение $p(x) = x$ не имеет действительных корней. Докажите, что тогда и уравнение $p(p(x)) = x$ не имеет действительных корней.

△ Так как уравнение $p(x) = x$ не имеет действительных корней, то квадратный трехчлен $p(x) - x$ при всех x сохраняет постоянный знак, совпадающий со знаком коэффициента a его старшего члена.

Пусть, например, $a > 0$. Тогда при всех x

$$p(x) - x > 0, \quad p(x) > x.$$

Следовательно, при всех x

$$p(p(x)) > p(x).$$

Так как $p(x) > x$, то при всех действительных x

$$p(p(x)) > x,$$

а это значит, что уравнение $p(p(x)) = x$ не имеет действительных корней. ▲

78*. Рассмотрим бесконечную последовательность многочленов $P_n(x)$, задаваемую при всех x равенствами:

$$P_0(x) = 0, \quad P_1(x) = 1, \quad P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x) \ (n \in N).$$

Докажите, что при любом x и при любом натуральном n справедливо тождество:

$$P_n^2(x) - P_{n+1}(x) \cdot P_{n-1}(x) = 1.$$

§ 3. Тождественные преобразования выражений 8—11

Литература: [14], [32], [33^e], [37^e], [43].

3.1. 8—9

Рассмотрим задачи на вычисление значений выражений.

79. Вычислите произведение:

$$(2 + 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)(2^{32} + 1).$$

80. Вычислите произведение:

$$\left(2+\frac{1}{2}\right)\left(2^2+\frac{1}{2^2}\right)\left(2^4+\frac{1}{2^4}\right)\left(2^8+\frac{1}{2^8}\right)\left(2^{16}+\frac{1}{2^{16}}\right).$$

81. Вычислите произведение:

$$P=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

△ Упростим это выражение:

$$P=\frac{2^2-1}{2^2}\cdot\frac{3^2-1}{3^2}\cdot\frac{4^2-1}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}=\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\frac{3\cdot 5}{4^2}\cdot\ldots\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}.$$

Полученное произведение можно сократить на $2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \ldots \cdot (n-1)^2 \cdot n$.

После этого будем иметь: $P=\dfrac{n+1}{2n}$.

Ответ: $\dfrac{n+1}{2n}$. ▲

82. Вычислите произведение:

$$P=\left(1-\frac{4}{1}\right)\left(1-\frac{4}{9}\right)\left(1-\frac{4}{25}\right)\cdots\left(1-\frac{4}{(2n-1)^2}\right).$$

83*. Вычислите произведение:

$$P=\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\frac{4^3-1}{4^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{(n+1)^3-1}{(n+1)^3+1}.$$

84. Вычислите сумму:

$$2^{20} - 2^{19} - 2^{18} - \ldots - 2 - 1.$$

85. Упростите сумму:

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!.$$

86. Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \quad (x \neq \pm 1).$$

△ Воспользуемся тождеством $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$. Получим:

$$S = \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} = \frac{16}{1-x^{16}}$$

Ответ: $16/(1 - x^{16})$. ▲

87. Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2+1} + \frac{4}{x^4+1} + \cdots + \frac{128}{x^{128}+1} \quad (x \neq \pm 1).$$

88. Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{(a-b)(a-c)} + \frac{1}{(b-a)(b-c)} + \frac{1}{(c-a)(c-b)}.$$

△ Приведем сумму к общему знаменателю $(a-b)(b-c)(c-a)$:

$$S = \frac{1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\big(-(b-c)-(c-a)-(a-b)\big) =$$

$$= \frac{-1}{(a-b)(b-c)(c-a)}\big(b-c+c-a+a-b\big) = 0.$$

Ответ: 0. ▲

89. Вычислите суммы:

а) $\frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)}$;

б) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

в) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

90. Вычислите суммы:

а) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$

$+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\dfrac{1}{(d-a)(d-b)(d-c)}$;

б) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$

$+\dfrac{c}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\dfrac{d}{(d-a)(d-b)(d-c)}$;

в) $\dfrac{a^2}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b^2}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$

$+\dfrac{c^2}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\dfrac{d^2}{(d-a)(d-b)(d-c)}$;

г) $\dfrac{a^3}{(a-b)(a-c)(a-d)}+\dfrac{b^3}{(b-a)(b-c)(b-d)}+$

$+\dfrac{c^3}{(c-a)(c-b)(c-d)}+\dfrac{d^3}{(d-a)(d-b)(d-c)}$.

91. Вычислите суммы:

а) $\dfrac{a+c}{(a-b)(b-c)}+\dfrac{a+b}{(b-c)(c-a)}+\dfrac{b+c}{(c-a)(a-b)}$;

б) $\dfrac{a-b}{a+b}+\dfrac{b-c}{b+c}+\dfrac{c-a}{c+a}+\dfrac{(a-b)(b-c)(c-a)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$.

92*. Вычислите сумму:

$$1 + 11 + 111 + \cdots + 111\ldots1 \ (n \text{ слагаемых}).$$

93. Вычислите сумму:

$$S = 1 - 2 + 3 - 4 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n.$$

△ Очевидно, ответ зависит от четности или нечетности n. Поэтому рассмотрим два случая.

1) Пусть n четно. Тогда:

$$S = (1 - 2) + (3 - 4) + (5 - 6) + \cdots + ((n - 1) - n) = -1 - 1 - \ldots - 1 = -\frac{n}{2}.$$

2) Пусть n нечетно. Будем иметь:

$$S = (1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - (n - 1)) + n = -\frac{n-1}{2} + n = \frac{n+1}{2}.$$

Ответ: если n четно, то $S = -n/2$; если n нечетно, то $S = (n + 1)/2$. ▲

Подумайте: нельзя ли два полученных выражения для S объединить в одной формуле?

94. Вычислите сумму:

$$S = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n^2.$$

95*. Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{2n-1} + \frac{2n-2}{(2n-1)(2n-3)} + \frac{(2n-2)(2n-4)}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)} + \cdots + \frac{(2n-2)(2n-4)(2n-6)\cdots\cdot 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots\cdot 3\cdot 1}.$$

96*. Вычислите сумму:

$$S = \frac{n+2}{n!} + \frac{2}{2!} + \frac{7}{3!} + \frac{14}{4!} + \frac{23}{5!} + \cdots + \frac{n^2-2}{n!} \quad (n > 1).$$

3.2. 9—11

Рассмотрим задачи на доказательство тождеств.

97. Докажите тождество:

$$n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{n-1}{1} + \frac{n-2}{2} + \frac{n-3}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} \quad (n > 1).$$

△ Преобразуем левую часть равенства:

$$n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}\right)=\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\frac{n}{4}+\dots+\frac{n}{n-1}+1=$$

$$=\frac{(n-2)+2}{2}+\frac{(n-3)+3}{3}+\frac{(n-4)+4}{4}+\dots+\frac{(n-1)+1}{n-1}+1=$$

$$=\frac{n-2}{2}+1+\frac{n-3}{3}+1+\frac{n-4}{4}+1+\dots+\frac{1}{n-1}+1=\frac{n-1}{1}+\frac{n-2}{2}+\frac{n-3}{3}+\dots+\frac{1}{n-1}.$$

(Первое слагаемое $\frac{n-1}{1}$ последней суммы получилось при сложении единиц.)

Тождество доказано. ▲

98. Докажите тождество:

$$n\left(\frac{1}{1\cdot(2n-1)}+\frac{1}{3\cdot(2n-3)}+\frac{1}{5\cdot(2n-5)}+\dots+\frac{1}{(2n-1)\cdot 1}\right)=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}.$$

99. Докажите тождество:

$$\frac{a-b}{1+ab}+\frac{b-c}{1+bc}+\frac{c-a}{1+ca}=\frac{a-b}{1+ab}\cdot\frac{b-c}{1+bc}\cdot\frac{c-a}{1+ca}.$$

100. Докажите тождество:

$$\frac{n}{(n+1)!}+\frac{n+1}{(n+2)!}+\frac{n+2}{(n+3)!}+\dots+\frac{n+k}{(n+k+1)!}=\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+k+1)!}.$$

101. Докажите, что при любом x выполняется равенство:

$$a^2\cdot\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+b^2\cdot\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+c^2\cdot\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

△ Вместо прямолинейного преобразования левой части этого равенства попробуем следующий прием. При $x = a$, $x = b$ и $x = c$ получим верные равенства

$$a^2 = a^2,\quad b^2 = b^2,\quad c^2 = c^2.$$

Но левая часть есть квадратный трехчлен. Если перенести x^2 из правой части равенства в левую, то полученное равенство можно рассматривать как уравнение, которое имеет три различных корня — a, b и c. Ясно, что это невозможно, если левая часть уравнения — квадратный трехчлен, а возможно только тогда, когда левая часть имеет вид $0\cdot x^2 + 0\cdot x + 0$. В таком случае левая

часть исходного равенства тождественно равна x^2, т. е. это равенство является тождеством. ▲

102. Докажите тождество:

$$\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=1.$$

103*. Докажите тождество:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\ (n\in N).$$

△ Преобразуем левую часть этого равенства, прибавив и отняв сумму $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\dots+\frac{1}{2n}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=$$

$$=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\dots+\frac{1}{2n}\right)=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}.$$

Мы получили правую часть исходного равенства. Следовательно, тождество доказано. ▲

104*. Докажите тождество:

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\dots\cdot(n+n)=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2n-1).$$

105*. Докажите тождество:

$$\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n+2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\ (n\in N,\ n \text{ нечетно}).$$

3.3. 9—11

Нередко при вычислении сумм применяется **метод конечных разностей.** Заключается он в следующем. Пусть нужно вычислить сумму

$$S = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

Предположим, что существует вспомогательная последовательность (u_k) такая, что

$$a_k = u_k - u_{k+1} \ (k = 1, 2, \dots, n).$$

Тогда сумма S упрощается таким образом:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + \dots + (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_{n+1}.$$

106. Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{99\cdot 100}.$$

△ Представим первое слагаемое суммы в виде $1 - \frac{1}{2}$, второе — в виде $\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, третье — в виде $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, вообще, k-е слагаемое — в виде

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Получим:

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100}\right) = 1 - \frac{1}{100} = 0{,}99.$$

Ответ: 0,99. ▲

107. Вычислите суммы:

а) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$;

б) $\frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$;

в) $\frac{1}{2\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 8} + \frac{1}{8\cdot 11} + \dots + \frac{1}{(3n-1)(3n+2)}$;

г) $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$;

д) $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$;

е) $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{n}{(n+1)!}$.

108. Вычислите сумму:

$$S=\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\dots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}.$$

△ Представим k-е слагаемое этой суммы ($k = 1, 2,\dots, n$) в следующем виде:

$$\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}.$$

Теперь будем иметь:

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{9}\right)+\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{16}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)=1-\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}.$$

Ответ: $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$. ▲

109*. Вычислите сумму:

$$\frac{1^2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{3\cdot 5}+\frac{3^2}{5\cdot 7}+\dots+\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

110. Докажите, что если a_n — арифметическая прогрессия, то:

а) $\frac{1}{a_1\cdot a_2}+\frac{1}{a_2\cdot a_3}+\frac{1}{a_3\cdot a_4}+\dots+\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}=\frac{n}{a_1\cdot a_{n+1}}$ $(a_n\neq 0)$;

б) $\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}}+\frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}}+\frac{1}{\sqrt{a_3}+\sqrt{a_4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{n}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_{n+1}}}$ $(a_n>0)$.

111*. Вычислите сумму:

$$\frac{2}{2^2-1}+\frac{4}{(2^2-1)(2^3-1)}+\frac{8}{(2^3-1)(2^4-1)}+\dots+\frac{256}{(2^8-1)(2^9-1)}.$$

3.4. 9—11

До сих пор мы решали, главным образом, задачи на тождественные преобразования рациональных выражений. Теперь займемся задачами на тождественные преобразования иррациональных выражений.

112. Вычислите сумму:

$$x=\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}.$$

△ Возведем это равенство в квадрат:

$x^2 = (4 + \sqrt{7}) + (4 - \sqrt{7}) - 2\sqrt{16-7}$, $x^2 = 8 - 6 = 2$, $x = \sqrt{2}$.

Ответ: $\sqrt{2}$. ▲

113. Вычислите разность:

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}.$$

114. Вычислите сумму:

$$x=\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}}.$$

△ Возведем равенство в куб, пользуясь формулой

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

Получим:

$x^3 = (9 + 4\sqrt{5}) + (9 - 4\sqrt{5}) + 3\sqrt[3]{81-80}\cdot(\sqrt[3]{9+4\sqrt{5}}+\sqrt[3]{9-4\sqrt{5}})$,

$x^3 = 18 + 3x$, $x^3 - 3x - 18 = 0$.

Последнее уравнение имеет целый корень $x = 3$. Оно приводится к виду

$$(x - 3)(x^2 + 3x + 6) = 0.$$

Других действительных корней у этого уравнения нет.
Ответ: 3. ▲

115. Вычислите значения выражений:

а) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}+\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}-\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$.

116°. Докажите тождество:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}} \quad (a > 0,\ b > 0,\ a^2 - b > 0).$$

△ Докажем равенство для знака плюс в левой и правой его частях. Возведем его в этом случае в квадрат:

$$a + \sqrt{b} = \frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2} + \frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2} + 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}}, \quad a + \sqrt{b} = a + \sqrt{b}. \ ▲$$

Доказанная формула называется **формулой сложного квадратного радикала.** Она обычно применяется в тех случаях, когда числа a, b и $\sqrt{a^2-b}$ рациональны.

117. Упростите выражение:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

△ По формуле сложного квадратного радикала получаем:

$$\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{4-3}}{2}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{4-3}}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{2}.$$

Ответ: $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/2$. ▲

118. Упростите выражения:

а) $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$; б) $\sqrt{9+4\sqrt{2}}$; в) $\sqrt{3-\sqrt{5}}$.

119. Вычислите значения выражений:

а) $\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{3+\sqrt{8+2\sqrt{7}}}$; в) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+4\sqrt{3}}}}$.

120*. Упростите выражение:

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}.$$

△ Положим

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = a + b\sqrt{3},$$

где a и b — рациональные числа. Будем находить эти числа. Возведем равенство в куб:

$$26 + 15\sqrt{3} = a^3 + 3a^2b\sqrt{3} + 9ab^2 + 3b^3\sqrt{3}.$$

$$a^3 + 9ab^2 + (3a^2b + 3b^3)\sqrt{3} = 26 + 15\sqrt{3}.$$

Последнее равенство выполняется при рациональных a и b тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} a^3 + 9ab^2 = 26, \\ 3a^2b + 3b^3 = 15, \end{cases} \quad \begin{cases} a(a^2 + 9b^2) = 26, \\ b(a^2 + b^2) = 5 \end{cases}$$

(в противном случае $\sqrt{3}$ можно было бы выразить через a и b, и получилось бы, что $\sqrt{3}$ является числом рациональным).

Для решения этой системы уравнений разделим первое уравнение на второе почленно:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{a^2 + 9b^2}{a^2 + b^2} = \frac{26}{5}.$$

Положим здесь $\frac{a}{b} = t$, т. е. $a = bt$:

$$t \cdot \frac{b^2t^2 + 9b^2}{b^2t^2 + b^2} = \frac{26}{5}, \quad t \cdot \frac{t^2 + 9}{t^2 + 1} = \frac{26}{5},$$

$$5t^3 + 45t = 26t^2 + 26, \quad 5t^3 - 26t^2 + 45t - 26 = 0.$$

Нет ли у последнего уравнения целых корней? Оказывается, среди делителей свободного члена $t = 2$ является его корнем. Нетрудно убедиться, что других корней у уравнения нет.

Итак, $\frac{a}{b} = 2$, $a = 2b$. Подставим это выражение для a во второе уравнение системы:

$$b(4b^2 + b^2) = 5, \quad 5b^3 = 5, \quad b = 1, \quad a = 2.$$

Проверка показывает, что значения $a = 2$, $b = 1$ удовлетворяют исходному равенству.

Ответ: $2 + \sqrt{3}$. ▲

121*. Упростите выражения:

а) $\sqrt{5\sqrt{2} - 7}$; б) $\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}}$.

122. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}+\sqrt[4]{ab^2}+\sqrt[4]{b^3}} \quad (a > 0,\ b > 0,\ a \neq b).$$

123. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{16}+\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{4}+\sqrt[5]{2}+1}.$$

△ Воспользуемся тождеством

$$a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$$

(см. § 1, п. 1.1). Положим здесь $a = \sqrt[5]{2}$, $b = 1$; тогда $a^5 - b^5 = 2 - 1 = 1$. Следовательно, сопряженным множителем для знаменателя данной дроби является $\sqrt[5]{2} - 1$.

Ответ: $\sqrt[5]{2} - 1$. ▲

124. Освободитесь от иррациональности в знаменателе дроби:

$$\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}.$$

125*. Освободитесь от иррациональности в знаменателях дробей:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}}$; в) $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}}$.

§ 4. Условные тождества 9—11

Литература: [32], [33], [37^e], [43^e].

Условное тождество — это тождество, справедливое при некотором условии, выражающемся равенством (или равенствами).

4.1. 9—11

126. Зная, что $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, найдите отношение неполного квадрата суммы чисел x и y к неполному квадрату их разности.

△ У дроби $\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}$, значение которой нужно вычислить, разделим почленно числитель и знаменатель на y^2:

$$\frac{x^2+xy+y^2}{x^2-xy+y^2}=\frac{\left(\frac{x}{y}\right)^2+\frac{x}{y}+1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2-\frac{x}{y}+1}=\frac{\frac{4}{9}+\frac{2}{3}+1}{\frac{4}{9}-\frac{2}{3}+1}=\frac{4+6+9}{4-6+9}=\frac{19}{7}.$$

Ответ: 19/7. ▲

127. Зная, что $\frac{a}{b}=\frac{9}{4}$ ($a > 0$, $b > 0$), найдите отношение среднего арифметического чисел а и b к их среднему геометрическому.

128. Зная, что $x+\frac{1}{x}=4$, вычислите $x^2+\frac{1}{x^2}$.

△ Казалось бы, нужно уравнение $x+\frac{1}{x}=4$ привести к квадратному, найти x из квадратного уравнения и подставить полученное значение x в сумму $x^2+\frac{1}{x^2}$. Но этот путь длинен, тем более что здесь квадратное уравнение имеет два корня.

Проще исходное равенство возвести в квадрат:

$$x^2+2+\frac{1}{x^2}=16, \quad x^2+\frac{1}{x^2}=14.$$

Ответ: 14. ▲

129. Зная, что $x - \frac{1}{x} = 1$, найдите:

а) $x^3 - \frac{1}{x^3}$; б) $x^4 + \frac{1}{x^4}$.

130. Вычислите:

$\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}$ $(a > 0)$, если $a^2 + \frac{1}{a^2} = 47$.

131. Вычислите:

$a^6 + \frac{1}{a^6}$, если $a^2 - 3a + 1 = 0$.

132. Известно, что

$$a = x + y, \quad b = xy, \quad c = x^2 + y^2.$$

Исключите из этих равенств x и y.

133. Зная, что $x^2 + y^2 = 2$, найдите сумму:

$$x^6 + y^6 + 6x^2y^2.$$

134. Вычислите:

$x^4 + x^2y^2 + y^4$, если $x^2 + y^2 = a, \quad xy = b$.

135. Найдите:

$x^4 + y^4 + z^4$, если $x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

136. Известно, что $a + b + c = 2x$. Докажите тождество:

$$x^2 + (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

137. Зная, что $x + y - xy = 1$, докажите, что

$$\frac{x^2 + xy + y^2}{1 + xy + x^2y^2} = 1.$$

138. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$, то $\frac{a^2 + b^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{c}$.

139. Докажите, что если $a + b + c = 1$, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, то $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

140. Докажите, что если $b = \frac{a+c}{2}$, то $a^2 + 8bc = (2b + c)^2$.

141. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то $a^3 + a^2c + b^2c + b^3 - abc = 0$.

142. Зная, что $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 0$, вычислите сумму:

$$S = 1 \cdot (a_1 - a_2) + 2 \cdot (a_2 - a_3) + 3 \cdot (a_3 - a_4) + \cdots + 99 \cdot (a_{99} - a_{100}) + 100a_{100}.$$

143. Докажите, что если $y = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^{1999}$, то $xy - y = x^{2000} - 1$.

144. Дана функция

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (c \neq 0,\ ad \neq bc)$$

и x_1, x_2, x_3, x_4 — различные значения аргумента, y_1, y_2, y_3, y_4 — соответствующие значения функции. Докажите равенство:

$$\frac{y_1-y_2}{y_3-y_2} : \frac{y_1-y_4}{y_3-y_4} = \frac{x_1-x_2}{x_3-x_2} : \frac{x_1-x_4}{x_3-x_4}.$$

145. Зная, что $2a = 1 + ab$ ($a \neq 1$, $b \neq 1$), вычислите:

$$\frac{a+1}{a-1} - \frac{b+1}{b-1}.$$

146. Зная, что $a + b = ab$, найдите сумму:

$$(a^3 + b^3 - a^3b^3)^3 + 27a^6b^6.$$

147. Вычислите сумму:

$$S = \frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}, \text{ если } xyz = 1.$$

148. Докажите, что если $a + b + c = 0$, то

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\cdot\frac{a^3+b^3+c^3}{3}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}.$$

149. Докажите, что если $x+\frac{1}{y}=y+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}$, то $x^2y^2z^2 = 1$ или $x = y = z$.

△ Приравнивая суммы из условия задачи попарно, получаем:

$$x-y=\frac{y-z}{yz},\quad y-z=\frac{z-x}{zx},\quad z-x=\frac{x-y}{xy}.$$

Перемножим эти равенства почленно:

$$(x-y)(y-z)(z-x)=\frac{(y-z)(z-x)(x-y)}{x^2y^2z^2}.$$

Отсюда

$$(x-y)(y-z)(z-x)(x^2y^2z^2-1)=0.$$

Может быть, что здесь

$$x^2y^2z^2-1=0,\quad x^2y^2z^2=1.$$

Может быть, что нулю равен один из линейных множителей, например, y. Тогда $x = y$. Условие задачи принимает следующий вид:

$$x+\frac{1}{x}=x+\frac{1}{z}=z+\frac{1}{x}.$$

Получаем, что $x = y = z$. ▲

150. Докажите, что если $x^3 + x - 1 = 0$, то

$$\frac{x^4-2x^3+x^2-3x+5}{x^5-x^2-x+2}=3.$$

151. Докажите, что если $\frac{x^2-yz}{x(1-yz)}=\frac{y^2-xz}{y(1-xz)}$ $(x \neq y)$, то

$$x+y+z=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}.$$

△ Преобразуем исходное равенство, избавившись от знаменателей дробей

$(x^2 - yz)y(1 - xz) = (y^2 - xz)x(1 - yz)$,

$x^2y - y^2z - x^3yz + xy^2z^2 = xy^2 - x^2z - xy^3z + x^2yz^2$,

$xy(x - y) + z(x^2 - y^2) - xyz(x^2 - y^2) - xyz^2(x - y) = 0$.

Пользуясь тем, что $x - y \neq 0$, сократим последнее равенство на $x - y$:

$$xy + xz + yz - x^2yz - xy^2z - xyz^2 = 0.$$

Разделим последнее равенство на xyz (проверьте, что $z \neq 0$). ▲

152. Зная, что $a^3 + b^3 + c^3 + abc = 0$, вычислите сумму:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}.$$

153. Исключите a, b и c из равенств:

$$x = \frac{a-b}{a+b}, \quad y = \frac{b-c}{b+c}, \quad z = \frac{c-a}{c+a} \ (abc \neq 0).$$

154. Исключите x и y из равенств:

$$a = x + y, \quad b = x^3 + y^3, \quad c = x^5 + y^5.$$

△ Возведем первое равенство в куб и вычтем второе равенство:

$$a^3 - b = (x + y)^3 - x^3 - y^3 = 3xy(x + y) = 3axy, \quad xy = \frac{a^3 - b}{3a}.$$

Возведем первое равенство в квадрат и умножим на второе равенство:

$a^2b = (x + y)^2(x^3 + y^3) = (x^2 + 2xy + y^2)(x^3 + y^3) =$

$= x^5 + x^2y^3 + y^2x^3 + y^5 + 2xy(x^3 + y^3) =$

$= (x^5 + y^5) + x^2y^2(x + y) + 2xy(x^3 + y^3) =$

$= c + \left(\frac{a^3 - b}{3a}\right)^2 a + 2\frac{a^3 - b}{3a}b.$

Осталось упростить получившееся равенство:

$$a^2b = c + \left(\frac{a^3 - b}{3a}\right)^2 a + 2\frac{a^3 - b}{3a}b.$$

Ответ: $5b(a^3 + b) = a(a^5 + 9c)$. ▲

155. Докажите, что если

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c},$$

то по меньшей мере одна из сумм

$$a+b, \quad a+c, \quad b+c$$

равна нулю.

156. Докажите, что если

$$x+y=z+t, \quad x^2+y^2=z^2+t^2,$$

то при любом натуральном n

$$x^n+y^n=z^n+t^n.$$

157. Докажите, что если

$$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2)=(ax+by+cz)^2,$$

то

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c} \ (abc \neq 0).$$

Верно ли обратное утверждение?

△1) В исходном равенстве раскроем все скобки, соберем все члены в левую часть и будем их группировать по три, выделяя квадраты разностей:

$(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+b^2x^2+c^2x^2+a^2y^2+c^2y^2+a^2z^2+b^2z^2=$

$=(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+2abxy+2acxz+2bcyz,$

$(b^2x^2+a^2y^2-2abxy)+(c^2x^2+a^2z^2-2acxz)+(c^2y^2+b^2z^2-2bcyz)=0,$

$(bx-ay)^2+(cx-az)^2+(cy-bz)^2=0.$

Отсюда

$$bx-ay=0, \quad cx-az=0, \quad cy-bz=0,$$

а тогда

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}.$$

2) Проверим, справедливо ли обратное утверждение.

Пусть

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k.$$

Следовательно,

$$x = ka, \quad y = kb, \quad z = kc.$$

Будем иметь:

$(x^2+y^2+z^2)(a^2+b^2+c^2) = (k^2a^2+k^2b^2+k^2c^2)(a^2+b^2+c^2) = k^2(a^2+b^2+c^2)$,

$(ax+by+cz)^2 = (ka^2+kb^2+kc^2)^2 = k^2(a^2+b^2+c^2)^2$.

В правых частях этих двух равенств получилось одно и то же выражение, поэтому обратное утверждение верно.

Ответ: верно. ▲

158. Докажите, что если

$$(a_1{}^2 + a_2{}^2 + \cdots + a_n{}^2)(b_1{}^2 + b_2{}^2 + \cdots + b_n{}^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_3b_3)^2,$$

то

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \ (b_1b_2\ldots b_n \neq 0).$$

159. Докажите, что если

$$\frac{a-b}{1+ab} + \frac{b-c}{1+bc} + \frac{c-a}{1+ca} = 0,$$

то по меньшей мере одна из дробей в левой части равенства равна нулю.

△ Задача сводится к тому, чтобы доказать, что среди разностей

$$a - b, \quad b - c, \quad c - a$$

имеется равная нулю.

Освободимся в исходном равенстве от знаменателей дробей:

$(a-b)(1+bc)(1+ca)+(b-c)(1+ab)(1+ca)+(c-a)(1+ab)(1+bc) = 0$.

Выделим в левой части этого равенства множитель $a-b$, раскрывая скобки:

$(a-b)(1+ac+bc+abc^2)+(1+ab)(b-c+abc-ac^2+c-a+bc^2-abc) = 0$,

$(a-b)(1+ac+bc+abc^2)+(1+ab)((b-a)-c^2(a-b)) = 0$,

$(a-b)(1+ac+bc+abc^2-1-ab-c^2-abc^2) = 0, \quad (a-b)(c-b)(a-c) = 0$.

Утверждение доказано. ▲

160. Докажите, что если

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = 1,$$

то две из дробей в левой части равенства равны 1, а третья равна -1.

161. Известно, что $ab(a + b) = 1$. Докажите, что

$$\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{b}{b^3+b+1}.$$

△ Представим условие в следующей форме: $1 = a^2b + ab^2$. Теперь получаем:

$$\frac{a}{a^3+a+1}=\frac{a}{a^3+a+a^2b+ab^2}=\frac{1}{a^2+1+ab+b^2}=$$

$$=\frac{b}{a^2b+b+ab^2+b^3}=\frac{b}{b^3+b+1}. \blacktriangle$$

162. Докажите, что если

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c},$$

то

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ac}{y}=\frac{c^2-ab}{z}.$$

163. Известно, что $x + y + z = 0$. Докажите, что

$$\left(\frac{y-z}{x}+\frac{z-x}{y}+\frac{x-y}{z}\right)\left(\frac{x}{y-z}+\frac{y}{z-x}+\frac{z}{x-y}\right)=9.$$

164. Докажите, что если

$$|a - b| \geq |c|, \quad |b - c| \geq |a|, \quad |c - a| \geq |b|,$$

то одно из чисел a, b и c равно сумме двух других.

△ Обратите внимание, что здесь условие выражается неравенствами. Возведем каждое из этих неравенств в квадрат (при этом получаются равносильные неравенства), перенесем все члены в левые части неравенств и разложим разности квадратов на множители:

$(a - b)^2 - c^2 \geq 0, \quad (b - c)^2 - a^2 \geq 0, \quad (c - a)^2 - b^2 \geq 0,$

$(a - b - c)(a - b + c) \geq 0,$

$(b - c - a)(b - c + a) \geq 0,$

$(c - a - b)(c - a + b) \geq 0.$

Перемножим все три последних неравенства:

$$-(a - b - c)^2 \cdot (b - c - a)^2 \cdot (c - a - b)^2 \geq 0,$$

$$(a-b-c)^2\cdot(b-c-a)^2\cdot(c-a-b)^2\le 0.$$

Следовательно, получаем:

$$(a-b-c)^2\cdot(b-c-a)^2\cdot(c-a-b)^2=0.$$

Отсюда и вытекает утверждение задачи. ▲

165. Известно, что

$$S=\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0.$$

Докажите, что тогда

$$S'=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

△ Умножим исходное равенство соответственно на

$$\frac{1}{b-c},\quad \frac{1}{c-a},\quad \frac{1}{a-b}.$$

Будем иметь:

$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(b-c)(c-a)}+\frac{c}{(b-c)(a-b)}=0,$$

$$\frac{a}{(c-a)(b-c)}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(c-a)(a-b)}=0,$$

$$\frac{a}{(a-b)(b-c)}+\frac{b}{(a-b)(c-a)}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Сложим полученные равенства:

$$\left(\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}\right)+\left(\frac{a}{(b-c)(c-a)}+\frac{a}{(a-b)(b-c)}\right)+$$

$$+\left(\frac{b}{(b-c)(c-a)}+\frac{b}{(a-b)(b-c)}\right)+\left(\frac{c}{(b-c)(a-b)}+\frac{c}{(a-b)(c-a)}\right)=0,$$

$$S'+\frac{a(c-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\frac{b(a-c)}{(a-b)(b-c)(c-a)}+\frac{c(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0,$$

$$S'+\frac{ac-ab+ab-bc+bc-ac}{(a-b)(b-c)(c-a)}=0,\quad S'=0.\ ▲$$

166. Верно ли утверждение, обратное утверждению задачи 165?

§ 5. Последовательности 9—11

Литература: [18^e], [32], [36], [37^e]. [52].

При решении задач на последовательности мы будем часто встречаться с возвратными последовательностями, или с последовательностями, заданными рекуррентно.

Бесконечная последовательность называется **возвратной,** если известны один или несколько первых ее членов и зависимость, выражающая любой ее член, начиная с некоторого, от одного или нескольких предыдущих ее членов.

Примером может служить арифметическая прогрессия. Она задается первым ее членом a_1 и формулой

$$a_{n+1} = a_n + d,$$

где d — постоянная (называемая разностью прогрессии), которая выражает любой ее член a_{n+1}, начиная со второго, через предыдущий. Другой, также хорошо известный пример — геометрическая прогрессия.

5.1. 9—11

Здесь мы займемся задачами на периодические последовательности.

Бесконечная последовательность (a_n) называется **периодической,** если существует такое натуральное число k, что при любом натуральном n, не меньшем k, и некотором натуральном p, называемом **периодом** последовательности, выполняется равенство

$$a_{n+p} = a_n.$$

Чаще всего встречается случай $k = 1$, когда повторение членов последовательности начинается с первого члена. Такова, например, последовательность

$$1;\ 4;\ 9;\ 1;\ 4;\ 9;\ 1;\ 4;\ 9;\ \ldots.$$

Ее период $p = 3$, так как для нее при любом натуральном n $a_{n+3} = a_n$. Но бывают и случаи, когда $k > 1$.

Задачи на периодические последовательности уже встречались в книге [19] (§ 7, п. 7.2).

Если последовательность имеет период p, то она имеет и период $2p$, поскольку

$$a_{n+2p} = a_{n+p} = a_n,$$

а также $3p$, $4p$, вообще, mp, где m — любое натуральное число. Условимся в дальнейшем под периодом последовательности понимать ее наименьший период.

167. Докажите, что последовательность (a_n), заданная соотношениями

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = -\frac{1}{a_n},$$

является периодической.

△ Вычислим несколько первых членов этой последовательности:

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = 2, \quad a_4 = -\frac{1}{2}.$$

Очевидно, эта закономерность будет продолжаться и дальше, так как

$$a_{n+2} = -\frac{1}{a_{n+1}} = -1 : \left(-\frac{1}{a_n}\right) = a_n.$$

Следовательно, данная последовательность — периодическая с периодом $p = 2$. ▲

168. Докажите, что последовательность (a_n), заданная условиями

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1},$$

является периодической.

169. Последовательность (a_n) задана условиями:

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} + \sqrt{a_n - a_n^2}.$$

Докажите, что она является периодической.

170. Является ли периодической последовательность (a_n), заданная соотношениями:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + a_n}?$$

171. Последовательность (a_n) задана условиями:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_{n+2} = \frac{1 - a_n}{1 + a_n}.$$

Вычислите: a_{2002}.

172. Докажите, что у последовательности $a_n = 6^n$ числа, образованные двумя последними цифрами этой степени, составляют периодическую последовательность. Найдите период такой последовательности.

△ То, что такая последовательность является периодической, почти очевидно: ведь чисел, образованных двумя последними цифрами степени 6^n, не более 10: от 06 до 96. Для нахождения периода последовательности вычислим несколько первых ее членов:

$$06,\ 36,\ 16,\ 96,\ 76,\ 56,\ 36,\ 16.$$

Оказалось, что $a_7 = a_2$, а значит, при любом натуральном $n \geq 2$ $a_{n+5} = a_n$. Отсюда период последовательности равен 5.

Ответ: 5. ▲

173. Докажите, что числа, образованные четырьмя последними цифрами степени 5^n ($n \in N$), составляют периодическую последовательность. Найдите период этой последовательности.

174. Найдите две последние цифры степени: а) 4^{87}; б) 9^{105}.

175. Последовательность (x_n) задана условиями:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = x_n^2.$$

Найдите все значения a, при которых она является периодической.

△ Из условия следует, что при $n \geq 2$ x_n неотрицательно.

Исследуем последовательность на возрастание и убывание. Для этого выясним знак разности $x_{n+1} - x_n$. Будем иметь:

$$x_{n+1} - x_n = x_n^2 - x_n = x_n(x_n - 1).$$

Отсюда следует, что если $x_2 > 1$, т. е. $|a| > 1$, то и все $x_n > 1$. Тогда последовательность является возрастающей и, следовательно, непериодической.

Аналогично, если $0 < x_2 < 1$, т. е. $|a| < 1$, $a \neq 0$, то последовательность убывающая (при $-1 < a < 0$ — начиная со второго члена), и, значит, тоже непериодическая.

Остались случаи $a = 0$ и $a^2 = 1$, т. е. $a = \pm 1$.

При $a = 0$ и $a = 1$ последовательность является постоянной и, следовательно, периодической. При $a = -1$ получаем последовательность

$$-1;\ 1;\ -1;\ 1;\ -1;\ 1;\ldots,$$

которая также является периодической.

Ответ: 0, ± 1. ▲

176. Последовательность (x_n) удовлетворяет условиям:

$$x_1 = \frac{a-1}{a+1}, \quad x_{n+1} = \frac{x_n - 1}{x_n + 1} \ (a \neq 0,\ a \neq \pm 1).$$

Найдите все значения a, если $x_{1999} = 5$.

177*. Последовательность (x_n) при любом n удовлетворяет условию:

$$x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2.$$

Найдите все значения x_1, если $x_6 = x_1$.

178*. Последовательность (x_n) при любом n удовлетворяет условию:

$$x_{n+1} = x_n^3 - 3x_n^2 + 3x_n.$$

Найдите все значения x_1, если $x_{1000} = x_{2000}$.

5.2. 9—11

Рассмотрим задачи на нахождение формулы общего члена возвратной последовательности.

179. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 5, \quad a_{n+1} = 2a_n - a_{n-1} \ (n > 1).$$

Найдите формулу общего члена последовательности.

△ Последнее условие представим в таком виде:

$$a_{n+1} - a_n = a_n - a_{n-1}.$$

Это равенство означает, что последовательность (a_n) является арифметической прогрессией. Ее первый член $a_1 = 1$, а разность

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 1 = 4.$$

По формуле n-го члена арифметической прогрессии получаем:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = 1 + 4(n - 1) = 4n - 3.$$

Ответ: $a_n = 4n - 3$. ▲

180. Последовательность (a_n) задана условиями:

а) $a_1 = 2, \quad a_2 = 6, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_{n-1}} \ (n > 1);$

б) $a_1 = 3, \quad a_2 = 2, \quad \dfrac{2}{a_n} = \dfrac{1}{a_{n+1}} + \dfrac{1}{a_{n-1}} \ (n > 1).$

Найдите формулы общих членов последовательностей.

181. Последовательность (x_n) удовлетворяет условиям:

$$x_1 = 1; \quad x_{n+1} = 3x_n + 2^n.$$

Докажите, что при любом натуральном n $x_n = 3^n - 2^n$.

△ Применим метод математической индукции.
1) При $n = 1$ эта формула справедлива, так как $x_1 = 3 - 2 = 1$.
2) Допустим, что она справедлива при некотором $n = k$:

$$x_k = 3^k - 2^k.$$

Тогда при $n = k + 1$ получаем:

$$x_{k+1} = 3x_k + 2^k = 3 \cdot (3^k - 2^k) + 2^k = 3^{k+1} - 3 \cdot 2^k + 2^k = 3^{k+1} - 2^{k+1}.$$

Оба условия принципа математической индукции выполняются. Следовательно, формула для x_n доказана. ▲

182. Последовательность (x_n) удовлетворяет условиям:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = 3x_n + 1.$$

Докажите, что при любом n $x_n = (5 \cdot 3^{n-1} - 1)/2$.

183. Последовательность (x_n) задана условиями:

$$x_1 = a + b, \quad x_2 = a^2 + ab + b^2, \quad x_{n+2} = (a + b)x_{n+1} - abx_n \ (a \neq b).$$

Докажите, что при любом n

$$x_n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

184. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям:

$$a_1 = 3, \quad a_2 = 9, \quad a_{n+1} = 4a_n - 3a_{n-1} \ (n > 1).$$

Найдите формулу общего члена последовательности.

△ Вычислим несколько первых членов последовательности, начиная с a_3:

$a_3 = 4a_2 - 3a_1 = 4 \cdot 9 - 3 \cdot 3 = 27 = 3^3$,

$a_4 = 4a_3 - 3a_2 = 4 \cdot 27 - 3 \cdot 9 = 81 = 3^4$,

$a_5 = 4a_4 - 3a_3 = 4 \cdot 81 - 3 \cdot 27 = 243 = 3^5$.

Вероятно, при любом натуральном n $a_n = 3^n$. Докажите самостоятельно эту формулу методом математической индукции.

Ответ: $a_n = 3^n$. ▲

185. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям:

а) $a_1 = 2, \quad a_2 = 3, \quad a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$ $(n > 1)$;

б) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\sqrt{1+a_n^2}}$;

в) $a_1 = 4, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+1} = \dfrac{a_n + a_{n-1}}{2}$ $(n > 1)$;

г) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1$.

Найдите формулу для a_n.

186. Последовательность (a_n) задана условиями:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = a_n + n.$$

Найдите формулу общего члена последовательности.

△ Представим второе условие в следующем виде:

$$a_{k+1} = a_k + k, \quad a_{k+1} - a_k = k.$$

Положим в последнем равенстве $k = 1, 2, 3, \ldots, n-1$. Получим серию равенств, которые затем сложим почленно:

$$\begin{array}{rl} & a_2 - a_1 = 1, \\ & a_3 - a_2 = 2, \\ + & a_4 - a_3 = 3, \\ & \ldots\ldots\ldots \\ & a_n - a_{n-1} = n - 1 \\ \hline \end{array}$$

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

(Здесь применялась формула суммы n первых членов арифметической прогрессии.)

Ответ: $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$. ▲

187. Последовательность (a_n) задана условиями:

а) $a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 8n$; б) $a_1 = 6, \quad a_{n+1} = a_n + 2n + 5$;

в) $a_1 = 5, \quad a_{n+1} = a_n + 2 \cdot 3^n$.

Найдите формулу для a_n.

188. Последовательность (x_n) удовлетворяет условиям:

а) $x_1 = 4, \quad x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}x_n;$

б) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}x_n.$

Найдите формулу для x_n.

189*. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям:

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+1}(a_n + 1).$$

Найдите формулу для a_n.

△ Преобразуем второе условие следующим образом:

$$a_{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}(a_n + 1) + 1, \quad (n + 1)(a_{n+1} + 1) = n(a_n + 1) + (n + 1).$$

Последнее равенство наводит на мысль ввести новую последовательность $b_n = n(a_n + 1)$. Она удовлетворяет начальному условию $b_1 = 1$ и рекуррентному соотношению

$$b_{n+1} = b_n + n + 1.$$

Найдем формулу для b_n знакомым нам способом. (Проделайте это самостоятельно.) Должно получиться: $b_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Теперь нетрудно получить и формулу для a_n:

$$a_n + 1 = \frac{b_n}{n} = \frac{n+1}{2}, \quad a_n = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2}.$$

Ответ: $a_n = \frac{n-1}{2}$. ▲

190*. Последовательность (a_n) удовлетворяет условиям:

$$a_3 = 5, \quad a_8 = 60, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Найдите a_1.

191*. Последовательность (a_n) содержит 2000 членов, причем

$$a_1 = a_{2000} = 1, \quad a_n = \frac{a_{n+1} + 2a_{n-1}}{3} \ (n = 2, 3, \ldots, 1999).$$

Докажите, что все члены последовательности равны 1.

192*. Последовательность (x_n) задана условиями:

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x_n^2}}{2}}.$$

Найдите формулу для x_n.

△ Из условия видно, что $0 \le x_n \le 1$. Положим $x_n = \sin\alpha$, где $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Получаем:

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\alpha}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sin\frac{\alpha}{2}.$$

У x_{n+1} аргумент под знаком синуса оказался в два раза меньше, чем у x_n. Тогда, так как

$$x_1 = \sin\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3\cdot 2},$$

то у x_2 аргумент под знаком синуса равен $\frac{\pi}{3\cdot 2^2}$, у x_3 — $\frac{\pi}{3\cdot 2^3}$, вообще, у x_n — $\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$.

Ответ: $x_n = \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$. ▲

193*. Последовательность (x_n) задана условиями:

$$x_1 = 2, \quad x_{n+1} = \frac{3x_n - 1}{3 - x_n}.$$

Найдите формулу для x_n.

5.3*. 10—11

Займемся задачами на вычисление сумм n первых членов последовательностей. Такие задачи уже встречались в § 3 (п. 3.2). Здесь мы рассмотрим более серьезные задачи этого типа.

194°. Докажите тождество:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Конечно, старшеклассники знают, как доказывается это тождество с помощью формулы суммы n первых членов арифметической прогрессии. Сейчас мы познакомимся с выводом формулы (1) методом конечных разностей, упоминавшимся в § 3 (п. 3.3), точнее, некоторой разновидностью этого метода.

△ Напишем тождество

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$$

и положим в нем $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Получим серию равенств, которые затем сложим почленно:

$$\begin{array}{rl} & 1^2 = \qquad\quad 1, \\ + & 2^2 - 1^2 = 2 \cdot 1 + 1, \\ & 3^2 - 2^2 = 2 \cdot 2 + 1, \\ & 4^2 - 3^2 = 2 \cdot 3 + 1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1 \\ \hline & (n+1)^2 = 2S_1 + (n+1). \end{array}$$

Осталось выразить отсюда S_1:

$$2S_1 = (n+1)^2 - (n+1) = (n+1)n, \quad S_1 = \frac{(n+1)n}{2}. \ ▲$$

195°. Докажите тождество:

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \qquad (2)$$

△ Положим в тождестве

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n$ и полученные равенства сложим почленно:

$$\begin{array}{rl} & 1^3 = \qquad\qquad\quad 1, \\ & 2^3 - 1^3 = 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1, \\ + & 3^3 - 2^3 = 3 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 1, \\ & 4^3 - 3^3 = 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3 + 1, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & (n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1. \\ \hline & (n+1)^3 = 3S_2 + 3S_1 + (n+1). \end{array}$$

Осталось подставить сюда выражение для суммы S_1 из тождества (1) (см. задачу 194) и выразить S_2 через n. Доведите решение до конца самостоятельно. ▲

Тождество (2) можно доказать и методом математической индукции (см., например, [19], § 14, п. 14.7), но приведенное здесь доказательство более содержательно.

196°. Докажите тождество:

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}. \qquad (3)$$

197. Выведите формулу для суммы:

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4.$$

198. Вычислите сумму:

$$S = (1 + 1^2) + (2 + 2^2) + (3 + 3^2) + \dots + (n + n^2).$$

△ Разобьем сумму S на две суммы, а затем применим формулы (1) и (2):

$$S = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) =$$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{6}(3n(n + 1) + (n(n + 1)(2n + 1)) =$$

$$= \frac{1}{6}n(n + 1)(2n + 4) = \frac{1}{3}n(n + 1)(n + 2).$$

Ответ: $S = n(n + 1)(n + 2)/3$. ▲

199. Вычислите суммы:

а) $(1 + 3 \cdot 1^2) + (2 + 3 \cdot 2^2) + (3 + 3 \cdot 3^2) + \dots + (n + 3n^2)$;

б) $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + 4 \cdot 3^2 + \dots + (n + 1)n^2$;

в) $1 \cdot (1^2 + 1 + 1) + 2 \cdot (2^2 + 2 + 1) + 3 \cdot (3^2 + 3 + 1) + \dots + n \cdot (n^2 + n + 1)$;

г) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n + 1)(n + 2)$.

200. Вычислите суммы:

а) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n - 1)^2$;

б) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n - 1)^3$.

201. Вычислите сумму:

$$S = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + n \cdot 2^n.$$

△ Сумма S своеобразна: первые множители слагаемых пробегают арифметическую прогрессию 1, 2, 3,..., n, а вторые — геометрическую прогрессию 2, 2^2, 2^3,..., 2^n.

Умножим данное равенство на 2 — знаменатель геометрической прогрессии:

$$2S = 1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^4 + \dots + n2^{n+1}.$$

Теперь вычтем почленно из последнего равенства первое:

$$S = -2 - 2^2 - 2^3 - \cdots - 2^n + n2^{n+1} =$$

$$= n2^{n+1} - (2 \cdot 2^n - 2) = (n - 1)2^{n+1} + 2.$$

Ответ: $S = (n - 1)2^{n+1} + 2$. ▲

202. Найдите формулу для суммы:

$$S = q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + nq^n \ (q \neq 1).$$

203. Вычислите суммы:

а) $S = 1 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3^3 + \cdots + (2n - 1)3^n$;

б) $S = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^{n-1}}$.

204. Вычислите суммы:

а) $1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2^3 + \cdots + (-1)^{n+1} \cdot n \cdot 2^{n-1}$;

б) $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{2^2} - \frac{7}{2^3} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2n-1}{2^{n-1}}$.

205. Найдите формулу для суммы:

$$S = 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 2^2 + 3^2 \cdot 2^3 + \cdots + n^2 \cdot 2^n.$$

Рассмотрим несколько задач на вычисление сумм, относящихся к последовательности Фибоначчи.

Последовательностью Фибоначчи называется последовательность (a_n), у которой два первых члена равны 1, а каждый последующий, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих:

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n.$$

Она названа по имени автора — итальянского математика Леонардо Фибоначчи (1180—1240). Последовательность Фибоначчи играет важную роль в теории чисел. Существует популярная брошюра Н.Н. Воробьева [15] об этой последовательности.

Последовательность Фибоначчи уже упоминалась в книгах [19] и [20]. В частности, в книге [20] приводятся задачи на эту последовательность, связанные с делимостью чисел.

Напишем несколько первых членов последовательности Фибоначчи, пользуясь ее определением:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; ... .

206. Докажите, что сумма n первых членов последовательности Фибоначчи удовлетворяет условию:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_{n+2} - 1.$$

△ Представим рекуррентное соотношение $a_{k+2} = a_{k+1} + a_k$ в виде

$$a_k = a_{k+2} - a_{k+1}.$$

Положим в последнем равенстве $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ и сложим почленно получающиеся равенства:

$$\begin{array}{rl} & a_1 = a_3 - a_2, \\ + & a_2 = a_4 - a_3, \\ & a_3 = a_5 - a_4, \\ & \cdots\cdots\cdots \\ & a_n = a_{n+2} - a_{n+1} \\ \hline \end{array}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_{n+2} - a_2 = a_{n+2} - 1.$$

Это свойство можно также доказать методом математической индукции. ▲

207. Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи:

а) $a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} = a_{2n}$;

б) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{2n} = a_{2n+1} - 1$;

в) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 = a_n a_{n+1}$;

г) $a_n^2 - a_{n-1}a_{n+1} = (-1)^{n+1}$ $(n > 1)$.

208. Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи:

а) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{2n-1}a_{2n} = a_{2n}^2$;

б) $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_4 + \cdots + a_{2n}a_{2n+1} = a_{2n+1}^2 - 1$.

§ 6. Прогрессии 9—11

Литература: [18^e], [32], [37], [43^e].

6.1. 9—11

Сначала займемся задачами на арифметическую прогрессию.

209. Найдите сумму всех трехзначных чисел, не делящихся на 12.

210. Найдите сумму всех несократимых дробей со знаменателем 9, заключенных между 100 и 1000.

211. Среди чисел вида $\frac{7n+1}{11}$ ($n \in N$) найдите сумму первых 100 целых чисел.

212. В арифметической прогрессии (a_n)

$$a_3 + a_6 + a_9 + a_{12} = 200.$$

Вычислите сумму первых 14 членов прогрессии.

213. В некоторой арифметической прогрессии с положительными членами второй член является средним пропорциональным между первым и четвертым. Докажите, что тогда шестой член является средним пропорциональным между четвертым и девятым членами.

214. Один из углов треугольника равен 120°, а длины сторон образуют арифметическую прогрессию. Найдите отношение длин сторон треугольника.

△ Обозначим длины сторон треугольника в порядке возрастания через a, $a + d$, $a + 2d$. Тогда наибольшая сторона расположена против наибольшего угла треугольника, равного 120°.

По теореме косинусов получаем:

$$(a + 2d)^2 = a^2 + (a + d)^2 - 2a(a + d)\cos 120°,$$

$$a^2 + 4ad + 4d^2 = a^2 + a^2 + 2ad + d^2 + a^2 + ad,$$

$$2a^2 - ad - 3d^2 = 0, \quad 2\left(\frac{a}{d}\right)^2 - \frac{a}{d} - 3 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{a}{d} = \frac{3}{2}, \quad a = \frac{3}{2}d, \quad a + d = \frac{5}{2}d, \quad a + 2d = \frac{7}{2}d.$$

Следовательно, отношение длин сторон треугольника равно

$$a : (a + d) : (a + 2d) = \frac{3}{2}d : \frac{5}{2}d : \frac{7}{2}d = 3 : 5 : 7.$$

Ответ: 3 : 5 : 7. ▲

215. Найдите отношение длин сторон прямоугольного треугольника, если они образуют арифметическую прогрессию.

216. Скорость парохода по течению реки, его скорость против течения и скорость течения составляют арифметическую прогрессию. Найдите отношение скорости парохода по течению к его скорости против течения.

217. Сумма первых n членов некоторой бесконечной числовой последовательности (a_n) при любом n выражается формулой

$$S_n = an^2 + bn,$$

где a и b — данные числа. Докажите, что эта последовательность является арифметической прогрессией.

△ По условию при любом $n > 1$

$$S_{n-1} = a(n-1)^2 + b(n-1).$$

Тогда будем иметь:

$$a_n = S_n - S_{n-1} = an^2 + bn - a(n-1)^2 - b(n-1) =$$
$$= an^2 + bn - an^2 + 2an - a - bn + b = b - a + 2an =$$
$$= (b - a) + 2a((n-1) + 1) = a + b + 2a(n-1).$$

Полученное выражение для a_n представляет собой формулу n-го члена арифметической прогрессии, у которой первый член равен $a + b$, а разность равна $2a$. ▲

218. Найдите арифметическую прогрессию, у которой среднее арифметическое первых n ее членов при любом n равно $2n$.

219. Бесконечная арифметическая прогрессия (a_n) с положительной разностью содержит члены, равные 7, 15 и 27. Верно ли, что она обязательно содержит и член, равный 1999?

△ Будем считать первым членом прогрессии число 7. Тогда

$$15 = 7 + d(k-1), \quad 27 = 7 + d(m-1),$$

где d — разность прогрессии, k и m — натуральные числа, большие 1, причем $m > k$. Отсюда

$$8 = d(k-1), \quad 20 = d(m-1).$$

Положим $k - 1 = a$; тогда $d = \frac{8}{a}$.

Число 1999 является членом этой арифметической прогрессии в том и только в том случае, если

$$1999 = 7 + d(n - 1) \ (n \in N, n > m).$$

Получаем:

$$1992 = d(n - 1), \quad 1992 = \frac{8}{a}(n-1), \quad 249a = n - 1, \quad n = 249a + 1.$$

Вычтем почленно равенства $1992 = d(n - 1)$ и $20 = d(m - 1)$:

$$1972 = d(n - m), \quad 1972 = \frac{8}{a}(n-m), \quad 493a = 2(n - m).$$

Следовательно, число a — четное, а разность $n - m$ делится на 493.

Вычтем почленно равенства $20 = d(m - 1)$ и $8 = d(k - 1)$:

$$12 = d(m - k), \quad m-k = \frac{12}{d} = \frac{12a}{8} = \frac{3}{2}a,$$

$$m = k + \frac{3}{2}a = (k-1)+1+\frac{3}{2}a = a+1+\frac{3}{2}a = \frac{5a+2}{2}.$$

Выразим еще разность $n - m$ через a:

$$n-m = 249a+1-\frac{5a+2}{2} = \frac{493a}{2}.$$

Последнее число делится на 493. Значит, число 1999 является членом данной арифметической прогрессии.

Теперь достаточно взять любое четное натуральное число a и положить

$$d = \frac{8}{a}, \quad k = a + 1, \quad m = \frac{5a+2}{2}, \quad n = 249a + 1.$$

Ответ: верно. ▲

220. Бесконечная арифметическая прогрессия с положительной разностью содержит члены, равные 1, $\frac{7}{2}$ и $\frac{25}{2}$. Верно ли, что она обязательно содержит член, равный $\frac{125}{2}$?

221. Могут ли числа 1, $\sqrt{2}$ и 2 быть членами одной арифметической прогрессии?

222. В арифметической прогрессии (a_n)

$$a_k = l, \quad a_l = k \ (k \neq l).$$

Вычислите a_n.

△ Вычтем почленно равенства

$$l = a_1 + d(k - 1), \quad k = a_1 + d(l - 1),$$

где d — разность арифметической прогрессии. Получим:

$$l - k = d(k - l), \quad d = -1.$$

Тогда

$$l = a_1 - (k - 1), \quad a_1 = k + l - 1.$$

Осталось найти a_n:

$$a_n = a_1 + d(n - 1) = k + l - 1 - (n - 1) = k + l - n.$$

Ответ: $a_n = k + l - n$. ▲

223. В арифметической прогрессии (a_n)

$$a_{k+m} = b, \quad a_{k-m} = c.$$

Найдите a_k и a_m.

224. В арифметической прогрессии

$$S_m = S_n \ (m \neq n).$$

Вычислите S_{m+n}.

225. В арифметической прогрессии

$$S_k = b, \quad S_n = c \ (k \neq n).$$

Вычислите S_{k+n}.

226. Докажите, что если числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию, то и числа

$$a^2 + ab + b^2, \quad a^2 + ac + c^2, \quad b^2 + bc + c^2$$

составляют (в указанном порядке) арифметическую прогрессию.

△ Пусть d — разность данной прогрессии. Будем иметь:

$(a^2 + ac + c^2) - (a^2 + ab + b^2) = (ac - ab) + (c^2 - b^2) =$

$= (c - b)(a + c + b) = d(a + b + c),$

$(b^2 + bc + c^2) - (a^2 + ac + c^2) = (bc - ac) + (b^2 - a^2) =$

$= (b - a)(c + b + a) = d(a + b + c).$

Получилось, что

$$(a^2 + ac + c^2) - (a^2 + ab + b^2) = (b^2 + bc + c^2) - (a^2 + ac + c^2).$$

Это значит, что три суммы из условия задачи образуют арифметическую прогрессию. ▲

227. Докажите, что числа a, b и c составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда числа

$$a + b, \quad a + c, \quad b + c$$

составляют (в указанном порядке) арифметическую прогрессию.

228. Докажите, что числа a^2, b^2, c^2 образуют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда числа

$$\frac{1}{b+c}, \quad \frac{1}{c+a}, \quad \frac{1}{a+b}$$

образуют (в указанном порядке) арифметическую прогрессию.

229*. Последовательность 1; 7; 19; 37; 61;... обладает тем свойством, что разности двух соседних членов (последующего и предыдущего) образуют арифметическую прогрессию 6; 12; 18; 24; ... . Найдите номер члена этой последовательности, равного 2107.

230*. Докажите, что последовательность квадратов натуральных чисел 1; 4; 9; 16; 25; 36... не содержит ни одной бесконечной арифметической прогрессии.

△ Составим последовательность разностей соседних членов (последующего и предыдущего) данной последовательности:

$$3;\ 5;\ 7;\ 9;\ 11;\ \ldots .$$

Эта последняя последовательность неограниченно возрастает при неограниченном возрастании n. Следовательно, если предположить, что такая арифметическая прогрессия существует, и обозначить ее разность через d, где $d > 0$, то разность даже соседних членов первоначальной последовательности с возрастанием n становится и остается в дальнейшем большей d. Мы получили противоречие. ▲

231*. Докажите, что в бесконечной последовательности

$$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \ldots;\ \frac{1}{n};\ \ldots$$

при любом натуральном $k > 2$ содержится арифметическая прогрессия из k членов.

232*. Докажите, что если в арифметической прогрессии

$\frac{S_k}{S_n}=\frac{k^2}{n^2}$, то $\frac{a_k}{a_n}=\frac{2k-1}{2n-1}$.

233*. В арифметической прогрессии a_1; a_2; a_3; a_4 с целыми членами больший член равен сумме квадратов остальных членов. Найдите члены этой прогрессии.

234*. В арифметической прогрессии отношение суммы первых n членов к сумме следующих n членов при любом n постоянно. Найдите арифметическую прогрессию.

△ По условию

$$\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=k,$$

где k — постоянная. В частности, при $n = 1$ получим:

$$k=\frac{S_1}{S_2-S_1}=\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_1}{a_1+d},$$

где a_1 и a_2 — первый и второй члены, d — разность арифметической прогрессии. Тогда

$$\frac{a_1+d}{a_1}=\frac{1}{k},\quad 1+\frac{d}{a_1}=\frac{1}{k},\quad \frac{d}{a_1}=\frac{1}{k}-1=C,$$

где C — новая постоянная. Отсюда $d = Ca_1$.

Получаем прогрессию

$$a_1;\ (C+1)a_1;\ (2C+1)a_1;\ (3C+1)a_1;\ \dots .$$

Теперь будем иметь:

$$k=\frac{S_n}{S_{2n}-S_n}=\frac{(2a_1+Ca_1(n-1))n}{(2a_1+Ca_1(2n-1))2n-(2a_1+Ca_1(n-1))n}=$$

$$=\frac{2+C(n-1)}{(2+C(2n-1))2-(2+C(n-1))}=\frac{2+Cn-C}{4+4Cn-2C-2-Cn+C}=\frac{Cn+2-C}{3Cn+2-C}.$$

Так как $k=\frac{1}{1+C}$, то получаем:

$$\frac{1}{1+C}=\frac{Cn+2-C}{3Cn+2-C},\quad 3Cn+2-C=Cn+2-C+C^2n+2C-C^2,$$

$$(C^2-2C)n=C^2-2C.$$

Последнее равенство является тождеством при $C^2 - 2C = 0$, т. е. при $C = 0$ или $C = 2$.

При $C = 0$ получаем прогрессию с равными членами a_1; a_1; a_1; ..., а при $C = 2$ — прогрессию

$$a_1;\ 3a_1;\ 5a_1;\ \dots .$$

Ответ: a_1; a_1; a_1; ... или a_1; $3a_1$; $5a_1$; ..., где a_1 — любое число, отличное от нуля. ▲

235*. Докажите, что в любой конечной арифметической прогрессии с различными членами, у которой число членов не меньше 4, произведение двух членов, равноотстоящих от крайних членов, возрастает по мере удаления от концов прогрессии.

6.2. 9—11

Перейдем к задачам на геометрическую прогрессию.

236. Три различных целых числа составляют геометрическую прогрессию с целым знаменателем. Их сумма равна 7. Найдите эти числа.

237. Скорость парохода по течению реки, его скорость против течения и скорость течения образуют геометрическую прогрессию. Найдите отношение скорости парохода по течению к его скорости против течения.

238. Один из углов треугольника равен 60°, а длины сторон образуют геометрическую прогрессию. Найдите все такие треугольники.

239. Длина стороны равностороннего треугольника равна a. На его высоте, как на стороне, построен новый равносторонний треугольник. На высоте нового треугольника, как на стороне, построен еще один равносторонний треугольник. И т. д. Найдите сумму периметров и сумму площадей всех таких треугольников.

240. В равносторонний треугольник с длиной стороны a вписана окружность. В эту окружность вписан новый равносторонний треугольник. В этот треугольник опять вписана окружность, а в окружность — еще один равносторонний треугольник. И т. д. Найдите сумму длин всех таких окружностей и сумму площадей всех таких кругов.

241. Могут ли n различных точных квадратов при любом $n > 2$ составлять геометрическую прогрессию?

242. Длины сторон треугольника образуют геометрическую прогрессию. Найдите все значения знаменателя q прогрессии.

243. Докажите, что если a, b, c, d — последовательные члены геометрической прогрессии, то

$$(a-d)^2 = (a-c)^2 + (b-c)^2 + (b-d)^2.$$

△ Упростим это равенство:

$a^2 - 2ad + d^2 = a^2 - 2ac + c^2 + b^2 - 2bc + c^2 + b^2 - 2bd + d^2,$

$b^2 + c^2 + ad = ac + bc + bd.$

Обозначим знаменатель геометрической прогрессии через q. Получаем:

$$a^2q^2 + a^2q^4 + a^2q^3 = a^2q^2 + a^2q^3 + a^2q^4.$$

Тождество доказано. ▲

244. Докажите, что числа a, b и c составляют геометрическую прогрессию тогда и только тогда, когда

$$(a^2+b^2)(b^2+c^2) = (ab+bc)^2.$$

245. Знаменатель бесконечной геометрической прогрессии равен $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Докажите, что каждый ее член, начиная со второго, равен разности двух соседних членов.

246. В геометрической прогрессии (a_n) с положительными членами

$$a_{k+m} = b, \quad a_{k-m} = c.$$

Найдите a_k и a_m.

247*. Пусть b_1; b_2; ...; b_n — геометрическая прогрессия с положительными членами. Зная суммы

$$S = b_1 + b_2 + \dots + b_n, \quad S' = \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \dots + \frac{1}{b_n},$$

найдите произведение $P = b_1 b_2 \dots b_n$.

248. Можно ли из бесконечной последовательности 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; ...; $\frac{1}{n}$; ... при любом натуральном $k > 2$ выделить геометрическую прогрессию с k членами?

△ Это можно сделать, и даже не одним способом. Например, подойдет геометрическая прогрессия $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; ...; \frac{1}{2^{k-1}}$.

Ответ: можно. ▲

249*. Можно ли из бесконечной геометрической прогрессии $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; ...; \frac{1}{2^{n-1}}; ...$ выделить бесконечную геометрическую прогрессию, сумма которой равна: а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{1}{5}$; в) $\frac{5}{2}$?

250*. Могут ли числа 2, 3, 5 быть членами одной геометрической прогрессии с положительными членами?

△ Допустим, что это возможно. Будем считать 2 первым членом геометрической прогрессии, а знаменатель q большим 1. Тогда

$$3 = 2q^{k-1}, \quad 5 = 2q^{n-1} \ (k \in N,\ n \in N,\ 1 < k < n).$$

Из каждого из двух последних равенств выразим q и два полученных выражения приравняем:

$$q = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}}, \quad q = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}}; \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{k-1}} = \left(\frac{5}{2}\right)^{\frac{1}{n-1}};$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{k-1}, \quad 3^{n-1} \cdot 2^{k-1} = 5^{k-1} \cdot 2^{n-1}, \quad 3^{n-1} = 5^{k-1} \cdot 2^{n-k}.$$

Но последнее равенство невозможно — хотя бы потому, что его правая часть делится на 2, а левая не делится. Противоречие.

Ответ: не могут. ▲

251*. Бесконечная геометрическая прогрессия с положительными членами обладает тем свойством, что любой ее член, начиная со второго, больше суммы всех предыдущих членов. Найдите все значения знаменателя прогрессии q.

252*. Докажите, что в любой конечной геометрической прогрессии с положительными членами, у которой знаменатель больше 1, а число членов не меньше 4, сумма двух членов, равноотстоящих от крайних членов, убывает по мере удаления от концов прогрессии.

6.3. 9—11

Займемся совместными задачами на арифметическую и геометрическую прогрессии.

253. Цифры трехзначного числа образуют геометрическую прогрессию с разными членами. Если это число уменьшить на 200, то получится трехзначное число, цифры которого образуют арифметическую прогрессию. Найдите первоначальное трехзначное число.

△ Трехзначных чисел с разными цифрами, образующими геометрическую прогрессию, немного, и все их легко найти с помощью перебора:

124, 421, 139, 931, 248, 842, 469, 964.

Числа 124 и 139 отбросим, так как они меньше 200. От остальных отнимем по 200 и найдем число (или числа), цифры которого составляют арифметическую прогрессию.

Такое число только одно — 642. Исходное число равно 842.

Ответ: 842. ▲

254. Цифры трехзначного числа образуют арифметическую прогрессию, а цифры трехзначного числа, большего его на 400, — геометрическую. Найдите первоначальное число.

255. Когда три числа образуют арифметическую прогрессию и одновременно геометрическую прогрессию?

256. Найдите числа a и b, если числа a, 1, b составляют арифметическую прогрессию, а числа a^2, 1, b^2 — геометрическую. Укажите все решения.

△ Воспользуемся характеристическими свойствами арифметической и геометрической прогрессий:

$$\begin{cases} 1=\dfrac{a+b}{2}, \\ 1=\sqrt{a^2b^2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} a+b=2, \\ a^2b^2=1. \end{cases}$$

Осталось решить последнюю систему уравнений.

Ответ: $a = b = 1$; $a = 1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$; $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$. ▲

257. Три числа, из которых третье равно 12, образуют геометрическую прогрессию. Если вместо 12 взять 9, то три числа составят арифметическую прогрессию. Найдите все такие тройки чисел.

258. Три числа, сумма которых равна 78, составляют геометрическую прогрессию. Их можно также рассматривать, как соответственно первый, третий и девятый члены арифметической прогрессии. Найдите все такие тройки чисел.

259. Три числа образуют геометрическую прогрессию. Если ко второму числу прибавить 2, то они образуют арифметическую прогрессию. Если после этого к третьему числу прибавить 16, то они снова образуют геометрическую прогрессию. Найдите все такие тройки чисел.

260. Три различных числа, сумма которых равна 9, составляют арифметическую прогрессию, а при записи в другом порядке — геометрическую прогрессию. Найдите все такие тройки чисел.

261*. Из четырех чисел первые три составляют геометрическую прогрессию, а последние три — арифметическую. Сумма крайних чисел равна 32, а сумма средних равна 24. Найдите все такие четверки чисел.

262*. Даны две геометрические прогрессии a_1, a_2, a_3 и b_1, b_2, b_3 с положительными членами, причем

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3.$$

Числа a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3 образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что $a_2 = b_2$.

△ Обозначим знаменатель первой геометрической прогрессии через q, второй — через q_1. Будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = b_1 + b_1q_1 + b_1q_1^2, \\ 2a_1b_1qq_1 = a_1b_1 + a_1b_1q^2q_1^2. \end{cases}$$

Упростим второе уравнение:

$$2qq_1 = 1 + q^2q_1^2, \quad (qq_1 - 1)^2 = 0, \quad qq_1 = 1.$$

Из последнего равенства выразим q_1 через q: $q_1 = \frac{1}{q}$. Тогда первое уравнение системы можно преобразовать:

$$a_1\left(1+q+q^2\right) = b_1\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}\right), \quad a_1q^2 = b_1, \quad a_3 = b_1.$$

Аналогично выразим q через q_1 и подставим это выражение в первое уравнение системы:

$$a_1\left(1+\frac{1}{q}+\frac{1}{q^2}\right) = b_1(1 + q_1 + q_1^2), \quad a_1 = b_1q_1^2 = b_3.$$

Из равенств $a_3 = b_1$ и $a_1 = b_3$ и следует, что

$$a_1 + b_1 = a_3 + b_3, \quad a_2 = b_2. \ ▲$$

263. Различные числа a, b, c, где $a \neq 0$, составляют геометрическую прогрессию, а числа

$$a + b,\ b + c,\ c + a$$

(в указанном порядке) — арифметическую прогрессию. Найдите все значения знаменателя геометрической прогрессии.

264. Три отличных от нуля числа составляют арифметическую прогрессию, а квадраты этих чисел — геометрическую прогрессию. Найдите все значения знаменателя геометрической прогрессии.

265*. Первый член конечной возрастающей арифметической прогрессии равен 0,2, а число членов больше 3. При делении каждого ее члена на номер члена получатся числа, образующие геометрическую прогрессию. Найдите все значения разности арифметической прогрессии.

266*. Докажите, что любая бесконечная арифметическая прогрессия, все члены которой — натуральные числа, содержит бесконечную геометрическую прогрессию.

△ Обозначим первый член арифметической прогрессии через a, разность — через d. Тогда число

$$a + da = a(1 + d)$$

является членом арифметической прогрессии. Следовательно, являются членами этой прогрессии и числа

$$a(1 + d)(1 + d) = a(1 + d)^2,\ a(1 + d)^3,\ \ldots,\ a(1 + \mathrm{d})^n\ (n \in N).$$

Но числа

$$a,\ a(1 + d),\ a(1 + d)^2,\ \ldots,\ a(1 + \mathrm{d})^{n-1},\ \ldots$$

образуют бесконечную геометрическую прогрессию. ▲

267*. Докажите, что если из бесконечной арифметической прогрессии

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots,\ a + (n - 1)d,\ \ldots\ (d \neq 0)$$

можно выделить бесконечную геометрическую прогрессию, то отношение $\frac{a}{d}$ рационально.

268*. Арифметическая и геометрическая прогрессии имеют по три различных члена. Первый и последний члены одной прогрессии равны соответственно первому и последнему члену другой прогрессии. У какой прогрессии средний член больше?

ГЛАВА II. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 7. Алгебраические уравнения 9—11

Литература: [8], [14], [31], [33^e], [37].

Уравнение вида

$$f_1(x) = f_2(x)$$

называется **алгебраическим,** если обе его части являются многочленами. В частности, алгебраическое уравнение может иметь вид

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ — многочлен.

Многие другие уравнения: дробно-рациональные, иррациональные и т. д. — можно привести к алгебраическим, поэтому решение алгебраических уравнений весьма важно для дальнейшего.

Одно замечание. При записи в ответе корней алгебраических уравнений **принято каждый корень писать столько раз, какова его кратность.** Например, для уравнения $(x - 3)^2 = 0$ считают, что оно имеет не один корень, а два: $x_1 = x_2 = 3$. С необходимостью этого соглашения мы уже сталкивались в § 1.

7.1. 9—11

Займемся уравнениями, которые решаются с помощью разложения многочленов на множители.

Решение алгебраических уравнений этим способом уже встречалось в § 1 и § 2, поэтому задачи данного пункта носят, в основном, повторительный характер.

269. Решите уравнения:

а) $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$;

б) $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$;

в) $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$;

г) $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0$;

д) $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 + x - 2 = 0$.

270. Решите уравнения:

а) $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$;

б) $9x^3 - 13x - 6 = 0$;

в) $25x^3 - 34x - 15 = 0$;

г) $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$;

д) $6x^4 - 9x^3 - 8x^2 + 3x + 2 = 0$.

271. Решите уравнения:

а) $x^4 - 22x^2 - 5x + 2 = 0$;

б) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$;

в) $x^4 + x^3 - 15x^2 - 10x + 50 = 0$;

г) $x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 3x + 1 = 0$.

272. Решите уравнение:

$$(x - a)^3 + (x - b)^3 = (2x - a - b)^3.$$

△ Соберем все члены в левой части уравнения и сумму кубов $(x-a)^3+(x-b)^3$ разложим на множители. После этого в левой части можно выделить общий множитель $2x-a-b$:

$$(2x - a - b)((x - a)^2 - (x - a)(x - b) + (x - b)^2 - (2x - a - b)^2) = 0,$$

$$(2x - a - b)(-3x^2 + 3(a + b)x - 3ab) = 0.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = a, \quad x_3 = b.$$

Ответ: $(a + b)/2$, a, b. ▲

273. Решите уравнения:

а) $(x^2 + x + 1)^2 = 3(x^4 + x^2 + 1)$;

б) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3 = 0$.

7.2. 9—11

Рассмотрим уравнения, решающиеся с помощью замены переменной.

274. Решите уравнения:

а) $(2x^2 + 3x - 1)^2 - 5(2x^2 + 3x + 3) + 24 = 0$;

б) $(x - 1)(x + 3)(x + 4)(x + 8) = -96$;

в) $(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 8) = 4x^2$.

△ а) Введем подстановку: $2x^2 + 3x - 1 = y$. Тогда

$$y^2 - 5(y + 4) + 24 = 0, \quad y^2 - 5y + 4 = 0.$$

Отсюда $y_1 = 4$, $y_2 = 1$. Зная y, находим x.

б) Умножим в левой части уравнения первый множитель на четвертый, а второй — на третий:

$$(x^2 + 7x - 8)(x^2 + 7x + 12) = -96.$$

Полагая $x^2 + 7x - 8 = y$, получаем:

$$y(y + 20) = -96, \quad y^2 + 20y + 96 = 0; \quad y_1 = -8, \quad y_2 = -12.$$

Осталось в обоих случаях вычислить x.

в) И здесь в левой части уравнения умножим первый множитель на четвертый, второй — на третий:

$$(x^2 - 9x + 8)(x^2 - 6x + 8) = 4x^2.$$

Но что дальше? А дальше разделим обе части уравнения на x^2, пользуясь тем, что значение $x = 0$ не является корнем уравнения:

$$(x - 9 + \frac{8}{x})(x - 6 + \frac{8}{x}) = 4.$$

Введем подстановку: $x - 9 + \frac{8}{x} = y$. Будем иметь:

$$y(y + 3) = 4, \quad y^2 + 3y - 4 = 0; \quad y_1 = 1, \quad y_2 = -4.$$

В обоих случаях найдем x.

Ответ: а) 1, −2, 1/2, −5/2; б) 0, −7, $(-1 \pm \sqrt{33})/2$; в) $5 \pm \sqrt{17}$. ▲

275. Решите уравнения:

а) $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 15$;

б) $(x^2 - 5x + 7)^2 - (x - 2)(x - 3) = 1$;

в) $9\left(x+\frac{4}{3}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right)(1-x)=4x\left(x+\frac{1}{3}\right)$;

г) $(x^2 - 4x)^2 - 2(x - 2)^2 - 7 = 0$;

д) $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) + 30 = 0$;

е) $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = \frac{9}{2}$;

ж) $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2$.

276. Решите уравнение:

$$(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0.$$

△ Преобразуем уравнение:

$x^2(x - 3)^2 - 16(x - 3)^2 + 9x^2 = 0,$

$x^2((x - 3)^2 + 9) - 16(x - 3)^2 = 0,$

$x^2(x^2 - 6x + 18) - 16(x - 3)^2 = 0,$

$x^4 - 6x^2(x - 3) - 16(x - 3)^2 = 0.$

Разделим последнее уравнение на $(x - 3)^2$ (проверьте, что при этом решения не теряются):

$$\left(\frac{x^2}{x-3}\right)^2 - 6\frac{x^2}{x-3} - 16 = 0.$$

Положим $\frac{x^2}{x-3} = y$. Тогда

$$y^2 - 6y - 16 = 0; \quad y_1 = 8, \quad y_2 = -2.$$

Теперь нетрудно найти x.

Ответ: $-1 \pm \sqrt{7}$. ▲

277. Решите уравнения:

а) $(x^2 - x + 1)^2 - 10x^2(x^2 - x + 1) + 9x^4 = 0;$

б) $(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1);$

в)* $x^2 + 12x + 4 = 6(x + 2)\sqrt{x}$.

278. Решите уравнение:

$$(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16.$$

△ Положим $x + 4 = y$. Почему именно $x + 4$? Откуда оно взялось? Вот откуда:

$$\frac{(x+3)+(x+5)}{2} = x+4.$$

Имеем:

$$(y - 1)^4 + (y + 1)^4 = 16.$$

Теперь нужно в левой части уравнения $y - 1$ и $y + 1$ возвести в квадрат, а затем то, что получилось, еще раз возвести в квадрат. После упрощений образуется биквадратное уравнение:

$$y^4 + 6y^2 - 7 = 0.$$

Его корни $y_{1,2} = \pm 1$. Отсюда легко найти x.

Ответ: -3, -5. ▲

279. Решите уравнения:

а) $x^4 + (x - 4)^4 = 82$;

б) $(x - a)^4 + (x - b)^4 = (2x - a - b)^4$;

в) $(x + 2)^2 + (x + 3)^3 + (x + 4)^4 = 2$;

г) $x^5 + (6 - x)^5 = 1056$;

д) $(x - 1)^5 + (x + 3)^5 = 242(x + 1)$;

е) $(x - 2)^6 + (x - 4)^6 = 64$;

ж) $(x + 1)^6 + (x + 2)^6 + (x + 3)^6 = 2$.

280. Решите уравнения:

а) $x = 1 - 5(1 - 5x^2)^2$;

б) $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$.

△ а) Положим $1 - 5x^2 = y$. Получим систему уравнений:

$$x = 1 - 5y^2, \quad y = 1 - 5x^2.$$

Поскольку от x мы здесь не избавились, то подстановка $1 - 5x^2 = y$ — это частичная замена переменной.

Для решения системы вычтем почленно уравнения:

$$x - y = 5(x^2 - y^2), \quad (x - y)(1 - 5x - 5y) = 0.$$

Теперь нужно рассмотреть два случая: $x - y = 0$ и $1 - 5x - 5y = 0$. Доведите решение до конца самостоятельно.

б) Можно применить в левой части уравнения формулу суммы кубов и дальше решать, как в задаче 272, но здесь это нелегкий путь. Решим данное уравнение другим способом.

Введем две подстановки:

$$x^2 + 3x - 4 = y, \quad 2x^2 - 5x + 3 = z.$$

Получим:

$$y^3 + z^3 = (y + z)^3, \quad 3yz(y + z) = 0,$$

$$(x^2 + 3x - 4)(2x^2 - 5x + 3)(3x^2 - 2x - 1) = 0.$$

Теперь нетрудно найти все корни уравнения.

Ответ: а) $(-1 \pm \sqrt{21})/10$, $(1 \pm \sqrt{17})/10$; б) 1, 1, 1, −4, 3/2, −1/3.

281. Решите уравнения:

а) $5(5 + x)(5 + 2x)(5 + 3x) = 3(3 + x)(3 + 2x)(3 + 3x)$;

б) $x = 2 + 3(2 + 3x^3)^3$;

в) $(x^2 - x - 1)^3 + (x^2 - 3x + 2)^3 = (2x^2 - 4x + 1)^3$;

г)* $64\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^3 - \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^3 = 63$.

7.3. 10—11

Рассмотрим возвратные уравнения, а также уравнения, решающиеся тем же методом, что и возвратные.

Алгебраическое уравнение $f(x) = 0$ называется **возвратным,** если у многочлена в левой его части, представленного в каноническом виде, равны коэффициенты членов, равноудаленных от его концов: первого и последнего, второго и предпоследнего и т. д. Общий вид такого уравнения —

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0.$$

Степень возвратного уравнения четной степени с помощью замены переменной можно уменьшить вдвое.

282. Решите уравнение:

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0.$$

△ Разделим это уравнение почленно на x^2:

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0, \quad \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0.$$

Положим $x + \frac{1}{x} = y$. Возведем это равенство в квадрат:

$$x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = y^2, \quad x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Уравнение принимает следующий вид:

$$y^2 - 2 - 5y + 8 = 0, \quad y^2 - 5y + 6 = 0.$$

Отсюда $y_1 = 2$, $y_2 = 3$. Теперь нетрудно найти x.

Ответ: 1, 1, $(3 \pm \sqrt{5})/2$. ▲

283. Решите уравнения:

а) $12x^4 + 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0$; б) $x^3 = \frac{17x - 10}{10x - 17}$;

в) $x^6 - 2x^5 + x^4 + 8x^3 + x^2 - 2x + 1 = 0$.

284. Докажите, что если возвратное уравнение имеет корень $x = \alpha$, то оно имеет и корень $x = \frac{1}{\alpha}$.

285°. Докажите, что любое возвратное уравнение нечетной степени имеет корень, равный -1.

286. Решите уравнение:

$$2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0.$$

△ Это возвратное уравнение нечетной степени. На основании утверждения опорной задачи 285 оно имеет корень $x = -1$. Разложим левую часть уравнения на множители:

$$(x + 1)(2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2) = 0.$$

Уравнение

$$2x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 2 = 0$$

также является возвратным. Решаем его уже известным способом. Доведите решение до конца самостоятельно.

Ответ: -1, 2, $1/2$, $-2 \pm \sqrt{3}$. ▲

287. Решите уравнения:

а) $x^5 + x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$; б) $x^4 = \dfrac{11x-6}{6x-11}$.

288. Решите уравнение:

$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0.$$

△ Данное уравнение возвратным не является. Однако давайте попробуем решать его тем же методом, что и возвратное, деля левую часть почленно на x^2:

$$x^2 + 2x - 11 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0, \quad \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 2\left(x + \frac{2}{x}\right) - 11 = 0.$$

Положим $x + \dfrac{2}{x} = y$. Тогда

$$x^2 + 4 + \frac{4}{x^2} = y^2, \quad x^2 + \frac{4}{x^2} = y^2 - 4.$$

Получаем:

$$y^2 - 4 + 2y - 11 = 0, \quad y^2 + 2y - 15 = 0.$$

Из квадратного уравнения найдем y, а затем из подстановки — x.

Ответ: 1, 2, $(-5 \pm \sqrt{17})/2$. ▲

289. Решите уравнения:

а) $x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$;

б) $16x^4 + 32x^3 - 369x^2 - 96x + 144 = 0$;

в) $2x^5 + 5x^4 - 6x^2 - x + 2 = 0$.

7.4. 9—11

Займемся уравнениями с параметрами. Сначала рассмотрим квадратные уравнения с параметрами.

290. Докажите, что уравнение

$$(a^2 + b^2 + c^2)x^2 + 2(a + b + c)x + 3 = 0$$

имеет действительные корни только при $a = b = c \neq 0$.

△ Запишем, что дискриминант D этого уравнения неотрицателен:

$\frac{1}{4}D = (a + b + c)^2 - 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq 0$,

$-2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 2ab + 2ac + 2bc \geq 0$,

$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc \leq 0$,

$(a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + c^2 - 2ac) + (b^2 + c^2 - 2bc) \leq 0$,

$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (b - c)^2 \leq 0$.

Последнее неравенство выполняется только при условии, что оно превращается в равенство, т. е. при $a = b = c$. ▲

291. Найдите все a, при которых уравнение

$$(x - a - a^2)^2 = x$$

имеет два различных действительных корня.

292. Решите квадратное уравнение:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

при условии $|a + c| = |b|$.

293. Найдите все значения a, при которых уравнения

$$x^2 - ax + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - x + a = 0$$

имеют общий корень.

△ Пусть эти уравнения имеют общий корень. Рассмотрим систему уравнений:

$$x^2 - ax + 1 = 0, \quad x^2 - x + a = 0.$$

Вычтем уравнения:

$$-ax + 1 + x - a = 0,$$
$$x(1 - a) + (1 - a) = 0,$$
$$(1 - a)(x + 1) = 0.$$

Тогда $1 - a = 0$ или $x + 1 = 0$, т. е. $a = 1$ или $x = -1$.

Если $x = -1$, то при подстановке хотя бы в первое уравнение системы получаем:

$$1 + a + 1 = 0, \quad a = -2.$$

Пока что мы с вами установили следующее: если уравнения имеют общий корень, то $a = 1$ или $a = -2$.

Проделаем обратный переход. Он обязателен.

Пусть $a = 1$. Каждое из уравнений принимает вид:

$$x^2 - x + 1 = 0.$$

Но это последнее уравнение не имеет действительных корней.

Пусть $a = -2$. Уравнения принимают вид:

$$x^2 + 2x + 1 = 0, \quad x^2 - x - 2 = 0.$$

Эти уравнения имеют общий корень $x = -1$.

Ответ: $a = -2$. ▲

294. Найдите все значения a, при которых уравнения

$$x^2 + ax + 8 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + a = 0$$

имеют общий корень.

295. Ученик, решая квадратное уравнение, допустил ошибку при переписывании, переставив местами старший коэффициент и свободный член уравнения. При этом оказалось, что один найденный им корень является корнем исходного уравнения, а второй корень, равный -3, — не является. Найдите исходное уравнение.

296*. Даны три числа a, b, c такие, что $a < b < c$. Докажите, что уравнение

$$(x - a)(x - b) + (x - a)(x - c) + (x - b)(x - c) = 0$$

имеет два различных корня x_1 и x_2, причем

$$a < x_1 < b < x_2 < c.$$

△ Очевидно, только дискриминантом квадратного уравнения здесь не обойдешься, поэтому попробуем другой способ решения.

Обозначим квадратный трехчлен в левой части уравнения через $f(x)$. Выясним знаки $f(a)$, $f(b)$ и $f(c)$:

$$f(a) = (a - b)(a - c) > 0, \quad f(b) = (b - a)(b - c) < 0,$$
$$f(c) = (c - a)(c - b) > 0.$$

Так как $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, то на графике функции $y = f(x)$ имеются точка, лежащая выше оси Ox, и точка, лежащая ниже оси Ox. Тогда график пересекает ось Ox в некоторой точке x_1, лежащей между a и b, т. е. $f(x_1) = 0$. По аналогичной причине уравнение $f(x) = 0$ имеет еще один корень x_2, заключенный между b и c. ▲

297*. Числа a, b, c удовлетворяют условиям $a > 0$, $b > a + c$. Докажите, что уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два различных корня.

7.5. 10—11

Перейдем к другим уравнениям с параметрами.

298. Решите уравнение:

$$x^3 - 2x^2 - (a^2 - a - 1)x + a^2 - a = 0.$$

△ Один корень уравнения здесь можно угадать: $x_1 = 1$ (проверьте!). Получаем:

$$(x - 1)(x^2 - x + a - a^2) = 0.$$

Корни квадратного уравнения

$$x^2 - x + a - a^2 = 0$$

также можно угадать: $x_2 = a$, $x_3 = 1 - a$.

Ответ: 1, a, $1 - a$. ▲

299. Решите уравнения:

а) $x^3 - (3a - 1)x^2 + (2a^2 - 3a)x + 2a^2 = 0$;

б) $x^3 - (2a + 1)x^2 + (a^2 + a)x + a - a^2 = 0$;

в) $x^3 - (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x - abc = 0$.

300. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$(x^2 - 3x + 2)(x^2 + 7x + 12) = a$$

имеет решение.

301. Найдите все пары чисел а и b, при которых уравнение

$$(3x^2 - 2a^2 + ab)^2 + (3a^2 - ab + 2b^2 - 12x)^2 + 4 = 4x - x^2$$

имеет решение.

302. Решите уравнение:

$$x^3 - 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}.$$

303. Решите уравнение:

$$(a - x^2)^2 = a + x.$$

△ Раскроем скобки, соберем все члены в левую часть уравнения:

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0.$$

Попробуем следующий прием: будем рассматривать это уравнение как квадратное относительно a:

$$a^2 - (2x^2 + 1)a + (x^4 - x) = 0.$$

Найдем его дискриминант:

$$D = (2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 - x) = 4x^2 + 4x + 1 = (2x + 1)^2.$$

Теперь получаем:

$$a = \frac{2x^2 + 1 \pm (2x+1)}{2}; \quad a_1 = x^2 + x + 1, \quad a_2 = x^2 - x.$$

Но нам нужно выразить x через a, а не a через x. Продолжим:

$$x^2 + x + 1 - a = 0; \quad x = \frac{-1 \pm \sqrt{4a-3}}{2} \left(a \geq \frac{3}{4}\right),$$

$$x^2 - x - a = 0; \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2} \left(a \geq -\frac{1}{4}\right).$$

Ответ: если $a \geq 3/4$, то

$$x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{4a-3})/2, \quad x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{4a+1})/2;$$

если $-1/4 \leq a < 3/4$, то $x_{1,2} = (1 \pm \sqrt{4a+1})/2$; если $a < -1/4$, то решений нет. ▲

304. Решите уравнения:

а) $x^3 - (4a + 3)x^2 + 4a(a + 2)x - 4(a^2 - 1) = 0$;

б) $x^3 + 2ax^2 + (a^2 + 2a)x + 2a = 0$;

в) $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$;

г) $x^2 - 2ax - \sqrt{x} + a^2 - a = 0$.

7.6. 10—11

В заключение займемся уравнениями, которые решаются разными способами, в том числе и такими, что до сих пор не встречались.

305. Решите уравнение:

$$10x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 8 = 0.$$

△ Сделаем уравнение приведенным:

$$x^4 + \frac{3}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{4}{5} = 0.$$

Дополним сумму $x^4 + \frac{3}{10}x^3$ до квадрата суммы:

$$\left(x^2 + \frac{3}{20}x\right)^2 + \left(\frac{191}{400}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{4}{5}\right) = 0.$$

Дискриминант квадратного трехчлена, стоящего во вторых скобках, отрицателен, поэтому трехчлен при всех x сохраняет постоянный знак, а именно положительный. Но тогда вся левая часть уравнения положительна; следовательно, уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений. ▲

306. Решите уравнения:

а) $x^4 + 8x - 7 = 0$; б) $x^4 + 4x - 1 = 0$;

в) $x^3 - \frac{24x^2}{x+2} + \frac{192x}{(x+2)^2} - \frac{512}{(x+2)^3} = 0.$

307. Докажите, что уравнение

$$x^4 - 3x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 0$$

не имеет отрицательных корней.

308. Решите уравнения:

а) $(x^2 + 1)^2 + (x^2 + 2)^3 = 8$; б) $x^3 - (2 + \sqrt{2})x + 2 = 0$.

309*. Решите уравнение:

$$x^3 + x^2 + x = -\frac{1}{3}.$$

△ Преобразуем уравнение:

$$3x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0,$$
$$(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) = -2x^3,$$
$$(x + 1)^3 = -2x^3.$$

Тогда

$$x + 1 = -x\sqrt[3]{2}, \quad x = -\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{1+\sqrt[3]{2}}$. ▲

310*. Решите уравнения:

а) $9x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$; б) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x - 1 = 0$.

311*. Решите уравнения:

а) $x^4 + x^2 + x\sqrt{2} + 2 = 0$; б) $2(x^2 + 2)^2 = 9(x^3 + 1)$.

312*. Решите уравнение:

$$f(f(x)) = 0, \text{ если } f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x.$$

313*. Решите уравнение:

$$(1 + x + x^2)(1 + x + x^2 + \dots + x^{10}) = (1 + x + x^2 + \dots + x^6)^2.$$

314*. Докажите, что все корни уравнения

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)\cdots(x + 2001) = 2001$$

меньше числа $\frac{1}{2000!}$.

△ Если $x = a$ — отрицательный корень уравнения, то он, разумеется, меньше $\frac{1}{2000!}$.

Пусть корень $x = a$ уравнения положителен. Имеем:

$$a+1=\frac{2001}{(a+2)(a+3)\cdots(a+2001)}<\frac{2001}{2\cdot3\cdot4\cdot\dots\cdot2001}=\frac{1}{2000!}.$$

Тем более число a меньше $\frac{1}{2000!}$. ▲

315*. Найдите все корни уравнения

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1,$$

удовлетворяющие условию $0 < x < 1$.

△ Введем тригонометрическую подстановку $x = \cos\alpha$, где $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2x^2 - 1,$

$\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(2x^2 - 1)^2 - 1 = 8x^4 - 8x^2 + 1.$

Исходное уравнение превращается в тригонометрическое:

$$8\cos\alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha = 1.$$

Умножим его на $\sin\alpha$:

$\sin 8\alpha = \sin\alpha, \quad \sin 8\alpha - \sin\alpha = 0, \quad 2\cos\frac{9\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha}{2} = 0.$

Приравняем нулю $\cos\frac{9\alpha}{2}$, получим:

$$\frac{9\alpha}{2} = \frac{\pi}{2},\ \alpha = \frac{\pi}{9};\quad \frac{9\alpha}{2} = \frac{3\pi}{2},\ \alpha = \frac{\pi}{3};\quad \frac{9\alpha}{2} = \frac{5\pi}{2},\ \alpha = \frac{5\pi}{9}.$$

Последнее значение α не принадлежит интервалу $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому его нужно отбросить.

Аналогичным образом решаем уравнение $\sin\frac{7\alpha}{2} = 0$:

$$\frac{7\alpha}{2} = \pi,\ \alpha = \frac{2\pi}{7};\quad \frac{7\alpha}{2} = 2\pi,\ \alpha = \frac{4\pi}{7}.$$

Корень $\alpha = \frac{4\pi}{7}$ также посторонний.

Ответ: $\cos\pi/9$, $\cos\pi/3$, $\cos 2\pi/7$. ▲

316*. Найдите все корни уравнений

а) $x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = \frac{1}{8}$; б) $8x^3 - 6x + 1 = 0$,

удовлетворяющие условию $|x| < 1$.

§ 8. Системы алгебраических уравнений 7—11

Литература: [8^{e}], [11], [18], [33], [37], [59^{e}].

8.1. 7—9

Рассмотрим вводные задачи на системы алгебраических уравнений.

317. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=1, \\ y+z=2, \\ z+x=5. \end{cases}$$

△ Напрашивается в самом начале вычесть два уравнения системы, например, первое и второе. Это вполне возможно. Но попробуем взамен сложить все три уравнения:

$$2x + 2y + 2z = 8, \quad x + y + z = 4.$$

Вычитая из последнего уравнения первое уравнение системы, находим z; вычитая второе, находим x; вычитая третье, находим y.

Ответ: (2; −1; 3). ▲

318. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y+z=4, \\ y+z+t=4, \\ z+t+x=-3, \\ t+x+y=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_2+x_3+x_4=3, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_9+x_{10}+x_1=3, \\ x_{10}+x_1+x_2=3. \end{cases}$

319. Найдите все значения a, при которых системы уравнений

а) $\begin{cases} x+2y=1, \\ ax+y=3, \\ 3x-4y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+ay=11, \\ ax+y=-1, \\ 3y-2x=11 \end{cases}$

имеют решение.

320. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 6, \\ yz = 12, \\ zx = 8. \end{cases}$$

△ Перемножим все три уравнения системы:

$$x^2y^2z^2 = 576, \quad xyz = \pm 24.$$

Разделив последнее уравнение на первое, второе и третье уравнения системы, найдем соответственно z, x и y.

Ответ: (2; 3; 4), (−2; −3; −4). ▲

321. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2y^2 = 4, \\ x^3y^2 = 2. \end{cases}$$

322. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} xy = 6z, \\ 2yz = 3x, \\ 3zx = 2y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy + yz = 8, \\ yz + zx = 9, \\ zx + xy = 5. \end{cases}$

323. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} xyz = -6, \\ yzt = 6, \\ ztx = -12, \\ txy = 4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1x_2x_3 = 1, \\ x_2x_3x_4 = -1, \\ x_3x_4x_5 = 1, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_{10}x_1x_2 = -1. \end{cases}$

324. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + xy + y = 1, \\ y^2 + xy + x = 1. \end{cases}$$

△ Вычтем уравнения системы:

$$x^2 + y - y^2 - x = 0, \quad (x - y)(x + y - 1) = 0.$$

Теперь нужно разобрать два случая: $x - y = 0$ и $x + y - 1 = 0$. Проделайте это самостоятельно.

Ответ: $(-1; -1)$, $(x; 1 - x)$, где x — любое число. ▲

325. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y + 1 = 0, \\ y^2 + x + 1 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + x = y^2 + y, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

326. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} y^2 - x^2 = 16, \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 = 17; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 3xy = 4, \\ y^2 - x^2 - 4x = 4. \end{cases}$

327. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} y + z = xyz, \\ z + x = xyz, \\ x + y = xyz. \end{cases}$$

△ Вычтем первое и второе, а также первое и третье уравнения системы:

$$y - x = 0, \quad z - x = 0.$$

Отсюда $x = y = z$. Тогда первое уравнение приводится к виду $2x = x^3$. Следовательно, $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{2}$.

Ответ: $(0; 0; 0)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. ▲

328*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x + y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 1 + x^2 = 2y, \\ 1 + y^2 = 2z, \\ 1 + z^2 = 2x; \end{cases}$ в) $\begin{cases} (x + y)^2 = z^2 + 4, \\ (y + z)^2 = x^2 + 9, \\ (z + x)^2 = y^2 + 36. \end{cases}$

8.2. 9—11

Весьма распространенный прием при решении систем уравнений — разложение какой-либо из частей (или обеих частей) уравнений системы на множители с целью упрощения системы, например, приведение одного из уравнений к виду, когда произведение двух выражений равно нулю. С подобным преобразованием мы уже встречались в п. 8.1. Вообще, нужно стремиться к исключению неизвестных, т. е. к сведению системы к одному уравнению с одним неизвестным или к системе с меньшим числом уравнений и неизвестных.

329. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy^2 - 2y^2 + 3x = 18, \\ 3xy + 5x - 6y = 24. \end{cases}$$

△ Преобразуем каждое из уравнений системы, выделяя в левой части множитель $x - 2$:

$y^2(x - 2) + 3x = 18, \quad 3y(x - 2) + 5x = 24;$

$y^2(x - 2) + (3x - 6) = 18 - 6, \quad 3y(x - 2) + (5x - 10) = 24 - 10;$

$(x - 2)(y^2 + 3) = 12, \quad (x - 2)(3y + 5) = 14.$

Разделим первое уравнение последней системы на второе для того, чтобы исключить неизвестное x:

$$\frac{y^2+3}{3y+5} = \frac{6}{7}, \quad 7y^2 + 21 = 18y + 30, \quad 7y^2 - 18y - 9 = 0.$$

Отсюда находим y, а затем из второго уравнения последней системы — x.
Ответ: (3; 3), (75/13; −3/7). ▲

330. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7(x + y), \\ x^3 - y^3 = 13(x - y). \end{cases}$$

△ Соберем все члены в каждом из уравнений системы в левую часть и вынесем за скобки в первом уравнении множитель $x + y$, во втором — $x - y$:

$(x + y)(x^2 - xy + y^2 - 7) = 0, \quad (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 13) = 0.$

При решении последней системы уравнений нужно рассмотреть четыре случая.
1) Пусть равны нулю первые множители в левых частях обоих уравнений:

$$x + y = 0, \quad x - y = 0.$$

Получаем решение (0; 0).

2) Пусть равны нулю первый множитель из первого уравнения и второй множитель из второго:

$$x + y = 0, \quad x^2 + xy + y^2 - 13 = 0.$$

Отсюда $x^2 = 13$, т. е. $x = \pm\sqrt{13}$. Имеем решения $(\sqrt{13}; -\sqrt{13})$ и $(-\sqrt{13}; \sqrt{13})$.

3) Пусть

$$x - y = 0, \quad x^2 - xy + y^2 - 7 = 0.$$

Находим решения $(\sqrt{7}; \sqrt{7})$ и $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$.

4) Пусть

$$x^2 - xy + y^2 - 7 = 0, \quad x^2 + xy + y^2 - 13 = 0,$$

т. е.

$$x^2 + xy + y^2 = 13, \quad x^2 - xy + y^2 = 7.$$

Складывая и вычитая эти уравнения, находим $x^2 + y^2$ и $2xy$:

$$x^2 + y^2 = 10, \quad 2xy = 6.$$

Сложим и вычтем последние уравнения:

$$(x + y)^2 = 16, \quad (x - y)^2 = 4,$$

т. е.

$$x + y = \pm 4, \quad x - y = \pm 2.$$

Осталось рассмотреть четыре подслучая, в зависимости от знаков в правых частях последних уравнений. Закончите решение самостоятельно.

Ответ: $(0; 0)$, $(3; 1)$, $(1; 3)$, $(-3; -1)$, $(-1; -3)$, $(\sqrt{13}; -\sqrt{13})$, $(-\sqrt{13}; \sqrt{13})$, $(\sqrt{7}; \sqrt{7})$, $(-\sqrt{7}; -\sqrt{7})$. ▲

331. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 26, \\ x^4 - y^4 = 20(x + y); \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x, \\ y^2 - 5x^2 = 4; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + 3y - y^3 = 0, \\ 3x + y - x^3 = 0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6xy + 10x - 3y = 47, \\ 6xy^2 - 8x - 3y^2 = 65; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^6 - y^6 = 63, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 21; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (x^2 + xy + y^2)(x + y) = 1 - y^3, \\ (x^2 - xy + y^2)(x - y) = 1 + y^3; \end{cases}$

ж)* $\begin{cases} 3x^2 - 2y^2 - 6x - 4y = 5, \\ 2x^2 + y^2 - 4x + 2y = 1; \end{cases}$

з)* $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y = 0, \\ 3x^2 + 2y^2 - 2x = 0. \end{cases}$

При решении некоторых систем двух уравнений с двумя неизвестными целесообразно одно из уравнений рассматривать как квадратное относительно одного из неизвестных.

332. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 - 7xy - 4y^2 + 9x - 18y + 10 = 0, \\ x^2 + 2y^2 = 6. \end{cases}$$

△ Будем первое уравнение системы считать квадратным относительно x. Расположим его члены в левой части по убыванию степени x:

$$2x^2 + (9 - 7y)x - 4y^2 - 18y + 10 = 0.$$

Найдем дискриминант квадратного уравнения:

$D = (9 - 7y)^2 - 8(-4y^2 - 18y + 10) =$

$= 81 - 126y + 49y^2 + 32y^2 + 144y - 80 =$

$= 81y^2 + 18y + 1 = (9y + 1)^2.$

Теперь получаем:

$$x = \frac{7y - 9 \pm (9y + 1)}{4}; \quad x_1 = 4y - 2, \quad x_2 = -\frac{y + 5}{2}.$$

Подставим эти выражения для x во второе уравнение системы и решим два образующихся квадратных уравнения. Доведите решение до конца самостоятельно.

Ответ: (2; 1), (−2; −1), (−22/9; −1/9). ▲

333. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 6y - xy - 2x + 11y = 3, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^2 - 7xy + 3y^2 + 13x - 4y - 7 = 0, \\ x^2 + xy + y^2 = 3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x^2 + 3xy + y^2 + 4x + 2y = 0, \\ x^2 - y^2 - 3x = 0. \end{cases}$

Перейдем к системам трех уравнений с тремя неизвестными.

334. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + yz = y + z, \\ y^2 + xz = x + z, \\ z^2 + xy = x + y. \end{cases}$$

△ Вычтем из первого уравнения системы второе, а из второго — третье:

$x^2 - y^2 - z(x - y) = y - x, \quad y^2 - z^2 - x(y - z) = z - y;$

$(x - y)(x + y - z + 1) = 0, \quad (y - z)(y + z - x + 1) = 0.$

Теперь нужно разобрать четыре случая, в зависимости от того, какой из множителей в левой части двух последних уравнений равен нулю. Проделайте это самостоятельно.

Ответ: (0; 0; 0), (1; 1; 1), (−1; 1; 1), (1; −1; 1), (1; 1; −1). ▲

335. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} (x+y)(x+z) = x, \\ (y+z)(y+x) = y, \\ (z+x)(z+y) = z; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + yz = 2, \\ y + zx = 2, \\ z + xy = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = z^2, \\ x^2 - xz + z^2 = y^2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = z^3 - y^3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x = (y-z)^2, \\ y = (z-x)^2, \\ z = (x-y)^2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + (y+z)^2 = 1, \\ y + (z+x)^2 = 1, \\ z + (x+y)^2 = 1. \end{cases}$

336. Решите систему уравнений:

$$x^2 = 1 + (y - z)^2, \quad y^2 = 2 + (z - x)^2, \quad z^2 = 8 + (x - y)^2.$$

△ Приведем систему к следующему виду:

$$(x + y - z)(x - y + z) = 1,$$
$$(y + z - x)(y - z + x) = 2,$$
$$(z + x - y)(z - x + y) = 8.$$

Перемножим все три полученных уравнения:

$$(x + y - z)^2 \cdot (x + z - y)^2 \cdot (y + z - x)^2 = 16.$$

Тогда

$$(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = \pm 4.$$

Теперь нужно рассмотреть два случая.

1) Пусть

$$(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = 4.$$

Разделим это уравнение последовательно на первое, второе и третье уравнения второй системы:

$$y + z - x = 4, \quad x + z - y = 2, \quad x + y - z = \frac{1}{2}.$$

Решая эту последнюю систему уравнений, получаем решение $\left(\frac{5}{4}; \frac{9}{4}; 3\right)$.

2) Пусть

$$(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = -4.$$

Аналогичным образом находим еще одно решение $\left(-\frac{5}{4}; -\frac{9}{4}; -3\right)$.

Ответ: (5/4; 9/4; 3), (–5/4; –9/4; –3). ▲

337. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 = (y-z)^2 - 8, \\ y^2 = (z-x)^2 - 16, \\ z^2 = (x-y)^2 + 32; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3x^2 + 3z^2 - 5xyz = 0, \\ 2x^3 + 2y^3 + 3xyz = 0; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} xy + x + y = 7, \\ yz + y + z = 11, \\ zx + z + x = 5. \end{cases}$

338. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 6, \\ xy + yz + zx = 11, \\ xyz = 6. \end{cases}$$

△ Выразим из первого уравнения системы $x + y$, а из третьего — xy:

$$x + y = 6 - z, \quad xy = \frac{6}{z}.$$

Теперь преобразуем второе уравнение, выражая его левую часть через z:

$$xy + z(x + y) = 11, \quad \frac{6}{z} + z(6 - z) = 11,$$

$$6 + 6z^2 - z^3 = 11z, \quad z^3 - 6z^2 + 11z - 6 = 0.$$

(Учащиеся математических классов, знакомые с теоремой Виета для кубического уравнения, могут сразу составить последнее уравнение.)

Проверяя делители свободного члена многочлена в левой части кубического уравнения, находим его корни: $z_1 = 1$, $z_2 = 2$, $z_3 = 3$. Нетрудно в каждом из этих трех случаев найти соответствующие значения x и y.

Ответ: (1; 2; 3), (1; 3; 2), (2; 1; 3), (2; 3; 1), (3; 1; 2), (3; 2; 1). ▲

339. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x - y + z = 2, \\ xz - yz - xy = -13, \\ xyz = -10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = (y+z)^3, \\ y = (z+x)^3, \\ z = (x+y)^3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + z = 8, \\ x^2 + 5y^2 + 4z^2 + 4xy + 4yz = 125, \\ x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 4xy - 4yz = 75; \end{cases}$

г)* $\begin{cases} x(1+y) = z^2(1+x), \\ y(1+z) = x^2(1+y), \\ z(1+x) = y^2(1+z); \end{cases}$

д)* $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 8. \end{cases}$

При решении систем уравнений широко применяется замена переменных. Особенно часто встречается решение систем с помощью симметрических многочленов.

Многочлен $P(x,y)$ с двумя переменными x и y называется **симметрическим,** если он он не меняет своего значения при замене x на y, а y на x: $P(x,y) = P(y,x)$. Примером может служить многочлен

$$P(x,y) = x^3y + y^3x + x + y.$$

Симметрические многочлены

$$u = x + y, \quad v = xy$$

называются **основными симметрическими многочленами**.

Любой симметрический многочлен можно представить в виде многочлена от основных симметрических многочленов. Доказательство этого предложения можно найти в книге [11].

Система двух алгебраических уравнений с двумя неизвестными называется **симметричной,** если левые части каждого из уравнений являются симметрическими многочленами, при условии, что правые части уравнений постоянны.

Перейдем к решению симметричных систем уравнений. Для дальнейшего полезно знать следующие формулы:

$$x^2 + y^2 = u^2 - 2v, \quad x^3 + y^3 = u^3 - 3uv, \quad x^4 + y^4 = u^4 - 4u^2v + 2v^2,$$

где u и v — знакомые нам основные симметрические многочлены: $u = x + y$, $v = xy$. Подумайте, как доказать эти формулы.

340. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ xy(x + y) = 6; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3 + y^3 + 2xy = 4, \\ x^2 - xy + y^2 = 1. \end{cases}$

△ а) Введем основные симметрические многочлены u и v. Получим:

$$u + v = 5, \quad uv = 6.$$

Находим решения последней системы уравнений:

$$u_1 = 2, \quad v_1 = 3; \quad u_2 = 3, \quad v_2 = 2.$$

Возвращаясь к переменным x и y, будем иметь две системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 3 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2. \end{cases}$$

Первая из них не имеет решений, а решениями второй являются пары (2; 1) и (1; 2).

б) Применим формулы, выражающие $x^2 + y^2$ и $x^3 + y^3$ через u и v:

$$u^3 - 3uv + 2v = 4, \quad u^2 - 3v = 1.$$

Из второго уравнения этой системы выразим v через u: $v = \frac{u^2 - 1}{3}$. Подставим это выражение в первое уравнение:

$$u^3 - (u^2 - 1)u + \frac{2}{3}(u^2 - 1) = 4,$$

$$3u + 2u^2 - 2 = 12,$$

$$2u^2 + 3u - 14 = 0.$$

Отсюда

$$u_1 = 2, \quad u_2 = -\frac{7}{2}; \quad v_1 = 1, \quad v_2 = \frac{15}{4}.$$

Осталось решить системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + y = -\frac{7}{2}, \\ xy = \frac{15}{4}. \end{cases}$$

Первая из них имеет решение (1; 1), а вторая не имеет решений.
Ответ: а) (2; 1), (1; 2); б) (1; 1). ▲

341. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} xy - 1 = x + y, \\ x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2y + y^2x = 30, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x^2 + 1)(y^2 + 1) = 10, \\ (x + y)(xy - 1) = 3; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = xy, \\ x^3 + 3xy + y^3 = 28; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xy + x + y = 5, \\ (x^3 + 1)(y^3 + 1) = 18; \end{cases}$

е) $\begin{cases} (xy + 8)(x + y) = 2, \\ x^3 + y^3 = 19; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} x + xy + y = 5, \\ x^3 + x^3y^3 + y^3 = 17; \end{cases}$

з) $\begin{cases} 9xy(x^2 + y^2) = 10(x + y)^2, \\ 3xy(x^3 + y^3) = 2(x + y)^3; \end{cases}$

и) $\begin{cases} 2x + 2y + 3xy = 0, \\ 9(x^4 + y^4) = 17(x + y)^2; \end{cases}$

к) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 7, \\ x^4 + x^2y^2 + y^4 = 133; \end{cases}$

л) $\begin{cases}(x-y)(x^2-y^2)=16,\\(x+y)(x^2+y^2)=40;\end{cases}$ м) $\begin{cases}xy=a^2-b^2,\\x^4+y^4=2(a^4+6a^2b^2+b^4).\end{cases}$

Существуют несимметричные системы уравнений, которые с помощью подстановок можно свести к симметричной системе. Иногда уравнение с одним неизвестным с помощью подстановок удается свести к симметричной системе двух уравнений с двумя неизвестными.

342. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}x^2+y=13,\\x^6+y^3=793.\end{cases}$$

△ Данная система не является симметричной. Положим $x^2 = z$. Тогда получим симметричную систему:

$$\begin{cases}z+y=13,\\z^3+y^3=793.\end{cases}$$

Введем основные симметрические многочлены $u = z + y$, $v = zy$. Будем иметь:

$$u = 13, \quad u^3 - 3uv = 793.$$

Отсюда $u = 13$, $v = 36$, т. е.

$$z + y = 13, \quad zy = 36.$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$z_1 = 9, \ y_1 = 4; \quad z_2 = 4, \ y_2 = 9.$$

Осталось найти x.
Ответ: (3; 4), (−3; 4), (2; 9), (−2; 9). ▲

343. Решите уравнение:

$$x\frac{19-x}{x+1}\left(x+\frac{19-x}{x+1}\right)=84.$$

△ Положим $\frac{19-x}{x+1}=y$. Тогда

$$xy(x + y) = 84.$$

Кроме того, преобразуем равенство с подстановкой:

$$19 - x = xy + y, \quad x + y + xy = 19.$$

Получается симметричная система уравнений:

$$xy(x + y) = 84, \quad x + y + xy = 19.$$

Доведите решение до конца самостоятельно.

Ответ: 3, 4, $6 \pm \sqrt{29}$. ▲

344. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 4(x-y)=xy, \\ 2(x^2+y^2)=5xy; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=4, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=7, \\ x^2+y^2-xy=13; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=72, \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=21, \\ x^2+y^2+xy=189; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x-y=4, \\ x^4+y^4=626. \end{cases}$

345. Решите уравнения:

а) $x^4 + (x - 2)^4 = 16$;

б) $x+\sqrt{17-x^2}+x\sqrt{17-x^2}=9$;

в) $\sqrt[8]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$;

г) $\sqrt[4]{1+x}+\sqrt[4]{1-x}=2$.

8.4. 10—11

Рассмотрим системы уравнений, при решении которых применяются другие замены переменных, чем в п. 8.3.

346. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} (x+y)^2-8(x+y)=33, \\ (x-y)^2+2(x-y)=80. \end{cases}$$

△ Введем подстановки:

$$x + y = z, \quad x - y = t.$$

Имеем систему уравнений:

$$z^2 - 8z - 33 = 0, \quad t^2 + 2t - 80 = 0.$$

Решим каждое из квадратных уравнений этой системы:

$$z_1 = 11, \quad z_2 = -3; \quad t_1 = 8, \quad t_2 = -10.$$

Теперь для нахождения x и y нужно комбинировать каждое значение z с каждым значением t. Получаются четыре системы линейных уравнений. Закончите решение самостоятельно.

Ответ: (11/2; 3/2), (21/2; 1/2), (5/2; −11/2), (−13/2; 7/2). ▲

347. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}(2x-y)^2-8(2x-y)=105,\\(2y-x)^2-2y+x=90;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x(x+y)=15,\\y(x-y)=-14;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x^2+6xy-y^2=54,\\2x^2-3xy+y^2=36;\end{cases}$ г) $\begin{cases}y-x=1,\\z-y=1,\\(x-1)^3+(y-2)^3+(z-3)^3=3.\end{cases}$

При решении некоторых систем уравнений используются однородные многочлены.

Многочлен $P(x,y)$ с двумя переменными x и y называется **однородным,** если все его члены имеют одну и ту же степень. Примером может служить многочлен

$$P(x,y) = 3x^2 - xy - 4y^2.$$

Уравнение вида $P(x,y) = 0$ называется **однородным,** если его левая часть есть однородный многочлен.

348. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}x^2-3xy-4y^2=0,\\x^3+y^3=65;\end{cases}$ б) $\begin{cases}x^2+2y^2=17,\\2xy-x^2=3.\end{cases}$

△ а) Первое из уравнений системы — однородное. Разделим его почленно на y^2. При этом решения не теряются: хотя пара (0; 0) удовлетворяет первому уравнению, но она не удовлетворяет второму. Получим:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-3\frac{x}{y}-4=0.$$

Положим $\frac{x}{y} = t$. Тогда

$$t^2 - 3t - 4 = 0; \quad t_1 = 4, \quad t_2 = -1.$$

Пусть $t = 4$, т. е. $x = 4y$. Будем иметь из второго уравнения:

$$64y^3 + y^3 = 65, \quad y^3 = 1; \quad y = 1, \quad x = 4.$$

Пусть $t = -1$, т. е. $x = -y$. В этом случае второе уравнение не имеет решений.

б) Ни одно из уравнений системы однородным не является. Однако однородное уравнение можно получить, если у уравнений системы уравнять свободные члены, умножая первое из них на 3, второе — на 17 и вычитая получившиеся уравнения, с тем, чтобы свободный член исключить:

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y^2 = 51, \\ 34xy - 17x^2 = 51, \end{cases}$$

откуда

$$20x^2 - 34xy + 6y^2 = 0, \quad 10x^2 - 17xy + 3y^2 = 0.$$

Образовалось однородное уравнение. Дальнейшее решение такое же, как и в предыдущей задаче.

Ответ: а) (4; 1); б) (3; 2), (−3; −2), $(\sqrt{3}/3;\ 5\sqrt{3}/3)$, $(-\sqrt{3}/3;\ -5\sqrt{3}/3)$. ▲

349. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + 2xy - 2y^2 = 6, \\ 3x^2 - 8xy + 4y^2 = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 32, \\ x^3 - 3xy^2 + 2y^3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x^2 + 2xy - 2y^2 = 3, \\ 2x^2 + 3xy - y^2 = 4; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x - y)(x^2 + y^2) = 5, \\ (x + y)(x^2 - y^2) = 9; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (x + y)(x + 2y)(x + 3y) = 60, \\ (y + x)(y + 2x)(y + 3x) = 105; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 2x^3 + x^2y + y^3 = 28, \\ x^3 + xy^2 + 2y^3 = 44. \end{cases}$

350*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y = 0, \\ 3x^2 + 2y^2 - 2x = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2 - y^2 = \sqrt{3}, \\ x^3y + y^3x = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3 - xyz = 21, \\ y^3 - xyz = 2, \\ z^3 - xyz = -5; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 2(x^2 + y^2) = xyz, \\ 10(y^2 + z^2) = 29xyz, \\ 5(z^2 + x^2) = 13xyz. \end{cases}$

351*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ 4xy(2y^2-1)=1. \end{cases}$$

△ Учитывая первое уравнение системы, введем тригонометрические подстановки

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha,$$

где $\alpha \in [0; 2\pi]$. Преобразуем второе уравнение:

$$4\cos\alpha \sin\alpha \cos 2\alpha = 1, \quad \sin 4\alpha = 1.$$

Тогда

$$4\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \ (k \in Z).$$

Так как $\alpha \in [0; 2\pi]$, то следует ограничиться значениями $k = 0, 1, 2, 3$. Получаем:

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8}, \quad \alpha_2 = \frac{5\pi}{8}, \quad \alpha_3 = \frac{9\pi}{8}, \quad \alpha_4 = \frac{13\pi}{8}.$$

Ответ: $(\cos\pi/8; \sin\pi/8)$, $(\cos 5\pi/8; \sin 5\pi/8)$, $(\cos 9\pi/8; \sin 9\pi/8)$, $(\cos l3\pi/8; \sin l3\pi/8)$. ▲

352*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ xy(2-x^2)=2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x+x^2y=y, \\ 2y+y^2x=x. \end{cases}$

8.5. 10—11

Некоторые системы уравнений решаются с помощью неравенств.

353. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2x=(y+z)^2, \\ 2y=(z+x)^2, \\ 2z=(x+y)^2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-xy-xz+z^2=0, \\ x^2-xz-yz+3y^2=2, \\ y^2+xy+yz-z^2=2. \end{cases}$

△ а) Из уравнений системы видно, что неизвестные x, y и z должны быть неотрицательными.

Попробуем использовать неравенства. Может ли быть, что $x > y$?

Допустим, что $x > y$. Тогда из двух первых уравнений следует, что

$$(y+z)^2 > (z+x)^2, \quad y+z > z+x, \quad y > x.$$

Но неравенства $x > y$ и $y > x$ несовместимы. Остается единственная возможность — $x = y$.

Аналогично доказывается невозможность неравенств

$$x < y, \quad x > z, \quad x < z, \quad y > z, \quad y < z.$$

Таким образом, $x = y = z$. Дальнейшее решение несложно.

б) Сложим два первых уравнения системы и вычтем третье. Зачем? Затем, чтобы получить слагаемые $-2xy$, $-2xz$, $-2yz$ и сгруппировать их вместе с x^2, y^2, z^2 в квадраты разностей. Будем иметь:

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 + 2z^2 - 2xz - 2yz = 0,$$

$$(x - y)^2 + (y - z)^2 + (x - z)^2 = 0.$$

Полученная сумма квадратов неотрицательна, причем она равна нулю только тогда, когда каждый квадрат равен нулю. Отсюда

$$x - y = 0, \quad y - z = 0, \quad x - z = 0 \Rightarrow x = y = z.$$

Последующее решение также просто.

Ответ: а) (0; 0; 0), (1/2; 1/2; 1/2), б) (1; 1; 1), (–1; –1; –1). ▲

354. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2xz, \\ y^2 + z^2 = 2xy, \\ z^2 + x^2 = 2yz; \end{cases}$

б) $\begin{cases} (x+y)^2 = 3xz, \\ (y+z)^2 = 3xy, \\ (z+x)^2 = 3yz; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 8x = (y+z)^3, \\ 8y = (z+x)^3, \\ 8z = (x+y)^3; \end{cases}$

г)* $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 3, \\ x^3+y^3+z^3 = 3, \\ x^4+y^4+z^4 = 3; \end{cases}$

д)* $\begin{cases} 10x^2 + 5y^2 - 2xy - 38x - 6y + 41 = 0, \\ 3x^2 - 2y^2 + 5xy - 17x - 6y + 20 = 0; \end{cases}$

е)* $\begin{cases} x^2 = y^3 - 2y^2 + 2y, \\ x^4 + y^4 = 2; \end{cases}$

ж)* $\begin{cases} x + y + z + t = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1, \\ x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 1, \\ x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 1; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x = (y+z+t)^2, \\ y = (x+z+t)^2, \\ z = (x+y+t)^2, \\ t = (x+y+z)^2. \end{cases}$

Наконец, рассмотрим разные способы решения систем уравнений. Среди этих способов встретятся как уже знакомые, так и некоторые новые.

355. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2y^2+xy^2+x^2y+xy+x+y+3=0, \\ x^2y+xy+1=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y+z=28, \\ x^2+y^2+z^2=294, \\ 13xy=50z. \end{cases}$

△ а) Преобразуем первое уравнение системы, группируя первое, второе и предпоследнее слагаемые и вынося y за скобки:

$$y(x^2y + xy + 1) + x^2y + xy + x + 3 = 0, \quad x^2y + xy + x + 3 = 0.$$

Получаем систему уравнений:

$$x^2y + xy + x + 3 = 0, \quad x^2y + xy + 1 = 0.$$

Вычитая эти уравнения, находим x. Осталось найти y.

б) Из первого уравнения системы $x + y = 28 - z$. Преобразуем второе уравнение таким образом, чтобы свести его к уравнению с одним неизвестным z:

$$(x + y)^2 - 2xy + z^2 = 294, \quad (28 - z)^2 - \frac{100}{13}z + z^2 = 294.$$

Из последнего уравнения найдем z. Затем, зная $x + y$ и xy, находим x и y.
Ответ: а) $(-2; -1/2)$; б) $(10; 5; 13)$, $(5; 10; 13)$. ▲

356. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y+z=13, \\ x^2+y^2+z^2=91, \\ y^2=xz; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+y=3z, \\ x^2+y^2=5z, \\ x^3+y^3=9z; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^2-xy+ay=0, \\ y^2-xy-4ax=0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=a, \\ x^4+y^4=a^4; \end{cases}$

д) $\begin{cases} xt=yz, \\ x+t=13, \\ y+z=11, \\ x^2+y^2+z^2+t^2=170. \end{cases}$

357*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=7, \\ y^2+yz+z^2=13, \\ z^2+zx+x^2=19; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+xz=x^2+2, \\ xy+yz=y^2+3, \\ xz+yz=z^2+4. \end{cases}$

△ а) Умножим первое уравнение системы на $x-y$, второе — на $y-z$, третье — на $z-x$. Для чего? Для того, чтобы получить линейное уравнение с x, y и z. Будем иметь:

$$x^3-y^3=7(x-y),\quad y^3-z^3=13(y-z),\quad z^3-x^3=19(z-x).$$

Сложим все эти уравнения:

$$0=7x-7y+13y-13z+19z-19x,$$

$$-12x+6y+6z=0,\quad z=2x-y.$$

Подставим полученное выражение для z в третье уравнение первоначальной системы:

$$(2x-y)^2+(2x-y)x+x^2=19,\quad 7x^2-5xy+y^2=19.$$

Теперь нужно заняться системой с двумя неизвестными x и y:

$$7x^2-5xy+y^2=19,\quad x^2+xy+y^2=7.$$

Подобные системы встречались в п. 8.4. Исключим свободные члены, для чего первое уравнение умножим на 7, второе — на 19 и новые уравнения вычтем:

$$30x^2-54xy-12y^2=0,\quad 5x^2-9xy-2y^2=0.$$

Получилось однородное уравнение. Из первоначальной системы уравнений видно, что $y\neq 0$ (подумайте, почему). Разделим последнее уравнение почленно на y^2 и положим $\frac{x}{y}=t$. Тогда $5t^2-9t-2=0$.

Доведите решение до конца самостоятельно.

б) Выразим из системы произведения xy, yz и zx через x^2, y^2 и z^2. С этой целью сложим все три уравнения:

$$2xy+2xz+2yz=x^2+y^2+z^2+9,$$

$$xy+xz+yz=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2+9).$$

Теперь вычтем из последнего уравнения каждое из уравнений первоначальной системы:

$$yz=\frac{1}{2}(y^2+z^2-x^2+5),$$

$$xz = \frac{1}{2}(x^2 + z^2 - y^2 + 3),$$
$$xy = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 - z^2 + 1).$$

Но что же делать с этой новой системой? В каждом из ее уравнений избавимся от знаменателей, соберем все члены с неизвестными в левых частях и разложим левые части на множители:

$2yz - y^2 - z^2 + x^2 = 5,$
$2xz - x^2 - z^2 + y^2 = 3,$
$2xy - x^2 - y^2 + z^2 = 1;$
$x^2 - (y - z)^2 = 5,$
$y^2 - (x - z)^2 = 3,$
$z^2 - (x - y)^2 = 1;$
$(x + y + z)(x - y + z) = 5,$
$(y + x - z)(y - x + z) = 3,$
$(z + x - y)(z - x + y) = 1.$

Перемножим все три уравнения последней системы:

$$(x + y - z)^2(x + z - y)^2(y + z - x)^2 = 15,$$
$$(x + y - z)(x + z - y)(y + z - x) = \pm\sqrt{15}.$$

Далее нужно разобрать два случая, в зависимости от знака перед $\sqrt{15}$. План дальнейшего решения очевиден.

Ответ: а) (2; 1; 3), (−2; −1; −3); б) $(2\sqrt{15}/3;\ 3\sqrt{15}/5;\ 4\sqrt{15}/15)$, $(-2\sqrt{15}/3;\ -3\sqrt{15}/5;\ -4\sqrt{15}/15)$. ▲

358*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x + y^2 = z^3, \\ x^2 + y^3 = z^4, \\ x^3 + y^4 = z^5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x(1+y) = z^2(1+x), \\ y(1+z) = x^2(1+y), \\ z(1+x) = y^2(1+z); \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x^2 + y^2)(x+y) = 15xy, \\ (x^4 + y^4)(x^2 + y^2) = 85x^2y^2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} (x+y)(x+z) = x, \\ (y+z)(y+x) = 2y, \\ (z+x)(z+y) = 3z; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x+y+z=0, \\ x^2+y^2-z^2=20, \\ x^4+y^4-z^4=560; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x+yzt=2, \\ y+xzt=2, \\ z+xyt=2, \\ t+xyz=2. \end{cases}$

359*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2-yz=3, \\ y^2-xz=4, \\ z^2-xy=5. \end{cases}$$

△ Умножим первое уравнение на y, второе — на z, третье — на x и полученные уравнения сложим — для того, чтобы составить линейное уравнение с x, y и z:

$$x^2y - y^2z = 3y, \quad y^2z - xz^2 = 4z, \quad xz^2 - x^2y = 5x.$$

После сложения этих уравнений будем иметь:

$$5x + 3y + 4z = 0.$$

Теперь умножим первое уравнение первоначальной системы на z, второе — на x, третье — на y и новые уравнения также сложим:

$$x^2z - yz^2 = 3z, \quad xy^2 - x^2z = 4z, \quad yz^2 - xy^2 = 5y.$$

Отсюда

$$4x + 5y + 3z = 0.$$

Из полученной системы линейных уравнений

$$5x + 3y + 4z = 0, \quad 4x + 5y + 3z = 0$$

выразим x и y через z. Для этой цели можно каждое из уравнений разделить почленно на z (убедитесь, что при таком делении решения первоначальной системы не теряются):

$$5\frac{x}{z} + 3\frac{y}{z} + 4 = 0, \quad 4\frac{x}{z} + 5\frac{y}{z} + 3 = 0.$$

Умножим первое уравнение последней системы на 5, второе — на -3 и сложим эти новые уравнения:

$$13\frac{x}{z} = -11, \quad \frac{x}{z} = -\frac{11}{13}.$$

Теперь нетрудно найти отношение $\frac{y}{z}$: $\frac{y}{z} = \frac{1}{13}$. Тогда

$$x = -\frac{11}{13}z, \quad y = \frac{1}{13}z.$$

Нужно подставить эти выражения для x и y хотя бы в третье уравнение исходной системы и найти z. Затем находим x и y.

Ответ: (11/6; −1/6; −13/6), (−11/6; 1/6; 13/6). ▲

360*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x-2y+3z=9, \\ x^2+4y^2+9z^2=189, \\ 3xz=4y^2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x^2-7xy+3y^2=z^2, \\ 4y^2+4xy-3z^2=21x^2, \\ 8x^3-y^3=(x-27)(z^2-x^2); \end{cases}$

в) $\begin{cases} x^3+y^3-z^3+4=xyz, \\ x^3-y^3+z^3-8=xyz, \\ -x^3+y^3+z^3+2=xyz; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x+y=5, \\ xz+yt=7, \\ xz^2+yt^2=11, \\ xz^3+yt^3=19. \end{cases}$

361*. Какому условию (со словами «тогда и только тогда») должны удовлетворять числа a, b и c для того, чтобы система уравнений с одним неизвестным

$$\begin{cases} ax^2+bx+c=0, \\ bx^2+cx+a=0, \\ cx^2+ax+b=0 \end{cases}$$

имела решение?

§ 9. Дробно-рациональные уравнения 9—11

Литература: [8^e], [11], [37^e], [39^e], [50].

Уравнение

$$f(x) = \varphi(x)$$

называется **рациональным,** если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ являются рациональными.

Рациональное уравнение называется **дробно-рациональным,** если по меньшей мере одна из частей уравнения является дробно-рациональной функцией.

9.1. 9—11

Чаще всего дробно-рациональное уравнение сводят к алгебраическому с помощью прямолинейного приведения всех его членов к общему знаменателю. Разумеется, этот способ приводит к цели только тогда, когда полученное алгебраическое уравнение мы сумеем решить.

При подобном решении дробно-рационального уравнения область определения уравнения, вообще говоря, расширяется (или, в крайнем случае, остается неизменной). Если это происходит, то у уравнения могут появиться посторонние корни. В таких случаях нужна проверка найденных корней по первоначальному уравнению в следующей форме: не обращается ли знаменатель хотя бы одной дроби, входящей в дробно-рациональное уравнение, при этих значениях неизвестного в нуль?

362. Решите уравнение:

$$\frac{x^2+x+2}{3x^2+5x-14}=\frac{x^2+x+6}{3x^2+5x-10}.$$

△ Освободимся в уравнении от знаменателей дробей. При этом целесообразно суммы $x^2 + x$ и $3x^2 + 5x$ в левой и правой его частях считать за одно слагаемое:

$$\frac{(x^2+x)+2}{(3x^2+5x)-14}=\frac{(x^2+x)+6}{(3x^2+5x)-10}.$$

Теперь получаем:

$(x^2 + x)(3x^2 + 5x) - 10(x^2 + x) + 2(3x^2 + 5x) - 20 =$

$= (x^2 + x)(3x^2 + 5x) - 14(x^2 + x) + 6(3x^2 + 5x) - 84,$

$4(x^2 + x) - 4(3x^2 + 5x) + 64 = 0, \quad x^2 + x - 3x^2 - 5x + 16 = 0,$

$2x^2 + 4x - 16 = 0, x^2 + 2x - 8 = 0.$

Корни последнего уравнения — $x_1 = 2$, $x_2 = -4$. Сделаем проверку по исходному уравнению: не обращается ли какой-либо из двух знаменателей дробей в этом уравнении в нуль? Оказывается, не обращается. Значит, это корни исходного уравнения.

Ответ: 2, –4. ▲

363. Решите уравнения:

а) $\left(\frac{x}{x-1}\right)^2+\left(\frac{x}{x+1}\right)^2=\frac{45}{16}$;

б) $\frac{1+x^4}{(1+x)^4}=\frac{17}{81}$;

в) $\frac{(x-1)^2x}{(x^2-x+1)^2}=\frac{2}{9}$;

г) $\frac{(x^2+1)^2}{x(x+1)^2}=\frac{625}{112}$;

д) $\frac{(x^2+x+1)^2}{(x+1)^2(x^2+1)}=\frac{49}{45}$;

е) $x^2+3x+2=15\frac{x^2+5x+10}{x^2+7x+12}$;

ж) $\frac{2x}{x^2-4x+2}+\frac{3x}{x^2+x+2}+\frac{5}{4}=0$;

з) $\frac{x^2+2x+2}{x+1}+\frac{x^2+8x+20}{x+4}=\frac{x^2+4x+6}{x+2}+\frac{x^2+6x+12}{x+3}$.

364. Решите уравнение:

$$\frac{x+1}{x-1}+\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3}+\frac{x+4}{x-4}=4.$$

△ У каждой из четырех дробей в левой части уравнения выделим целую часть. Например, первую из них преобразуем следующим образом:

$$\frac{x+1}{x-1}=\frac{(x-1)+2}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}.$$

Будем иметь:

$$1+\frac{2}{x-1}+1-\frac{4}{x+2}+1-\frac{6}{x+3}+1+\frac{8}{x-4}=4,$$

$$\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}+\frac{4}{x-4}=0,$$

$$(x+2)(x+3)(x-4)-2(x-1)(x+3)(x-4)-$$

$$-3(x-1)(x+2)(x-4)+4(x-1)(x+2)(x+3)=0.$$

Нетрудно подсчитать, что в левой части последнего уравнения после раскрытия всех скобок и приведения подобных членов член с x^3 исчезнет. Для нахождения остальных членов разложения с целью ускорения вычислений используем следующий прием. Положим

$$(x + 2)(x + 3)(x - 4) - 2(x - 1)(x + 3)(x - 4) -$$

$$- 3(x - 1)(x + 2)(x - 4) + 4(x - 1)(x + 2)(x + 3) = ax^2 + bx + c,$$

где a, b, c — неизвестные коэффициенты. В этом тождестве переменной x дадим значения 1, –2 и 4 для того, чтобы получить систему линейных уравнений с неизвестными a, b и c:

$$a + b + c = -36, \quad 4a - 2b + c = -36, \quad 16a + 4b + c = 504.$$

Из этой системы находим неизвестные:

$$a = 30, \quad b = 30, \quad c = -96.$$

Примененный здесь метод упрощения левой части уравнения называется **методом неопределенных коэффициентов.** Он фактически уже использовался раньше (см. § 1, решение задачи 51).

Осталось решить соответствующее квадратное уравнение:

$$30x^2 + 30x - 96 = 0, \quad 5x^2 + 5x - 16 = 0; \quad x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{345}}{10}.$$

Ответ: $(-5 \pm \sqrt{345})/10$. ▲

365. Решите уравнения:

а) $\dfrac{24}{x^2 - 2x} = \dfrac{12}{x^2 - x} + x^2 - x;$ б) $\dfrac{x-3}{x-1} + \dfrac{x+3}{x+1} = \dfrac{x+6}{x+2} + \dfrac{x-6}{x-2};$

в) $\dfrac{5}{x-1} + \dfrac{4}{x+2} + \dfrac{21}{x-3} = \dfrac{5}{x+1} + \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{21}{x+3};$

г)* $\dfrac{1}{6x^2 - 7x + 2} + \dfrac{1}{12x^2 - 17x + 6} = x^2 - 5x.$

9.2. 10—11

Часто при решении дробно-рациональных уравнений применяется метод замены переменных.

366. Решите уравнение:

$$\left(\frac{x+6}{x-1}\right)^2+3\frac{x-1}{x+6}=\frac{515}{8}.$$

△ Напрашивается подстановка $\frac{x+6}{x-1}=y$. Получаем:

$$y^2+\frac{3}{y}=\frac{515}{8}, \quad 8y^3-515y+24=0.$$

Для нахождения целых корней последнего уравнения нужно проверить делители свободного члена 24. Можно заметить, что если уравнение имеет целый корень, то он четен. Из четных делителей числа 24 подходит 8 (проверьте!). Будем иметь после деления левой части на $y-8$:

$$(y-8)(8y^2+64y-3)=0.$$

Отсюда

$$y_1=8, \quad y_{2,3}=\frac{-16\pm\sqrt{262}}{4}.$$

Теперь легко находится x.

Ответ: 2, $(-211\pm14\sqrt{262})/69$. ▲

367. Решите уравнения:

а) $\frac{3x^2}{x+1}+\frac{x+1}{x^2}=4;$

б) $\frac{x^2-x}{x^2-x+1}-\frac{x^2-x+2}{x^2-x-2}=1;$

в) $\frac{1}{x^2+2x-3}+\frac{18}{x^2+2x+2}=\frac{18}{x^2+2x+1};$

г) $\frac{3}{(x+1)(x+2)}+\frac{4}{(x-1)(x+4)}=\frac{1}{2};$

д) $\frac{x-2}{x-1}+\frac{x+2}{x+1}+\frac{28}{15}=\frac{x-4}{x-3}+\frac{x+4}{x+3};$

е) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+5}+\frac{1}{x+7}=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}+\frac{1}{x+6};$

ж) $\dfrac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1}=x+\dfrac{1}{x}$; з) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=6\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$;

и) $\dfrac{(x+1)(x-3)}{5(x+2)(x-4)}+\dfrac{(x+3)(x-5)}{9(x+4)(x-6)}=\dfrac{2(x+5)(x-7)}{13(x+6)(x-8)}+\dfrac{92}{585}$;

к) $\dfrac{12|x|-3x^2}{x^2-4|x|+1}=x^2-4|x|$; л) $\dfrac{x^4+1}{x(x^2+1)}=\dfrac{41}{15}$.

368*. Решите уравнение:

$$x^2+\frac{x^2}{(x+1)^2}=1.$$

△ Отнимем от обеих частей уравнения $\dfrac{2x^2}{x^2+1}$ для того, чтобы получить в левой части квадрат разности:

$$\left(x-\frac{x}{x+1}\right)^2=1-\frac{2x^2}{x+1},\quad \frac{x^4}{(x+1)^2}=1-\frac{2x^2}{x+1}.$$

А теперь очевидная подстановка — $\dfrac{x^2}{x+1}=y$. Закончите решение самостоятельно.

Ответ: $(\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1})/2$. ▲

369*. Решите уравнения:

а) $x^2+\dfrac{4x^2}{(x+2)^2}=5$; б) $x^2+\dfrac{25x^2}{(2x+5)^2}=\dfrac{74}{49}$;

в) $\dfrac{x+6}{x-6}\left(\dfrac{x-4}{x+4}\right)^2+\dfrac{x-6}{x+6}\left(\dfrac{x+9}{x-9}\right)^2=2\dfrac{x^2+36}{x^2-36}$;

г) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}$; д) $64\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^3-\left(\dfrac{x+3}{x+2}\right)^3=63$;

е) $31\left(\dfrac{24-5x}{x+1}+\dfrac{5-6x}{x+4}\right)+370=29\left(\dfrac{17-7x}{x+2}+\dfrac{8x+55}{x+3}\right)$.

9.3. 10—11

Некоторые дробно-рациональные уравнения решаются с помощью переноса всех членов в левую часть уравнения и группировки членов с целью выделить общий множитель всей суммы.

370. Решите уравнение:

$$\frac{2}{x+8}+\frac{5}{x+9}=\frac{3}{x+15}+\frac{4}{x+6}.$$

△ Представим уравнение в таком виде:

$$\frac{5}{x+9}-\frac{4}{x+6}=\frac{3}{x+15}-\frac{2}{x+8}.$$

Приведем разности в левой и правой частях этого уравнения к общим знаменателям:

$$\frac{x-6}{(x+9)(x+6)}=\frac{x-6}{(x+15)(x+8)},$$

$$(x-6)\left(\frac{1}{(x+9)(x+6)}-\frac{1}{(x+15)(x+8)}\right)=0.$$

Приравняем нулю каждый из множителей в левой части последнего уравнения. Решите задачу до конца самостоятельно.

Ответ: 6, −33/4. ▲

371. Решите уравнения:

а) $\frac{1}{x-8}+\frac{1}{x-6}+\frac{1}{x+6}+\frac{1}{x+8}=0;$

б) $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x-4}{x+4}=\frac{x-2}{x+2}+\frac{x-3}{x+3};$

в) $\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49};$

г) $\frac{2}{x-2}+\frac{3}{x-3}+\frac{1}{x-1}=\frac{6}{x+6};$

д) $\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(x-\frac{4}{x}\right)\left(x-\frac{9}{x}\right)=(x+1)(x+2)(x+3);$

е) $\frac{3}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{4}{x-2}+\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x-4}+\frac{3}{x-5}=0;$

ж) $\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x+3a}+\frac{1}{x+4a}=0.$

§ 10. Системы рациональных уравнений 9—11

Литература: [8^e], [11], [37^e], [50].

Поскольку мы уже рассматривали системы алгебраических уравнений в § 8, будем заниматься системами рациональных уравнений только для случая, когда среди уравнений системы имеется по меньшей мере одно дробно-рациональное.

10.1. 9—11

При решении таких систем уравнений нередко приводит к успеху сведение к системе алгебраических уравнений с помощью освобождения в дробно-рациональных уравнениях, входящих в систему, от знаменателей дробей.

372. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1, \\ \dfrac{1}{3-x}+\dfrac{1}{3-y}=2. \end{cases}$$

△ Преобразуем каждое из уравнений системы в алгебраическое:

$y + x = xy, \quad 6 - x - y = 18 - 6x - 6y + 2xy;$

$xy = x + y, \quad 2xy = 5x + 5y - 12.$

Получилась симметричная система (см. § 8, п. 8.3). Поэтому введем новые переменные

$$u = x + y, \quad v = xy.$$

Образуется система линейных уравнений

$$v = u, \quad 2v = 5u - 12.$$

Из этой системы находим u и v. Зная u и v, вычислим x и y.
Ответ: (2; 2). ▲

373. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} xy+24=\dfrac{x^3}{y}, \\ xy-6=\dfrac{y^3}{x}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{4}{x+y}+\dfrac{4}{x-y}=3, \\ (x+y)^2+(x-y)^2=20; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x+y=\dfrac{2}{z}, \\ y+z=\dfrac{2}{x}, \\ z+x=\dfrac{2}{y}. \end{cases}$

374. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y+z}=\dfrac{1}{2}, \\ \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z+x}=\dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{4}. \end{cases}$$

△ В каждом из уравнений системы избавимся от знаменателей дробей:

$$2(x+y+z)=xy+xz,$$
$$3(x+y+z)=xy+yz,$$
$$4(x+y+z)=xz+yz.$$

Положим $x+y+z=t$. Тогда

$$xy+xz=2t, \quad xy+yz=3t, \quad xz+yz=4t.$$

Из этой системы выразим каждое из произведений xy, xz и yz через t. Для этого проще всего сложить все три уравнения:

$$2xy+2xz+2yz=9t, \quad xy+xz+yz=\frac{9}{2}t.$$

Вычитая из последнего уравнения каждое из уравнений системы, получаем:

$$yz=\frac{5}{2}t, \quad xz=\frac{3}{2}, \quad xy=\frac{1}{2}t.$$

Перемножим все уравнения последней системы:

$$x^2y^2z^2=\frac{15}{8}t^3, \quad xyz=\pm\frac{\sqrt{30}}{4}t\sqrt{t}.$$

(Очевидно, t должно быть неотрицательным.)

Надеюсь, план последующего решения ясен. Выполните его самостоятельно.

Ответ: (23/10; 23/6; 23/2). ▲

375. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x=\dfrac{2y+3}{3y-2}, \\ y=\dfrac{x-4}{11-2x}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x, \\ \dfrac{1+y^2}{1+x^2}=5; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y+z=\dfrac{7}{2}, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{7}{2}, \\ xyz=1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x}{y+z}=x+y+z, \\ \dfrac{y}{x+y+1}=x+y+z, \\ \dfrac{z}{x+y-1}=x+y+z; \end{cases}$ д)* $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{4}{z}=1, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{4}{z}=1, \\ \dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{y}+\dfrac{z}{4}=1. \end{cases}$

10.2. 10—11

При решении систем рациональных уравнений, как и при решении систем алгебраических уравнений, часто применяется замена переменных.

376. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}-\dfrac{3}{z}=3, \\ \dfrac{4}{x}-\dfrac{1}{y}-\dfrac{2}{z}=5, \\ \dfrac{3}{x}+\dfrac{4}{y}+\dfrac{1}{z}=23; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y}+x^2=1, \\ \dfrac{x^2}{x-y}=-2. \end{cases}$

△ а) Введем подстановки:

$$\frac{1}{x}=t, \quad \frac{1}{y}=u, \quad \frac{1}{z}=v.$$

Будем иметь:

$$t+2u-3v=3, \quad 4t-u-2v=5, \quad 3t+4u+v=23.$$

Решить эту систему линейных уравнений можно разными способами. Например, сложим первое и третье уравнения и вычтем второе: $7u=21$, $u=3$.

Подставим значение $u = 3$ в первое и третье уравнения. После упрощений получаем:

$$t - 3v = -3, \quad 3t + v = 11.$$

Из последней системы $t = 3$, $v = 2$. Теперь легко вычислить x, y и z.

б) Положим

$$\frac{1}{x-y} = z, \quad x^2 = t.$$

Тогда

$$z + t = 1, \quad zt = -2.$$

Отсюда $z = -1$, $t = 2$ (случай $z = 2$, $t = -1$ невозможен, так как $t \geq 0$). Будем иметь:

$$\frac{1}{x-y} = -1, \quad x^2 = 2.$$

Последняя система решается просто.

Ответ: а) (1/3; 1/3; 1/2); б) $(\sqrt{2};\ 1+\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2};\ 1-\sqrt{2})$. ▲

377. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y} + \sqrt{y} = 1, \\ \dfrac{\sqrt{y}}{2x-y} = -6; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + \dfrac{x^2}{y^2} = 7, \\ \dfrac{(x+y)^2}{y^2} = 12; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{xy} + \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{x-y}{xy} + \dfrac{xy}{x+y} = \dfrac{10}{3}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 13, \\ xy - \dfrac{1}{xy} - \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 12; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 45, \\ \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{y^2}{x^2} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{7}{4}; \end{cases}$

е) $\begin{cases} x\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) = 45, \\ y\left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}\right) = 40, \\ z\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) = 13. \end{cases}$

378*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{5xy}{1+xy}, \\ y+z=\dfrac{6yz}{1+yz}, \\ z+x=\dfrac{7zx}{1+zx}. \end{cases}$$

△ Освободимся в первом уравнении от знаменателя дроби:

$$(x + y)(1 + xy) = 5xy, \quad x + y + xy(x + y) = 5xy.$$

Теперь, по-видимому, имеет смысл разделить все члены последнего уравнения на xy. Но тогда приходится рассмотреть два случая.

1) Пусть $xy = 0$.

Если здесь $x = 0$, то, как видно из первоначальной системы, $y = 0$, $z = 0$. Аналогично, если $y = 0$ или $z = 0$, то два других неизвестных равны нулю. Получаем решение (0; 0; 0).

2) Пусть $xy \neq 0$.

После деления уравнения на xy имеем:

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{x} + x + y = 5.$$

Подобным же образом второе и третье уравнения первоначальной системы можно привести, при условии $xyz \neq 0$, к виду:

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{y} + y + z = 6, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + z + x = 7.$$

Введем новые переменные:

$$x + \frac{1}{x} = t, \quad y + \frac{1}{y} = u, \quad z + \frac{1}{z} = v.$$

Получаем новую систему уравнений:

$$t + u = 5, \quad u + v = 6, \quad v + t = 7.$$

Находим из нее t, u, v: $t = 3$, $u = 2$, $v = 4$. Осталось найти x, y и z.

Ответ: (0; 0; 0), $((3\pm\sqrt{5})/2;\ 1;\ 2\pm\sqrt{3})$ (четыре решения). ▲

379*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} xy+\dfrac{6}{xz}=2, \\ xz+\dfrac{4}{yz}=4, \\ yz-\dfrac{3}{xy}=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=3, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=3, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}=\dfrac{25}{6}, \\ \dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}=\dfrac{23}{6}, \\ x+y+z=6. \end{cases}$

10.3. 10—11

Некоторые системы рациональных уравнений решаются с помощью исключения неизвестных.

380. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x=\dfrac{y+1}{3y-5}, \\ y=\dfrac{3z-2}{2z-3}, \\ z=\dfrac{3x-1}{x-1}. \end{cases}$$

△ Подставим выражение для z из третьего уравнения системы во второе:

$$y=\left(3\frac{3x-1}{x-1}-2\right)\Big/\left(2\frac{3x-1}{x-1}-3\right),$$

$$y=\frac{9x-3-2x+2}{6x-2-3x+3}, \quad y=\frac{7x-1}{3x+1}.$$

Последнее выражение для y подставим в первое уравнение:

$$x=\left(\frac{7x-1}{3x+1}+1\right)\Big/\left(3\frac{7x-1}{3x+1}-5\right),$$

$$x=\frac{7x-1+3x+1}{21x-3-15x-5}, \quad x=\frac{10x}{6x-8},$$

$$x=\frac{5x}{3x-4}, \quad 3x^2-4x=5x, \quad 3x^2-9x=0.$$

Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. Далее находим y и z.
Ответ: (0; −1; 1), (3; 2; 4). ▲

381. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x = \dfrac{4(y+z)}{5y^2z^2}, \\ y = \dfrac{4(x+z)}{5x^2z^2}, \\ z = \dfrac{x+y}{2x^2y^2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + \dfrac{y}{z} = \dfrac{29}{6}, \\ y + \dfrac{x}{z} = \dfrac{17}{3}, \\ x + y + z = 15; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x\left(\dfrac{y}{z} + \dfrac{z}{y}\right) = \dfrac{15}{2}, \\ y\left(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{z}\right) = \dfrac{20}{3}, \\ z\left(\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{13}{6}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y + z = \dfrac{13}{3}, \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{13}{3}, \\ xyz = 1; \end{cases}$ д)* $\begin{cases} \dfrac{y(xy-1)}{y^2+1} = \dfrac{2}{5}, \\ \dfrac{x(xy-1)}{x^2+1} = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

10.4. 10—11

Здесь мы рассмотрим разные способы решения систем рациональных уравнений.

382. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{xyz}{x+y} = \dfrac{6}{5}, \\ \dfrac{xyz}{y+z} = 2, \\ \dfrac{xyz}{z+x} = \dfrac{3}{2}. \end{cases}$$

△ В каждом из уравнений системы перейдем к обратным величинам и в левых частях получающихся уравнений разделим числители дробей почленно на знаменатели:

$$\frac{x+y}{xyz}=\frac{5}{6}, \quad \frac{y+z}{xyz}=\frac{1}{2}, \quad \frac{z+x}{xyz}=\frac{2}{3};$$

$$\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{5}{6}, \quad \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}=\frac{2}{3}.$$

Сложим все уравнения последней системы:

$$2\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)=2, \quad \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=1.$$

Отсюда, с учетом уравнений новой системы, будем иметь:

$$\frac{1}{xy}=\frac{1}{6}, \quad \frac{1}{yz}=\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{zx}=\frac{1}{3};$$

$$xy = 6, \quad yz = 2, \quad zx = 3.$$

Перемножим все уравнения последней системы:

$$x^2y^2z^2 = 36, \quad xyz = \pm 6.$$

Теперь нетрудно найти x, y и z.
Ответ: (3; 2; 1), (−3; −2; −1). ▲

383. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x+y+\dfrac{4}{xyz}=0, \\ y+z-\dfrac{2}{xyz}=0, \\ z+x-\dfrac{2}{xyz}=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x^2-y^2=z+\dfrac{1}{xy}, \\ y^2-z^2=x+\dfrac{1}{yz}, \\ z^2-x^2=y+\dfrac{1}{zx}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \dfrac{x^3}{y}+xy=40, \\ \dfrac{y^3}{x}+xy=10; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y}+z=1, \\ \dfrac{yz}{y+z}+x=2, \\ \dfrac{xz}{x+z}+y=2. \end{cases}$

384. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{5}{2}, \\ \frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}=2, \\ \frac{1}{xyz}=\frac{1}{2}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\frac{2yz}{y^2+z^2}, \\ y=\frac{2xz}{x^2+z^2}, \\ z=\frac{2xy}{x^2+y^2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=\frac{8}{x+y+z}, \\ y+z=\frac{4}{x+y+z}, \\ z+x=\frac{6}{x+y+z}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 27x^3-y^3-\frac{13xy}{x}=0, \\ 3x^2z-4xy+\frac{3}{z}=0, \\ 3xz-yz=1; \end{cases}$ д)* $\begin{cases} \frac{x(y^2+1)}{x^2+y^2}=\frac{3}{5}, \\ \frac{y(x^2-1)}{x^2+y^2}=\frac{4}{5}. \end{cases}$

385*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x=\frac{2y^2}{1+z^2}, \\ y=\frac{2z^2}{1+x^2}, \\ z=\frac{2x^2}{1+y^2}. \end{cases}$$

△ Из системы видно, что все неизвестные x, y и z неотрицательны.

Перемножим все уравнения системы и получающееся уравнение сведем к алгебраическому:

$$xyz=\frac{8x^2y^2z^2}{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)}, \quad xyz(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)=8x^2y^2z^2,$$

$$xyz((1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)-8xyz)=0.$$

Нужно рассмотреть два случая.

1) Пусть $xyz=0$.

Если любое из трех неизвестных равно нулю, то, как видно из системы, и два других неизвестных равны нулю. Получаем решение (0; 0; 0).

2) Пусть $xyz \neq 0$. Тогда

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) - 8xyz = 0,$$

$$8xyz = (1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2),$$

$$\frac{2x}{1+x^2}\cdot\frac{2y}{1+y^2}\cdot\frac{2z}{1+z^2}=1.$$

Каждая из дробей в левой части последнего уравнения неотрицательна и не превосходит 1 (подумайте, почему), значит, равенство их произведения числу 1 возможно только тогда, когда каждая из них равна 1:

$$\frac{2x}{1+x^2}=1,\quad \frac{2y}{1+y^2}=1,\quad \frac{2z}{1+z^2}=1.$$

Отсюда $x = y = z = 1$.

Ответ: (0; 0; 0), (1; 1; 1). ▲

Обратите внимание, что при решении этой задачи применялись неравенства.

386*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right), \\ y=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right); \end{cases}$ б) $\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right), \\ y=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right), \\ z=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{x}\right); \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+y=\frac{xy}{1+xy}, \\ x+z=\frac{xz}{1+xz}, \\ y+z=\frac{yz}{1+yz}. \end{cases}$

387*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{xy}{1+xy}=\frac{1}{2}, \\ \frac{x^4+y^4}{1+x^4y^4}=\frac{257}{32}; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3, \\ \frac{x^5+y^5}{x^3+y^3}=\frac{31}{7}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \frac{(1+x^2)(1+y^2)}{(1-x^2)(1-y^2)}=\frac{25}{12}, \\ \frac{(1+x+x^2)(1+y+y^2)}{(1-x+x^2)(1-y+y^2)}=\frac{13}{3}. \end{cases}$

§ 11. Иррациональные уравнения 9—11

Литература: [8^{e}], [14], [33], [37], [39^{e}].

Уравнение

$$f(x) = \varphi(x)$$

называется **иррациональным,** если по меньшей мере одна из функций $f(x)$ и $\varphi(x)$ иррациональна. При этом предполагается, что если одна из этих функций не является иррациональной, то она представляет собой рациональную функцию.

При решении иррациональных уравнений необходимо знать следующее.

1) Необходимо учитывать область определения уравнения (она называется еще областью допустимых значений неизвестного). Если в процессе решения получается корень, который не попадает в эту область, то он, конечно, является посторонним.

2) При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень с четным показателем получается следствие исходного уравнения; в частности, новое уравнение может иметь корни, посторонние для первоначального уравнения. Поэтому при решении иррационального уравнения этим способом необходима проверка по первоначальному уравнению.

При возведении обеих частей уравнения в одну и ту же степень с нечетным показателем получается уравнение, равносильное данному.

Большей частью иррациональное уравнение сводят к рациональному или к системе рациональных уравнений.

11.1. 9—11

Часто иррациональное уравнение решается с помощью возведения обеих его частей в одну и ту же степень. Многие иррациональные уравнения этим путем приводятся к рациональным уравнениям. Другое дело, что это не всегда лучший способ решения иррациональных уравнений.

388. Решите уравнения:

а) $\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0;$ б) $\sqrt{17x^2+7x+0{,}5}=13x^2+5x+0{,}5.$

△ а) Преобразуем уравнение:

$$\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}=4-x^2, \quad x^3=(4-x^2)^{\frac{3}{2}}.$$

Извлечем из обеих частей последнего уравнения кубичный корень (при этом получится равносильное уравнение):

$$x=(4-x^2)^{\frac{1}{2}}, \quad x=\sqrt{4-x^2}.$$

Возведем обе части нового уравнения в квадрат:

$$x^2 = 4 - x^2, \quad x^2 = 2; \quad x = \pm\sqrt{2}.$$

Проверка найденных корней необходима. Проверку удобнее выполнять по уравнению $x=\sqrt{4-x^2}$. Значение $x = \sqrt{2}$ удовлетворяет этому уравнению, а значение $x = -\sqrt{2}$ — нет.

б) Возведем обе части уравнения в квадрат и упростим получающееся алгебраическое уравнение, собирая все члены в левой части:

$17x^2 + 7x + 0{,}5 = 169x^4 + 25x^2 + 0{,}25 + 130x^3 + 13x^2 + 5x,$

$169x^4 + 130x^3 + 21x^2 - 2x - 0{,}25 = 0,$

$676x^4 + 520x^3 + 84x^2 - 8x - 1 = 0.$

Полученное уравнение не имеет целых корней, так как делители свободного члена, равные ± 1, не являются его корнями. Попробуем многочлен в левой части уравнения разложить на множители, представляющие собой квадратные трехчлены с целыми коэффициентами:

$$676x^4 + 520x^3 + 84x^2 - 8x - 1 = (ax^2 + bx + 1)(cx^2 + dx - 1),$$

где a, b, c, d — целые числа. Раскроем скобки в правой части этого тождества и приравняем коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях:

$$\begin{cases} ac = 676, \\ ad + bc = 520, \\ c - a + bd = 84, \\ d - b = -8. \end{cases}$$

Имеет ли эта система уравнений решение в целых числах? Обратите внимание на первое уравнение $ac = 676$. Числа a и c являются делителями числа 676. Пусть число a — четное. Тогда из второго уравнения число bc — четное. Если при этом число b является четным, то из третьего уравнения c — четное. Получилось, что числа a и c — оба четные.

Последнее обстоятельство упрощает решение системы с помощью перебора. Так как $676 = 26^2 = 2^2 \cdot 13^2$, то для a и c возможны или значения ± 26 и ± 26, или значения ± 2 и ± 338 (при одинаковых знаках a и с).

Возьмем, например, $a = c = 26$. Тогда

$$268 + 26d = 520 \text{ (т. е. } b + d = 20), \quad bd = 84, \quad d - 8 = -8.$$

Последняя система имеет решение $b = 14$, $d = 6$. Следовательно, уравнение четвертой степени принимает следующий вид:

$$(26x^2 + 14x + 1)(26x^2 + 6x - 1) = 0.$$

Его корни —

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{23}}{26}, \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{35}}{26}.$$

Проверка этих корней по первоначальному уравнению в данном случае не нужна (подумайте, почему).

Ответ: а) $\sqrt{2}$; б) $(-7 \pm \sqrt{23})/26$, $(-3 \pm \sqrt{35})/26$. ▲

389. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-2} + \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5} + \sqrt{x-10}$;

б) $\sqrt{\frac{1}{x} - 1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{\frac{2}{x}}$;

в) $\frac{1}{\sqrt{x + \sqrt{x^2 - 1}}} + \frac{1}{\sqrt{x - \sqrt{x^2 - 1}}} = \sqrt{2(x^3 + 1)}$;

г) $\frac{2+x}{\sqrt{2} + \sqrt{2+x}} + \frac{2-x}{\sqrt{2} - \sqrt{2-x}} = \sqrt{2}$;

д) $\frac{\sqrt{4+x}}{2 + \sqrt{4+x}} = \frac{\sqrt{4-x}}{2 - \sqrt{4-x}}$;

е) $\sqrt{\frac{x+5}{5}} - \sqrt{\frac{x-5}{x}} = \sqrt{2\left(1 - \frac{5}{x}\right)}$;

ж) $\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} = \sqrt{1 + \sqrt[3]{x}}$;

з) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$;

и) $\sqrt{10x^3 - 24x^2 + 5x + 7} = x^2 + 1$;

к) $x^4 + 0{,}25 = x\sqrt{2x^4 - 0{,}5}$.

390. Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1} = 1.$$

△ Возведем обе части уравнения в куб, пользуясь формулой

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b).$$

Будем иметь:

$$x - 1 + 2x - 1 + 3\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)} \cdot \left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1}\right) = 1,$$

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)} \cdot \left(\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[3]{2x-1}\right) = 1 - x.$$

Но что теперь? А теперь воспользуемся исходным уравнением, на основании которого сумма в скобках равна 1:

$$\sqrt[3]{(x-1)(2x-1)}=1-x.$$

Последнее уравнение также возведем в куб:

$(x-1)(2x-1)=(1-x)^3$, $(x-1)(2x-1+(x-1)^2)=0$,

$(x-1)x^2=0$.

Отсюда

$$x_1=1,\quad x_2=x_3=0.$$

Любопытно сделать проверку по первоначальному уравнению. Она показывает, что значение $x=1$ ему удовлетворяет, а значение $x=0$ — не удовлетворяет.

Ответ: 1. ▲

Проблема для размышления: как вы думаете, на каком шаге перехода от данного исходного уравнения к последнему и по какой причине появился посторонний корень $x=0$ исходного уравнения? Ведь как будто мы пользовались только возведением уравнения в куб, а при этом получается уравнение, равносильное первоначальному...

Замечание. Решение задачи 390 показывает, что при решении уравнений типа

$$\sqrt[3]{f_1(x)}+\sqrt[3]{f_2(x)}=\varphi(x)$$

этим способом могут появиться посторонние корни. (При решении таких же уравнений другим способом они могут и не появиться.) Следовательно, нужна проверка полученных корней по первоначальному уравнению.

391. Решите уравнения:

а) $\sqrt[3]{10-x}-\sqrt[3]{3-x}=1$;

б) $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$;

в) $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=2$;

г) $\sqrt[3]{2x+3}+\sqrt[3]{3x-1}=\sqrt[3]{5x+2}$.

11.2. 10—11

Перейдем к решению иррациональных уравнений с помощью введения новых переменных. Этот способ применяется не реже, чем предыдущий.

392. Решите уравнение:

$$x^2+8x+8=4(x+2)\sqrt{x+1}.$$

△ Положим $\sqrt{x+1}=t$. При $t\geq 0$ это равенство равносильно равенству $x+1=t^2$. Получаем систему рациональных уравнений:

$$\begin{cases} x^2+8x+8=4(x+2)t, \\ x+1=t^2. \end{cases}$$

Для ее решения выразим x через t из второго уравнения: $x = t^2 - 1$. Подставим это выражение в первое уравнение и новое уравнение упростим:

$(t^2 - 1)^2 + 8(t^2 - 1) + 8 = 4(t^2 - 1)t,$

$t^4 - 2t^2 + 1 + 8t^2 - 8 + 8 = 4t^3 + 4t,$

$t^4 - 4t^3 + 6t^2 - 4t + 1 = 0.$

Последнее уравнение имеет корень $t = 1$. Мало того, проверка показывает, что значение $t = 1$ является четырехкратным корнем этого уравнения. Тогда уравнение принимает вид $(t - 1)^4 = 0$. Если $t = 1$, то $x = 0$. Проверка этого корня здесь не нужна.

Ответ: 0. ▲

393. Решите уравнения:

а) $(x-1)\sqrt{3-x}=5x+1;$

б) $5x^2+35x=\sqrt{x^2+7x-1}+4;$

в) $x^2-3x-13=\sqrt{x^2-3x+7};$

г) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2+x+5}=\sqrt{2x^2+2x+17};$

д)* $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}+2\sqrt{x^2+7x}=35-2x;$

е) $\sqrt{5+\sqrt[3]{x}}+\sqrt{5-\sqrt[3]{x}}=\sqrt[3]{x};$

ж) $\sqrt{x^3+x^2-1}+\sqrt{x^3+x^2+2}=3;$

з) $x+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{35}{12};$

и)* $4x^2+12x\sqrt{x+1}=27(x+1).$

Нередко при решении иррациональных уравнений вводятся две, три и т. д. новые переменные, соответственно числу радикалов в уравнении. Цель этих замен переменных — свести уравнение к системе рациональных уравнений.

394. Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x+19}=5.$$

△ Уравнения этого типа уже встречались в п. 11.1, при другом способе решения (см. решение задачи 390). Введем две новые переменные:

$$\sqrt[3]{x}=y,\quad \sqrt[3]{x+19}=z.$$

Получаем систему рациональных уравнений:

$$\begin{cases} y+z=5, \\ y^3=x, \\ z^3=x+19. \end{cases}$$

Вычтем третье и второе уравнения системы для того, чтобы исключить x: $z^3-y^3=19$.

Для решения системы двух уравнений

$$y+z=5,\quad z^3-y^3=19$$

выразим z из первого уравнения и подставим это выражение во второе уравнение:

$z=5-y,\quad (5-y)^3-y^3=19,\quad 125-75y+15y^2-2y^3=19,$

$2y^3-15y^2+75y-106=0.$

Из делителей свободного члена последнему уравнению удовлетворяет $y=2$. Тогда уравнение приводится к виду:

$$(y-2)(2y^2-11y+51)=0.$$

Отсюда видно, что других корней у уравнения нет.

Следовательно,

$$x=y^3=2^3=8.$$

Ответ: 8. ▲

395. Решите уравнения:

а) $\sqrt[3]{x+15}+\sqrt[3]{76-x}=7;$

б) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+4}=4x+3;$

в) $\sqrt[3]{(x-2)^2}+\sqrt[3]{(x+7)(x-2)}+\sqrt[3]{(x+7)^2}=3;$

г) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{97-x}=5;$

д) $\sqrt[4]{x+8}+\sqrt[4]{x-8}=2;$

е) $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}=1.$

396*. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=\frac{x-1}{x};$

б) $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=x^2;$

в) $2x+1+x\sqrt{x^2+2}+(x+1)\sqrt{x^2+2x+3}=0.$

11.3. 10—11

Иногда иррациональные уравнения решаются с помощью умножения обеих его частей на одну и ту же функцию, заданную в области определения уравнения.

397. Решите уравнение:

$$\sqrt{9x^2-12x+11}+\sqrt{5x^2-8x+10} = 2x - 1.$$

△ Умножим обе части уравнения на множитель

$$\sqrt{9x^2-12x+11}+\sqrt{5x^2-8x+10},$$

сопряженный его левой части. Так как он не обращается в нуль, то получится уравнение, равносильное данному. Будем иметь:

$(9x^2 - 12x + 11) - (5x^2 - 8x + 10) =$

$= (2x - 1)(\sqrt{9x^2-12x+11}+\sqrt{5x^2-8x+10}),$

$(2x - 1)^2 = (2x - 1)(\sqrt{9x^2-12x+11}+\sqrt{5x^2-8x+10}),$

$(2x - 1)(2x - 1 - \sqrt{9x^2-12x+11}-\sqrt{5x^2-8x+10}) = 0.$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $2x - 1 = 0$. Тогда $x = \frac{1}{2}$.

2) Пусть равно нулю выражение во вторых скобках левой части уравнения. Получаем систему двух уравнений с одним неизвестным:

$$\begin{cases}\sqrt{9x^2-12x+11}+\sqrt{5x^2-8x+10}=2x-1,\\ \sqrt{9x^2-12x+11}-\sqrt{5x^2-8x+10}=2x-1.\end{cases}$$

Отсюда

$$\sqrt{5x^2-8x+10} = 0, \quad 5x^2 - 8x + 10 = 0.$$

Но последнее уравнение не имеет действительных корней.
Ответ: 1/2. ▲

398. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^2-5x+2}-\sqrt{x^2+x+1}=1-6x;$ б) $2\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{2(x^2+2x)}=x-2;$

в) $(\sqrt{1+x}+1)(\sqrt{1+x}+x^2+x-7)=x.$

11.4. 10—11

Рассмотрим иррациональные уравнения, которые решаются с помощью неравенств. Это значит, что нужно находить и сравнивать области определения функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, или множества значений этих функций; иногда корень уравнения угадывают, доказывая затем, что других корней у него нет.

399. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x^3-x}+\sqrt[4]{x-x^2}=x^3-3x+2$; б) $\sqrt{x^2-2x+17}=-x^2+4x$.

△ а) Найдем область определения D уравнения. Она совпадает с множеством всех решений системы неравенств

$$\begin{cases} x^3-x\geq 0, \\ x-x^2\geq 0. \end{cases}$$

Решением первого неравенства является множество $[-1;\ 0]\cup[1;\ +\infty)$, второго — отрезок $[0;\ 1]$. Следовательно, область D состоит всего из двух точек — 0 и 1.

Удовлетворяют ли эти точки уравнению? Значение $x = 0$ — не удовлетворяет, значение $x = 1$ — удовлетворяет.

б) Справедливы неравенства:

$$x^2 - 2x + 17 \geq 16, \quad -x^2 + 4x \leq 4$$

(проверьте!). Тогда множество значений левой части уравнения есть промежуток $[4;\ +\infty)$, а правой — $(-\infty;\ 4]$. Следовательно, равенство этих частей возможно тогда и только тогда, когда каждая из частей уравнения равна 4. Но левая часть равна 4 при $x = 1$, а правая — при $x = 2$. Это значит, что уравнение не имеет решений.

Ответ: а) 1; б) нет решений. ▲

400. Решите уравнения:

а) $\sqrt{4-x^2}+5\sqrt[4]{3x-6}=x^2-7x+10$; б) $2\sqrt{x-1}-3\sqrt{1-x}=x^2-8x+7$;

в) $\sqrt{4x-7}+\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt[4]{13-8x}=x+1$; г) $\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{x+16}=2$;

д) $\sqrt[4]{x-3}-\sqrt[4]{x-1}=x^2$; е) $\sqrt[3]{x}-\sqrt{2-x}=5$;

ж) $\sqrt{x^2+2x+2}+x^4=-x^2-2x$.

401. Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{x+6}+\sqrt[3]{x+25}+x=7.$$

△ С помощью перебора находим один корень уравнения — $x = 2$. Имеет ли оно другие корни?

Левая часть уравнения есть возрастающая функция, как сумма трех возрастающих функций. Но **монотонная функция каждое свое значение** (в данном случае значение 7) **принимает в единственной точке**, поэтому других корней у уравнения нет.

Ответ: 2. ▲

402. Решите уравнения:

а) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{4x+1}+\sqrt{10x+1}+\sqrt{14x+1}=36;$

б) $\sqrt{x}+\sqrt{x-7}+\sqrt[4]{x-15}=8;$

в) $\sqrt[4]{x+1}-\sqrt{144-x}=-5;$

г) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt{x+1}=4.$

403*. Решите уравнение:

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1-x}+\sqrt[4]{1+x}=3.$$

△ Область определения уравнения есть отрезок $[-1;\ 1]$. В этой области к каждому из радикалов в левой части применим неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим двух неотрицательных чисел:

$$\sqrt[4]{1-x^2}=\sqrt{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1-x}}\le\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2},$$

$$\sqrt[4]{1+x}=\sqrt{1\cdot\sqrt{1+x}}\le\frac{1+\sqrt{1+x}}{2},$$

$$\sqrt[4]{1-x}=\sqrt{1\cdot\sqrt{1-x}}\le\frac{1+\sqrt{1-x}}{2}.$$

Сложим почленно все три неравенства и к выражению в правой части нового неравенства применим то же неравенство еще два раза:

$$\sqrt[4]{1-x^2}+\sqrt[4]{1+x}+4\sqrt[4]{1-x}\le 1+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}\le 1+\frac{1+(1+x)}{2}+\frac{1+(1-x)}{2}=3.$$

Полученное неравенство должно по условию превратиться в равенство. Но это возможно лишь тогда, когда каждое из использованных здесь неравенств превращается в равенство. Известно, что среднее геометрическое двух неотрицательных чисел равно их среднему арифметическому только при равенстве этих чисел. В данном случае будем иметь:

$$1 = 1 + x = 1 - x,$$

откуда $x = 0$.

Ответ: 0. ▲

404*. Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{-x^2+x+1}=x^2-x+2.$$

11.5*. 10—11

Рассмотрим разные способы решения иррациональных уравнений.

405. Решите уравнение:

$$\sqrt{4x^2+5x-1}-2\sqrt{x^2-3x+3}=\frac{17x-13}{7}.$$

△ Введем три новые переменные:

$$\sqrt{4x^2+5x-1}=y,\quad 2\sqrt{x^2-3x+3}=z,\quad \frac{17x-13}{7}=t.$$

Тогда

$$y-z=t,\quad y^2-z^2=17x-13=7t.$$

Напрашивается разделить второе из полученных уравнений на первое. Но сначала разберем случай $t=0$:

$$t=0,\quad \frac{17x-13}{7}=0,\quad x=\frac{13}{17}.$$

Проверка показывает, что значение $x=\frac{13}{17}$ есть корень первоначального уравнения.

Пусть $t\neq 0$. Тогда

$$y+z=7,\quad y-z=t.$$

Отсюда $2y=7+t$. Выразим обе части этого уравнения через x и решим получающееся уравнение:

$$2\sqrt{4x^2+5x-1}=7+\frac{17x-13}{7},$$

$$14\sqrt{4x^2+5x-1}=17x+36,\quad 196(4x^2+5x-1)=(17x+36)^2,$$

$$784x^2+980x-196=289x^2+1224x+1296,$$

$$495x^2-244x-1492=0.$$

Корни последнего уравнения — $x_1=2$ и $x_2=-\frac{746}{495}$.

Сделаем проверку. Она показывает, что оба корня удовлетворяют исходному уравнению.

Ответ: 13/17, 2, –746/495. ▲

406. Решите уравнения:

а) $x^2 + 12x + 4 = 6(x + 2)\sqrt{x}$;

б) $\sqrt{2x+4} - 2\sqrt{2-x} = \dfrac{12x-8}{\sqrt{9x^2+16}}$;

в) $(1-x)\sqrt{\dfrac{3}{x}+1} = \sqrt{x+1} + \sqrt{3x-1}$;

г) $\sqrt{12-6\sqrt{x-4}} + \sqrt{6-3\sqrt{8-x}} = \sqrt{6}$;

д) $\sqrt{2x^2-1} + \sqrt{x^2-3x-2} = \sqrt{2x^2+2x+3} + \sqrt{x^2-x+2}$.

407. Решите уравнение:

$$\sqrt{1-x^2} = 4x^3 - 3x.$$

△ Областью определения уравнения является отрезок $[-1; 1]$.

Введем тригонометрическую подстановку $x = \cos\alpha$, где $\alpha \in [0; \pi]$. Тогда

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sin\alpha, \quad 4x^3 - 3x = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha = \cos 3\alpha$$

(здесь в первом равенстве использовалась неотрицательность синуса на отрезке $[0; \pi]$, во втором — формула косинуса тройного аргумента).

Получаем:

$$\sin\alpha = \cos 3\alpha, \quad \sin\alpha - \cos 3\alpha = 0, \quad \sin\alpha - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right) = 0,$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

Отсюда

$$\alpha - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \ (k \in \mathrm{Z})$$

или $2\alpha - \dfrac{\pi}{4} = \pi n, \quad \alpha = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\pi n}{2} \ (n \in \mathrm{Z})$.

Так как $\alpha \in [0; \pi]$, то здесь k и n — не любые целые числа. Подходят только $k = 0$, $n = 0$ и $n = 1$. Следовательно,

$$\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}, \quad \alpha_2 = \frac{\pi}{8}, \quad \alpha_3 = \frac{5\pi}{8}.$$

Теперь находим корни исходного уравнения:

$$x_1 = \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x_2 = \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

$$x_3 = \cos\frac{5\pi}{8} = -\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

Ответ: $-\sqrt{2}/2$, $(\sqrt{2+\sqrt{2}})/2$, $-(\sqrt{2-\sqrt{2}})/2$. ▲

408. Решите уравнения:

а) $\sqrt{1-x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1-x^2}$;

б) $(x\sqrt{2}-1)\sqrt{4-x^2} = x$;

в) $(x-1)\sqrt{2x-x^2} = \frac{1}{4}$;

г) $\sqrt{1-2x}(1-4x\sqrt{1+2x}) = 8x^2 - 1$;

д) $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+x}}} = x$.

§ 12. Системы уравнений, содержащие иррациональные уравнения 9—11

Литература: [8], [14], [33], [37^{e}], [50].

Условимся рассматривать здесь или системы уравнений, состоящие из иррациональных уравнений, или системы, состоящие из иррациональных и рациональных уравнений.

12.1. 9—11

Займемся системами, решение которых связано с возведением в одну и ту же степень иррациональных уравнений, входящих в систему.

409. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2, \\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1. \end{cases}$$

△ Возведем каждое из уравнений системы в квадрат. После упрощений получаем:

$$x+\sqrt{x^2-y}=2, \quad 2y-2\sqrt{y^2-x}=1.$$

Приведем эту систему к виду

$$\sqrt{x^2-y}=2-x, \quad 2\sqrt{y^2-x}=2y-1$$

и каждое из уравнений последней системы также возведем в квадрат:

$x^2-y=4-4x+x^2, \quad 4y^2-4x=4y^2-4y+1;$

$4x-y=4, \quad 4x-4y=-1.$

Эта новая система имеет решение $x=\frac{17}{12}$, $y=\frac{5}{3}$.

Проверка показывает, что пара $(\frac{17}{12}; \frac{5}{3})$ удовлетворяет первоначальной системе уравнений.

Ответ: (17/12; 5/3). ▲

410. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=\frac{5}{6}\sqrt{xy}, \\ x+y=13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{y+2x}+\sqrt{y+7x}=5 \\ \sqrt{y+2x}+x-y=1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185, \\ (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{-y-6}=5, \\ \sqrt{x-3}-\sqrt{x+y}=2; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3\sqrt{x-y}, \\ x^2-y^2=41; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y+1}=1, \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y}=1; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=1, \\ \sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{y+1}=1. \end{cases}$

411*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=2\sqrt{2}, \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{1-16y^2}-\sqrt{1-16x^2} \\ x^2+y^2+4xy=\frac{1}{5}; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{25-x^2}-\sqrt{25-y^2}=2\sqrt{2}, \\ \sqrt{25-x^2}+\sqrt{25-y^2}=\sqrt{(x+y)^2+16}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=2, \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=\dfrac{7}{4}. \end{cases}$

12.2. 9—11

Рассмотрим системы уравнений, которые решаются с помощью введения новых переменных в иррациональных уравнениях с целью освобождения в системе от радикалов.

412. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12, \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12. \end{cases}$$

△ Положим $\sqrt{x^2-y^2}=z$, где $z \geq 0$. Получим систему рациональных уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=12, \\ yz=12, \\ x^2-y^2=z^2. \end{cases}$$

Так как

$$x^2-y^2=z^2, \quad x+y=12-z,$$

то $x-y=\dfrac{z^2}{12-z}$. Из системы уравнений

$$x+y=12-z, \quad x-y=\frac{z^2}{12-z}$$

выразим x и y через z:

$$x=\frac{z^2-12z+72}{12-z}, \quad y=\frac{72-12z}{12-z}.$$

Подставим выражение для y во второе уравнение системы трех уравнений:

$$\frac{72-12z}{12-z}z=12, \quad (6-z)z=12-z, \quad z^2-7z+12=0.$$

Отсюда $z_1=4$, $z_2=3$. Теперь легко находим x и y.
Ответ: (5; 3), (5; 4). ▲

413. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y\sqrt{xy}=420, \\ y^2+x\sqrt{xy}=280; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{6x}{x+y}}+\sqrt{\dfrac{x+y}{6x}}=\dfrac{5}{2}, \\ xy=x+y. \end{cases}$

414. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20. \end{cases}$$

△ Введем две новые переменные:

$$x=\sqrt{y}, \quad y\sqrt{x}=t,$$

где $z \geq 0$, $t \geq 0$. Тогда

$$z+t=6, \quad z^2+t^2=20.$$

Решения последней системы — (4; 2) и (2; 4). Теперь рассмотрим два случая.

1) Для первого решения этой системы получаем:

$$x\sqrt{y}=4, \quad y\sqrt{x}=2,$$

откуда

$$x^2y=16, \quad y^2x=4.$$

Умножим и разделим уравнения последней системы:

$$x^3y^3=64, \quad \frac{x}{y}=4.$$

Тогда

$$xy=4, \quad x=4y.$$

Следовательно, будем иметь:

$$4y^2=4, \quad y^2=1; \quad y=1, \quad x=4$$

(значение $y=-1$ не подходит).

2) Аналогично во втором случае получаем решение (1; 4).

Ответ: (4; 1), (1; 4). ▲

415. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ xy=8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=30, \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=35; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{1-4x^2}-\sqrt{1-4y^2}=2(x+y), \\ x^2+y^2+4xy=-\dfrac{1}{4}; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3, \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8; \end{cases}$

д) $\begin{cases}\sqrt{x^2+5}+\sqrt{y^2-5}=5,\\ x^2+y^2=13;\end{cases}$

е) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=1+\dfrac{7}{\sqrt{xy}},\\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78;\end{cases}$

ж) $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=6,\\ xy^2=6\sqrt{10};\end{cases}$

з) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[4]{x-y}=8,\\ \sqrt[4]{x^3+x^2y-xy^2-y^3}=12;\end{cases}$

и) $\begin{cases}\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{y}+\sqrt[3]{y}\cdot\sqrt{x}=12,\\ xy=64;\end{cases}$

к) $\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6,\\ (x+y)^3(x-y)^2=262144;\end{cases}$

л) $\begin{cases}x^3-xyz=\dfrac{1}{3}\sqrt{x^3+y^3+z^3},\\ y^3-xyz=-\dfrac{5}{6}\sqrt{x^3+y^3+z^3},\\ z^3-xyz=\dfrac{7}{2}\sqrt{x^3+y^3+z^3}.\end{cases}$

416*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}2\sqrt{2x+3y}+\sqrt{5-x-y}=7,\\ 3\sqrt{5-x-y}-\sqrt{2x+y-3}=1.\end{cases}$$

△ Введем три новые переменные:

$$\sqrt{2x+3y}=z,\quad \sqrt{5-x-y}=t,\quad \sqrt{2x+y-3}=u,$$

где z, t, u неотрицательны. Получается система пяти рациональных уравнений с пятью неизвестными:

$$\begin{cases}2x+3y=z^2,\\ 5-x-y=t^2,\\ 2x+y-3=u^2,\\ 2x+t=7,\\ 3t-u=1.\end{cases}$$

Из первого и третьего уравнений этой системы выразим x и y через z и u

$$x = \frac{1}{4}(3u^2 - z^2 + 9), \quad y = \frac{1}{2}(z^2 - u^2 - 3).$$

Подставим эти выражения во второе уравнение:

$$5 - \frac{1}{4}(3u^2 - z^2 + 9) - \frac{1}{2}(z^2 - u^2 - 3) = t^2,$$

$$20 - 3u^2 + z^2 - 9 - 2z^2 + 2u^2 + 6 = 4t^2,$$

$$z^2 + 4t^2 + u^2 = 17.$$

Из системы уравнений

$$z^2 + 4t^2 + u^2 = 17, \quad 2z + t = 7, \quad 3t - u = 1$$

найдем z, t, u. Затем вычислим x и y. Закончите решение самостоятельно.

Ответ: (3; 1). ▲

417*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sqrt{7x+y} + \sqrt{2x+y} = 5, \\ \sqrt{2x+y} + x - y = 1; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y} + \sqrt{z+4} = 6, \\ 2\sqrt{x-4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z+4} = -12, \\ x + y + z = 14; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}} + \sqrt{\dfrac{y}{z}} + \sqrt{\dfrac{z}{x}} = 3, \\ \sqrt{\dfrac{y}{x}} + \sqrt{\dfrac{z}{y}} + \sqrt{\dfrac{x}{z}} = 3, \\ xyz = -1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x^3 + y^3 + xy\sqrt{xy} = 73, \\ x^3 + z^3 + xz\sqrt{xz} = 757, \\ y^3 + z^3 + yz\sqrt{yz} = 1009. \end{cases}$

12.3*. 10—11

Рассмотрим разные способы решения систем уравнений.

418. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + x\sqrt[3]{xy^2} = 80, \\ y^2 + y\sqrt[3]{x^2y} = 5. \end{cases}$$

△ Положим $\frac{x}{y} = t$, т. е. $y = tx$, учитывая, что на основании первого уравнения $x \neq 0$. Будем иметь:

$x^2 + x^2\sqrt[3]{t^2} = 80, \quad t^2x^2 + tx^2\sqrt[3]{t^2} = 5;$

$x^2\left(1+\sqrt[3]{t^2}\right)=80, \quad x^2t^{\frac{4}{3}}\left(1+\sqrt[3]{t^2}\right)=5.$

Разделим второе уравнение последней системы на первое:

$$t^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{16}, \quad t^4 = \frac{1}{2^{12}}, \quad t = \pm\frac{1}{8}.$$

1) Пусть $t = \frac{1}{8}$. Тогда $\frac{y}{x} = \frac{1}{8}$, $x = 8y$. Из первого уравнения последней системы находим y:

$$64y^2 \cdot \frac{5}{4} = 80, \quad y^2 = 1, \quad y = \pm 1.$$

Если $y = 1$, то $x = 8$; если $y = -1$, то $x = -8$.

2) Пусть $t = -\frac{1}{8}$. Аналогичным путем получаем решения $(8; -1)$ и $(-8; 1)$.

Проверка показывает, что все найденные решения удовлетворяют первоначальной системе уравнений.

Ответ: $(\pm 8; \pm 1)$ (четыре решения). ▲

419. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2+1} + y^2 = 3, \\ x + \frac{y}{\sqrt{x^2+1}+x} + y^2 = 0. \end{cases}$$

△ Исключим из системы иррациональность $\sqrt{x^2+1}$. Для этого из первого уравнения выразим $\sqrt{x^2+1}$:

$$\sqrt{x^2+1}=\frac{3y^2-x^2-y^4}{2y^2}.$$

Теперь нужно подставить это выражение во второе уравнение, предварительно перенеся в нем иррациональность из знаменателя дроби в числитель:

$$x + y(\sqrt{x^2+1} - x) = 0.$$

Получаем:

$$x+y\left(\frac{3y^2-x^2-y^4}{2y^2}-x\right)+y^2=0,$$

$$x+\frac{3y^2-x^2-y^4-2xy^2}{2y}+y^2=0,$$

$$2xy + 3y^2 - x^2 - y^4 - 2xy^2 + 2y^3 = 0,$$

$$x^2 + 2x(y^2 - y) + y^4 - 2y^3 - 3y^2 = 0.$$

Будем рассматривать последнее уравнение как квадратное относительно x. Найдем его дискриминант:

$$\frac{1}{4}D = (y^2 - y)^2 - y^4 + 2y^3 + 3y^2 = 4y^2.$$

Тогда

$$x = y - y^2 \pm 2y; \quad x_1 = 3y - y^2, \quad x_2 = -y^2 - y.$$

1) Пусть $x = 3y - y^2$. Подставим это выражение для x в формулу для $\sqrt{x^2+1}$:

$$\sqrt{(3y-y^2)^2+1}=\frac{3y^2-(3y-y^2)^2-y^4}{2y^2},$$

$$\sqrt{(3y-y^2)^2+1}=\frac{3-(3-y)^2-y^2}{2},$$

$$\sqrt{(3y-y^2)^2+1}=-y^2+3y-3,$$

$$9y^2 - 6y^3 + y^4 + 1 = y^4 + 9y^2 + 9 - 6y^3 + 6y^2 - 18y,$$

$$6y^2 - 18y + 8 = 0, \; 3y^2 - 9y + 4 = 0.$$

Отсюда $y=\frac{9\pm\sqrt{33}}{6}$. Но оба эти значения y не удовлетворяют последнему иррациональному уравнению, так как в этом случае его правая часть отрицательна.

2) Пусть $x = -y^2 - y$. Аналогичным путем находим пару $(0; -1)$. Она удовлетворяет исходной системе уравнений.

Ответ: $(0; -1)$. ▲

420. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}(x+y)\sqrt{x}=3\sqrt{y},\\(x-y)\sqrt{y}=\frac{1}{2}\sqrt{x};\end{cases}$

б) $\begin{cases}(x-y)\sqrt{x}=\frac{2}{9}y^2,\\3x^2+4y^2=7xy;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x+y+\sqrt[5]{xy}=819,\\x^3=y^2;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x^2+xy+y^2=91,\\x-\sqrt{xy}+y=7;\end{cases}$

д) $\begin{cases}x-8y\sqrt{x^2-9xy^2}=(9-16x)y^2,\\5x=25y^2+4;\end{cases}$

е) $\begin{cases}x^3+(y+1)x^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)x+1=0,\\\sqrt{1+x^2y+xy}+\sqrt{1+\frac{y}{x}}=1.\end{cases}$

§ 13. Уравнения и системы уравнений, у которых число неизвестных больше числа уравнений 9—11

Литература: [33], [45], [56^{в}], [61^{в}].

Уравнения и системы уравнений, у которых число неизвестных больше числа уравнений, как правило, решаются с помощью неравенств.

13.1. 9—11

421. Решите уравнения с двумя неизвестными:

а) $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 13 = 0$; б) $xy - 1 = x - y$.

△ а) Преобразуем уравнение:

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0, \quad (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 0.$$

Тогда

$$x - 2 = 0, \quad y + 3 = 0 \Rightarrow x = 2, \quad y = -3.$$

б) Соберем все члены в левую часть и разложим левую часть нового уравнения на множители:

$$xy - 1 - x + y = 0, \quad (x + 1)(y - 1) = 0.$$

Кроме очевидного решения $(-1; 1)$ последнего уравнения, имеются и другие: если в левой части уравнения равен нулю, например, первый множитель, то второй множитель может быть любым. Получаем множество решений уравнения $(-1; y)$, где y — любое число. Аналогично находим и другое множество решений уравнения $(x; 1)$, где x — любое число, не равное -1. (Последнее ограничение связано с тем, что решение уравнения $(-1; 1)$, которое уже входит в первое множество решений, не должно входить во второе множество.)

Ответ: а) $(2; -3)$; б) $(-1; y)$, где y — любое число; $(x; 1)$, где x — любое, не равное -1. ▲

422. Решите уравнения с двумя или тремя неизвестными:

а) $(x - y)^2 + 2(x + 1)(y + 1) = 0$; б) $x^2 - 4x + y - 10\sqrt{y} + 29 = 0$;

в) $(x - 1)(y - 2)(z - 3) = 0$; г)* $x^2 + y^2 - xy - x - y + 1 = 0$;

д)* $8(x^4 + y^4) - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0$; е)* $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$;

ж)* $x^2 + (y - 1)^2 + (x - y)^2 = \frac{1}{4}$.

423. Решите системы уравнений с тремя неизвестными:

а) $\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2xy-2y-z^2=4; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2=z, \\ 4x-2y+z=-5; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x+y=6, \\ xy=9+z^2; \end{cases}$ г)* $\begin{cases} 4x^2+4y^2+12x=7, \\ x^2+y^2+z^2=2x+3z-3. \end{cases}$

424. Решите систему уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^3+y^3+z^3=1. \end{cases}$$

△ Из первого уравнения системы следует, что каждое из чисел x^2, y^2 и z^2 не превосходит 1. Тогда

$$|x| \le 1, \quad |y| \le 1, \quad |z| \le 1.$$

Отсюда

$$x^3 \le |x^3| \le x^2, \quad y^3 \le y^2, \quad z^3 \le z^2.$$

Сложим все эти неравенства почленно:

$$x^3 + y^3 + z^3 \le x^2 + y^2 + z^2.$$

По условию каждая из частей последнего неравенства равна 1, следовательно, неравенство превращается в равенство. Но это возможно только тогда, когда каждое из трех складывавшихся неравенств превращается в равенство:

$$x^3 = x^2, \quad y^3 = y^2, \quad z^3 = z^2.$$

Последняя система уравнений есть только следствие исходной системы; например, она имеет решения (0; 0; 0) и (1; 1; 1), которые исходной системе не удовлетворяют. А какие удовлетворяют? Те, у которых значение одного из трех неизвестных равно 1, а значения двух других — нулю.

Ответ: (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1). ▲

425. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2+t^2=1, \\ x^4+y^4+z^4+t^4=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=4, \\ x^5+y^5+z^5=32; \end{cases}$

в)* $\begin{cases} x+y+z=3, \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=3 \ (x>0, y>0, z>0). \end{cases}$

426. Решите уравнение:

$$\sqrt{4x-y^2}=\sqrt{y+2}+\sqrt{4x^2+y}.$$

△ Возведем это уравнение в квадрат; получится уравнение, равносильное данному. Будем иметь:

$$4x-y^2=y+2+4x^2+y+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)},$$

$$(4x^2-4x+1)+(y^2+2y+1)+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}=0,$$

$$(2x-1)^2+(y+1)^2+2\sqrt{(y+2)(4x^2+y)}=0.$$

Следовательно,

$$2x-1=0,\quad y+1=0,\quad (y+2)(4x^2+y)=0.$$

Последняя система уравнений имеет единственное решение $(\frac{1}{2};\ -1)$.

Ответ: $(1/2;\ -1)$. ▲

427. Решите уравнения:

а) $\sqrt{x-y+1}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+1$; б)* $x\sqrt{y-1}+y\sqrt{x-1}=xy$.

428. Решите уравнение:

$$x^2-2x\sin y+1=0.$$

△ Представим 1 в левой части уравнения в виде $\sin^2 y+\cos^2 y$. Тогда

$$(x^2-2x\sin y+\sin^2 y)+\cos^2 y=0,\quad (x-\sin y)^2+\cos^2 y=0.$$

Следовательно,

$$x-\sin y=0,\quad \cos y=0.$$

Если $\cos y=0$, то

$$\sin y=\pm 1,\quad x=\sin y=\pm 1.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\sin y=1$. Отсюда

$$y=\frac{\pi}{2}+2\pi k\ (k\in Z),\ x=1.$$

2) Пусть $\sin y=-1$. Тогда

$$y=-\frac{\pi}{2}+2\pi n\ (n\in Z),\ x=-1.$$

Ответ: $(1;\ \pi/2+2\pi k)$ $(k\in Z)$; $(-1;\ -\pi/2+2\pi n)$ $(n\in Z)$. ▲

429. Решите уравнения:

а) $x^2 - 10x\sin(\pi xy) + 25 = 0$;

б) $y^2 + 2y\cos(x - y) + 1 = 0$;

в) $x^2 + 2x\sin(x^2 + y^2) + 3 = 0$;

г) $x^2 + y^2 - 2xy\cos y = 0$.

430. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} xy = 1, \\ x + y + \cos^2 z = 2. \end{cases}$$

431. Решите уравнение:

$$x^3 + \sqrt{x} = y^3 + \sqrt{y}.$$

△ По условию x и y неотрицательны. Разберем два случая.

1) Пусть $y = x$. Получаем множество решений $(x; x)$, где x — любое неотрицательное число.

2) Пусть $y \neq x$, например, $y > x$.

Функции $z = x^3$ и $z = \sqrt{x}$ являются возрастающими на промежутке $[0; +\infty)$. Так как сумма двух возрастающих функций есть функция возрастающая, то из неравенства $y > x$ следует, что

$$y^3 + \sqrt{y} > x^3 + \sqrt{x},$$

а это противоречит условию. Следовательно, во втором случае у данного уравнения решений нет.

Ответ: $(x; x)$, где $x \geq 0$. ▲

432. Решите уравнения:

а) $2x - \sqrt[3]{y} = 2y - \sqrt[3]{x}$;

б) $\sqrt{x} + \dfrac{1}{y} = \sqrt{y} + \dfrac{1}{x}$;

в) $x + \sin y = y + \sin x$.

433. Решите систему:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 5 = 4z, \\ x - y \geq z. \end{cases}$$

Система, состоящая из уравнений и неравенств, называется **смешанной.**

△ Так как $z \leq x - y$, то $4z \leq 4x - 4y$. Теперь получаем:

$x^2 + 4y^2 + 5 = 4z$, $\quad 4z \leq 4x - 4y \Rightarrow x^2 + 4y^2 + 5 \leq 4x - 4y$,

$(x^2 - 4x + 4) + (4y^2 + 4y + 1) \leq 0$, $\quad (x - 2)^2 + (2y + 1)^2 \leq 0$.

Но сумма $(x - 2)^2 + (2y + 1)^2$ отрицательной быть не может, а равенство

$$(x - 2)^2 + (2y + 1)^2 = 0$$

дает $x = 2$, $y = -\frac{1}{2}$. Вычислим еще z из уравнения смешанной системы:

$$z = \frac{1}{4}(x^2 + 4y^2 + 5) = \frac{1}{4}(4 + 1 + 5) = \frac{5}{2}.$$

Ответ: (2; −1/2; 5/2). ▲

434. Решите смешанные системы:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 20 = z, \\ 8x + 4y \geq z. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z = 3, \\ z - x + 2 \geq 0. \end{cases}$

435*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

13.2. 9—11

Займемся решением уравнений и систем уравнений с помощью векторного неравенства Коши — Буняковского. Такое решение связано с рассмотрением крайнего случая, когда это неравенство превращается в равенство, и поэтому близко к **правилу крайнего** (см., например, [19], § 12).

Векторным неравенством Коши — Буняковского, названным так по имени двух выдающихся математиков XIX века — французского О. Коши (1789–1855) и русского В.Я. Буняковского (1804–1889), называется неравенство

$$\bar{u} \cdot \bar{v} \leq |\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|, \qquad (1)$$

где $\bar{u}$ и $\bar{v}$ — векторы, $\bar{u} \cdot \bar{v}$ — их скалярное произведение, $|\bar{u}|$ и $|\bar{v}|$ — длины этих векторов.

Как доказать неравенство (1)? Левая его часть доказывается просто: любое действительное число не превосходит своего модуля.

Докажем правую часть

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \qquad (2)$$

неравенства (1). Будем иметь:

$$|\bar{u} \cdot \bar{v}| = \left||\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot \cos\alpha\right| = |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| \cdot |\cos\alpha| \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|,$$

где α — угол между векторами $\bar{u}$ и $\bar{v}$.

Когда неравенство (2) превращается в равенство? Если векторы $\bar{u}$ и $\bar{v}$ — ненулевые, то это возможно только тогда, когда $|\cos\alpha| = 1$, т. е. при $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$. Следовательно, неравенство (2) превращается в равенство, когда векторы **параллельны**.

Для дальнейшего нам потребуется вспомнить, что если векторы заданы координатами на плоскости: $\bar{u}\ (x_1; y_1)$ и $\bar{v}\ (x_2; y_2)$, то скалярное произведение векторов выражается в координатах формулой

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = x_1x_2 + y_1y_2,$$

а длина вектора $\bar{u}$ — формулой

$$|\bar{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Кроме того, условие параллельности векторов, т. е. условие обращения неравенства (2) в равенство, состоит в **пропорциональности координат этих векторов**:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2}\ (x_2 \neq 0,\ y_2 \neq 0). \qquad (3)$$

При решении задач чаще используется не неравенство (2), а неравенство

$$\bar{u} \cdot \bar{v} \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|. \qquad (4)$$

Условие обращения его в равенство — та же самая пропорциональность координат векторов (3) со следующим изменением: неравенство (4) обращается в равенство только тогда, когда угол α между векторами $\bar{u}$ и $\bar{v}$ равен нулю, т. е. векторы **сонаправлены,** а, следовательно, коэффициент пропорциональности в равенстве (3) должен быть **неотрицателен.**

Замечание для старшеклассников: при решении задач часто приходится рассматривать векторы не на плоскости, а в пространстве. При этом справедливы формулы, аналогичные уже записанным формулам для скалярного произведения векторов и длины вектора в координатах, а условие (3) превращения неравенств (2) и (4) в равенства заменяется равенством трех отношений, т. е. также состоит в пропорциональности координат векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$.

Перейдем к задачам.

436. Решите уравнение:

$$3x - 4y = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

△ Введем векторы $\bar{u}$ и $\bar{v}$, причем их координаты выберем таким образом, чтобы левая часть уравнения выражала скалярное произведение векторов в координатах, а правая — произведение длин векторов. Подходят векторы $\bar{u}\ (x; y)$ и $\bar{v}\ (3; -4)$. Применим неравенство (4):

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = 3x - 4y \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\sqrt{x^2 + y^2}.$$

По условию левая и правая части этого неравенства равны. Воспользуемся пропорцией (3):

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{-4}, \quad y=-\frac{4}{3}x.$$

Это, собственно, и есть ответ — с добавлением ограничения $x \geq 0$, так как отношение $\frac{x}{3}$ должно быть неотрицательным — в связи с тем, что коэффициент пропорциональности в равенстве (3) при использовании неравенства (4) неотрицателен.

Ответ: $(x;\ -4x/3)$, где x — любое неотрицательное число. ▲

437. Решите уравнения:

а) $17\sqrt{x^2+y^2}=8x+15y$;

б) $2x+y=\sqrt{(x^2+1)(y^2+4)}$;

в)* $x-y-2=\sqrt{2(x^2+y^2)}$.

438. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=2, \\ 2x^2+2y^2+3z^2=4. \end{cases}$$

△ Пользуясь левой частью первого уравнения системы, введем векторы $\bar{u}$ $(x;\ y)$ и $\bar{v}$ $(1;\ 1)$. Имеем:

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=x+y\leq|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{(x^2+y^2)2}\leq\sqrt{2x^2+2y^2+3z^2}.$$

Так как $x + y = 2$ и $\sqrt{2x^2+2y^2+3z^2} = 2$, то полученное неравенство превращается в равенство. Оно достигается при условиях $y = x$, где $x \geq 0$ (пропорциональность координат векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$), и

$$2x^2 + 2y^2 = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

т. е. при $z = 0$. Для нахождения x и y будем иметь систему трех уравнений с двумя неизвестными

$$x + y = 2, \quad y = x, \quad 2x^2 + 2y^2 = 4.$$

Она имеет единственное решение $x = y = 1$.

Ответ: (1; 1; 0). ▲

439. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$$

△ Используя левую часть первого уравнения системы, введем векторы в пространстве $\bar{u}$ $(x; y; z)$ и $\bar{v}$ $(1; 1; 1)$. Получаем:

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=x+y+z\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)3}=\sqrt{3\cdot 3}=3.$$

Так как и левая часть этого неравенства равна 3, то неравенство обращается в равенство. Тогда $x = y = z$. Поскольку $x + y + z = 3$, то система уравнений имеет единственное решение (1; 1; 1).

Ответ: (1; 1; 1). ▲

440. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} x+y-z=6, \\ x^2+y^2+z^2=12; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-4y+12z=13, \\ x^2+y^2+z^2=1; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3, \\ x^4+y^4+z^4=2. \end{cases}$

441. Решите уравнение:

$$\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}+2\sqrt{x^2+1}=\sqrt{6}\cdot(x+1)\quad (x\ge -1).$$

442*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y^2+z^3=\dfrac{13}{6}, \\ 9x^2+16y^4+144z^6=26. \end{cases}$$

△ Векторы $\bar{u}$ и $\bar{v}$ выберем по-другому, чем раньше. Пользуясь левой частью второго уравнения, введем вектор $\bar{u}$ $(3x; 4y^2; 12z^3)$. Теперь введем вектор $\bar{v}$ так, чтобы $\bar{u}\cdot\bar{v} = x + y^2 + z^3$. Подойдет вектор $\bar{v}\left(\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{12}\right)$. Будем иметь:

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=x+y^2+z^3=\frac{13}{6}\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{(9x^2+16y^4+144z^6)\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{144}\right)}=\sqrt{26\cdot\frac{26}{144}}=\frac{26}{12}=\frac{13}{6}.$$

Получилось, что $\bar{u}\cdot\bar{v}=|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|$. Тогда

$$9x = 16y^2 = 144z^3,\quad x + y^2 + z^3 = \frac{13}{6}.$$

Осталось решить эту систему трех уравнений с тремя неизвестными.

Ответ: $(4/3;\ \pm\sqrt{3}/2;\ \sqrt[3]{18}/12)$. ▲

443*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^2+y^2+z^2=13, \\ \dfrac{16}{x^2}+\dfrac{9}{y^2}+\dfrac{4}{z^2}=13. \end{cases}$$

Векторное неравенство Коши — Буняковского можно применять не только тогда, когда у уравнения или системы уравнений число неизвестных больше числа уравнений, но и при решении некоторых уравнений с одним неизвестным, систем двух уравнений с двумя неизвестными и систем трех уравнений с тремя неизвестными.

444. Решите уравнение:

$$x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}=2\sqrt{x^2+1}.$$

△ Введем векторы $\bar{u}$ $(x;\ 1)$ и $\bar{v}$ $(\sqrt{1+x};\ \sqrt{3-x})$. Получаем:

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=x\sqrt{1+x}+\sqrt{3-x}\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{(x^2+1)(1+x+3-x)}=2\sqrt{x^2+1}.$$

Это неравенство по условию превращается в равенство. Имеем уравнение

$$\frac{x}{\sqrt{1+x}}=\frac{1}{\sqrt{3-x}},\quad x\sqrt{3-x}=\sqrt{1+x}.$$

Решаем его:

$$x^2(3-x)=1+x,\quad x^3-3x^2+x+1=0,\quad (x-1)(x^2-2x-1)=0.$$

Отсюда $x_1=1$, $x_2=1+\sqrt{2}$ (корень $x=1-\sqrt{2}$ не удовлетворяет иррациональному уравнению).

Ответ: $1,\ 1+\sqrt{2}$. ▲

445. Решите уравнения:

а) $\sqrt{9-x}+x\sqrt{7+x}=4\sqrt{x^2+1}$;

б) $3\sqrt{x^2+4}+2\sqrt{9-x^2}=13$.

446. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} x^4+y^4=2, \\ x^8+y^8=2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x-y\sqrt{3}+z\sqrt{15}=\dfrac{15}{2}, \\ x^2+4y^2+z^2=9, \\ \dfrac{9}{x^2}+\dfrac{4}{y^2}+\dfrac{25}{z^2}=16. \end{cases}$

§ 14. Составление уравнений (задачи на движение) 8—11

Литература: [33^e], [35^e], [37], [43], [50].

В этом и следующем параграфах мы займемся решением текстовых задач на составление уравнений и систем уравнений.

Главная трудность при решении такой задачи в том, как составить по ее условиям уравнение (или уравнения). Кратко говоря, для этого нужно одну и ту же величину выразить двумя способами, а потом полученные выражения приравнять. Но какую именно величину — зависит от содержания задачи.

14.1. 8—9

Сначала рассмотрим задачи на движение двух тел в одном направлении.

447. Из пункта А выехал мотоциклист со скоростью 45 км/ч. Через 40 мин из А в том же направлении выехал автомобиль со скоростью 60 км/ч. Через сколько времени после выезда автомобиля расстояние между ним и мотоциклистом окажется равным 36 км?

△ Важный вопрос: в тот момент, когда автомобиль окажется на расстоянии 36 км от мотоцикла, он будет находиться впереди или позади мотоцикла?

За 40 мин мотоцикл проедет расстояние $45 \cdot \frac{2}{3}$ км = 30 км, а это меньше 36 км. Следовательно, в момент отправления автомобиля он находится в 30 км позади мотоцикла, а дальше до момента обгона расстояние между ними будет уменьшаться. Это значит, что автомобиль окажется в 36 км от мотоцикла после обгона.

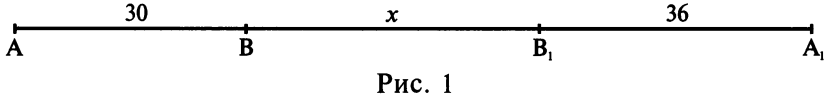

Рис. 1

На рис. 1 через А и В обозначены пункты, в которых находились соответственно автомобиль и мотоцикл в тот момент, когда автомобиль отправился в путь, а через A_1 и B_1 — пункты, в которых они находились в тот момент, когда автомобиль оказался впереди в 36 км от мотоцикла. Тогда АВ = 30 км, B_1A_1 = 36 км.

За неизвестное лучше принять расстояние BB_1: $BB_1 = x$ км. Если мы найдем это расстояние, то найдем и время автомобиля на путь AA_1.

Словесное «уравнение» здесь таково: время автомобиля на путь AA_1 равно времени мотоцикла на путь BB_1. Выразим то и другое время через x и полученные выражения приравняем:

$$\frac{30+x+36}{60}=\frac{x}{45}.$$

Решим это уравнение:

$$3(66 + x) = 4x, \quad 198 + 3x = 4x, \quad x = 198.$$

Отсюда время автомобиля на путь AA_1 равно $\frac{198}{45}=\frac{22}{5}=4\frac{2}{5}$ (ч), т. е. 4 ч 24 мин.

Ответ: 4 ч 24 мин. ▲

448. Из пункта А в пункт В выехал велосипедист, а через 15 мин вслед за ним выехал автомобиль. На половине пути от А до В автомобиль догнал велосипедиста. Когда автомобиль прибыл в В, велосипедисту оставалось проехать еще треть всего пути. За какое время велосипедист проедет путь от А до В?

△ Примем путь АВ за единицу. (Так можно поступать в тех случаях, когда среди данных задачи нет ни одного расстояния, выраженного в линейных единицах.) Обозначим скорость велосипедиста через x (в долях пути в час).

За время, за которое автомобиль проехал вторую половину пути, велосипедист проехал $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ пути АВ. Значит, скорость автомобиля больше скорости велосипедиста в $\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=3$ раза, т. е. она равна $3x$.

Словесное «уравнение» здесь такое: время велосипедиста на первую половину пути АВ на 15 мин $=\frac{1}{4}$ ч больше времени автомобиля на ту же половину. Получим:

$$\frac{1}{2x}-\frac{1}{2\cdot 3x}=\frac{1}{4}.$$

Решая это уравнение, находим x: $x=\frac{4}{3}$. Тогда время велосипедиста на путь АВ равно $1:\frac{4}{3}=\frac{3}{4}$ ч, т. е. 45 мин.

Ответ: 45 мин. ▲

449. Из пункта А в пункт В одновременно выехали два автомобиля. Первый автомобиль проехал весь путь с постоянной скоростью, а второй проехал первую половину пути со скоростью, на 5 км/ч меньшей скорости первого, а вторую половину со скоростью, на 6 км/ч большей скорости первого, и прибыл в В одновременно с первым автомобилем. Найдите скорость первого автомобиля.

450. Из пункта А в пункт В, расположенный в 24 км от А, одновременно отправились велосипедист и пешеход. Велосипедист прибыл в В на 4 ч раньше пешехода. Если бы велосипедист ехал со скоростью, меньшей на 4 км/ч, то на путь АВ он затратил бы вдвое меньше времени, чем пешеход. Найдите скорости велосипедиста и пешехода.

451. От пристани А к пристани В вниз по течению реки отправились одновременно моторная лодка и байдарка. Скорость течения реки равна 2 км/ч. Последнюю $\frac{1}{10}$ часть всего пути лодка шла с выключенным мотором. На той части пути, которую лодка проходила с работающим мотором, ее скорость была на 8 км/ч больше скорости байдарки. К пристани В лодка и байдарка прибыли одновременно. Найдите скорость байдарки в стоячей воде.

452. Две точки, двигаясь по окружности в одном направлении, встречаются через каждые 12 мин, причем первая обходит окружность на 10 с быстрее, чем вторая. Какую часть окружности проходит за 1 с каждая точка?

△ Примем длину окружности за единицу. Обозначим скорости первой и второй точек соответственно через v_1 и v_2 (в долях этой единицы в секунду). Тогда по первому условию $v_1 - v_2 = \frac{1}{12 \cdot 60}$, а по второму $\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 10$. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} v_1 - v_2 = \frac{1}{720}, \\ \frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} = 10. \end{cases}$$

Для ее решения сначала преобразуем второе уравнение:

$$v_1 - v_2 = 10v_1v_2, \quad \frac{1}{720} = 10v_1v_2, \quad v_1v_2 = \frac{1}{7200}.$$

Далее из первого уравнения системы выразим v_1 через v_2, подставим это выражение в последнее уравнение и решим получающееся квадратное уравнение. Окончите решение самостоятельно.

Ответ: 1/80 и 1/90. ▲

453. По окружности длиной 60 м в одном направлении движутся две точки. Одна из них делает полный оборот на 5 с быстрее другой, а совпадения точек происходят через каждую минуту. Найдите скорости точек.

454*. Из пункта А, расположенного на дороге, которая имеет форму окружности, выезжают одновременно в одном направлении велосипедист и мотоцик-

лист. Пока велосипедист прошел один круг, мотоциклист проехал три полных круга и, кроме того, часть дороги AB, где B — пункт, в котором он обогнал велосипедиста в первый раз. Во сколько раз скорость мотоциклиста больше скорости велосипедиста?

455*. Из пункта A в пункт B, удаленный от A на расстояние 40 км, одновременно отправились два туриста: первый — пешком со скоростью 6 км/ч, второй — на велосипеде. Когда второй турист обогнал первого на 5 км, первый сел на попутную машину, ехавшую со скоростью 24 км/ч. Через 2 часа после отправления из A первый турист догнал второго и прибыл в B раньше его. Найдите скорость туриста, ехавшего на велосипеде.

△ Сделаем рисунок (рис. 2).

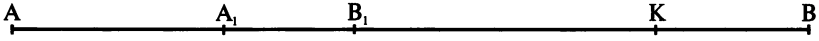

Рис. 2

Пусть A_1 и B_1 — пункты, в которых оказались соответственно первый и второй туристы к тому моменту, когда второй турист обогнал первого на 5 км, а K — пункт, в котором первый турист догнал второго.

Обозначим время первого туриста на путь AA_1 (и одновременно — второго на путь AB_1) через t_1 ч, а время первого на путь A_1K (и второго — на путь B_1K) через t_2 ч. Скорость велосипедиста обозначим через v км/ч.

Так как каждый из туристов проделал путь AK за 2 ч, то $t_1 + t_2 = 2$.

Так как за время t_1 велосипедист проехал на 5 км больше, чем прошел первый турист, то $vt_1 - 6t_1 = 5$.

Наконец, расстояние AK выразим двумя способами — с помощью величин, относящихся к первому туристу, и величин, относящихся ко второму, и получающиеся выражения приравняем:

$$6t_1 + 24t_2 = v(t_1 + t_2).$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 2, \\ vt_1 - 6t_1 = 5, \\ 6t_1 + 24t_2 = v(t_1 + t_2). \end{cases}$$

Из первого уравнения $t_2 = 2 - t_1$, а из второго — $v = \dfrac{6t_1 + 5}{t_1}$. Подставим эти выражения для t_2 и v в третье уравнение и решим новое уравнение с неизвестным t_1:

$$6t_1 + 24(2 - t_1) = \frac{2(6t_1 + 5)}{t_1}, \quad 6t_1^2 + 48t_1 - 24t_1^2 = 12t_1 + 10,$$

$$18t_1^2 - 36t_1 + 10 = 0, \quad 9t_1^2 - 18t_1 + 5 = 0; \quad t_1 = \frac{9 \pm 6}{9}.$$

Отсюда $t_1 = \frac{5}{3}$ или $t_1 = \frac{1}{3}$. Соответственно $v = 9$ или $v = 21$.

Оба ли эти значения v подходят? Оказывается, нет: если $v = 21$ км/ч, то велосипедист за 2 часа проделает путь, равный 42 км, а этот путь больше AB = 40 км.

Ответ: 9 км/ч. ▲

456*. Два поезда выехали одновременно в одном направлении из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 12 км друг от друга, и одновременно прибыли на станцию C. Если бы один из них уменьшил свою скорость на 6 км/ч, а другой — на 3 км/ч, то они также прибыли бы на станцию C одновременно, но на 20 мин позже. Найдите скорости поездов.

14.2. 8—9

Рассмотрим задачи на движение двух тел в разных направлениях.

457. Из пунктов A и B одновременно выехали навстречу друг другу мотоциклист и велосипедист и встретились на расстоянии 4 км от B. В момент, когда мотоциклист прибыл в B, велосипедист находился на расстоянии 15 км от A. Найдите расстояние AB.

△ Обозначим расстояние AB через x км.

К моменту встречи мотоциклист и велосипедист проделали соответственно путь $(x - 4)$ км и x км, а к моменту, когда мотоциклист прибыл в B, — путь x км и $(x - 4)$ км.

Тогда отношение скоростей мотоциклиста и велосипедиста равно, с одной стороны, $\frac{x-4}{x}$ (так как при одном и том же времени равномерного движения двух тел отношение путей равно отношению скоростей), а с другой — $\frac{x}{x-15}$. Отсюда

$$\frac{x-4}{x} = \frac{x}{x-15}.$$

Решая это уравнение, получим: $x_1 = 20$, $x_2 = 3$. Подходит только $x = 20$.

Ответ: 20 км. ▲

458. Два пешехода вышли одновременно из пунктов A и B навстречу друг другу. Когда первый пешеход прошел половину пути, второму до конца пути оставалось 24 км. Когда второй пешеход прошел половину пути, первому до конца пути оставалось 15 км. Сколько километров останется пройти второму пешеходу до A после того, как первый закончит переход из A в B?

459. Один турист вышел из А в В в 6 часов, а второй из В в А в 7 часов. Встретились они в 8 часов. Первый турист пришел в В на 28 минут позже, чем второй в А. Сколько времени каждый из них затратил на весь путь?

460. Из города А в город В выехал автомобиль. Спустя некоторое время из В в А по тому же шоссе выехал мотоцикл. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 ч 30 мин, а мотоцикл — 3 ч. Мотоцикл прибыл в В в 23 часа, а автомобиль прибыл в В в 16 часов 30 минут. Когда мотоцикл отправился из В?

461. Длина меньшей дуги между точками А и В, находящимися на окружности, равна 150 м. Если точки начнут двигаться навстречу друг другу по меньшей дуге, то встретятся через 10 с, а если по большей дуге, то встреча произойдет через 14 с. Точка А может обежать всю окружность за то время, за которое В пройдет только 90 м. Найдите скорости движения точек и длину окружности.

462. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 300 км, одновременно навстречу друг другу выехали грузовик и легковой автомобиль. Через 4 часа после начала движения они встретились. После встречи грузовик, ехавший из А в В, увеличил свою скорость на 30 км/ч, а легковой автомобиль — на 15 км/ч. Легковой автомобиль прибыл в А на 1 час раньше, чем грузовик в В. Найдите первоначальные скорости грузовика и легкового автомобиля.

463. Из двух портов А и В одновременно навстречу друг другу по морю вышли два парохода. Скорость каждого из них постоянна. Первый пароход прибыл в В через 16 часов, а второй в А — через 25 часов после встречи. За какое время проходит весь путь каждый пароход?

△ Примем путь АВ за единицу. Обозначим скорости пароходов через v_1 и v_2 (в долях единицы в час).

Пусть пароходы встретились в точке С. Тогда $\frac{AC}{CB}=\frac{v_1}{v_2}$. Отсюда

$$\frac{AC}{CB}+1=\frac{v_1}{v_2}+1,\quad \frac{1}{CB}=\frac{v_1+v_2}{v_2},\quad CB=\frac{v_2}{v_1+v_2},\quad AC=\frac{v_1}{v_1+v_2}.$$

Так как первый пароход проделал путь СВ за 16 часов, а второй — путь СА за 25 часов, то

$$\begin{cases}\dfrac{v_2}{(v_1+v_2)v_1}=16,\\[2mm] \dfrac{v_1}{(v_1+v_2)v_2}=25.\end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, определяем v_1 и v_2: $v_1 = \frac{1}{36}$, $v_1 = \frac{1}{45}$.

Следовательно, время пароходов на весь путь равно

$$1 : \frac{1}{36} = 36 \text{ (ч)}, \quad 1 : \frac{1}{45} = 45 \text{ (ч)}.$$

Ответ: 36 ч, 45 ч. ▲

464. Два велосипедиста выехали одновременно навстречу друг другу из пунктов K и M и встретились через 2 часа 24 минуты. Если бы первый велосипедист увеличил свою скорость в 1,5 раза, а второй — в 1,2 раза, то на путь KM первому велосипедисту понадобилось бы на 40 минут больше, чем второму. За какое время проходит этот путь каждый велосипедист?

465. Из пунктов A и B, расстояние между которыми 180 км, навстречу друг другу движутся два поезда. Первый поезд вышел из A на 0,5 ч раньше, чем второй вышел из B, и они встретились на середине пути. Через час после встречи расстояние между поездами было равно 66 км. За какое время первый поезд проходит весь путь от A до B?

466*. Моторная лодка отправилась вниз по течению реки из пункта A в пункт B. Когда она прошла $\frac{3}{4}$ пути, кончилось горючее, и оставшийся путь пришлось идти на веслах. Весь путь из A в B занял 1 час 50 минут. Если бы горючего хватило только на $\frac{1}{4}$ пути, а оставшуюся часть пути надо было идти на веслах, то весь путь занял бы 3 часа 30 минут. Путь из A в B и обратно с включенным мотором занимает 2 часа 5 минут. За какое время лодка проходит путь из B в A на веслах?

467*. Расстояние между пунктами A и B равно 40 км. Между ними на расстоянии 15 км от B расположен пункт C. Из A в B выехал автомобиль и одновременно из B в A выехал велосипедист. Через 15 минут после выезда автомобиль был в 1,2 раза дальше от C, чем велосипедист. Еще через 15 мин автомобиль был в 2 раза ближе к C, чем велосипедист. Найдите скорости автомобиля и велосипедиста.

14.3. 8—9

Рассмотрим задачи на движение туда и сюда: это значит, что в процессе движения тело меняет направление движения на противоположное или, в случае, если тел два, по меньшей мере одно из них меняет направление на противоположное.

468. Два школьника вышли одновременно из дома в школу с одинаковой скоростью. Через 3 минуты один из них вспомнил, что забыл дома тетрадь, и побежал обратно со скоростью, большей первоначальной на 60 м/мин. Взяв тетрадь, он побежал обратно с той же скоростью и догнал товарища, который шел с первоначальной скоростью, у дверей школы. Расстояние от дома до школы равно 400 м. Найдите начальную скорость школьников.

△ Обозначим начальную скорость школьников через v м/мин. Тогда за 3 минуты они прошли путь $3v$ м. Следовательно, школьник, который бегал за тетрадью, проделал путь $(400 + 3v)$ м со скоростью $(v + 60)$ м/мин. Второй школьник за то же время прошел путь $(400 - 3v)$ м со скоростью v м/мин. Выражая это время через v двумя способами, получаем уравнение:

$$\frac{400+3v}{v+60}=\frac{400-3v}{v}.$$

Решая его, будем иметь: $v = 50$ м/мин $= 3$ км/ч.

Ответ: 3 км/ч. ▲

469. Два лыжника стартовали в одном направлении с интервалом в 6 минут. Второй лыжник догнал первого на расстоянии 6 км от старта. Дойдя до отметки 13 км, он повернул обратно и встретил первого через 1 км обратного пути. Найдите скорости лыжников.

470. Автомобиль проезжает расстояние от А до В за 1 час. Автомобиль выехал из А в В, и одновременно из В в А вышел пешеход. Автомобиль встретил пешехода, довез его до А и затем прибыл в В, затратив на весь путь 2 ч 40 мин. За какое время может пройти путь от В до А пешеход?

471. Из А в В выехал мотоциклист и одновременно навстречу ему из В в А вышел пешеход. Встретив пешехода, мотоциклист посадил его на мотоцикл, привез в А и тут же снова поехал в В. В итоге пешеход добрался до А в 4 раза быстрее, чем в том случае, если бы весь путь шел пешком. Во сколько раз быстрее прибыл бы мотоциклист в В, если бы ему не пришлось возвращаться?

△ Примем путь АВ за единицу. Обозначим скорости пешехода и мотоциклиста соответственно через v_1 и v_2 (в долях этой единицы в час).

Пусть пешеход и мотоциклист встретились в пункте С. Так как они до встречи двигались $\frac{1}{v_1+v_2}$ ч, то

$$AC = v_2 \cdot \frac{1}{v_1 + v_2} = \frac{v_2}{v_1 + v_2}, \quad BC = \frac{v_1}{v_1 + v_2}.$$

Подсчитаем время, которое потратил пешеход на путь ВА — путь ВС пешком, путь СА — на мотоцикле:

$$\frac{v_1}{v_1 + v_2} : v_1 + \frac{v_2}{v_1 + v_2} : v_2 = \frac{1}{v_1 + v_2} + \frac{1}{v_1 + v_2} = \frac{2}{v_1 + v_2}.$$

Так как это время в 4 раза меньше времени $\frac{1}{v_1}$, за которое он проделал бы весь путь АВ пешком, то

$$\frac{1}{v_1} = \frac{8}{v_1 + v_2},$$

откуда

$$v_1 + v_2 = 8v_1, \quad v_2 = 7v_1.$$

Найдем время, которое мотоциклист потратил на весь свой путь 2АС + АВ:

$$\left(2\frac{v_2}{v_1 + v_2} + 1\right) : v_2 = \frac{v_1 + 3v_2}{v_2(v_1 + v_2)}.$$

А теперь подсчитаем, во сколько раз это время больше времени $\frac{1}{v_2}$ мотоциклиста на путь АВ, если бы он не вернулся обратно:

$$\frac{v_1 + 3v_2}{v_2(v_1 + v_2)} : \frac{1}{v_2} = \frac{v_1 + 3v_2}{v_1 + v_2} = \frac{v_1 + 21v_1}{v_1 + 7v_1} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4} = 2{,}75.$$

Ответ: в 2,75 раза. ▲

472. Лодка прошла по течению реки 20 км и 10 км против течения, затратив на это столько времени, сколько ей нужно для того, чтобы пройти в стоячей воде 30 км. Во сколько раз скорость лодки в стоячей воде больше скорости течения реки?

473. Из города А в город В, находящийся на расстоянии 54 км от А, выехал велосипедист. Через час из А на мотоцикле выехал курьер со скоростью 36 км/ч, который, нагнав велосипедиста и передав ему поручение, с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в А в тот же момент, когда велосипедист достиг города В. Какова скорость велосипедиста?

474. Из пункта А в пункт В, находящийся в 40 километрах от А, выехал велосипедист, а через некоторое время — мотоциклист, скорость которого 60 км/ч.

Мотоциклист догнал велосипедиста в 10 км от А. Прибыв в В, мотоциклист через 24 мин выехал обратно в А и встретился с велосипедистом через 2 ч после выезда велосипедиста из А. Найдите скорость велосипедиста.

475. Два автомобиля, двигаясь по кольцевой дороге в одном направлении, оказываются рядом через каждые 56 мин. Если бы они двигались с теми же скоростями в противоположных направлениях, то встречались бы через каждые 8 мин. За какое время проезжает всю трассу каждый автомобиль?

476*. Из пункта А кольцевого шоссе одновременно в одном направлении выехали автомобиль и мотоцикл. Автомобиль дважды проехал по всему шоссе. В тот момент, когда автомобиль догнал мотоциклиста, мотоциклист повернул обратно, увеличил свою скорость на 16 км/ч и через 22,5 мин после разворота одновременно с автомобилем прибыл в А. Определите весь путь, проделанный мотоциклом, если этот путь на 5,25 км короче всего шоссе.

△ Обозначим скорости автомобиля и мотоцикла соответственно через v_1 км/ч и v_2 км/ч, а длину шоссе — через S км. Тогда весь путь, проделанный мотоциклом, равен $(S - 5{,}25)$ км, а значит, его путь в одну сторону — $\frac{1}{2}(S - 5{,}25)$ км.

За то время, за которое мотоцикл проедет путь $\frac{1}{2}(S - 5{,}25)$ км в первый раз, автомобиль проедет на S км больше, а следовательно, он проделает путь

$$\frac{1}{2}(S - 5{,}25) + S = \frac{1}{2}(3S - 5{,}25) \text{ (км)}.$$

Тогда первое уравнение таково:

$$\frac{3S - 5{,}25}{2v_1} = \frac{S - 5{,}25}{2v_2}.$$

После поворота мотоцикл проедет тот же путь $\frac{1}{2}(S - 5{,}25)$ км, но со скоростью $(v_2 + 16)$ км/ч. Так как он тратит на это 22,5 мин $= \frac{3}{8}$ ч, то

$$\frac{1}{2}(S - 5{,}25) = (v_2 + 16) \cdot \frac{3}{8}.$$

За то же время автомобиль проделает путь

$$S - \frac{1}{2}(S - 5{,}25) = \frac{1}{2}(S + 5{,}25),$$

поэтому $\frac{1}{2}(S + 5{,}25) = v_1 \cdot \frac{3}{8}$.

Мы получили систему трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{3S-5{,}25}{v_1} = \dfrac{S-5{,}25}{v_2}, \\ \dfrac{1}{2}(S-5{,}25) = \dfrac{3}{8}(v_2+16), \\ \dfrac{1}{2}(S+5{,}25) = \dfrac{3}{8}v_1. \end{cases}$$

Для ее решения выразим v_1 и v_2 через S из третьего и второго уравнений и подставим эти выражения в первое уравнение:

$v_1 = \frac{4}{3}(S + 5{,}25)$, $\quad v_2 = \frac{4}{3}(S - 5{,}25) - 16 = \frac{4}{3}S - 23$;

$$\frac{3(3S-5{,}25)}{4(S+5{,}25)} = \frac{S-5{,}25)}{\frac{4}{3}S-23}.$$

После упрощений последнее уравнение приводится к виду:

$$16S^2 - 456S + 945 = 0.$$

Из него находим, что $S = 26{,}25$ км (второй корень уравнения $S = 2{,}25$ не подходит). Тогда весь путь мотоциклиста равен $26{,}25 - 5{,}25 = 21$ (км).

Ответ: 21 км. ▲

477*. Расстояние между пунктами А и В равно 20 км. Одновременно из пункта А и пункта В выехали соответственно велосипедист и мотоциклист. Через 0,5 ч после начала движения они поравнялись между собой. Если бы скорость велосипедиста была в 2 раза больше, а скорость мотоциклиста на 10 км/ч меньше, чем на самом деле, то момент, когда они поравняются друг с другом, наступил бы на 0,5 ч позже, чем в действительности. Найдите скорости велосипедиста и мотоциклиста.

Займемся задачами на движение трех тел.

478. Два пешехода вышли одновременно из пункта А в одном направлении. Первый из них встретился с туристом, идущим в пункт А, через 20 мин после выхода из А, а второй — на 5 мин позже, чем первый. Через 10 мин после второй встречи турист пришел в А. Найдите отношение скоростей пешеходов.

△ Пусть В и М — места встречи соответственно первого и второго пешехода с туристом (рис. 3).

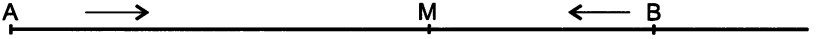

Рис. 3

Примем путь АВ за единицу. Обозначим скорости первого и второго пешеходов соответственно через v_1 и v_2, а скорость туриста — через v (в долях пути АВ = 1 в час). Тогда расстояние АВ равно, с одной стороны, $\frac{1}{3}v_1$, а с другой — $\frac{1}{4}v$, так как турист пришел в А через 15 мин = $\frac{1}{4}$ ч после первой встречи. Получаем первое уравнение:

$$\frac{1}{3}v_1 = \frac{1}{4}v.$$

Аналогично выразим двумя способами расстояние АМ и эти выражения приравняем:

$$\frac{5}{12}v_2 = \frac{1}{6}v.$$

Образовалась система двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{1}{3}v_1 = \frac{1}{4}v, \\ \frac{5}{12}v_2 = \frac{1}{6}v. \end{cases}$$

Нам нужно найти из нее отношение $\frac{v_1}{v_2}$. Для этой цели разделим первое уравнение на второе:

$$\frac{4}{5}\cdot\frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}, \quad \frac{v_1}{v_2} = \frac{3}{2}:\frac{4}{5} = \frac{15}{8}.$$

Ответ: 15/8. ▲

479. Из пункта А по одному шоссе выезжают одновременно в одном направлении два автомобиля, а через час вслед за ними выезжает третий автомобиль. Еще через час расстояние между третьим и первым автомобилями уменьшилось в 1,5 раза, а расстояние между третьим и вторым — в 2 раза. Во сколько раз скорость первого автомобиля больше скорости второго, если известно, что за эти два часа третий автомобиль не обогнал первого и второго?

480. Человек, идущий вдоль трамвайной линии, заметил, что через каждые 7 мин его обгоняет трамвай, а через каждые 5 мин он встречает трамвай. Считая, что трамваи идут с равными интервалами в обоих направлениях, найдите интервал, с которым пройдут мимо неподвижного наблюдателя два трамвая, следующие в одном направлении.

481*. Два пешехода вышли одновременно: первый — из А в В, второй — из В в А. В момент их встречи из В в А вышел третий пешеход. Когда он прошел $\frac{1}{4}$ пути от В в А, первому пешеходу оставалось идти вдвое меньше того, что прошел второй. В пункт А второй и третий пешеходы пришли одновременно. Вычислите отношение скоростей третьего и второго пешеходов.

482. Дорога проходит через пункты А и В. Велосипедист выехал из А по направлению к В. Одновременно с ним из пункта В вышли с равными скоростями два пешехода: первый — в пункт А, второй — в противоположном направлении. Велосипедист встретил первого пешехода через 18 мин после выезда из А, а второго догнал через час после проезда через В. Найдите время движения велосипедиста от А до В.

△ Примем путь АВ за единицу. Обозначим скорости велосипедиста и пешеходов соответственно через v_1 и v_2 (в долях единицы в час).

Пусть велосипедист догнал второго пешехода в пункте С.

Так как велосипедист встретился с первым пешеходом через 18 мин = 0,3 ч, то $0{,}3v_1 + 0{,}3v_2 = 1$. Так как за время $\left(\frac{1}{v_1}+1\right)$ ч велосипедист проделает путь, больший пути второго пешехода, на АС − ВС = АВ = 1, то

$$\left(\frac{1}{v_1}+1\right)(v_1 - v_2) = 1.$$

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} 0{,}3(v_1 + v_2) = 1, \\ \left(\frac{1}{v_1}+1\right)(v_1 - v_2) = 1. \end{cases}$$

Из нее находим v_1: $v_1 = 2$. Тогда время велосипедиста на пути АВ равно (1 : 2) ч = 0,5 ч.

Ответ: 0,5 ч. ▲

483. Из пункта А в пункт В, находящийся в 60 км от А вниз по течению реки, одновременно отправились лодка и плот. В тот же самый момент из В вверх по течению отплыл катер. Скорость лодки в стоячей воде 5 км/ч. Катер встретил лодку и еще через 2 ч плот. Найдите скорость катера в неподвижной воде.

484. Два велосипедиста выехали одновременно из одного пункта в одном направлении. Первый из них едет со скоростью 15 км/ч, второй — 12 км/ч. Спустя полчаса из того же пункта в том же направлении выехал третий велосипедист, который через некоторое время догнал второго, а еще через 1 ч 30 мин — и первого. Найдите скорость третьего велосипедиста.

485. Из пункта А одновременно по одному и тому же маршруту выехали грузовик и легковой автомобиль. Скорость легкого автомобиля в 1,5 раза больше скорости грузовика. Через полчаса из того же пункта в том же направлении выехал мотоцикл со скоростью 60 км/ч. Мотоцикл догнал грузовик на 1 ч раньше, чем легковой автомобиль. Найдите скорость легкового автомобиля.

486. Три велогонщика — А, потом В и затем С — стартуют с интервалом в 1 мин из одной точки кольцевого шоссе и двигаются в одном направлении. Каждый гонщик затрачивает на круг более 2 мин. Сделав три круга, гонщик А в первый раз догоняет В у точки старта, а еще через 3 мин он вторично догоняет С. Гонщик В впервые догоняет С у точки старта, сделав четыре круга. Сколько времени тратит на круг каждый из гонщиков?

△ Примем длину всего кольцевого шоссе за единицу. Обозначим через t_1, t_2 и t_3 время в минутах на круг соответственно гонщиков А, В и С.

Так как гонщик А делает 3 круга за то время, за которое В проезжает 2 круга, то

$$3t_1 = 2t_2 + 1.$$

Так как А за $(3t_1 + 3)$ мин проходит на 2 круга больше, чем С за $(3t_1 + 1)$ мин, то

$$(3t_1+3)\cdot\frac{1}{t_1}=(3t_1+1)\cdot\frac{1}{t_3}+2.$$

Так как гонщик В проходит 4 круга за то время, за которое С проходит 3 круга, то

$$4t_2 = 3t_3 + 1.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 3t_1 = 2t_2 + 1, \\ \dfrac{3t_1 + 3}{t_1} = \dfrac{3t_1 + 1}{t_3} + 2, \\ 4t_2 = 3t_3 + 1. \end{cases}$$

Ее нетрудно решить.

Ответ: А — 3 мин, В — 4 мин, С — 5 мин. ▲

487. Три бегуна стартуют одновременно из трех точек круговой беговой дорожки, являющихся вершинами правильного треугольника, и бегут в одном направлении. Первый бегун обгоняет второго через 4 мин после старта, а третьего — через 5 мин после старта. Третий бегун бежит быстрее второго. Через какое время после старта третий бегун догонит второго?

488. Два бегуна стартуют одновременно из одной точки кольцевой дорожки стадиона, а третий бегун стартует одновременно с ними в том же направлении из диаметрально противоположной точки. Пробежав 3 круга, третий бегун впервые после старта догнал второго. Через 2,5 мин после этого первый бегун впервые догнал третьего. Первый бегун обгоняет второго через каждые 6 мин. Какую часть круга пробегает в минуту второй бегун?

489*. Три велосипедиста выехали одновременно: первый и второй — из пункта А, третий — навстречу им из пункта В. Через 1,5 ч первый велосипедист был на равном расстоянии от двух других, а через 2 ч после отправления третий велосипедист был на равном расстоянии от первого и второго. Через сколько часов после отправления второй велосипедист находился на равном расстоянии от первого и третьего?

△ Примем путь АВ за единицу. Обозначим скорости первого, второго и третьего велосипедистов соответственно через v_1, v_2 и v_3 (в долях этого пути в час).

Будем обозначать положения первого, второго и третьего велосипедистов для каждой из трех указанных ситуаций соответственно буквами M_1, M_2 и M_3.

Через 1,5 ч после начала движения первый велосипедист находился посредине между вторым и третьим (рис. 4), а через 2 ч третий находился посредине между первым и вторым (рис. 5).

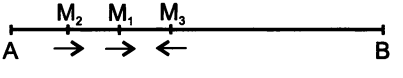

Рис. 4

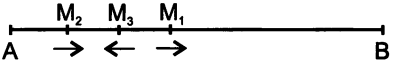

Рис. 5

Так как на рис. 4 $M_2M_1 = M_1M_3$, где

$$M_2M_1 = 1{,}5(v_1 - v_2), \quad M_1M_3 = 1 - 1{,}5v_1 - 1{,}5v_3,$$

то

$$1{,}5(v_1 - v_2) = 1 - 1{,}5(v_1 + v_3).$$

Так как на рис. 5 $M_2M_3 = M_3M_1$, где

$$M_2M_3 = 1 - 2(v_2 + v_3), \quad M_3M_1 = 2(v_1 + v_3) - 1,$$

то

$$1 - 2(v_2 + v_3) = 2(v_1 + v_3) - 1.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} 1{,}5(v_1 - v_2) = 1 - 1{,}5(v_1 + v_3), \\ 1 - 2(v_2 + v_3) = 2(v_1 + v_3) - 1. \end{cases}$$

Из нее находим, что

$$v_3 = \frac{1}{2}(1 - v_1 - v_2), \quad v_1 - v_2 = \frac{1}{9}$$

(подумайте, как вывести эти равенства).

Нас интересует третье положение, когда второй велосипедист находится посредине между первым и третьим (рис. 6).

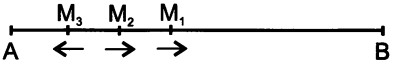

Рис. 6

Обозначим через t ч время от начала движения до этого положения. Так как $M_3M_2 = M_2M_1$, где

$$M_3M_2 = (v_2 + v_3)t - 1, \quad M_2M_1 = (v_1 - v_2)t,$$

то

$$(v_1 + v_3)t - 1 = (v_1 - v_2)t.$$

Выразим отсюда t, а затем, используя полученные выражения для v_3 и $v_1 - v_2$, вычислим t:

$$t = \frac{1}{2v_2 + v_3 - v_1} = \frac{1}{2v_2 + \frac{1}{2}(1 - v_1 - v_2) - v_1} = \frac{2}{1 - 3v_1 + 3v_2} = 2 : \left(1 - \frac{3}{9}\right) = 3.$$

Ответ: через 3 ч. ▲

490*. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону. В тот момент, когда велосипедист догнал пешехода, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обогнал пешехода в тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода?

491*. Из пункта А по шоссе в одном направлении одновременно выехали два автомобиля, а спустя некоторое время из А вслед за ними выехал третий автомобиль. Через час после своего отправления третий автомобиль находился на равном расстоянии от первого и второго, а еще через полтора часа — в 8 раз ближе к первому автомобилю, чем ко второму. Третий автомобиль догнал первый автомобиль через 3 ч после отправления двух первых автомобилей. На сколько времени позже двух других автомобилей выехал из А третий автомобиль?

492*. Из пункта А в пункт С, находящийся на расстоянии 20 км от А, выехал грузовик. Одновременно с ним из пункта В, расположенного между А и С на расстоянии 5 км от С, в пункт С вышел пешеход, а из С навстречу им выехал автобус. Грузовик догнал пешехода через полчаса после встречи грузовика с автобусом. Пешеход до встречи с автобусом находился в пути втрое меньше времени, чем грузовик до своей встречи с автобусом. За какое время после своего отправления грузовик догнал пешехода?

§ 15. Другие задачи на составление уравнений 8—11

Литература: [33^{а}], [35^{а}], [37], [43], [50].

15.1. 8—9

Рассмотрим задачи на совместную работу.

Задачи этого рода довольно близки к задачам на движение. Аналогом расстояния здесь является объем выполняемой работы: площадь поля, вместимость резервуара и т.д., а аналогом скорости движения — производительность труда.

493. Четыре насоса одинаковой производительности, работая вместе, наполнили нефтью первый танкер и треть второго танкера (другого объема) за 11 ч. Если бы три насоса наполнили первый танкер, а затем один из них наполнил четверть второго танкера, то работа заняла бы 18 ч. За сколько часов три насоса могут наполнить второй танкер?

△ Пусть один насос наполняет первый танкер за x ч, а второй танкер — за y ч. Тогда четыре насоса, работая вместе, наполнят первый танкер за $\frac{x}{4}$ ч, а второй — за $\frac{y}{4}$ ч.

Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{4\cdot 3}=11, \\ \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=18. \end{cases}$$

Из нее находим, что $y = 24$ ч. Следовательно, три насоса могут наполнить второй танкер за $\frac{24}{3} = 8$ ч.

Ответ: за 8 ч. ▲

494. Бассейн заполняется водой через первую трубу на 5 ч быстрее, чем через вторую трубу, и на 30 ч быстрее, чем через третью трубу. Третья труба за час наливает воды в 2,5 раза меньше, чем первая, и на 40 м^3 меньше, чем вторая труба. Найдите производительность каждой трубы.

495. Две бригады штукатуров, работая совместно, оштукатурили жилой дом за 6 дней. В другой раз они оштукатурили клуб за 35 дней и выполнили втрое больший объем работы, чем на оштукатуривании дома. В клубе сначала работа-

ла одна первая бригада, затем ее сменила вторая бригада и довела работу до конца, причем первая бригада выполнила объем работы вдвое больший, чем вторая. За сколько дней одна первая бригада смогла бы оштукатурить жилой дом?

496. Два трактора вспахивают поле, разделенное на две равные части. Оба трактора начали работу одновременно, и каждый вспахивает свою половину. Через 5 ч после того момента, когда они совместно вспахали половину поля, выяснилось, что первому трактору осталось вспахать $\frac{1}{10}$ часть своего участка, а второму — $\frac{2}{5}$ своего участка. Какое время понадобилось бы второму трактору для того, чтобы вспахать все поле?

497. Два насоса, работая одновременно, наполнили водой бассейн объемом 80 м^3. Если увеличить производительность первого насоса в $\frac{4}{3}$ раза, то он один сможет наполнить бассейн, работая на 2 ч дольше, чем работали оба насоса вместе. Если уменьшить производительность второго насоса на 1 м^3, то он один сможет наполнить бассейн, если будет работать в $\frac{10}{3}$ раза дольше, чем работали оба насоса вместе. Найдите производительность каждого из насосов.

498. Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют разную производительность. Совместная производительность всех трех одновременно работающих линий в 1,5 раза больше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 ч 48 мин быстрее, чем его выполняет первая линия. Это же задание вторая линия выполняет на 2 ч быстрее первой линии. За сколько часов выполняет свое сменное задание первая линия?

△ Сменное задание для первой линии примем за единицу.

Пусть первая линия выполняет свое сменное задание за x ч, а третья линия то же задание — за y ч. Тогда вторая линия выполняет задание первой за $(x-2)$ ч.

Следовательно, производительности первой, второй и третьей линий равны соответственно $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x-2}$ и $\frac{1}{y}$ (в долях задания первой линии в час).

Так как совместная производительность всех трех линий в 1,5 раза больше, чем совместная производительность первой и второй линий, то

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y}=1{,}5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right).$$

Так как вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить сменное задание первой линии на 4 ч 48 мин = $\frac{24}{5}$ ч быстрее, чем его выполняет первая линия, то

$$x-\frac{24}{5}=1:\left(\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y}\right).$$

После упрощений это уравнение приводится к такому виду:

$$1+\frac{x-2}{y}=\frac{5x-10}{5x-24}.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}+\frac{1}{y}=1{,}5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right),\\ 1+\frac{x-2}{y}=\frac{5x-10}{5x-24}.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы выразим y через x:

$$\frac{1}{y}=0{,}5\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-2}\right),\quad \frac{1}{y}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x-2}{x(x-2)},\quad y=\frac{x(x-2)}{x-1}.$$

Подставим это выражение во второе уравнение системы:

$$1+(x-2)\cdot\frac{x-1}{x(x-2)}=\frac{5x-10}{5x-24},\quad 1+\frac{x-1}{x}=\frac{5x-10}{5x-24}.$$

Последнее уравнение приводится к квадратному уравнению $5x^2-43x+24=0$. Его корни — $x_1=8$ и $x_2=\frac{3}{5}$. Подходит только первый корень.

Ответ: 8 ч. ▲

499. Два насоса, работая вместе, наполняют бассейн водой за 10 ч. Половину бассейна первый из них может наполнить за время, на 7,5 ч меньшее, чем второй. Первый насос включили в 6 часов, второй — в 8 часов. В 12 часов в бассейне было 400 м^3 воды. Какова емкость бассейна?

500. Три трубы, работая одновременно, наполняют бассейн водой за 13 ч 20 мин. Если одновременно работают только первая и вторая трубы, то они вместе наполняют бассейн на 6 ч дольше, чем его наполняет одна третья труба. Производительности первой и второй труб одинаковы, а производительность третьей трубы на 3 м^3/ч больше, чем производительность первой трубы. Найдите емкость бассейна.

501. В цехе работают три бригады. Работая одновременно, они выполняют дневную норму за 5 ч. Вторая бригада, работая одна, выполняет дневную норму цеха на 5 ч быстрее, чем одна третья бригада, а третья бригада выполняет ее вдвое быстрее, чем первая. За сколько часов одна вторая бригада выполняет дневную норму цеха?

502. В резервуар вода наливается двумя трубами. В первый день обе трубы, работая одновременно, налили 14 м^3 воды. Во второй день была включена только первая труба. Она налила 14 м^3 воды, проработав на 5 ч больше, чем в первый день. В третий день работа продолжалась столько же времени, сколько во второй, но сначала работали одновременно обе трубы, налив 21 м^3 воды, а затем работала лишь вторая труба, налившая еще 20 м^3 воды. Какова производительность каждой из труб?

503. Трое рабочих должны сделать 80 одинаковых деталей. Все вместе за час они делают 20 деталей. К работе сначала приступил один первый рабочий. Он сделал 20 деталей, затратив на их изготовление более 3 часов. Оставшуюся часть работы выполняли вместе второй и третий рабочие. На всю работу ушло 8 ч. Сколько часов потребовалось бы первому рабочему на изготовление всех 80 деталей?

△ Обозначим производительность первого, второго и третьего рабочего соответственно через x, y и z деталей в час. Тогда на основании условий задачи получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y+z=20, \\ \dfrac{20}{x}+\dfrac{60}{y+z}=8. \end{cases}$$

Из нее нужно найти x. С этой целью из первого уравнения выразим $y + z$ через x: $y + z = 20 - x$, а затем подставим это выражение во второе уравнение:

$$\frac{20}{x}+\frac{60}{20-x}=8.$$

Это уравнение приводится к квадратному $x^2 - 15x + 50 = 0$. Его корни — $x_1 = 10$, $x_2 = 5$. Оба ли подходят? По условию первый рабочий затратил на 20 деталей более 3 часов. Но $\frac{20}{10} = 2 < 3$, $\frac{20}{5} = 4 > 3$, следовательно, годится только $x = 5$. Тогда он изготовит все 80 деталей за $\frac{80}{5} = 16$ ч.

Ответ: 16 ч. ▲

504. Три тракторные бригады вспахали два поля общей площадью 120 га. Первое поле было вспахано за 3 дня, причем все три бригады работали вместе.

Второе поле было вспахано за 6 дней первой и второй бригадами. Если бы все три бригады вместе проработали на втором поле один день, то оставшуюся часть этого поля одна первая бригада могла бы вспахать за 8 дней. Сколько гектаров в день вспахивала вторая бригада?

505. Три цистерны одинакового объема начинают одновременно заполняться водой, причем в первую поступает 100 л в минуту, во вторую — 60 и в третью — 80. В начальный момент первая цистерна была пуста, вторая и третья цистерны — частично заполнены. Все три цистерны полностью заполнились одновременно. Во сколько раз количество воды в начальный момент во второй цистерне было больше, чем в третьей?

506. Три каменщика с разной производительностью труда выложили кирпичную стену, причем первый каменщик проработал 6 ч, второй — 4 ч и третий — 7ч. Если бы первый каменщик работал 4 ч, второй — 2 ч и третий — 5 ч, то было бы выполнено лишь $\frac{2}{3}$ всей работы. За сколько часов каменщики выложили бы всю стену, если бы работали все вместе одно и то же время?

15.2. 8—11

Рассмотрим задачи на процентное содержание, смеси и сплавы.

507. Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие — 12% воды. Сколько получится сухих грибов из 44 кг свежих?

△ По условию 44 кг свежих грибов содержат $44 \cdot 0{,}9 = 39{,}6$ кг воды, а значит, сухого вещества $44 - 39{,}6 = 4{,}4$ кг.

Обозначим массу сухих грибов, которую можно получить из 44 кг свежих, через x кг. Эти x кг состоят из $0{,}12x$ кг воды и $0{,}88x$ сухого вещества.

Так как масса сухого вещества и в свежих, и в сухих грибах одна и та же, то

$$0{,}88x = 4{,}4.$$

Следовательно, $x = \frac{4{,}4}{0{,}88} = 5$.

Эту задачу можно было решить и без помощи алгебры — арифметически.

Ответ: 5 кг. ▲

508. Пчелы, перерабатывая цветочный нектар в мед, освобождают его от значительной части воды. Нектар содержит 70% воды, а полученный из него мед — 17% воды. Сколько килограммов нектара приходится перерабатывать пчелам для получения 1 кг меда?

509. На овощной базе имелся крыжовник, содержавший 99% воды. За время хранения содержание воды в нем уменьшилось до 98%. На сколько процентов уменьшилась масса крыжовника?

510. Руда содержит 40% примесей, а выплавленный из нее металл — 4% примесей. Сколько получится металла из 36 т руды?

511. Из 24 т руды выплавляют 12 т металла, содержащего 5% примесей. Каков процент примесей в руде?

512. В 10 т руды содержится некоторое количество железа. После удаления из нее 4 т примесей, содержащих 10% железа, процентное содержание железа в руде повысилось на 20%. Сколько железа осталось в руде?

△ Пусть первоначально в руде имелось x кг железа.

После того, как из нее удалили вместе с примесями $4 \cdot 0{,}1 = 0{,}4$ т железа, в оставшихся 6 тоннах руды оказалось железа $(x - 0{,}4)$ т.

Так как железа в оставшейся руде на 20% больше, чем железа первоначально в 10 тоннах, то

$$\frac{x-0{,}4}{6}\cdot 100-\frac{x}{10}\cdot 100=20.$$

Решая это уравнение, находим, что $x = 4$.

Следовательно, в руде осталось железа $4 - 0{,}4 = 3{,}6$ т.

Ответ: 3,6 т. ▲

513. Имеется три слитка металла. Масса первого из них равна 5 кг, второго — 3 кг, и каждый из них содержит 30% меди. Если первый слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 56% меди, а если второй слиток сплавить с третьим, то получится слиток, содержащий 60% меди. Найдите массу третьего слитка и процентное содержание в нем меди.

514*. От двух сплавов массой 7 кг и 3 кг с разным процентным содержанием магния отрезали по куску одинаковой массы. Затем кусок, отрезанный от первого сплава, сплавили с остатком второго сплава, а кусок, отрезанный от второго сплава, сплавили с остатком первого сплава. Новые сплавы получились с одинаковым процентным содержанием магния. Найдите массу каждого из отрезанных кусков.

515*. Имеется два куска сплава меди и цинка с процентным содержанием меди 40% и 20% соответственно. В каком отношении нужно взять эти сплавы для того, чтобы, переплавив взятые куски вместе, получить сплав, содержащий 35% меди?

516. Имеется три куска сплава меди с никелем с отношениями этих металлов 2 : 1, 3 : 1 и 5 : 1 (по массе). Из них сплавили кусок массой 12 кг с отношением меди к никелю 4 : 1. Найдите массу каждого из исходных кусков, если масса первого из них вдвое больше массы второго.

517. Имеется два сплава, каждый из которых состоит из цинка, меди и олова. Первый сплав содержит 25% цинка, второй — 50% меди. Процентное содержание олова в первом сплаве вдвое больше, чем во втором. Сплавив 200 кг первого сплава и 300 кг второго, получили новый сплав, в котором оказалось 28% олова. Каково процентное содержание меди в новом сплаве?

518. Имеется три сплава. Первый из них содержит 30% никеля и 70% марганца, второй — 10% марганца и 90% меди, третий — 15% никеля, 25% марганца и 60% меди. Из них изготовлен новый сплав массой 15 кг, содержащий 42% марганца и 40% меди. Сколько килограммов первого, второго и третьего сплавов взяли для этого?

519. 40 кг раствора соли разлили в два сосуда так, что во втором сосуде чистой соли оказалось на 2 кг больше, чем в первом. Если во второй сосуд добавить 1 кг соли, то количество соли в нем будет в два раза больше, чем в первом. Найдите массу раствора, находящегося в первом сосуде.

△ Пусть в первом сосуде находится x кг соли и y кг воды. Тогда во втором сосуде соли $(x + 2)$ кг, а во всем первоначальном растворе — $(2x + 2)$ кг.

Так как после добавления 1 кг соли во второй сосуд масса соли в нем будет вдвое больше, чем в первом сосуде, то $x + 3 = 2x$. Так как процентное содержание соли во всем первоначальном растворе и в первом сосуде (как и во втором) одинаково, то

$$\frac{2x+2}{40}\cdot 100=\frac{x}{x+y}\cdot 100, \quad \frac{2x+2}{40}=\frac{x}{x+y}.$$

Будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} x+3=2x, \\ \dfrac{2x+2}{40}=\dfrac{x}{x+y}. \end{cases}$$

Решая ее, получаем: $x = 3$, $x + y = 15$.

Ответ: 15 кг. ▲

520. В сосуд объемом 6 л налито 4 л 70%-го раствора серной кислоты. Во второй сосуд налито 3 л 90%-го раствора серной кислоты. Сколько литров раствора нужно перелить из второго сосуда в первый для того, чтобы в первом сосуде получился 74%-й раствор серной кислоты?

521. Имеется два раствора одной и той же кислоты с разным процентным содержанием кислоты. Объем одного раствора 4 л, другого — 6 л. Если их слить вместе, то получится 35%-й раствор кислоты. Если же слить равные объемы этих растворов, то получится 37,5%-й раствор кислоты. Сколько литров кислоты содержится в каждом из первоначальных растворов?

522. Имеется два раствора серной кислоты в воде: первый — 40%-й, второй — 60%-й. Эти два раствора слили вместе, добавили 5 л чистой воды и получили 20%-й раствор кислоты. Если вместо 5 л воды добавить 5 л 80%-го раствора серной кислоты в воде, то получится 70%-й раствор. Сколько было 40%-го и 60%-го раствора кислоты?

523. Из сосуда объемом 54 л, наполненного 100%-й кислотой, вылили часть кислоты и долили сосуд водой, потом опять вылили столько же литров смеси. Тогда в оставшейся в сосуде смеси оказалось 24 л чистой кислоты. Сколько кислоты вылили в первый раз?

524. В сосуде находится смесь воды с кислотой. Чтобы уменьшить концентрацию кислоты (т.е. отношение объема кислоты к объему смеси) на 34%, в сосуд нужно долить 3 л воды, а чтобы уменьшить ее на 17%, нужно долить 1 л воды. Какова концентрация кислоты в сосуде?

525°. В сосуде имелось V_0 л жидкости, представляющей собой p%-й раствор кислоты в воде. Из него выливают a л ($a < V_0$) раствора и доливают a л воды, после чего раствор тщательно перемешивается. Эта процедура повторяется несколько раз. Докажите, что концентрация кислоты в сосуде после n таких процедур равна

$$b_n = \frac{p}{100}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n.$$

△ Так как первоначальное процентное содержание кислоты в растворе равно p%, то вначале в сосуде имелось кислоты $\frac{p}{100}V_0$ л.

После того, как отлили a л раствора, в сосуде осталось кислоты

$$\frac{p}{100}V_0 - \frac{p}{100}a = \frac{p}{100}V_0\left(1 - \frac{a}{V_0}\right) \text{ (л)}.$$

После добавления a л воды концентрация кислоты в сосуде стала равной

$$b_1 = \frac{p}{100}V_0\left(1 - \frac{a}{V_0}\right) : V_0 = \frac{p}{100}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right).$$

После того, как отлили a л раствора с концентрацией кислоты b_1, в растворе осталось кислоты

$$\frac{p}{100}V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)-b_1a=b_1V_0-b_1a=b_1V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)=$$

$$=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)=\frac{p}{100}V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2 \text{ (л)}.$$

Ее концентрация после добавления V_0 л воды станет равной

$$b_2=\frac{p}{100}V_0\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2:V_0=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^2.$$

Аналогично, после проведения такой процедуры еще раз концентрация кислоты станет равной

$$b_3=\frac{p}{100}\left(1-\frac{a}{V_0}\right)^3.$$

И т. д. Отсюда и вытекает справедливость формулы для b_n.

При переходе в этой формуле от b_n к b_{n+1} добавляется множитель $1-\frac{a}{V_0}$. Он показывает, во сколько раз уменьшается концентрация кислоты после очередного переливания. ▲

526. Из сосуда со 100%-й кислотой отлили 1 л кислоты и добавили в него 1 л воды, потом после перемешивания отлили 1 л смеси и добавили 1 л воды, и это повторяется 4 раза. После этого концентрация кислоты в получившейся смеси стала равной 0,64. Сколько было кислоты в сосуде первоначально?

△ Для нахождения начального объема V_0 кислоты нужно положить в формуле для b_n из задачи 525

$$p = 100, \quad n = 4, \quad b_4 = 0{,}64, \quad a = 1.$$

Получаем:

$$0{,}64=\left(1-\frac{1}{V_0}\right)^4, \quad 1-\frac{1}{V_0}=\sqrt[4]{0{,}64}=\sqrt{0{,}8},$$

$$\frac{1}{V_0}=1-\sqrt{0{,}8}, \quad V_0=\frac{1}{1-\sqrt{0{,}8}}=\frac{1+\sqrt{0{,}8}}{1-0{,}8}\approx\frac{1+0{,}9}{0{,}2}=\frac{1{,}9}{0{,}2}=9{,}5.$$

Ответ: ≈ 9,5 л. ▲

527. Из сосуда, доверху наполненного чистым глицерином, отлили 1 л глицерина, а затем долили 1 л воды. После перемешивания снова отлили 1 л смеси и долили 1 л воды. Затем повторили эту операцию еще раз. В результате объем воды в сосуде оказался в 7 раз больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде после этих операций?

528. Из бака объемом 64 л, наполненного 100%-м спиртом, вылили часть спирта и долили водой; потом из бака вылили столько же литров смеси. После этого в нем осталось 49 л чистого спирта. Сколько литров спирта вылили в первый и во второй раз?

15.3. 8—11

В заключение рассмотрим разные задачи на составление уравнений.

529. Ученик при перемножении двух натуральных чисел, одно из которых на 94 больше другого, ошибся, уменьшив в произведении цифру десятков на 4. При делении, для проверки ответа, ошибочного произведения на больший из множителей он получил в частном 52, а в остатке — 107. Какие числа он перемножал?

△ Обозначим меньший из множителей через x. Тогда больший множитель равен $x + 94$.

Так как ученик уменьшил в произведении цифру десятков на 4, то ошибочное произведение меньше истинного на 40, т. е. равно $x(x + 94) - 40$. Получаем уравнение:

$$x(x + 94) - 40 = (x + 94)52 + 107.$$

Решая его, находим:

$$x = 53, \quad x + 94 = 147.$$

Ответ: 53, 147. ▲

530. В рукописи учебника по математике был написан пример, в котором некоторое число нужно было умножить на 3 и от полученного результата отнять 24. В типографии допустили опечатки: вместо знака умножения поставили знак деления, а вместо минуса — плюс. Тем не менее ответ к примеру не изменился. Какой пример должны были поместить в учебнике?

531. Имеются два двузначных числа a и b. Если число a написать впереди b и полученное четырехзначное число разделить на b, то в частном получится 84, а в остатке — 14. Если же число b написать впереди a и образовавшееся четырехзначное число разделить на a, то деление выполнится без остатка, а в частном получится 121. Найдите числа a и b.

532. Если двузначное число разделить на некоторое натуральное число, то в частном получится 3, а в остатке — 8. Если в делимом поменять местами цифры, а делитель оставить прежним, то в частном получится 2, а в остатке — 5. Найдите первоначальное двузначное число.

△ Обозначим исходное двузначное число через $\overline{ab}$, а делитель — через x. Имеем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases}\overline{ab}=3x+8,\\ \overline{ba}=2x+5.\end{cases}$$

Помогает здесь то обстоятельство, что систему нужно решить в целых числах, точнее, натуральных; к тому же здесь a и b — цифры.

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}10a+b=3x+8,\\ 10b+a=2x+5.\end{cases}$$

Вычтем уравнения этой системы:

$$9(a-b)=x+3.$$

Следовательно, $x+3$ делится на 9. С помощью перебора находим, что этому условию удовлетворяют значения $x=6$, 15, 24 (значение $x=33$ хотя и удовлетворяет условию, но число $3x+8$ получается не двузначным, а трехзначным).

Проверим найденные значения x по первоначальной системе. Оказывается, подходит только $x=15$: тогда $\overline{ab}=53$, $\overline{ba}=35$.

Ответ: 53. ▲

533. На какое натуральное число нужно разделить число 180, чтобы остаток составлял $\frac{1}{4}$ частного?

534. Одну и ту же площадку можно покрыть плитками трех цветов тремя способами. При первом способе покрытия потребуется по 100 плиток белого, черного и серого цветов, при втором способе — 150 белых, 150 черных и 50 серых плиток, при третьем — 200 белых, 50 черных и 60 серых. Во сколько раз площадь серой плитки больше площади черной плитки?

535*. Ученик должен был перемножить два трехзначных числа и полученное произведение разделить на пятизначное число. Он не заметил знака умножения и принял два рядом стоящих числа за одно шестизначное. Поэтому полученное частное оказалось в три раза больше истинного. Найдите все три числа.

536. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Бриллиант массой m г был разбит на две части, после чего его цена уменьшилась в 1,8 раза. На какие части был разбит бриллиант?

△ Обозначим массы частей бриллианта через x г и y г. Тогда цены этих частей равны kx^2 и ky^2, где k — коэффициент пропорциональности. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=m, \\ 1{,}8(kx^2+ky^2)=km^2. \end{cases}$$

Решая ее, находим, что массы частей равны $\frac{m}{3}$ и $\frac{2m}{3}$.

Ответ: $(m/3)$ г, $(2m/3)$ г. ▲

537. Температуру можно измерять по шкале Цельсия, Реомюра и Фаренгейта. Известно, что 0 градусов по Цельсию соответствует 0 градусов по Реомюру и 32 градусам по Фаренгейту, а 100 градусов по Цельсию — 80 градусам по Реомюру и 212 градусам по Фаренгейту. Сколько будет градусов по Реомюру, если показания термометров по шкалам Цельсия и Фаренгейта совпадают?

538. Два стрелка сделали по 30 выстрелов каждый, при этом было 44 попадания, остальные — промахи. У первого стрелка на каждый промах приходилось в два раза больше попаданий, чем у второго. Сколько раз попал каждый из них?

539. Часовая и минутная стрелки часов совпадают в полночь. В какое время новых суток часовая и минутная стрелки впервые совпадут снова, если стрелки часов движутся без скачков?

△ Очевидно, совпадение стрелок произойдет вскоре после часа ночи.

Пусть часовая стрелка сдвинется к этому моменту на $(1 + a)$ делений часов, где $a < 1$. Так как минутная стрелка движется в 12 раз быстрее часовой, то она за то же время сдвинется на $(12 + 12a)$ делений.

До момента совпадения минутная стрелка в сравнении с часовой пройдет лишний круг, т. е. ее путь больше пути часовой стрелки на 12 делений. Получаем уравнение

$$(12 + 12a) - (1 + a) = 12.$$

Отсюда находим a: $a = \frac{1}{11}$. Следовательно, совпадение стрелок впервые произойдет в $1\frac{1}{11}$ ч = 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин.

Ответ: в 1 ч $5\frac{5}{11}$ мин. ▲

540. Через сколько минут после того, как часы показали 6 ч, минутная стрелка часов впервые совпадет с часовой, если стрелки движутся без скачков?

541. Из двух пунктов А и В, находящихся друг от друга на расстоянии 120 км, по прямолинейным дорогам, сходящимся в пункте С под углом 60°, одновременно выехали в С соответственно со скоростями 40 км/ч и 60 км/ч автобус и грузовик. Автобус прибыл в С на 1 час раньше грузовика. За какое время автобус проехал путь ВС?

542*. Группа туристов за два дня прошла четыре участка пути длиной 25 км, 16 км, 16 км и 9 км. Каждый из участков проходился с постоянной скоростью, и на весь путь ушло 16 ч. Если бы туристы шли с каждой из этих скоростей по одному часу, то они прошли бы 16 км. Какова была скорость туристов на каждом из участков?

ГЛАВА III. НЕРАВЕНСТВА

§ 16. Положительные и отрицательные числа 7—9

Здесь мы будем использовать известные свойства положительных и отрицательных чисел: сумма положительных чисел есть число положительное; сумма отрицательных чисел — число отрицательное; произведение двух чисел положительно, если множители имеют одинаковые знаки, и отрицательно, если они имеют разные знаки, и др.

543. Произведение двух целых чисел равно 7. Каковы эти числа, если каждое из них меньше 7?

544. Докажите, что если сумма и произведение двух чисел положительны, то эти числа положительны.

545. Сумма двух чисел больше произведения, но меньше их разности. Какой знак имеют эти числа?

△ Обозначим числа через a и b. Тогда

$$ab < a + b < a - b.$$

Так как $a + b < a - b$, то $2b < 0$, $b < 0$.
Неравенство $ab < a + b$ преобразуем, перенося a в левую часть:

$$ab - a < b, \quad a(b - 1) < b < 0.$$

Так как $a(b - 1) < 0$ и $b - 1 < 0$, то $a > 0$.
Ответ: $a > 0$, $b < 0$. ▲

546. Из трех чисел a, b и c одно положительно, другое отрицательно и третье равно нулю, причем $a^2(a - b) = |c|$. Какое из этих чисел положительно, какое отрицательно и какое равно нулю?

547. Квадрат размером 8x8 заполнен числами так, что сумма чисел, стоящих в каждой строке, положительна. Докажите, что найдется столбец квадрата, в котором сумма чисел также положительна.

△ Из условия следует, что сумма всех 64 чисел квадрата положительна. Обозначим сумму чисел первого, второго, третьего и т. д. столбца соответственно через $a_1, a_2, a_3 ..., a_8$. Тогда $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_8 > 0$.

Следовательно, среди этих восьми чисел имеется, по меньшей мере, одно положительное: в противном случае их сумма была бы неположительной. ▲

548. Квадрат размером 5x5 заполнен числами так, что произведение чисел в каждой строке отрицательно. Докажите, что в некотором столбце произведение чисел также отрицательно. Сколько может быть таких столбцов?

549. Девять чисел записаны в таблицу 3x3 так, что сумма чисел в любой строке неотрицательна, а сумма чисел в любом столбце неположительна. Могут ли все эти девять чисел быть отличными от нуля?

550. Можно ли выписать в строку семь чисел так, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех семи чисел была отрицательна?

△ Это можно сделать, и не одним способом, например:

$$-4,\ 5,\ -4,\ 5,\ -4,\ 5,\ -4.$$

В этом случае сумма всех 7 чисел равна

$$-4 \cdot 4 + 5 \cdot 3 = -16 + 15 = -1 < 0.$$

Ответ: можно. ▲

551. Докажите, что если 7 чисел записать по окружности так, что сумма любых двух соседних чисел положительна, то сумма всех 7 чисел положительна.

552. Можно ли выписать в строку 15 чисел так, чтобы сумма любых трех соседних чисел была отрицательной, а сумма любых пяти соседних чисел — положительной?

553. Докажите, что среди чисел

$$a^2 + 2b + 1,\quad b^2 + 2c + 2,\quad c^2 + 2d + 3,\quad d^2 + 2a + 4$$

имеется по меньшей мере одно положительное.

△ Сложим все четыре числа:

$$(a^2 + 2b + 1) + (b^2 + 2c + 2) + (c^2 + 2d + 3) + (d^2 + 2a + 4) =$$
$$= (a^2 + 2a + 1) + (b^2 + 2b + 1) + (c^2 + 2c + 1) + (d^2 + 2d + 1) + 6 =$$
$$= (a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (c + 1)^2 + (d + 1)^2 + 6 > 0.$$

Следовательно, среди исходных четырех чисел имеется положительное — в противном случае их сумма была бы неположительной. ▲

554. Существуют ли такие значения переменных x, y, при которых многочлены

$$z = 2x^2 - 6xy + 3y^2 \quad \text{и} \quad t = x^2 + 4xy - 2y^2$$

принимают одновременно отрицательные значения?

555. Докажите, что среди четырех чисел

$$a + 2b - 2\sqrt{cd}, \quad b + 2c - 2\sqrt{da}, \quad c + 2d - 2\sqrt{ab}, \quad d + 2a - 2\sqrt{bc},$$

где a, b, c, d — положительные числа, имеется по меньшей мере два положительных.

556*. Имеется 20 чисел таких, что сумма любых трех из них положительна. Верно ли, что сумма всех 20 чисел будет обязательно положительной?

△ Пусть среди этих чисел имеются неположительные. Таких чисел не более двух: ведь если их три или больше, то получается тройка чисел, сумма которых неположительна.

Предположим, что неположительных чисел два. Обозначим их через a и b. Тогда остальные 18 чисел положительны. Возьмем тройку чисел a, b и c, где c — любое из положительных чисел. Сумма $a + b + c$ чисел этой тройки положительна по условию. Следовательно, и сумма всех 20 чисел положительна.

Если неположительное число только одно, то аналогично доказывается, что сумма всех 20 чисел положительна.

Ответ: верно. ▲

557*. Имеется 1000 чисел таких, что сумма любых 7 из них отрицательна. Докажите, что сумма всех 1000 чисел отрицательна.

558*. Докажите, что нельзя выписать в строку 40 чисел так, чтобы сумма любых 7 соседних чисел была положительной, а сумма любых 11 соседних чисел была отрицательной.

559. Каждое из чисел a, b, c, d отлично от нуля. Верно ли, что среди чисел

$$ab, \ bc, \ cd, \ -da$$

имеется положительное и отрицательное число?

△ Перемножим все эти четыре числа:

$$(ab) \cdot (bc) \cdot (cd) \cdot (-da) = -a^2b^2c^2d^2 < 0.$$

Так как полученное произведение отрицательно, то среди четырех исходных множителей имеются отрицательные, причем их один или три. Следовательно, среди них имеются и положительные числа, и их, соответственно, три или одно.

Ответ: верно. ▲

560*. Имеется 25 чисел. Произведение всех этих чисел, а также произведение любых четырех из них положительно. Докажите, что тогда каждое из 25 чисел положительно.

561*. Числа

$$a + b + c, \quad ab + bc + ca, \quad abc$$

положительны. Докажите, что тогда числа a, b и c положительны.

562*. Квадратный трехчлен $y = ax^2 + bx + c$ не имеет действительных корней и $a + c < b$. Определите знак a.

△ Парабола $y = ax^2 + bx + c$ по условию не пересекает оси Ox. Так как

$$y(-1) = a - b + c < 0,$$

то и все значения квадратного трехчлена отрицательны. Следовательно, парабола расположена целиком ниже оси Ox. Но это возможно только при $a < 0$.

Ответ: $a < 0$. ▲

563*. Функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ удовлетворяет условиям

$$f(-1) < 1, \quad f(1) > -1, \quad f(3) < -9.$$

Определите знак a.

§ 17. Сравнение чисел 8—11

Литература: [22], [33^e], [34], [44], [60].

17.1. 8—11

Как сравнить два числа a и b? Для этого можно составить разность $a - b$ и выяснить ее знак или, в случае положительных a и b, составить отношение $\frac{a}{b}$ и сравнить его с 1. К сожалению, такой способ возможен лишь в сравнительно простых случаях.

564. Что больше:

$$\frac{222221}{333332} \text{ или } \frac{444443}{666665}?$$

△ Обозначим число 111111 через a. Тогда первая дробь равна $\frac{2a-1}{3a-1}$, а вторая — $\frac{4a-1}{6a-1}$.

Составим разность этих дробей и определим ее знак:

$$\frac{2a-1}{3a-1}-\frac{4a-1}{6a-1}=\frac{(12a^2-8a+1)-(12a^2-7a+1)}{(3a-1)(6a-1)}=-\frac{a}{(3a-1)(6a-1)}<0.$$

Значит, большей является вторая дробь.
Ответ: 444443/666665. ▲

565. Что больше:

а) $\frac{9999998}{6666665}$ или $\frac{6666667}{4444445}$; б) $\frac{24^{13}+1}{24^{14}+1}$ или $\frac{24^{14}+1}{24^{15}+1}$?

566. Правильная или неправильная дробь:

$$\frac{12345\cdot 9876+5743}{12346\cdot 9876-4131}?$$

567. Какая из дробей ближе к 1 — правильная или обратная ей неправильная?

568. Что больше:

19991999 · 200120012001 или 199919991999 · 20012001?

569. Что больше:

$$\sqrt{1997}+\sqrt{1999} \text{ или } 2\sqrt{1998}?$$

△ Составим разность данных чисел и преобразуем ее следующим образом:

$$\sqrt{1997}+\sqrt{1999}-2\sqrt{1998}=(\sqrt{1999}-\sqrt{1998})-(\sqrt{1998}-\sqrt{1997})=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{1999}+\sqrt{1998}}-\frac{1}{\sqrt{1998}+\sqrt{1997}}.$$

У первой из двух последних дробей знаменатель больше, поэтому первая дробь меньше второй, а тогда разность этих дробей отрицательна. Следовательно, второе из двух исходных чисел больше первого.

Ответ: $2\sqrt{1998}$. ▲

570. Что больше:

а) $\sqrt[3]{1999}+\sqrt[3]{2001}$ или $2\sqrt[3]{2000}$; б) $1999^{10}+2001^{10}$ или $2\cdot 2000^{10}$?

571. Что больше:

$$\frac{2001^2}{(1{,}001)^{2001}} \text{ или } \frac{2000^2}{(1{,}001)^{2000}}?$$

△ Составим отношение данных дробей и преобразуем его так, чтобы можно было выяснить, больше или меньше оно 1:

$$\frac{2001^2}{(1{,}001)^{2001}}:\frac{2000^2}{(1{,}001)^{2000}}=\frac{2001^2\cdot(1{,}001)^{2000}}{2000^2\cdot(1{,}001)^{2001}}=$$
$$=\frac{2001^2}{2000^2\cdot 1{,}001}=\frac{2001^2}{2000\cdot 2002}=\frac{2001^2}{(2001-1)\cdot(2001+1)}=\frac{2001^2}{2001^2-1}>1.$$

Следовательно, большей является первая дробь.

Ответ: первая дробь. ▲

572*. Что больше:

а) $\frac{(1{,}001)^{1001}}{1001^3}$ или $\frac{(1{,}001)^{1002}}{1002^3}$; б) $\frac{(0{,}1)^{0{,}012}+1}{(0{,}1)^{0{,}013}+1}$ или $\frac{(0{,}1)^{0{,}003}+1}{(0{,}1)^{0{,}004}+1}$?

573. Расположите в порядке возрастания числа:

$$x=(a+b)(c+d),\quad y=(a+c)(b+d),\quad z=(a+d)(b+c),$$

если $a<b<c<d$.

574. Больше или меньше 1 число

$$(0{,}9999)^{1{,}0001} \cdot (1{,}0001)^{0{,}9999}?$$

575. Что больше: 202^{505} или 505^{202}?

△ Составим отношение этих степеней и уравняем показатели степени:

$$\frac{202^{505}}{505^{202}} = \frac{(202^5)^{101}}{(505^2)^{101}} = \left(\frac{202^5}{505^2}\right)^{101}.$$

Выясним, больше или меньше 1 основание последней степени. Имеем:

$$505^2 = 255025, \quad 202^3 = 8242408.$$

Тогда

$$202^5 > 202^3 > 505^2.$$

Следовательно, $\frac{202^5}{505^2} > 1$. Отсюда отношение исходных чисел больше 1, т. е. первое число больше второго.

Ответ: 202^{505}. ▲

576. Что больше:

а) 9000^{10} или 100^{20}; б) 5^{78} или 7^{57}?

577. Верно ли неравенство:

$$\sqrt{8} + \sqrt{17} > \sqrt{10} + \sqrt{15}?$$

△ Возведем неравенство в квадрат (при этом получится неравенство, равносильное исходному):

$$8 + 2\sqrt{136} + 17 > 10 + 2\sqrt{150} + 15, \quad \sqrt{136} > \sqrt{150}, \quad 136 > 150.$$

Последнее неравенство неверно. Следовательно, и первоначальное неравенство неверно.

Ответ: неверно. ▲

578. Что больше:

а) $\sqrt{4+\sqrt{7}} + \sqrt{4-\sqrt{7}}$ или $\sqrt{2}$; б) $\sqrt[3]{10} + \sqrt{8}$ или 5;

в) 5^{15} или 3^{23}?

579*. Что больше: 63^7 или 16^{12}?

△ Попробуем выяснить, справедливо ли неравенство $63^7 < 16^{12}$. В том случае, когда сравниваются степени, нужно уравнивать или основания, или показатели степени. Будем иметь:

$$63^7 < 64^7 = (4^3)^7 = 4^{21} < 4^{24} = 16^{12}.$$

Следовательно, вторая степень больше.
Ответ: 16^{12}. ▲

580*. Что больше:

а) 32^9 или 18^{13}; б) $3^{\sqrt{2}}$ или $2^{\sqrt{3}}$?

581*. Верно ли неравенство:

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} < \sqrt[3]{24}?$$

△ Возведем это неравенство в куб:

$$2 + 3\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{18} + 3 < 24, \quad 3\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) < 19.$$

Так как

$$3\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) < 3\sqrt[3]{8}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = 6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}),$$

то для того, чтобы исходное неравенство было верным, д о с т а т о ч н о, чтобы выполнялось неравенство

$$6(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) < 19, \quad \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} < \frac{19}{6}.$$

Справедливы неравенства:

$$\sqrt[3]{2} < \frac{3}{2}, \quad \sqrt[3]{3} < \frac{3}{2}$$

(проверьте возведением в куб последнего неравенства). Тогда

$$\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} < \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 3 < \frac{19}{6}.$$

Следовательно, исходное неравенство верно.
Ответ: верно. ▲

582*. Что больше:

а) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18}$ или 4; б) 20! или $1 + 2 + 3 + \cdots + 1000000$;
в) 99! или 50^{99}?

583*. Расположите в порядке возрастания числа:

$$a = 100^{100!}, \quad b = (100!)^{100}, \quad c = (100^{100})!$$

17.2. 8—9

Здесь мы рассмотрим текстовые задачи на сравнение чисел.

584. Пункты А и В расположены на берегу реки в 10 километрах друг от друга. Катер проплыл из А в В и обратно без остановки. Больше или меньше времени понадобится ему для того, чтобы проплыть 20 км по озеру, в котором нет течения?

△ Обозначим время катера на путь АВ и обратно по реке через t_1 ч, а его время на путь по озеру — через t_2 ч. Кроме того, обозначим скорость катера в неподвижной воде через V_1 км/ч, а скорость течения реки — через V_2 км/ч. Тогда

$$t_1 = \frac{10}{V_1+V_2} + \frac{10}{V_1-V_2} = \frac{20V_1}{V_1^2-V_2^2}, \quad t_2 = \frac{20}{V_1}.$$

Для определения того, что больше — t_1 или t_2, выясним знак разности $t_1 - t_2$:

$$t_1 - t_2 = \frac{20V_1}{V_1^2-V_2^2} - \frac{20}{V_1} = \frac{20V_1^2 - 20(V_1^2-V_2^2)}{V_1(V_1^2-V_2^2)} = \frac{20V_2^2}{V_1(V_1^2-V_2^2)} > 0.$$

Итак, $t_1 - t_2 > 0$, откуда $t_2 < t_1$.
Ответ: меньше. ▲

585. Два пешехода одновременно вышли из пункта А в пункт В. Первый из них весь путь шел со скоростью 5 км/ч. Второй половину времени шел со скоростью 6 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч. Кто из них раньше пришел в В?

586. Двое пешеходов одновременно вышли из пункта А в пункт В. Первый пешеход половину пути шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч. Второй половину времени шел со скоростью 5 км/ч, а вторую половину — со скоростью 4 км/ч. Кто из них раньше пришел в В?

587. Два туриста одновременно отправились из пункта А в пункт В. Первый турист половину пути шел со скоростью 5 км/ч, а другую половину — со скоростью 4 км/ч. Второй 4/9 пути шел со скоростью 6 км/ч, а остальную часть — со скоростью 3,5 км/ч. Кто из них раньше пришел в В?

588. Лыжник выбирает один из двух маршрутов из пункта А в пункт В одинаковой протяженности. Первый маршрут идет все время по равнине, а второй наполовину состоит из подъема, а наполовину — из спуска. Лыжник знает, что на подъеме его скорость в полтора раза меньше, чем на равнине, но зато на спуске она вдвое больше, чем на равнине. Какой маршрут потребует меньше времени?

589. Если первая грузовая автомашина сделает 4 рейса, а вторая — 3, то вместе они перевезут меньше 21 т груза. Если же первая автомашина сделает 7 рейсов, а вторая — 4, то они вместе перевезут больше 33 т груза. Какая автомашина имеет большую грузоподъемность?

△ Пусть грузоподъемность первой автомашины равна x т, второй — y т. Получаем систему неравенств:

$$\begin{cases} 4x+3y<21, \\ 7x+4y>33. \end{cases}$$

Уравняем у этих неравенств свободные члены; для этого первое неравенство умножим на 11, а второе — на 7:

$$\begin{cases} 44x+33y<231, \\ 49x+28y>231. \end{cases}$$

Отсюда

$$49x + 28y > 44x + 33y, \quad 5x > 5y, \quad x > y.$$

Ответ: первая. ▲

590. Дедушка с внуком пошли вместе кататься на лыжах. По ровному месту оба едут со скоростью 8 км/ч; под гору: дедушка — 20 км/ч, внук — 21 км/ч; в гору: дедушка — 6 км/ч, внук — 5 км/ч. Оба проехали по одному и тому же маршруту, причем внук вернулся домой раньше. Что больше: длина подъемов или длина спусков?

591. Два катера с различными постоянными скоростями плыли в одном направлении по течению реки. Когда они поравнялись, с одного из них уронили в воду спасательный круг. Через некоторое время после этого оба катера одновременно повернули обратно. Какой из них встретит круг раньше?

592. От пристани А вниз по течению реки к пристани В отплыл плот. Одновременно из В отправился в А катер и через 25 мин встретил плот. После прибытия в А катер сразу повернул обратно и прибыл в В одновременно с плотом. Больше или меньше часа продолжалось плавание?

593. Человек пил кофе следующим образом: сначала он налил полную чашку кофе, выпил половину, затем доверху налил молоко; потом выпил 1/4 смеси и снова налил доверху молоко; выпил 1/8 новой смеси и опять долил чашку доверху молоком; и т. д., кроме последнего раза, когда он выпил чашку до дна. Чего он выпил больше: кофе или молока?

594*. Из пункта А вниз по течению реки одновременно отправились плот и катер, а навстречу им в тот же момент из пункта В отправился другой катер, скорость которого в стоячей воде такая же, что и у первого. Когда первый катер достигнет пункта В, к чему будет ближе плот — к пункту А или ко второму катеру?

§ 18. Доказательство неравенств 9—11

Литература: [8], [14], [18], [24], [32], [33^e], [37], [43^e].

В этом и нескольких следующих параграфах нам понадобятся свойства числовых неравенств. Давайте их вспомним.

1) **Если** $a > b$, $b > c$, **то** $a > c$.

2) **Если** $a > b$, **то** $a + k > b + k$.

3) **Если** $a_1 > b_1$, $a_2 > b_2$, **то** $a_1 + a_2 > b_1 + b_2$.
Аналогичное свойство справедливо и при сложении любого конечного числа неравенств одинакового смысла.

4) **Если** $a > b$, **то** $ak > bk$ **при** $k > 0$, $ak < bk$ **при** $k < 0$.
В частности, из неравенства $a > b$ следует неравенство $-a < -b$.

5) **Если** $a_1 > b_1 > 0$, $a_2 > b_2 > 0$, **то** $a_1a_2 > b_1b_2$.
Аналогичное свойство справедливо и при перемножении любого конечного числа неравенств одинакового смысла с положительными членами.

6) **Если** $a > b \geq 0$, **то** $a^k > b^k$ $(k \in N)$.
Аналогичное свойство справедливо и в том случае, когда k — любое положительное число.

7) **Если** $a > b$, **то при** k **нечетном** $a^k > b^k$.

8) **Если** $a > b$ **и числа** a **и** b **имеют одинаковый знак, то** $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Некоторые из этих свойств мы уже применяли в предыдущих параграфах, особенно в § 17.

18.1. 9—11

Рассмотрим задачи на непосредственное доказательство неравенств. Это значит, что исходное неравенство будем приводить к равносильному неравенству, о котором уже известно, что оно справедливо, например, к неравенству вида $a^2 \geq 0$.

595°. Докажите неравенство:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab\,^{*}. \qquad (1)$$

---

* Здесь и в дальнейшем предполагается, что входящие в неравенство буквы означают любые действительные числа, если только не сделано специальных оговорок.

△ Перенесем $2ab$ из правой части неравенства в левую с противоположным знаком, после чего левую часть можно представить в виде квадрата разности:

$$a^2 + b^2 - 2ab \geq 0, \quad (a - b)^2 \geq 0.$$

Последнее неравенство справедливо при любых действительных a и b. Так как неравенство (1) ему равносильно, то и оно справедливо при любых a и b.

Когда неравенство (1) превращается в равенство? Тогда, когда последнее неравенство превращается в равенство: при $a = b$. Это полезно знать. ▲

Аналогично доказывается, что справедливы похожие неравенства

$$a^2 + b^2 \geq -2ab \tag{2}$$

(равенство при $a = -b$),

$$a^2 + b^2 \geq 2|ab| \tag{3}$$

(равенство при $a = b$ и при $a = -b$).

596. Докажите неравенства:

а) $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$; б) $(a + 1)(a - 2b + 1) + b^2 \geq 0$.

Когда они превращаются в равенства?

597. Верно ли, что при любых действительных a выполняется неравенство

$$\frac{a^2+a+2}{\sqrt{a^2+a+1}} \geq 2?$$

598. Найдите все действительные a, при которых справедливо неравенство

$$\frac{a^2+4}{\sqrt{a^2-1}} > 2.$$

599. Докажите неравенства:

а) $x^2 + 2y^2 + 2xy + 6y + 10 > 0$; б) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$ $(x > 0, y > 0)$;

в) $\frac{a^3+b^3}{2} \geq \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$ $(a \geq 0, b \geq 0)$.

600. Докажите неравенство:

$$x^2 - 5xy + 7y^2 \geq 0.$$

Когда достигается равенство?

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть $y = 0$. Тогда данное неравенство превращается в неравенство $x^2 \geq 0$, которое справедливо при любом x.

2) Пусть $y \neq 0$. Разделим данное неравенство на y^2, причем левую его часть — почленно:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 5\frac{x}{y} + 7 \geq 0.$$

Последнее неравенство выполняется при любых значениях дроби $\frac{x}{y}$ тогда и только тогда, когда дискриминант D квадратного трехчлена, стоящего в левой части неравенства, неположителен. Имеем:

$$D = 25 - 28 = -3 < 0.$$

Следовательно, неравенство в этом случае доказано, причем оно является строгим.

А когда исходное неравенство превращается в равенство? Только в первом случае, а именно при $x = y = 0$. ▲

601. Докажите неравенство:

$$4xy - 3x^2 - 8y^2 \leq 0.$$

602. Докажите неравенство:

$$(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) + 1 \geq 0.$$

△ Для доказательства неравенства преобразуем его левую часть, перемножая в произведении первый множитель на четвертый, а второй — на третий:

$$(x - 3)(x - 4)(x - 5)(x - 6) + 1 = (x^2 - 9x + 18)(x^2 - 9x + 20) + 1.$$

Положим здесь $x^2 - 9x + 18 = y$. Получим:

$$y(y + 2) + 1 = y^2 + 2y + 1 = (y + 1)^2 \geq 0.$$

Неравенство доказано. ▲

603. Докажите неравенства:

а) $(x + a + b)(x + a - b)(x - a + b)(x - a - b) + 4a^2b^2 \geq 0$;

б) $\sqrt[3]{4(x+y)} \geq \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}$ $(x \geq 0,\ y \geq 0)$.

604. Что больше: $\sqrt[5]{2} + 7$ или $8\sqrt[10]{2}$?

Подобные задачи мы решали в § 17.

△ Положим $\sqrt[10]{2} = a$, а неизвестный нам знак неравенства между выражениями $a^2 + 7$ и $8a$ обозначим через $\vee$. Будем иметь:

$$a^2 + 7 \vee 8a, \quad a^2 - 8a + 7 \vee 0.$$

Для исследования знака квадратного трехчлена в левой части последнего неравенства применим метод интервалов (*рис.* 7).

Рис. 7

В какой из этих трех интервалов попадает точка $a = \sqrt[10]{2}$? В интервал (1; 7), так как $1 < \sqrt[10]{2} < 7$. Следовательно, знак $\vee$ в неравенстве нужно заменить на знак $<$.

Ответ: $8\sqrt[10]{2}$. ▲

605. Докажите неравенства:

а) $3(1 + x^2 + x^4) \geq (1 + x + x^2)^2$; б) $a + \dfrac{4}{a^2} \geq 3$ $(a > 0)$.

606. Докажите неравенство:

$$x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x + 6y + 4 > 0.$$

△ Расположим члены левой части неравенства по убывающей степени x:

$$x^2 + 2(y + 1)x + 3y^2 + 6y + 4 > 0.$$

Полученный в левой части квадратный трехчлен положителен при всех действительных значениях x тогда и только тогда, когда его дискриминант D отрицателен:

$$\frac{1}{4}D = (y + 1)^2 - (3y^2 + 6y + 4) < 0,$$

$$-2y^2 - 4y - 3 < 0, \quad 2y^2 + 4y + 3 > 0.$$

Аналогично последнее неравенство выполняется при всех действительных значениях y тогда и только тогда, когда дискриминант D_1 квадратного трехчлена в его левой части отрицателен. Будем иметь:

$$\frac{1}{4}D_1 = 4 - 6 < 0.$$

Тем самым доказано, что первоначальное неравенство выполняется при любых действительных значениях x и y. ▲

607. Докажите неравенства:

а) $x^2 + xy + y^2 \geq 3(x + y - 1)$;

б) $5(x^2 + y^2 + z^2) \geq 6xy - 8xz + 8yz$.

608. Верно ли, что при всех действительных значениях x

$$x^4 + (x + 2)^4 \geq 2?$$

△ Положим $x + 1 = t$. Тогда

$$(t - 1)^4 + (t + 1)^4 \geq 2.$$

Для упрощения левой части последнего неравенства возведем $t - 1$ и $t +$ в квадрат и получающиеся выражения также возведем в квадрат:

$(t^2 - 2t + 1)^2 + (t^2 + 2t + 1)^2 \geq 2,$

$(t^4 + 4t^2 + 1 - 4t^3 + 2t^2 - 4t) + (t^4 + 4t^2 + 1 + 4t^3 + 2t^2 + 4t) \geq 2,$

$2t^4 + 12t^2 \geq 0, \quad t^2(t^2 + 6) \geq 0.$

Неравенство доказано.
Ответ: верно. ▲

609°. Докажите неравенство:

$$|a + b| \leq |a| + |b|. \qquad (4$$

△ По определению модуля действительного числа справедливы нера венства

$$-|a| \leq a \leq |a|,$$

$$-|b| \leq b \leq |b|.$$

Сложим эти неравенства почленно:

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству $|a + b| \leq |a| + |b|$, так ка неравенство $-c \leq x \leq c$ при $c > 0$ равносильно неравенству $|x| \leq c$. ▲

610. Докажите неравенства:

а) $|a - b| \geq |a| - |b|$; б) $|a - b| \geq ||a| - |b||$.

611. Докажите неравенство:

$$|x - 1| + |x - 2| \geq 1.$$

△ Применим опорное неравенство (4) (из задачи 609):

$$|x - 1| + |x - 2| = |x - 1| + |2 - x| \geq |(x - 1) + (2 - x)| = 1. \ ▲$$

612. Верно ли, что при любых действительных x справедливы неравенства:

а) $|x| + |x + 4| \geq 4$; б) $|x| + |x + 1| + |x + 2| + |x + 3| \geq 4$;

в) $|x - 4| + |x| + |x + 4| \geq 8$?

613. Докажите неравенство:

$$P = \frac{2^3+1}{2^3-1} \cdot \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \frac{4^3+1}{4^3-1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3+1}{n^3-1} < \frac{3}{2} \ (n > 1).$$

△ Возьмем любой знаменатель $k^3 - 1$ ($k = 2, 3, \ldots, n$) и разложим его на множители:

$$k^3 - 1 = (k - 1)(k^2 + k + 1).$$

Встретятся ли эти множители в числителе какой-либо из дробей? Множитель $k - 1$ встретится, если $k \geq 5$. А множитель $k^2 + k + 1$? Тоже встретится — в числителе дроби, следующей за дробью $\frac{k^3+1}{k^3-1}$, если $k < n$. В самом деле, разложим на множители сумму $(k + 1)^3 + 1$:

$(k + 1)^3 + 1 = (k + 2)((k + 1)^2 - (k + 1) + 1) =$

$= (k + 2)(k^2 + 2k + 1 - k - 1 + 1) = (k + 2)(k^2 + k + 1).$

Теперь будем иметь:

$$P = \frac{2^3+1}{1\cdot(2^2+2+1)} \cdot \frac{4\cdot(3^2-3+1)}{2\cdot(3^2+3+1)} \cdot \frac{5\cdot(4^2-4+1)}{3\cdot(4^2+4+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{(n+1)(n^2-n+1)}{(n-1)(n^2+n+1)} =$$

$$= 9 \cdot \frac{4\cdot5\cdot6\cdot\ \cdots\ \cdot(n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ \cdots\ \cdot(n-1)} \cdot \frac{(3^2-3+1)(4^2-4+1)\ldots(n^2-n+1)}{(2^2+2+1)(3^2+3+1)\ldots(n^2+n+1)}.$$

Первую из двух полученных дробей можно сократить на произведение $4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (n - 1)$, а вторую — на произведение

$$(2^2 + 2 + 1)(3^2 + 3 + 1)\ldots((n - 1)^2 + (n - 1) + 1).$$

Получаем:

$$P = \frac{9n(n+1)}{6(n^2+n+1)} = \frac{3}{2} \cdot \frac{n^2+n}{n^2+n+1} < \frac{3}{2}. \ ▲$$

614. Докажите неравенства:

а) $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) > \frac{1}{2} \ (n > 1)$;

б) $\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)<2$ $(n > 1)$.

615*. Докажите неравенство:

$$x^6 - x + 1 > 0.$$

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x < 0$.

Тогда неравенство выполняется, так как $-x > 0$.

2) Пусть $x \geq 0$.

А здесь доказательство проводится по-разному, в зависимости от того, является ли x большим 1 или нет.

Если $x > 1$, то $x^6 > x$, $x^6 - x > 0$, а значит, данное неравенство выполняется.

Если $0 \leq x \leq 1$, то достаточно представить неравенство в виде

$$x^6 + (1 - x) > 0,$$

где $1 - x \geq 0$. ▲

616*. Докажите неравенства:

а) $x^{12} - x^9 + x^4 - x^3 + 1 > 0$; б) $x^4 - x + \frac{1}{2} > 0$;

в) $a^2 + b^2 + c^2 \geq a \cdot |b - c| + b \cdot |c - a| + c \cdot |a - b|$.

617*. Докажите, что при любом натуральном четном n справедливы неравенства:

а) $a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + ab^{n-1} + b^n \geq 0$;

б) $a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \cdots - ab^{n-1} + b^n \geq 0$;

в) Верны ли эти неравенства при нечетном n?

△ Воспользуемся формулами разложения на множители выражений $a^n - b^n$ и $a^n + b^n$ (см. § 1, формулы (3) и (4)).

а) Умножим и разделим сумму в левой части неравенства на $a - b$ (при условии $a \neq b$). Получим:

$$a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \ldots + b^n = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}.$$

Так как n по условию четно, то $n + 1$ нечетно. Тогда разности $a - b$ и $a^{n+1} - b^{n+1}$ имеют одинаковые знаки, поскольку, если $a > b$, то $a^{n+1} > b^{n+1}$, а если $a < b$, то $a^{n+1} < b^{n+1}$ (см. свойство 7 неравенств). Следовательно, дробь $\frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a - b}$ положительна.

Проверьте еще самостоятельно, что при $a = b$ данное неравенство также выполняется.

б) Умножим и разделим сумму в левой части неравенства на $a + b$ (при условии $a \neq -b$):

$$a^n - a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 - \ldots - ab^{n-1} + b^n = \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a+b}.$$

Так как $n + 1$ нечетно, то из неравенства $a > -b$, т. е. из неравенства $a + b > 0$ следует неравенство $a^{n+1} > -b^{n+1}$, т. е. неравенство $a^{n+1} + b^{n+1} > 0$, а из неравенства $a + b < 0$ — неравенство $a^{n+1} + b^{n+1} < 0$. Это значит, что суммы $a + b$ и $a^{n+1} + b^{n+1}$ имеют одинаковые знаки. Тогда дробь $\frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{a+b}$ положительна.

Проверьте еще самостоятельно случай $a = -b$.

в) При нечетном n эти неравенства выполняются не при любых a и b. Например, они не верны при $a = 0$, $b = -1$. ▲

618. Докажите неравенства:

а) $2001^{100} + 1999^{100} > 2 \cdot 2000^{100}$; б) $\sqrt[4]{2000} + \sqrt[4]{1999} < 2\sqrt[4]{2000}$;

в) $\sqrt[5]{2000} + \sqrt[5]{1998} < 2\sqrt[5]{1999}$.

619*. Верно ли, что при любых a, b, c, d, e справедливо неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)?$$

△ Перебор некоторых значений a, b, c, d и e показывает, что как будто данное неравенство справедливо при любых значениях этих переменных. Попробуем неравенство доказать.

Раскроем скобки в правой части неравенства, перенесем все члены в левую часть и умножим новое неравенство на 4 (почему именно на 4, увидим в дальнейшем):

$$4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 4d^2 + 4e^2 - 4ab - 4ac - 4ad - 4ae \geq 0.$$

Преобразуем левую часть полученного неравенства следующим образом:

$$(a^2 - 4ab + 4b^2) + (a^2 - 4ac + 4c^2) + (a^2 - 4ad + 4d^2) +$$
$$+ (a^2 - 4ae + 4e^2) = (a - 2b)^2 + (a - 2c)^2 + (a - 2a)^2 + (a - 2e)^2.$$

Последнее выражение неотрицательно при всех действительных значениях a, b, c, d и e. Следовательно, исходное неравенство доказано.

Другой способ доказательства неравенства: перенести все члены правой части первоначального неравенства в левую часть и, рассматривая левую часть полученного неравенства как квадратный трехчлен относительно a, доказать, что дискриминант трехчлена неположителен.

Ответ: верно. ▲

620*. Докажите неравенства:

а) $x^2(y + z - x) + y^2(x + z - y) + z^2(x + y - z) \le 3xyz$ $(x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0)$;

б) $x^4 > (x + 1)^3$ $(x \ge 3)$.

621*. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{2}\ (n \in N).$$

△ Заменим каждое слагаемое суммы, стоящей в левой части неравенства, дробью $\frac{1}{2n}$, не превосходящей этого слагаемого:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\ge\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots\frac{1}{2n}=\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Неравенство доказано.

Фактически мы здесь складывали почленно неравенства

$$\frac{1}{n+1}\ge\frac{1}{2n},\quad \frac{1}{n+2}\ge\frac{1}{2n},\quad \frac{1}{n+3}\ge\frac{1}{2n},\quad \ldots,\quad \frac{1}{2n}\ge\frac{1}{2n}.\ \blacktriangle$$

622*. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{3n}\ge\frac{1}{3}$ $(n \in N)$;

б) $\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n^2}>1$ $(n \in N,\ n > 1)$.

623*. Верно ли неравенство

$$\sqrt[2000]{2000!} > \sqrt[2001]{2001!}\,?$$

18.2*. 10—11

При доказательстве неравенств нередко используется метод вставки, или метод усиления неравенств. Заключается он в следующем: для того, чтобы доказать неравенство $a > b$, достаточно доказать, что существует такое число (или выражение) c, что $a > c$ и $c > b$. Остановка за «небольшим»: как найти число c? Кроме того, иногда приходится вставлять между a и b не одно промежуточное число c, а два-три, а то и больше. Подобные задачи уже встречались в § 17 (см. задачи 579 и 580).

624. Докажите неравенство:

$$x^2 + y^2 + 1 > 2xy.$$

△ Похожее неравенство нам уже встречалось: это опорное неравенство $a^2 + b^2 > 2ab$ из задачи 595. Будем иметь:

$$x^2 + y^2 + 1 > x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \geq 2xy.$$

Отсюда и следует, что $x^2 + y^2 + 1 > 2xy$. Роль промежуточного числа c здесь сыграла сумма $x^2 + y^2$. ▲

625. Докажите неравенства:

а) $(x + y)^2 - 3 < 2(x^2 + y^2)$;

б) $2x^4 > 2x^3 + x^2 - 5$;

в) $\frac{a^2-1}{a^4+1} < \frac{1}{2}$;

г) $\sqrt{a^2+b^2} < a+b+1$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$;

д) $\sqrt{a}+\sqrt{b} < \sqrt{a+b}-2$;

е) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\dots-\frac{1}{99}+\frac{1}{100} > \frac{1}{5}$;

ж) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{n^2} < 1$.

626. Докажите неравенство:

$$5^{11} < 4^{13}.$$

△ Разделим обе части неравенства на 4^{11}:

$$\frac{5^{11}}{4^{11}} < 4^2, \quad \left(\frac{5}{4}\right)^{11} < 16.$$

Для доказательства последнего неравенства проделаем следующее:

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{11} = \left(\frac{5}{4}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \left(\left(\frac{5}{4}\right)^3\right)^3 \cdot \frac{25}{16} = \left(\frac{125}{64}\right)^3 \cdot \frac{25}{16} < 2^3 \cdot \frac{25}{16} = \frac{25}{2} < 16.$$

Неравенство доказано. ▲

627. Докажите неравенства:

а) $4^{79} < 3^{100}$; б) $25^{40} > 35^{31}$; в) $31^{11} < 17^{14}$.

628. Что больше:

$$5^{15} \text{ или } 3^{23}?$$

△ Здесь встает следующая проблема: если $5^{15} < 3^{23}$, то нужно доказать существование такого c, что $5^{15} < c$ и $c < 3^{23}$; если же $5^{15} > 3^{23}$, то нужно найти такое c, что $5^{15} > c$ и $c > 3^{23}$.

Попытки доказать неравенство $5^{15} > 3^{23}$ приводят к неудаче. Попробуем доказать неравенство $5^{15} < 3^{23}$.

Разделим это неравенство на 3^{20}:

$$\frac{5^{15}}{3^{20}} < 3^3, \quad \frac{(5^3)^5}{(3^4)^5} < 27, \quad \left(\frac{125}{81}\right)^5 < 27.$$

Будем иметь:

$$\left(\frac{125}{81}\right)^5 < \left(\frac{135}{81}\right)^5 = \left(\frac{5}{3}\right)^5 = \frac{3125}{243} < 27.$$

Следовательно, большим оказалось число 3^{23}.

Ответ: 3^{23}. ▲

629. Что больше:

а) 3^{29} или 4^{22}; б) 4^{93} или 8^{91}?

§ 19. Доказательство неравенств с помощью теоретических неравенств 9—11

Литература: [8], [14], [18], [22], [32], [33^{в}], [37], [44^{в}].

19.1. 9—11

Рассмотрим здесь доказательство неравенств со взаимно обратными числами.

630°. Докажите, что **сумма двух взаимно обратных положительных чисел не меньше 2**:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2, \qquad (1)$$

причем равенство здесь достигается только при $a = 1$.

△ Умножим неравенство (1) на число a, большее нуля, и соберем все члены нового неравенства в левой части:

$$a^2+1\geq 2a, \quad a^2-2a+1\geq 0, \quad (a-1)^2\geq 0.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству (1) и справедливо при всех положительных a, причем оно превращается в равенство только при $a = 1$. Утверждение задачи доказано. ▲

631°. Докажите, что **если $a \neq 0$, то выполняется неравенство**

$$\left|a+\frac{1}{a}\right|\geq 2, \qquad (2)$$

причем равенство здесь возможно только при $a = 1$ и $a = -1$.

632. Докажите неравенство:

$$\frac{x^4+1}{x^2}\geq 2 \ (x\neq 0).$$

△ В левой части данного неравенства разделим числитель дроби почленно на знаменатель, а затем применим неравенство (1):

$$\frac{x^4+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}\geq 2.$$

Когда исходное неравенство превращается в равенство? При $x^2 = 1$, т. е. при $x = \pm 1$. ▲

633. Найдите все значения x, при которых неравенство

$$x^2+5x+7+\frac{1}{x^2+5x+7}\geq 2$$

обращается в равенство.

634. Докажите, что если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha \geq 2.$$

При каком α здесь достигается равенство?

635. Докажите неравенство:

$$\sqrt[n]{4+\sqrt{15}}+\sqrt[n]{4-\sqrt{15}}>2 \ (n \in N,\ n > 1).$$

Почему здесь невозможно равенство?

636. Катер прошел один час по течению реки и вернулся обратно. Затем прошел еще один час против течения и вернулся обратно. Докажите, что он находился в пути более 4 часов.

637. Докажите, что если числа a и b положительны, то выполняется неравенство

$$\frac{(a^2+4a+1)(b^2+4b+1)}{ab}\geq 36.$$

△ В левой части неравенства множитель $a^2 + 4a + 1$ числителя дроби разделим почленно на a в знаменателе, а b^2+4b+1 — на b:

$$\frac{(a^2+4a+1)(b^2+4b+1)}{ab}=\frac{a^2+4a+1}{a}\cdot\frac{b^2+4b+1}{b}=\left(a+\frac{1}{a}+4\right)\left(b+\frac{1}{b}+4\right).$$

Так почему же полученное произведение не меньше 36? Потому, что

$$a+\frac{1}{a}+4\geq 6, \quad b+\frac{1}{b}+4\geq 6.$$

Перемножим последние неравенства; будем иметь требуемое неравенство. ▲

638. Докажите, что если a, b, c — положительные числа и $abc = 1$, то

$$a + b + c + ab + ac + bc \geq 6.$$

639. Верно ли, что при любых неотрицательных a, b и c выполняется неравенство

$$ab(a + b - 2c) + bc(b + c - 2a) + ca(c + a - 2b) \geq 0?$$

640*. Докажите, что если a, b, c — длины сторон треугольника, то

$$S=\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c}\geq 3.$$

Когда это неравенство превращается в равенство?

△ Мешает то, что знаменатели каждой из трех дробей, стоящих в левой части неравенства, являются суммами трех слагаемых. Неплохо было бы, если бы каждый из этих знаменателей содержал только одну букву...

Положим

$$b+c-a=x,\quad c+a-b=y,\quad a+b-c=z,$$

где числа x, y и z, очевидно, положительны. Эти равенства можно рассматривать как систему уравнений с неизвестными a, b, c. Найдем из нее a, b и c:

$$a=\frac{y+z}{2},\quad b=\frac{x+z}{2},\quad c=\frac{x+y}{2}.$$

Теперь выразим сумму S через x, y и z и получающееся выражение преобразуем:

$$S=\frac{y+z}{2x}+\frac{x+z}{2y}+\frac{x+y}{2z}=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)\right)\geq\frac{1}{2}(2+2+2)=3.$$

Неравенство доказано.

Когда оно обращается в равенство? Очевидно, только при

$$\frac{x}{y}=\frac{z}{x}=\frac{y}{z}=1,$$

т. е. при $x=y=z$. Отсюда следует, что равенство достигается лишь при $a=b=c$, т. е. когда треугольник является равносторонним. ▲

641*. Докажите неравенство:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

19.2. 10—11

Здесь мы займемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим. Вероятно, для случая двух чисел оно уже знакомо многим школьникам.

642°. Докажите, что **среднее арифметическое любых двух неотрицательных чисел a и b не меньше их среднего геометрического**:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}, \tag{3}$$

причем равенство достигается только при $a = b$.

△ Умножим данное неравенство на 2 и соберем все члены в левой части:

$$a+b \geq 2\sqrt{ab}, \quad a-2\sqrt{ab}+b \geq 0, \quad (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0.$$

Неравенство (3) доказано.

Из последнего неравенства видно, что оно, а следовательно, и неравенство (3), обращается в равенство только при $a = b$. ▲

С помощью неравенства (3) можно доказать некоторые уже встречавшиеся нам неравенства, например, неравенство

$$a^2 + b^2 \geq 2|ab|$$

(см. § 18, неравенство (3)) и неравенство со взаимно обратными числами

$$a+\frac{1}{a} \geq 2$$

в начале данного параграфа.

643°. Докажите, что среднее арифметическое любых четырех неотрицательных чисел a, b, c и d не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geq \sqrt[4]{abcd}, \tag{4}$$

причем равенство достигается только при $a = b = c = d$.

△ Представим среднее арифметическое $\frac{a+b+c+d}{4}$ чисел a, b, c, d в виде среднего арифметического двух чисел $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{c+d}{2}$, а затем применим (причем трижды) неравенство (3):

$$\frac{a+b+c+d}{4} = \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}\right) \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd}.$$

Неравенство (4) доказано.

Для того чтобы выяснить, когда оно превращается в равенство, нужно просмотреть приведенное здесь доказательство и использовать условие обращения неравенства (3) в равенство. Получаем:

$$\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}, \quad a = b, \quad c = d.$$

Из этой системы уравнений находим, что $a = b = c = d$. ▲

644°. Докажите, что среднее арифметическое любых трех неотрицательных чисел a, b и c не меньше их среднего геометрического:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}, \tag{5}$$

причем равенство достигается только при $a = b = c$.

△ Попробуем свести среднее арифметическое трех чисел a, b и c к среднему арифметическому четырех чисел — для того, чтобы в дальнейшем воспользоваться неравенством (4). С этой целью найдем такое число x, что

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{a+b+c+x}{4}.$$

Выразим отсюда x:

$$4(a + b + c) = 3(a + b + c) + 3x, \quad 3x = a + b + c, \quad x=\frac{a+b+c}{3}.$$

Теперь получаем:

$$\frac{a+b+c}{3}=\frac{a+b+c+x}{4} \geq \sqrt[4]{abcx} = \sqrt[4]{abc\cdot\frac{a+b+c}{3}}.$$

Возведем это неравенство в четвертую степень:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc\cdot\frac{a+b+c}{3}.$$

Последнее неравенство выполняется при $a + b + c = 0$, т. е. при $a = b = c = 0$. Если же $a + b + c > 0$, то можно его сократить на $\frac{a+b+c}{3}$. Затем из обеих частей нового неравенства извлечем кубический корень:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc, \quad \frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt{abc}.$$

Мы получили неравенство (5).

Из доказательства видно, что равенство здесь достигается только при

$$a=b=c=x=\frac{a+b+c}{3}.$$

т. е. при $a = b = c$. ▲

645. Справедливо ли неравенство (5) при отрицательных a, b и c?

Неравенства (3), (4) и (5) можно обобщить следующим образом: **среднее арифметическое любых n неотрицательных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не меньше их среднего геометрического:**

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n}, \qquad (6)$$

причем это неравенство превращается в равенство только при равенстве всех чисел между собой: $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Неравенство (6) было впервые доказано знаменитым французским математиком XIX века О. Коши и называется **неравенством Коши.** С тех пор для этого неравенства найдено немало новых доказательств, но ни одно из них не является простым. Доказательство, данное ему самим автором, остается, пожалуй, самым оригинальным и красивым.

Познакомимся со схемой доказательства неравенства (6) самого Коши. Сначала он методом математической индукции доказывает это неравенство для значений n, являющихся степенью двойки, т. е. для $n = 2^k$ ($k \in N$), подобно тому, как мы доказывали неравенство (6) в задаче 643 при $n = 4$, отправляясь от случая $n = 2$ (восходящая индукция — от меньших значений k, а следовательно, и n, к большим). Затем Коши доказывает, что если неравенство (6) справедливо при $n = m + 1$ ($m \in N$), то оно справедливо и при $n = m$, аналогично тому, как мы в задаче 644 доказывали неравенство (6) при $n = 3$, отправляясь от $n = 4$ (нисходящая индукция — от больших значений n к меньшим). Отсюда следует, что неравенство Коши выполняется при любом натуральном $n > 1$.

Читатели могут попробовать самостоятельно доказать неравенство (6) по указанной здесь схеме. Впрочем, это доказательство можно найти, например, в книге В.А. Кречмара [32] или в книге И.Х. Сивашинского [44].

Неравенство Коши является наиболее известным и важным среди всех теоретических неравенств.

646. Докажите неравенства:

а) $x^4 + \frac{64}{x^2} \geq 16x$ $(x > 0)$;

б) $(a + 2)(b + 2)(a + b) \geq 16ab$ $(a \geq 0,\ b \geq 0)$.

△ а) На основании неравенства (3) (или неравенства (6) при $n = 2$) будем иметь:

$$x^4 + \frac{64}{x^2} \geq 2\sqrt{x^4 \cdot \frac{64}{x^2}} = 16x.$$

Неравенство доказано.

Посмотрим еще, когда оно превращается в равенство. Получаем:

$$x^4 = \frac{64}{x^2}, \quad x^6 = 64, \quad x = 2.$$

Следовательно, равенство достигается только при $x = 2$.

б) Применим неравенство (3) трижды:

$$a+2\geq 2\sqrt{2a}, \quad b+2\geq 2\sqrt{2b}, \quad a+b\geq 2\sqrt{ab}.$$

Перемножим эти неравенства:

$$(a+2)(b+2)(a+b)\geq 8\sqrt{4a^2b^2}=16ab.$$

Неравенство доказано. ▲

647. Докажите неравенство:

$$\left(1+\frac{y}{x}\right)\left(1+\frac{z}{y}\right)\left(1+\frac{x}{z}\right)\geq 8 \quad (x>0,\ y>0,\ z>0).$$

Когда достигается равенство?

648. Докажите, что если числа a, b и c неотрицательны, то:

а) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc$;

б) $(a+1)(b+1)(a+c)(b+c)\geq 16abc$.

649*. Верно ли, что при любых неотрицательных a, b и c справедливо неравенство

$$abc\geq (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)?$$

△ Пусть $a\leq b\leq c$. Это ограничение не нарушает общности рассуждений, так как данное неравенство симметрично относительно a, b и c, т. е. не меняется при любой перестановке букв a, b и c. Тогда выполняются неравенства

$$b+c-a\geq 0, \quad c+a-b\geq 0.$$

Что касается суммы $a+b-c$, то она может быть и неотрицательной, и отрицательной. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $a+b-c<0$. Тогда неравенство, разумеется, справедливо.

2) Пусть $a+b-c>0$. Положим

$$a+b-c=x, \quad b+c-a=y, \quad c+a-b=z.$$

Здесь числа x, y и z неотрицательны. Выразим отсюда a, b и c через x, y и z:

$$a=\frac{x+z}{2}, \quad b=\frac{x+y}{2}, \quad c=\frac{y+z}{2}.$$

Получаем:

$$abc=\frac{x+z}{2}\cdot\frac{x+y}{2}\cdot\frac{y+z}{2}\geq\sqrt{xz}\cdot\sqrt{xy}\cdot\sqrt{yz}=xyz=(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b).$$

Ответ: верно. ▲

650*. Докажите, что если $a > b$ и $ab = 2$, то

$$\frac{a^2+b^2}{a-b} \geq 4.$$

Когда достигается равенство?

651*. Докажите, что если сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 1, то

$$(1 + a)(1 + b)(1 + c) \geq 8(1 - a)(1 - b)(1 - c).$$

652. Докажите неравенство:

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc \quad (a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0).$$

△ Применим неравенство Коши при $n = 3$, где исходными числами являются a^3, b^3 и c^3:

$$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc, \quad a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc. \ ▲$$

653. Докажите неравенство:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \quad (a > 0,\ b > 0,\ c > 0).$$

654. Почему при любых неотрицательных a, b и c справедливо неравенство:

$$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \geq 9abc?$$

655. Докажите, что если числа a, b, c положительны и $abc = 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca \geq 6.$$

656. Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны, то

$$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_4}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n}+\frac{a_n}{a_1} \geq n.$$

657*. Докажите неравенства:

а) $x^2+\frac{2}{x} \geq 3 \ (x > 0)$; б) $x+\frac{4}{x^2} \geq 3 \ (x > 0)$.

658*. Решите уравнения:

а) $x^2+\frac{16}{x}=12 \ (x > 0)$; б) $x+y+\frac{8}{xy}=6 \ (x > 0,\ y > 0)$.

659*. Докажите неравенство:

$$\frac{a+nb}{n+1} \geq \sqrt[n+1]{ab^n} \quad (a \geq 0,\ b \geq 0,\ n \in N).$$

660*. Докажите, что если сумма положительных чисел a, b и c равна 1, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq 9.$$

661*. Докажите неравенство:

$$n^n > 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \quad (n \in N,\ n > 1).$$

19.3. 10—11

Рассмотрим серию задач на неравенство Бернулли.

662°. Докажите, что **при любом натуральном n и любом $a \geq -1$ выполняется неравенство**

$$(1+a)^n \geq 1 + na, \tag{7}$$

причем равенство возможно только при $n = 1$ или $a = 0$.
Неравенство (7) и называется **неравенством Бернулли.**

△ Применим метод математической индукции.

1) При $n = 1$ неравенство (7) превращается в равенство. Проверим еще значение $n = 2$:

$$(1+a)^2 \geq 1 + 2a,$$

а это неравенство справедливо даже при любом a, а не только при $a \geq -1$.

2) Допустим, что неравенство (7) справедливо при $n = k$:

$$(1+a)^k \geq 1 + ka.$$

Докажем, что тогда оно справедливо и при $n = k + 1$.

Так как $a \geq -1$, то $1 + a \geq 0$. Умножим предыдущее неравенство на $1 + a$:

$(1+a)^k(1+a) \geq (1+ka)(1+a)$,

$(1+a)^{k+1} \geq 1 + (k+1)a + ka^2 \geq 1 + (k+1)a$.

Мы получили, что если неравенство (7) выполняется при $n = k$, то оно выполняется и при $n = k + 1$.

Тогда на основании принципа математической индукции это неравенство справедливо при любом натуральном n.

В заключение остановимся на вопросе о превращении неравенства (7) в равенство. Оно обращается в равенство при $n = 1$ или $a = 0$. Докажите самостоятельно методом математической индукции, что при $n > 1$ и $a \neq 0$ (при условии, что $a \geq -1$) это неравенство является строгим. ▲

663. Докажите неравенство:

$$(1{,}01)^{100} > 2.$$

△ Применим неравенство Бернулли к степени $(1 + 0{,}01)^{100}$:

$$(1 + 0{,}01)^{100} > 1 + 100 \cdot 0{,}01 = 2.$$

На основании утверждения задачи 662 полученное неравенство является строгим. ▲

664. Докажите неравенства:

а) $(0{,}999)^{100} > 0{,}9$; б)* $(0{,}99)^{100} < 0{,}5$.

665. Докажите неравенство:

$$2^n \geq n + 1 \ (n \in N).$$

При каких n здесь возможно равенство?

666. Докажите, что если n — натуральное число, большее 999000, то

$$(1{,}001)^n > 1000.$$

667°. Докажите неравенство:

$$10^{36} > 9^{37}.$$

С подобными неравенствами с числовыми степенями мы уже встречались в §§ 17, 18. Посмотрим, как доказываются такие неравенства с помощью неравенства Бернулли.

△ Разделим данное неравенство на 9^{36}:

$$\frac{10^{36}}{9^{36}} > 9, \quad \left(\frac{10}{9}\right)^{36} > 9.$$

Прямолинейное применение неравенства Бернулли здесь ничего не дает:

$$\left(\frac{10}{9}\right)^{36} = \left(1 + \frac{1}{9}\right)^{36} > 1 + 36 \cdot \frac{1}{9} = 5.$$

Попробуем обходной путь:

$$\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{36} = \left(\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{9}\right)^{4} > \left(1 + 9 \cdot \frac{1}{9}\right)^{4} = 2^4 = 16 > 9.$$

Неравенство доказано. ▲

668. Докажите неравенства:

а) $6^{15} > 5^{16}$; б) $8^{91} > 7^{95}$; в) $11^{37} > 15^{27}$.

669*. Докажите, что если у арифметической прогрессии (a_n) с положительными членами и геометрической прогрессии (b_n) равны два первых члена: $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, то при любом $n > 2$ праведливо неравенство $b_n \geq a_n$.

670°. Докажите с помощью метода математической индукции неравенство:

$$(1+a)^n \geq 1+na+\frac{n(n-1)}{2}a^2 \ (n \in N,\ a \geq 0). \qquad (8)$$

(Это неравенство является, так сказать, развитием неравенства Бернулли, правда, при большем ограничении на a — $a \geq 0$ вместо $a \geq -1$.)

671. Докажите неравенства:

а) $(1{,}1)^{10} > 2{,}4$; б) $3^n \geq 1 + 2n^2$ $(n \in N)$.

672. Докажите неравенство:

$$(a + b)^n \geq a^n + na^{n-1}b \ (n \in N,\ a > 0,\ a + b \geq 0).$$

19.4. 9—11

Задачи этой части параграфа группируются вокруг неравенства (9) (из задачи 673).

673°. Докажите, что **для любых действительных чисел** a, b **и** c **справедливо неравенство**:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca, \qquad (9)$$

причем равенство достигается только при $a = b = c$.

△ Умножим неравенство (9) на 2 и соберем все члены в левой части:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0.$$

Очевидно, левую часть этого неравенства нужно представить в таком виде:

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ac + a^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Последнее выражение неотрицательно при любых значениях a, b и c. Неравенство (9) доказано.

Из доказательства видно, что оно превращается в равенство только при

$$a - b = 0, \quad b - c = 0, \quad c - a = 0,$$

т. е. при $a = b = c$. ▲

674. Докажите неравенство:

$$a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b.$$

Когда достигается равенство?

△ Данное неравенство есть частный случай неравенства (9), когда $c = 1$. Равенство достигается при $a = b = 1$. ▲

675. Докажите неравенства:

а) $a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}$ $(a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0)$;

б) $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq a + b + c$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$;

в) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ca}}$ $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$;

г) $xy + yz + zx \geq x\sqrt{yz} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{xy}$ $(x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0)$;

д) $x^4 + y^4 + z^4 \geq xyz(x + y + z)$.

676. Докажите, что если $abc = 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

677. Докажите неравенство

$$ab + ac + bc < 2c^2,$$

где a и b — катеты, c — гипотенуза прямоугольного треугольника. Почему здесь неравенство строгое?

678. Имеет ли решение система неравенств:

$$x^2 < yz, \quad y^2 < xz, \quad z^2 < xy?$$

679°. Докажите, что для любых действительных чисел a, b и c выполняется неравенство

$$ab + ac + bc \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 \leq a^2 + b^2 + c^2, \qquad (10)$$

причем равенство достигается только при $a = b = c$.

△ 1) Докажем правое из неравенств (10). Для этого раскроем скобки в выражении $(a + b + c)^2$ и применим неравенство (9):

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \leq a^2 + b^2 + c^2 + 2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

Отсюда и следует, что

$$\frac{1}{3}(a + b + c)^2 \le a^2 + b^2 + c^2,$$

причем равенство возможно лишь при $a = b = c$.

2) Примерно так же доказывается и левое из неравенств (10):

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \ge$$

$$\ge (ab + ac + bc) + 2(ab + ac + bc) = 3(ab + ac + bc).$$

Тогда

$$ab + ac + bc \le \frac{1}{3}(a + b + c)^2,$$

причем и здесь равенство достигается только при $a = b = c$. ▲

680. Докажите, что для треугольника с величинами углов α, β, γ, выраженными в радианной мере, выполняется неравенство:

$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma \le \frac{\pi^2}{3} \le \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2,$$

681. Верно ли, что для любых a, b и c выполняется неравенство:

$$(ab + bc + ca)^2 \ge 3abc(a + b + c)?$$

682. Докажите, что если $a^2 + b^2 + c^2 \le 27$, то $a + b + c \le 9$.

683. Докажите, что если сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 1, то

$$ab + ac + bc - abc < \frac{1}{3}.$$

684. Верно ли, что для любых чисел a, b, c и d справедливо неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \ge ab + ac + ad + bc + bd + cd?$$

685. Найдите наибольшее значение суммы $a^3 + b^3 + a^3b^3$, если $a^6 + b^6 = 2$.

△ На основании неравенства (9) справедливо неравенство

$$a^6 + b^6 + 1 \ge a^3b^3 + a^3 + b^3.$$

По условию $a^6 + b^6 + 1 = 3$. Тогда

$$a^3b^3 + a^3 + b^3 \le 3.$$

Следовательно, наибольшее значение суммы $a^3 + b^3 + a^3b^3$ равно 3. Достигается оно при

$$a^3 = b^3 = a^3b^3,$$

т. е. при $a = b = ab$. Отсюда $a = b = 0$ или $a = b = 1$. Но условию $a^6 + b^6 = 2$ удовлетворяет только вторая пара значений a и b.

Ответ: 3 при $a = b = 1$. ▲

686. Известно, что $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}=3$. Найдите наименьшее значение суммы $a + b$.

19.5. 9—11

А здесь главную роль играет неравенство (11) из задачи 687.

687°. Докажите, что **неравенство**

$$a^n + b^n \geq a^{n-1}b + ab^{n-1} \ (n \in N,\ n > 1) \qquad (11)$$

выполняется:

а) **при четном** n **— для любых действительных чисел** a **и** b**;**

б) **при нечетном** n **— для неотрицательных чисел** a **и** b**, причем равенство в обоих случаях возможно только при** $a = b$**.**

△ Составим разность между левой и правой частями неравенства (11) и разложим ее на множители:

$$a^n + b^n - a^{n-1}b - ab^{n-1} = a^{n-1}(a-b) - b^{n-1}(a-b) = (a-b)(a^{n-1} - b^{n-1}).$$

а) Пусть число n четно. Тогда число $n - 1$ нечетно.

В этом случае из неравенства $a \geq b$ следует неравенство $a^{n-1} \geq b^{n-1}$, а из неравенства $a < b$ — неравенство $a^{n-1} < b^{n-1}$. Другими словами, разности $a - b$ и $a^{n-1} - b^{n-1}$ имеют одинаковые знаки, т. е. их произведение неотрицательно. Это значит, что неравенство (11) справедливо для любых чисел a и b. Отсюда видно также, что оно превращается в равенство только при $a = b$.

б) Пусть n нечетно. Тогда число $n - 1$ четно.

Из неравенства $a \geq b$ следует неравенство $a^{n-1} \geq b^{n-1}$, а из неравенства $a < b$ — неравенство $a^{n-1} < b^{n-1}$ лишь при неотрицательных a и b. При этом ограничении неравенство (11) также справедливо, причем равенство также возможно только при $a = b$. ▲

688. Докажите неравенства:

а) $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$;

б) $\dfrac{a^4+b^4}{2} \geq \dfrac{a+b}{2} \cdot \dfrac{a^3+b^3}{2}$.

689. Докажите неравенства:

а) $\dfrac{x^3}{y}+\dfrac{y^3}{x} \geq x^2+y^2 \ (xy > 0)$;

б) $\dfrac{x}{\sqrt{y}}+\dfrac{y}{\sqrt{x}} \geq \sqrt{x}+\sqrt{y} \ (x > 0,\ y > 0)$.

690. Докажите неравенство:

$$x^5 + y^5 + x^3 + y^3 \geq xy(x^3 + y^3 + x + y) \ (x \geq 0,\ y \geq 0).$$

△ Для доказательства достаточно сложить неравенства

$$x^5 + y^5 \geq x^4y + xy^4 \quad \text{и} \quad x^3 + y^3 \geq x^2y + xy^2,$$

которые являются частными случаями неравенства (11) для случая нечетного n. ▲

691. Докажите неравенство:

$$(a^3 + b^3)(a^7 + b^7) \geq a^2b^2(a + b)(a^5 + b^5) \ (a \geq 0,\ b \geq 0).$$

692. Докажите неравенства:

а) $a^{12} + b^{12} \geq a^5b^5(a^2 + b^2)$; б) $2(a^6 + b^6) \geq ab(a + b)(a^3 + b^3)$.

§ 20. Доказательство неравенств с помощью специальных методов 9—11

Литература: [8], [14], [33^{е}], [44^{е}], [56^{е}], [58^{е}], [61].

20.1. 9—11

Рассмотрим доказательство неравенств с помощью векторного неравенства Коши — Буняковского.

С векторным неравенством Коши — Буняковского мы уже встречались в § 13 (п. 13.2). Оно записывается следующим образом:

$$\bar{u}\cdot\bar{v}\le|\bar{u}\cdot\bar{v}|\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|, \qquad (1)$$

где $\bar{u}$ и $\bar{v}$ — векторы, $\bar{u}\cdot\bar{v}$ — их скалярное произведение, $|\bar{u}|$ и $|\bar{v}|$ — длины векторов.

Обычно применяется правая часть неравенства (1) — неравенство

$$|\bar{u}\cdot\bar{v}|\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|, \qquad (2)$$

где равенство достигается только при пропорциональности соответствующих координат векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Еще чаще применяется неравенство

$$\bar{u}\cdot\bar{v}\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|, \qquad (3)$$

где равенство также достигается только при пропорциональности координат векторов, с добавлением, что при этом коэффициент пропорциональности должен быть неотрицательным.

693. Докажите неравенство:

$$4\sqrt{a}+3\sqrt{16-a}\le 20$$

при любых $a\in[0;\,16]$. Когда достигается равенство?

△ Введем векторы на плоскости $\bar{u}$ (4; 3) и $\bar{v}$ ($\sqrt{a}$; $\sqrt{16-a}$). На основании неравенства (3) получаем:

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=4\sqrt{a}+3\sqrt{16-a}\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{4^2+3^2}\cdot\sqrt{a+16-a}=5\cdot 4=20$$

(здесь использовались выражение скалярного произведения векторов в координатах и формула длины вектора).

Неравенство доказано.

Оно превращается в равенство, когда соответствующие координаты векторов пропорциональны:

$$\frac{\sqrt{a}}{4}=\frac{\sqrt{16-a}}{3}.$$

Решая это уравнение, получаем, что $a = \frac{256}{25}$. Это значение a принадлежит отрезку [0; 16]. ▲

694. Докажите неравенства:

а) $\sqrt{a+2}+\sqrt{6-a} \le 4$; б) $ab+4 \le \sqrt{(a^2+16)(b^2+1)}$;

в) $\sqrt{ab}+\sqrt{cd} \le \sqrt{(a+c)(b+d)}$ $(a \ge 0,\ b \ge 0,\ c \ge 0,\ d \ge 0)$.

695. Докажите неравенство

$$|5\sin\alpha - 12\cos\alpha| \le 13.$$

696. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с катетами a и b и гипотенузой c выполняется неравенство $a + b \le c\sqrt{2}$. Когда оно превращается в равенство?

697. Докажите, что если $a^2 + b^2 \le 32$, то $|a + b| \le 8$.

△ Введем векторы $\bar{u}$ $(a;\ b)$ и $\bar{v}$ (1; 1). На основании неравенства (2) будем иметь:

$$|\bar{u}\cdot\bar{v}| = |a+b| \le |\bar{u}|\cdot|\bar{v}| = \sqrt{(a^2+b^2)(1+1)} \le \sqrt{32\cdot 2} = 8.$$

Очевидно, равенство здесь возможно только при $a = b$. Тогда

$$|a + b| = 8, \quad |2a| = 8, \quad |a| = 4, \quad a = b = \pm 4. \ ▲$$

698. Докажите, что если $x + y \ge 4$, то:

а) $x^2 + y^2 \ge 8$; б) $x^4 + y^4 \ge 32$.

699. Докажите, что если $\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}=4$, то $x + y \ge 6$.

700. Докажите неравенство:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a+3}+\sqrt{8-3a} \le 6.$$

△ Введем векторы в пространстве $\bar{u}$ $(\sqrt{a+1};\ \sqrt{2a+3};\ \sqrt{8-3a})$ и $\bar{v}$ (1; 1; 1). На основании неравенства (3) получаем:

$$\bar{u}\cdot\bar{v} = \sqrt{a+1}+\sqrt{2a+3}+\sqrt{8-3a} \le |\bar{u}|\cdot|\bar{v}| = \sqrt{(a+1+2a+3+8-3a)(1+1+1)} = \sqrt{12\cdot 3} = 6.$$

Неравенство доказано. Но посмотрим еще, достигает ли первоначальная сумма значения, равного 6. Для этого координаты векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ должны быть пропорциональны:

$$\sqrt{a+1} = \sqrt{2a+3} = \sqrt{8-3a} \Rightarrow a+1 = 2a+3 = 8-3a.$$

Но последняя система двух уравнений с одним неизвестным не имеет решений. Поэтому в действительности доказанное неравенство является строгим:

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2a+3}+\sqrt{8-3a}<6. \blacktriangle$$

701. Докажите неравенства:

а) $\sqrt{x}+\sqrt{y+1}+\sqrt{2-x-y}\le 3$; б) $\sqrt{x}+2\sqrt{y}-\sqrt{3-x-y}<5$;

в) $\dfrac{x+y+z}{3}\le\sqrt{\dfrac{x^2+y^2+z^2}{3}}$.

702. Существуют ли такие значения x и y, что

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{2-y}-\sqrt{y-x}=3?$$

703. Докажите, что если $a + b + c = 3$, то

$$\sqrt{2a+7}+\sqrt{2b+7}+\sqrt{2c+7}\le 9.$$

△ Рассмотрим векторы $\bar{u}$ $(\sqrt{2a+7};\ \sqrt{2b+7};\ \sqrt{2c+7})$ и $\bar{v}$ (1; 1; 1). На основании неравенства (3) будем иметь:

$$\bar{u}\cdot\bar{v}=\sqrt{2a+7}+\sqrt{2b+7}+\sqrt{2c+7}\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{(2a+7+2b+7+2c+7)(1+1+1)}=$$
$$=\sqrt{(2(a+b+c)+21)\cdot 3}=\sqrt{27\cdot 3}=9.$$

Равенство достигается, если

$$\sqrt{2a+7}=\sqrt{2b+7}=\sqrt{2c+7}.$$

Отсюда $a = b = c$. Но так как $a + b + c = 3$, то $a = b = c = 1$. ▲

704. Докажите, что если $a - b + c = 6$, то

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{2-b}+\sqrt{c+3}\le 6.$$

705. Докажите, что если $a + b + c \le 9$, то

$$\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\le 6.$$

706. Докажите, что в прямоугольном параллелепипеде с ребрами a, b, c и диагональю l

$$a + b + c \le l\sqrt{3}.$$

Когда достигается равенство?

707*. Докажите неравенство:

$$\sin x\cdot\sin y\cdot\sin z+\cos x\cdot\cos y\cdot\cos z\le 1.$$

20.2. 10—11

Займемся доказательством неравенств методом математической индукции. Из всех специальных методов доказательства неравенств этот метод является наиболее известным.

708. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{5}{9}\ (n \in N,\ n>1).$$

△ Обозначим сумму в левой части неравенства через S_n.

1) Проверим справедливость неравенства при $n = 2$:

$$S_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}>\frac{5}{9}.$$

2) Допустим, что данное неравенство справедливо при некотором $n = k \geq 2$: $S_k > \frac{5}{9}$.

Докажем, что тогда оно справедливо и при $n = k + 1$: $S_{k+1} > \frac{5}{9}$.

Сравним суммы:

$$S_k=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}$$

и

$$S_{k+1}=\frac{1}{k+2}+\frac{1}{k+3}+\ldots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}.$$

Для этого вычтем из второй суммы первую:

$$S_{k+1}-S_k=\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}-\frac{1}{k+1}=\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}>0.$$

Отсюда $S_{k+1} > S_k$. Это значит, что последовательность (S_n) является возрастающей.

Теперь получаем:

$$S_{k+1}>S_k>\frac{5}{9}.$$

Так как оба условия принципа математической индукции выполняются, то неравенство доказано при любом натуральном $n \geq 2$. ▲

709. Докажите неравенства:

а) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<\frac{2n-1}{n}\ (n>1)$; б) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$;

в) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2^n-1}<n$ $(n \in N,\ n > 1)$.

710. Докажите неравенство:

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)<\frac{1}{n}\ (n > 1).$$

△ Обозначим произведение в левой части неравенства через P_n.

1) При $n = 2$ это неравенство выполняется:

$$P_2 = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{2},\quad 1 - \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}},\quad \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

2) Допустим, что оно выполняется при некотором $n = k \geq 2$: $P_k < \frac{1}{k}$. Тогда при $n = k + 1$ будем иметь:

$$P_{k+1} = P_k\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right).$$

Теперь проверим, что последнее произведение меньше $\frac{1}{k+1}$:

$$\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<\frac{1}{k+1},\quad \frac{\sqrt{k+1}-1}{k\sqrt{k+1}}<\frac{1}{k+1},$$

$$\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1} - 1) < k,\quad k + 1 - \sqrt{k+1} < k,\quad 1 < \sqrt{k+1}.$$

Последнее неравенство выполняется при любом натуральном k. Получилось, что если $P_k < k$, то $P_{k+1} < k + 1$. Это значит, что если исходное неравенство справедливо при $n = k$, то оно справедливо и при $n = k + 1$.

На основании принципа математической индукции это неравенство справедливо при любом натуральном $n \geq 2$. ▲

711. Докажите неравенство:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ \dots\ \cdot\frac{2n}{2n+1}>\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

712. Верно ли, что при любом натуральном n выполняется неравенство:

$$2^{n-1} \cdot (a^n + b^n) \geq (a + b)^n\ (a > 0,\ b > 0)?$$

713. Докажите неравенство:

$$3^n > 4n\ (n \in N,\ n > 1).$$

△ 1) Проверим, что это неравенство выполняется при $n = 2$:

$$3^2 > 4 \cdot 2, \quad 9 > 8.$$

2) Допустим, что оно выполняется при некотором $n = k \geq 2$:

$$3^k > 4^k.$$

Нужно доказать, что тогда неравенство выполняется и при $n = k + 1$. С этой целью умножим обе части последнего неравенства на 3:

$$3^{k+1} > 12k.$$

Осталось убедиться, что $12k > 4(k + 1)$. Действительно, имеем:

$$12k > 4k + 4, \quad 8k > 4,$$

а это неравенство справедливо при любом натуральном k.

Исходное неравенство доказано. ▲

714. Докажите неравенства:

а) $2^n > 3n + 1$ ($n \in N$, $n \geq 4$); б) $n! > 2^n$ ($n \in N$, $n \geq 4$);

в) $2^n > n^2$ ($n \in N$, $n \geq 5$); г)* $3^n \geq n^3$ ($n \in N$, $n \geq 3$).

715*. Решите в натуральных числах неравенства:

а) $2^n > n^4$; б) $3^n < 8n^4$.

716*. Бесконечная последовательность (x_n) задана условиями:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{x_n + 1}.$$

Докажите, что при любом натуральном n справедливо неравенство

$$x_n \leq \frac{1}{n}.$$

△ 1) При $n = 1$ это неравенство выполняется: $1 \leq 1$. Проверим еще, что оно выполняется и при $n = 2$: $x_2 = \dfrac{x_1}{x_1 + 1} = \dfrac{1}{2} < 1$.

2) Допустим, что неравенство выполняется при $n = k$: $x_k \leq \dfrac{1}{k}$. Тогда при $n = k + 1$ получаем:

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{x_k + 1} = \frac{(x_k + 1) - 1}{x_k + 1} = 1 - \frac{1}{x_k + 1} \leq 1 - \frac{1}{\frac{1}{k} + 1} = 1 - \frac{k}{k + 1} = \frac{1}{k + 1}.$$

Оба условия принципа математической индукции выполняются. Следовательно, неравенство $x_n \leq \dfrac{1}{n}$ выполняется при любом натуральном n. ▲

717*. Бесконечная последовательность (x_n) положительных чисел при любом натуральном n удовлетворяет неравенству

$$x_{n+1} < x_n - x_n^2.$$

Докажите, что при любом натуральном n выполняется неравенство $x_n < \frac{1}{n}$.

20.3. 10—11

Перейдем к доказательству неравенств с помощью производной.

Вспомним признак возрастания и убывания функции: **если производная функции положительна (отрицательна) на некотором промежутке, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке**.

Вспомним также признак экстремума функции: **если производная функции в критической точке** (т. е. точке из области определения функции, в которой производная равна нулю или не существует) **меняет знак с плюса на минус, то эта точка является точкой максимума, а если с минуса на плюс, то точкой минимума функции**.

718. Докажите, что если $x \geq 2$, то

$$2x^3 + x^2 + 2x \geq 24.$$

△ Рассмотрим функцию $f(x) = 2x^3 + x^2 + 2x$ и исследуем ее на возрастание и убывание. Для этого найдем ее производную:

$$f'(x) = 6x^2 + 2x + 2.$$

Дискриминант полученного квадратного трехчлена отрицателен, следовательно, трехчлен при всех x сохраняет постоянный знак, а именно положительный: $f'(x) > 0$. Тогда по признаку возрастания и убывания функция f возрастает на множестве R всех действительных чисел. Значит, если $x \geq 2$, то

$$f(x) \geq f(2), \quad 2x^3 + x^2 + 2x \geq 16 + 4 + 4 = 24.$$

Неравенство доказано. ▲

719. Докажите неравенства:

а) $x^3 - 3x + 4 > 0$ $(x > 1)$;

б) $3x^5 - 5x^3 + 16x \geq 88$ $(x \geq 2)$;

в) $x^3 + 3x^2 + 15x < 20$ $(x < 1)$;

г) $2x + \frac{1}{x^2} > 5$ $(0 < x < 0{,}5)$.

720. Что больше: $a + \frac{2}{\sqrt{a}}$ или $b + \frac{2}{\sqrt{b}}$, если $a > b > 0$?

721. Пусть $x > 3$. Что больше: $x^3 + 3x$ или $5x^2 - 11$?

722. Докажите неравенство:

$$x^4 - 4x + 6 > 0.$$

△ Найдем наименьшее значение функции $y = x^4 - 4x + 6$. Для этого вычислим производную функции и приравняем ее нулю:

$$y' = 4x^3 - 4; \quad 4x^3 - 4 = 0, \quad x = 1.$$

В точке $x = 1$ производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, по признаку экстремума функции эта точка есть точка минимума функции. Так как точка $x = 1$ является единственной точкой экстремума, то функция в этой точке имеет наименьшее значение. Вычислим его:

$$y_{\min} = 1 - 4 + 6 = 3 > 0.$$

Поскольку наименьшее значение функции положительно, то и все ее значения положительны. Это значит, что при любом x $x^4 - 4x + 6 > 0$. ▲

723. Докажите неравенства:

а) $x^4 + 50 > 32x$; б) $x^4 + (x + 6)^4 \geq 162$; в) $x < x^6 + 1$.

724°. Докажите **неравенство Бернулли:**

$$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x \ (\alpha \geq 1, x \geq -1),$$

причем равенство достигается только при $\alpha = 1$ **или** $x = 0$.

Это неравенство является обобщением неравенства Бернулли из § 19 (п. 19.3, задача 662), где оно рассматривалось только при натуральном показателе степени.

△ При $\alpha = 1$ неравенство (2) превращается в равенство. Пусть $\alpha > 1$. Составим функцию

$$y = (1 + x)^\alpha - 1 - \alpha x$$

и исследуем ее на экстремум с помощью производной на промежутке $[-1; +\infty)$. Будем иметь:

$y' = \alpha(1 + x)^{\alpha-1} - \alpha = \alpha((1 + x)^{\alpha-1} - 1)$;

$\alpha((1 + x)^{\alpha-1} - 1) = 0, \quad (1 + x)^{\alpha-1} - 1 = 0, \quad (1 + x)^{\alpha-1} = 1,$

$1 + x = 1, \quad x = 0.$

В критической точке $x = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс (проверьте!), следовательно, $x = 0$ есть точка минимума функции. Тогда в этой точке функция принимает наименьшее значение. Найдем его:

$$y_{\min} = y(0) = 1 - 1 = 0.$$

Значит, для любого $x \geq -1$

$$y(x) \geq y_{\min} = 0, \quad (1 + x)^{\alpha} - 1 - \alpha x \geq 0, \quad (1 + x)^{\alpha} \geq 1 + \alpha x.$$

Неравенство доказано. По ходу доказательства мы получили, что неравенство (1) превращается в равенство только при $\alpha = 1$ или $x = 0$. ▲

725. Докажите неравенство:

$$(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > 3.$$

△ Применим неравенство Бернулли:

$$(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}} \geq 1 + \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 3.$$

Но так как в неравенстве Бернулли равенство достигается только при $\alpha = 1$ или $x = 0$, то последнее неравенство является строгим: $(1+\sqrt{2})^{\sqrt{2}} > 3$. ▲

726. Докажите неравенства:

а) $(1+2x+4x^2)^{\frac{3}{2}} \geq 1+3x+6x^2$;

б) $(1-6x)^{\frac{4}{3}} \geq 1-8x \ \left(x \leq \frac{1}{6}\right)$;

в) $(1+x)\sqrt{1+x}+(1-x)\sqrt{1-x} \geq 2$;

г) $(1-2x)(1+2x)^2\sqrt{1-4x^2} \geq 1+2x-15x^2$.

727. Докажите, что если a и b — положительные числа, не превосходящие 1, то:

а) $(1+a)^{\frac{1}{a}}+(1+b)^{\frac{1}{b}} \geq 4$;

б) $(1+a)^{\frac{1}{b}}+(1+b)^{\frac{1}{a}} \geq 4$.

Когда здесь достигается равенство?

728°. Докажите следующее **неравенство Бернулли:**

$$(1 + x)^{\alpha} \leq 1 + \alpha x \ (0 < \alpha < 1, x \geq -1). \qquad (2)$$

Докажите также, что **равенство достигается только при** $x = 0$.

729. Докажите неравенства:

а) $\sqrt{1+x+2x^2} \leq 1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2$;

б) $\sqrt[3]{1-12x} \leq 1-4x \ \left(x \leq \frac{1}{12}\right)$;

в) $\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x} \leq 2$;

г) $\sqrt{1+2x} \cdot \sqrt[4]{1-4x} \leq 1-x^2$.

730°. Докажите неравенство:

$$e^x \geq 1 + x. \qquad (3)$$

Докажите также, что равенство достигается только при $x = 0$.

△ Составим функцию $y = e^x - 1 - x$ и исследуем ее на экстремум с помощью производной. Получаем:

$$y' = e^x - 1; \quad e^x - 1 = 0, \quad x = 0.$$

Функция $f(x) = e^x$ при отрицательных x меньше 1, при положительных — больше 1, поэтому производная $y' = e^x - 1$ в критической точке $x = 0$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, функция $y = e^x - 1 - x$ в точке $x = 0$ имеет минимум. Тогда она в этой точке достигает наименьшего значения. Вычислим его:

$$y_{\min} = y(0) = 0.$$

Отсюда при любом x

$$y(x) \geq y_{\min} = 0, \quad e^x - 1 - x = 0, \quad e^x \geq 1 + x.$$

Неравенство (3) доказано. Из доказательства видно, что неравенство превращается в равенство только при $x = 0$. ▲

731. Докажите неравенство:

$$e^{x-1} \geq x.$$

△ Введем новую переменную: $x - 1 = t$. Тогда $x = 1 + t$. Данное неравенство приводится к виду:

$$e^t \geq 1 + t.$$

Последнее неравенство справедливо при любых t на основании неравенства (3). ▲

732. Что больше: ex или e^x?

733. Найдите области определения функций:

а) $y = \sqrt{(1+x-e^x)(4-x)}$; б) $y = \lg((x - e^{x-1})(1 + 2x - e^{2x}))$.

734. Докажите неравенства:

а) $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ $(x \geq 0)$; б) $e^x \leq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$ $(x \leq 0)$;

в) $e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6}$.

735°. Докажите неравенство:

$$\ln(1 + x) \leq x \ (x > -1). \tag{4}$$

При каком x оно превращается в равенство?

736. Докажите неравенство:

$$\ln x \leq x - 1 \ (x > 0).$$

737. Найдите области определения функций:

а) $y = \sqrt{(3-x)(x-\ln(1+x))}$; б) $y = \sqrt{(x+2)(1-x+\ln x)}$.

738. Докажите неравенство:

$$2x \geq 2\ln(\sqrt{x} + 0{,}5) + 0{,}5.$$

Когда достигается равенство?

739*. Что больше:

а) 50^{51} или 51^{50}; б) e^{π} или π^{e}; в) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ или $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$?

△ Решим более общую задачу: выясним, когда $a^b > b^a$, а когда $a^b < b^a$, если $a > 1$, $b > 1$ и числа a и b различны. Возьмем неравенство $a^b \vee b^a$ ($\vee$ означает знак $>$ или знак $<$) и его прологарифмируем по основанию e:

$$a^b \vee b^a \Leftrightarrow b\ln a \vee a\ln b \Leftrightarrow \frac{\ln a}{a} \vee \frac{\ln b}{b}.$$

Последнее неравенство подсказывает следующую мысль: ввести функцию $y = \dfrac{\ln x}{x}$ и исследовать ее на возрастание и убывание на интервале $(1; +\infty)$. Будем иметь:

$$y' = \frac{1-\ln x}{x^2}, \quad \frac{1-\ln x}{x^2} = 0, \quad 1 - \ln x = 0, \quad \ln x = 1, \quad x = e.$$

Производная функции $y = \dfrac{\ln x}{x}$ положительна на интервале $(1; e)$ и отрицательна на интервале $(e; +\infty)$ (проверьте!). Следовательно, сама функция возрастает на промежутке $(1; e]$ и убывает на промежутке $[e; +\infty)$. Отсюда получаем:

если $1 < a < b \leq e$, то $\dfrac{\ln a}{a} < \dfrac{\ln b}{b}$, т. е. $a^b < b^a$;

если $e \leq a < b$, то $\dfrac{\ln a}{a} > \dfrac{\ln b}{b}$, т. е. $a^b > b^a$.

Теперь нетрудно дать ответ на вопросы задачи.

Ответы: а) 50^{51}; б) e^{π}; в) $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$. ▲

740*. Что больше: $\log_5 6$ или $\log_7 8$?

В данном параграфе не рассматривались тригонометрические неравенства. С доказательством тригонометрических неравенств, в том числе с помощью производной, мы познакомимся в § 26.

§ 21. Доказательство условных неравенств 9—11

Литература: [8], [24], [33], [57].

Условным неравенством будем называть такое неравенство, которое справедливо при некотором условии, выражающемся неравенством или неравенствами (реже — равенством или равенствами), причем это условие не так тривиально, как, например, неравенства $a \geq 0$, $b \geq 0$.

При решении задач этого параграфа часто будет использоваться метод вставки (см. § 18, п. 18.3).

741. Произведение положительных чисел a, b и c равно 25. Докажите, что среди этих чисел имеется число, меньшее 3.

△ Допустим противное: каждое из чисел a, b и c не меньше 3:

$$a \geq 3, \quad b \geq 3, \quad c \geq 3.$$

Перемножим эти неравенства: $abc \geq 27$. Однако последнее неравенство противоречит условию. Остается принять, что по меньшей мере одно из чисел a, b и c меньше 3. ▲

742. Произведение трех положительных чисел равно 1. Докажите, что среди этих чисел имеется число, не превосходящее 1, и число, не меньшее 1.

743. Докажите, что в разностороннем треугольнике имеется угол, меньший 60°, и угол, больший 60°.

744. Докажите, что если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, где числа b и d положительны, то

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

△ Из условия следует, что $ad < bc$. Выясним знак разностей $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b}$ и $\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d}$:

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{ab+bc-ab-ad}{b(b+d)} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0,$$

$$\frac{a+c}{b+d} - \frac{c}{d} = \frac{ad+cd-bc-cd}{d(b+d)} = \frac{ad-bc}{d(b+d)} < 0.$$

Отсюда и вытекает справедливость требуемого неравенства. ▲

745. Верно ли, что если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, где числа b и d положительны, то

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)<\frac{a+c}{b+d}?$$

746. Докажите, что если $a + b \geq 1$, то:

а) $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$; б) $a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}$.

△ а) Возведем неравенство $a + b \geq 1$ в квадрат:

$$a^2 + b^2 + 2ab \geq 1.$$

Так как $a^2 + b^2 \geq 2ab$, то, прибавляя к обеим частям этого неравенства по $a^2 + b^2$, будем иметь:

$$(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2) \geq 2ab + (a^2 + b^2) \geq 1.$$

Тогда

$$2(a^2 + b^2) \geq 1, \quad a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}.$$

б) Можно и здесь неравенство $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$ возвести в квадрат, но возможен и несколько иной путь: заменим в тождественном неравенстве

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2,$$

полученном в п. а), числа a и b соответственно на a^2 и b^2:

$$2(a^4 + b^4) \geq (a^2 + b^2)^2 \geq \frac{1}{4}, \quad a^4 + b^4 \geq \frac{1}{8}. \blacktriangle$$

747*. Зная, что $a + b \geq 1$, найдите наименьшее значение суммы $a^3 + b^3$.

748. Верно ли, что если $a + b < 1$, то $a^2 + b^2 < \frac{1}{2}$?

749. Докажите, что если $x + y \geq 2$, то $x^4 + y^4 \geq 2$. Когда последнее неравенство превращается в равенство?

750. Докажите, что если $a + b + c = 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

751. Докажите, что если сумма n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равна 1, то

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{1}{n}.$$

752. Докажите, что если $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то

$$ab + ac + bc \geq -\frac{1}{2}.$$

753. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, где $a > b > c > d > 0$, то $a + d > b + c$.

754. Докажите, что если $x^3 + y^3 = 2$, то $x + y \leq 2$.

755. Даны четыре числа. Произведение любых трех из них больше 1. Докажите, что произведение всех четырех чисел больше 1.

756. В трех пакетах вместе находится 3 кг муки. Во втором пакете муки не больше, чем в первом, а в третьем — не больше, чем во втором. Сколько, самое меньшее, муки в первом пакете? А самое большее? А во втором пакете? А в третьем?

757. Докажите, что в выпуклом пятиугольнике не может быть более трех острых углов.

758. Докажите, что в треугольнике со сторонами a, b и c, где c — наибольшая сторона,

$$\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

Верно ли обратное утверждение?

△ Так как $c < a + b$, то

$$\sqrt{c} < \sqrt{a+b} < \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

(Проверьте, почему справедлива правая часть последнего неравенства.)

Обратное утверждение неверно. Например, если взять $a = 64$, $b = 36$, $c = 121$, то неравенство $\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$ выполняется, а неравенство $c < a + b$ — нет, поэтому треугольник с такими сторонами не существует. ▲

759. Докажите, что в треугольнике квадрат каждой стороны меньше удвоенной суммы квадратов двух других сторон.

760. Докажите, что если a, b, c — стороны треугольника, то

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca).$$

761. Докажите, что в прямоугольном треугольнике со сторонами a, b и c, где c — гипотенуза, выполняется неравенство

$$c^4 > a^4 + b^4.$$

△ По теореме Пифагора $c^2 = a^2 + b^2$. Умножим это равенство на c^2 и затем уменьшим сумму в правой части получающегося равенства, заменяя c^2 на a^2 и b^2:

$$c^4 = a^2c^2 + b^2c^2 > a^2 \cdot a^2 + b^2 \cdot b^2 = a^4 + b^4.$$

Неравенство доказано. ▲

Подумайте над обобщением утверждения этой задачи: при каких k при том же условии

$$c^k > a^k + b^k?$$

762. В треугольнике со сторонами a, b, c выполняется равенство

$$c^3 = a^3 + b^3.$$

Каким является угол C: острым, прямым или тупым?

763. Докажите, что если сумма неотрицательных чисел a, b и c равна 7, то

$$S = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} < 5.$$

Возведем сумму S в квадрат и оценим S^2 сверху:

$$S^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a + b + c + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc} \le$$

$$\le (a + b + c) + (a + b) + (a + c) + (b + c) = 3(a + b + c) = 3 \cdot 7 = 21.$$

Отсюда $S \le \sqrt{21} < 5$.

Подумайте еще, как можно решить эту задачу (а также несколько других задач данного параграфа) с помощью векторного неравенства Коши—Буняковского (см. § 20, п. 20.1). ▲

764. Докажите, что если $a + b + c = 6$, то

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \le 9 \left(a \ge -\frac{1}{4},\ b \ge -\frac{1}{4},\ c \ge -\frac{1}{4}\right).$$

765. Докажите, что если $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, где числа a, b, c положительны, то

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c} < \frac{1}{abc}.$$

△ Приведем доказываемое неравенство к виду:

$$bc + ac - ab < 1.$$

Тогда

$$1 = a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

(см. теоретическое неравенство (9) из § 19), кроме того,

$$ab + ac + bc > ac + bc - ab.$$

Отсюда и следует, что

$$1 > ac + bc - ab. \blacktriangle$$

766. Докажите, что если $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то

$$a(b + c) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

767*. Следует ли из неравенств

$$a^2 < bc, \quad b^2 < ac,$$

где числа a, b и c положительны, неравенство $a + b < 2c$?

768*. Докажите, что если

$$a^3 - b^3 < 1 < a - b,$$

то

$$0 < a < 1, \quad -1 < b < 0.$$

△ Приведем левое из данных неравенств к виду $a^3 < b^3 + 1$, а правое — к виду $b + 1 < a$. Тогда получаем:

$(b + 1)^3 < a^3 < b^3 + 1, \quad (b + 1)^3 < b^3 + 1,$

$b^3 + 3b^2 + 3b + 1 < b^3 + 1, \quad b^2 + b < 0.$

Решением последнего неравенства является $-1 < b < 0$.

Теперь приведем левое из данных неравенств к виду $b^3 > a^3 - 1$, а правое — к виду $b < a - 1$. Дальнейшее доказательство проводится аналогично предыдущему. Закончите доказательство самостоятельно. ▲

769*. Докажите, что если $x^3 + x - 1 = 0$, то $0 < x < 1$.

770*. Докажите, что если произведение трех положительных чисел равно 1, а сумма этих чисел больше суммы их обратных величин, то ровно одно из них больше 1.

△ Обозначим эти числа через a, b и c. Тогда $abc = 1$. Отсюда

$$\frac{1}{a} = bc, \quad \frac{1}{b} = ac, \quad \frac{1}{c} = ab.$$

Составим произведение $(a - 1)(b - 1)(c - 1)$ и выясним его знак:

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) = abc - (ab + bc + ca) + (a + b + c) - 1 =$$

$$= (a + b + c) - (ab + bc + ca) = (a + b + c) - \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) > 0.$$

Может ли каждая из разностей $a - 1$, $b - 1$ и $c - 1$ быть положительной? В этом случае

$$a > 1, \quad b > 1, \quad c > 1,$$

а тогда $abc > 1$, что противоречит условию.

Остается единственная возможность: ровно одна из разностей

$$a - 1, \quad b - 1, \quad c - 1$$

положительна, а две другие отрицательны. Но это равносильно утверждению задачи. ▲

771*. Числа a, b и c неотрицательны и $a + b + c \le \frac{1}{2}$. Докажите, что

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c) \ge \frac{1}{2}.$$

772*. Докажите, что если $ad - bc = 1$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd \ne 1.$$

△ Допустим противное: последнее неравенство превращается в равенство. Получаем систему уравнений:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + cd = 1, \quad ad - bc = 1.$$

Вычтем уравнения этой системы и умножим новое уравнение на 2:

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 + 2d^2 + 2ab + 2cd - 2ad + 2bc = 0,$$

$$(a + b)^2 + (c + a)^2 + (a - d)^2 + (b + c)^2 = 0.$$

Тогда

$$a + b = 0, \quad c + d = 0, \quad a - d = 0, \quad b + c = 0.$$

Следовательно,

$$a = -b, \quad c = -d, \quad a = d, \quad b = -c.$$

Отсюда $a = c$ (так как каждое из чисел a и c равно $-b$) и $b = d$ (так как каждое из чисел b и d равно $-c$). Но в этом случае

$$ad - bc = cd - dc = 0,$$

а это противоречит условию задачи. ▲

773*. Докажите, что если каждое из чисел a, b и c принадлежит отрезку [0; 1], то

$$(a + b + c + 1)^2 \geq 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

774*. Числа a, b и c положительны и

$$a^2 + b^2 - ab = c^2.$$

Пусть $a < b$. Что больше: a или c? b или c?

775*. Докажите, что если

$$a^{2001} + b^{2001} > a^{2000} + b^{2000},$$

то

$$a^{2002} + b^{2002} > a^{2001} + b^{2001}.$$

△ По условию сумма $a^{2001} + b^{2001}$ положительна.

Справедливо неравенство

$$(a^{2002} + b^{2002})(a^{2000} + b^{2000}) \geq (a^{2001} + b^{2001})^2$$

(проверьте его справедливость!). Это неравенство можно привести к такому виду:

$$\frac{a^{2002} + b^{2002}}{a^{2001} + b^{2001}} \geq \frac{a^{2001} + b^{2001}}{a^{2000} + b^{2000}},$$

если только $a^{2000} + b^{2000} > 0$. Последнее условие не выполняется только при $a = b = 0$, а это исключается условием задачи.

Дробь в правой части последнего неравенства по условию больше 1. Следовательно, и дробь в левой части больше 1. Неравенство доказано. ▲

776*. Числа a и b положительны и

$$a^{2001} + b^{2001} = a^{1999} + b^{1999}.$$

Докажите, что $a^2 + b^2 \leq 2$.

777*. Числа a и b положительны и

$$a^3 + b^3 = a - b.$$

Верно ли, что $a^2 + b^2 < 1$?

778*. Докажите, что если $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, то

$$S = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \le 3.$$

△ Преобразуем сумму S в левой части неравенства:

$$S = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(ab + ac + bc) =$$

$$= 2 - 2\,(ab + ac + bc).$$

Так как $(a + b + c)^2 \ge 0$, то

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + ac + bc) \ge 0, \quad 1 + 2(ab + ac + bc) \ge 0,$$

$$-2(ab + ac + bc) \le 1.$$

Следовательно, получаем:

$$S = 2 - 2(ab + ac + bc) \le 2 + 1 = 3. \ ▲$$

779*. Докажите, что если $a > 1$, $b > 1$, то

$$S = \frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \ge 8.$$

△ Положим

$$a - 1 = c, \quad b - 1 = d,$$

где c и d — положительные числа. Неравенство приводится к виду:

$$\frac{(c+1)^2}{d} + \frac{(d+1)^2}{c} \ge 8.$$

Преобразуем левую часть последнего неравенства:

$$S = \frac{(c+1)^2}{d} + \frac{(d+1)^2}{c} = \frac{c^2}{d} + \frac{2c}{d} + \frac{1}{d} + \frac{d^2}{c} + \frac{2d}{c} + \frac{1}{c} =$$

$$= 2\left(\frac{c}{d} + \frac{d}{c}\right) + \left(\frac{c^2}{d} + \frac{d^2}{c}\right) + \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right).$$

Теперь применим неравенство со взаимно обратными числами $a + \frac{1}{a} \ge 2$ (§ 19, п. 19.1) и неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел (§ 20, п. 20.2):

$$S \ge 2 \cdot 2 + 2\sqrt{cd} + \frac{2}{\sqrt{cd}} = 4 + 2\left(\sqrt{cd} + \frac{1}{\sqrt{cd}}\right) \ge 4 + 2 \cdot 2 = 8. \ ▲$$

780*. Докажите, что если $a \geq 1$, $b \geq 1$, то

$$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1} \leq ab.$$

781*. Числа x, y и z положительны, меньше 1 и $x^3 + y^3 + z^3 = 1$. Следует ли отсюда неравенство

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}+\frac{z^2}{\sqrt{1-z^2}} \geq 2?$$

782*. Докажите, что если $|a| < 1$, $|b| < 1$, то

$$\frac{1}{1-a^2}+\frac{1}{1-b^2} \geq \frac{2}{1-ab}.$$

§ 22. Разные задачи на неравенства 9—11

Литература: [8], [9], [24], [32], [37], [44], [48].

В этом параграфе мы рассмотрим разнообразные задачи на неравенства. Большая часть их — на доказательство неравенств, близкие к тем, что были в §§ 18—21, особенно в § 21. Но вы найдете здесь и иные задачи, например, на решение неравенств.

22.1. 9—11

783. Ученику нужно было написать, что числа a, b и c попарно различны. Он записал это таким образом: $a \neq b \neq c$. Что вы скажете по данному поводу — равносильно ли одно другому?

784. Найдите все значения x, при которых большее из чисел $3x - 1$ и $x + 5$ меньше 14.

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть $3x - 1 \geq x + 5$. Решая это неравенство, получаем: $x \geq 3$.

Здесь большим из чисел $3x - 1$ и $x + 5$ является $3x - 1$. Будем иметь:

$$3x - 1 < 14, \quad x < 5.$$

Общей частью двух промежутков $[3; +\infty)$ и $(-\infty; 5)$ является промежуток $[3; 5)$.

2) Пусть $3x - 1 < x + 5$. Отсюда $x < 3$.

Теперь получаем:

$$x + 5 < 14, \quad x < 9.$$

Общая часть интервалов $(-\infty; 3)$ и $(-\infty; 9)$ есть интервал $(-\infty; 3)$.

Ответ: $(-\infty; 5)$. ▲

785. Найдите все значения x, при которых меньшее из чисел $1 - 2x$ и $4 - x$ меньше 3.

786. В каких пределах заключено:

а) произведение xy; б) частное $\frac{x}{y}$, если

$$x = 5a - 3b, \quad y = a - 2b,$$

где $1{,}3 \leq a \leq 1{,}4$; $0{,}1 \leq b \leq 0{,}2$?

787. Существуют ли три положительных числа таких, что сумма их квадратов больше 1, а сумма попарных произведений меньше 0,001?

△ Обозначим эти числа через x_1, x_2 и x_3.

Выберем одно из трех чисел равным 1, а два других — равными 0,0001:

$$x_1 = 1, \quad x_2 = x_3 = 0{,}0001.$$

Тогда сумма квадратов этих трех чисел, разумеется, больше 1. Вычислим сумму их попарных произведений:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 0{,}0001 + 0{,}0001 + 0{,}00000001 =$$
$$= 0{,}00020001 < 0{,}001.$$

Ответ: существуют, например, 1; 0,0001 и 0,0001. ▲

788. Существуют ли 5 положительных чисел таких, что их сумма равна 1, а сумма их попарных произведений меньше 0,001?

789. Докажите, что если в пропорции все члены положительны и различны, то сумма наибольшего и наименьшего членов пропорции больше суммы двух других.

△ Рассмотрим пропорцию

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Отсюда $ad = bc$. Пусть здесь a — наибольший член пропорции. Тогда наименьшим членом является d.

Выразим d через остальные члены: $d = \frac{bc}{a}$. Теперь получаем:

$$a + d > b + c, \quad a + \frac{bc}{a} > b + c, \quad a^2 + bc > ab + ac,$$

$$a^2 + bc - ab - ac > 0, \quad (a - b)(a - c) > 0.$$

Последнее неравенство справедливо, так как $a - b > 0$ и $a - c > 0$. Тогда и исходное неравенство справедливо. ▲

790. Докажите неравенство:

$$(a + b)^4 \le 8(a^4 + b^4).$$

791. Докажите, что если числа $a_1, a_2, \ldots, a_6$ удовлетворяют неравенству

$$0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6,$$

то

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_6}{a_2+a_4+a_6}<2.$$

△ Сложим три очевидных неравенства:

$$a_1 + a_2 < 2a_2, \quad a_3 + a_4 < 2a_4, \quad a_5 + a_6 < 2a_6.$$

Получим, что сумма S всех 6 исходных чисел удовлетворяет неравенству

$$S < 2(a_2 + a_4 + a_6), \quad \frac{S}{a_2+a_4+a_6} < 2.$$

Утверждение задачи доказано. ▲

792. Докажите, что если числа a и b принадлежат отрезку [0; 1], то

$$(1 - a)(1 - b) \le \frac{1}{1+a+b}.$$

793. Докажите, что если числа a, b, c принадлежат интервалу (0; 1), то

$$1 - (1 - a)(1 - b)(1 - c) > d,$$

где d — наибольшее из чисел a, b и c.

Рассмотрим серию задач на квадратный трехчлен.

794. Найдите все целые значения a, при которых неравенство

$$x^2+ax>\frac{4}{a}$$

выполняется при любых значениях x.

795. Докажите, что при любых неотрицательных a, b и c справедливо неравенство

$$6a+4b+5c\ge 5\sqrt{ab}+7\sqrt{ac}+3\sqrt{bc}.$$

796. Докажите, что если

$$a(a + b + c) < 0,$$

то $b^2 > 4ac$.

△ Из условия следует, что числа a и $a + b + c$ имеют разные знаки. Введем квадратный трехчлен

$$f(x) = cx^2 + bx + a \ (c \ne 0).$$

Вычислим $f(0)$ и $f(1)$:

$$f(0) = a, \quad f(1) = a + b + c.$$

Получилось, что значения $f(0)$ и $f(1)$ этого трехчлена имеют разные знаки. Тогда на параболе $y = cx^2 + bx + a$ имеются две точки (с абсциссами 0 и 1), которые в координатной плоскости находятся по разные стороны от оси Ox. Следовательно, парабола пересекает ось Ox в двух точках. Отсюда дискриминант D квадратного трехчлена положителен:

$$D = b^2 - 4ac > 0, \quad b^2 > 4ac.$$

Здесь предполагалось, что $c \neq 0$. Разберите случай $c = 0$ самостоятельно. ▲

797. Докажите, что если

$$(a + c)(a + b + c) < 0,$$

то

$$(b - c)^2 > 4a(a + b + c).$$

798. Зная, что

$$a + b + c = 2, \quad ab + ac + bc = 1,$$

докажите, что каждое из чисел a, b и c принадлежит отрезку $\left[0; \frac{4}{3}\right]$.

799. Пусть число $x_1 > 0$ является корнем квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Докажите, что существует корень x_2 квадратного уравнения $cx^2 + bx + a = 0$ такой, что $x_1 + x_2 \geq 2$.

Другие задачи на квадратный трехчлен, связанные с неравенствами, можно найти, например, в книге И.Ф. Шарыгина [50].

800. Вычислите приближенно корень $\sqrt{0{,}999...9}$ (10 девяток) с 10 знаками после запятой.

△ Обозначим этот корень через x. Тогда $x^2 = 0{,}99...9$.
Так как $x < 1$, то $x^2 < x$. Получаем:

$$0{,}99...9 = x^2 < x < 1.$$

Следовательно,

$$0{,}99...9 < x < 1.$$

Крайние члены последнего неравенства и являются приближенными значениями x с 10 знаками после запятой.
Ответ: 0,99...9 или 1,00...0 (10 знаков после запятой). ▲

801. Вычислите приближенно:

а) $\sqrt[3]{0{,}99\ldots9}$ (100 девяток) со 100 знаками после запятой;

б) $\sqrt{0{,}11\ldots1}$ (10 единиц) с 10 знаками после запятой.

802*. Вычислите с точностью до 0,01 значение суммы:

$$S=\frac{1}{10^2}+\frac{1}{11^2}+\frac{1}{12^2}+\cdots+\frac{1}{1000^2}.$$

22.2*. 10—11

Рассмотрим несколько задач на решение неравенств.

803. Решите неравенство:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{2x}{(x+1)(2x+1)}+\frac{3x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}+\cdots+$$

$$+\frac{2000x}{(x+1)(2x+1)(3x+1)\ldots(2000x+1)}>1.$$

△ При любом натуральном k справедливо равенство

$$\frac{kx}{(x+1)(2x+1)\ldots(kx+1)}=\frac{(kx+1)-1}{(x+1)(2x+1)\ldots(kx+1)}=$$

$$=\frac{1}{(x+1)(2x+1)\ldots((k-1)x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)\ldots(kx+1)}.$$

Положим в этом тождестве k = 1, 2, 3,..., 2000. Преобразуем сумму S в левой части неравенства, заменяя каждую дробь соответствующей разностью:

$$S=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)}\right)+\left(\frac{1}{(x+1)(2x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)(3x+1)}\right)+\cdots+$$

$$+\left(\frac{1}{(x+1)(2x+1)\ldots(1999x+1)}-\frac{1}{(x+1)(2x+1)\ldots(2000x+1)}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{(x+1)(2x+1)\ldots(2000x+1)}.$$

Теперь решить неравенство $S>1$ нетрудно:

$$1-\frac{1}{(x+1)(2x+1)\ldots(2000x+1)}>1, \quad (x+1)(2x+1)\ldots(2000x+1)<0.$$

Для решения последнего неравенства осталось применить метод интервалов. Ответ: $(-1;\ -1/2)\cup(-1/3;\ -1/4)\cup(-1/5;\ -1/6)\cup\ldots\cup(-1/1999;\ -1/2000)$. ▲

804. Решите неравенство:

$$(\sqrt{x^2-5x+6}+1)(5-2x)+\frac{1}{x}\sqrt{10x-2x^2-12}<0.$$

805. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} x^2-4x-4y\le 0, \\ y^2+2xy+4\le 0. \end{cases}$$

806. Решите неравенство:

$$|x-3|^{2x^2-7x}\ge 1.$$

807. Докажите, что система неравенств:

$$\begin{cases} x+y<z+t, \\ (x+y)(z+t)<xy+zt, \\ (x+y)zt<xy(z+t), \end{cases}$$

где x, y, z и t положительны, не имеет решений.

808. Докажите неравенство:

$$S=\sqrt{1999}-\sqrt{1998}+\sqrt{1997}-\sqrt{1996}+\cdots+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{1}>10\sqrt{5}.$$

△ Воспользуемся таким неравенством:

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}=\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k+2}+\sqrt{k+1}}=\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1},$$

где k неотрицательно. В полученном неравенстве

$$\sqrt{k+1}-\sqrt{k}>\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1}$$

положим последовательно $k = 0, 2, 4,\ldots, 1998$:

$$\begin{cases} \sqrt{1}-0>\sqrt{2}-\sqrt{1}, \\ \sqrt{3}-\sqrt{2}>\sqrt{4}-\sqrt{3}, \\ \sqrt{5}-\sqrt{4}>\sqrt{6}-\sqrt{5}, \\ \sqrt{7}-\sqrt{6}>\sqrt{8}-\sqrt{7}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sqrt{1999}-\sqrt{1998}>\sqrt{2000}-\sqrt{1999}. \end{cases}$$

Сложим все эти неравенства почленно:

$$S>\sqrt{2000}-S, \quad 2S>\sqrt{2000}=20\sqrt{5}, \quad S>10\sqrt{5}. \ \blacktriangle$$

809. Докажите неравенство:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{5}+\frac{6}{7}+\dots+\frac{100}{101}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\dots+\frac{99}{100}\right)<\frac{50}{101}.$$

810. Докажите, что если числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ неотрицательны, то

$$\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{(a_1+1)(a_2+1)}+\frac{a_3}{(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)}+\dots+$$

$$+\frac{a_n}{(a_1+1)(a_2+1)\dots(a_n+1)}<1.$$

811. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — различные натуральные числа. Докажите неравенство:

$$\left(1-\frac{1}{a_1^2}\right)\left(1-\frac{1}{a_2^2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{a_n^2}\right)>\frac{1}{2}.$$

812. Какое из чисел

$$1^{10},\ 2^9,\ 3^8,\ 4^7,\ 5^6,\ 6^5,\ 7^4,\ 8^3,\ 9^2,\ 10^1$$

самое большое?

813. Докажите, что при всех положительных x и y и при любых α выполняется неравенство

$$x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}<x+y.$$

$\triangle$ Пусть $x \geq y$. Выясним знак разности $x-x^{\sin^2\alpha}\cdot y^{\cos^2\alpha}$:

$$x - x^{\sin^2\alpha} \cdot y^{\cos^2\alpha} = x^{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} - x^{\sin^2\alpha} \cdot y^{\cos^2\alpha} = x^{\sin^2\alpha}(x^{\cos^2\alpha} - y^{\cos^2\alpha}).$$

Разность, получившаяся в скобках, неотрицательна, так как степенная функция $z = x^{\cos^2\alpha}$ возрастает на интервале $(0; +\infty)$. Тогда

$$x^{\sin^2\alpha} \cdot y^{\cos^2\alpha} \le x < x + y. \blacktriangle$$

В § 20 (п. 2) мы познакомились с доказательством неравенств методом математической индукции. Рассмотрим еще несколько задач на эту тему.

814. Докажите неравенство:

$$\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\dots+\sqrt[3]{5}}}} < 2$$

при любом числе радикалов n в левой его части.

△ 1) При $n = 1$ получаем верное неравенство $\sqrt[3]{5} < 2$.

2) Допустим, что это неравенство справедливо при $n = k$:

$$\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\dots+\sqrt[3]{5}}}} = a < 2,$$

где число радикалов равно k. Докажем, что тогда оно справедливо и при числе радикалов $n = k + 1$.

В этом случае будем иметь:

$$\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\sqrt[3]{5+\dots+\sqrt[3]{5}}}} = \sqrt[3]{5+a} < \sqrt[3]{5+2} = \sqrt[3]{7} < 2.$$

Оба условия принципа математической индукции выполняются. Неравенство доказано. ▲

815. Докажите неравенство:

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6}}}} + \sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\dots+\sqrt[3]{6}}}} < 5$$

при любом числе m радикалов у первого слагаемого суммы в левой части и любом числе n радикалов у второго слагаемого.

816. Докажите, что если k и n — натуральные числа, большие 1, то по меньшей мере одно из чисел $\sqrt[k]{n}$ и $\sqrt[n]{k}$ не превосходит $\sqrt[3]{3}$.

817. Докажите, что любые три различных положительных числа можно обозначить через a, b и c так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} > \frac{a}{c} + \frac{c}{a}.$$

△ Проблема в том, какое из трех чисел — наибольшее, наименьшее или среднее принять за a, какое — за b и какое — за c. Приходится рассмотреть несколько случаев.

Пока что отметим, что так как $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} > 2$ (см. § 19, неравенство (1)), то $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} > 2$, а тогда по меньшей мере одна из дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{c}$ больше 1, т. е. $a > b$ или $b > c$.

1) Пусть $a > b > c$; это значит, что наибольшим из трех чисел является a, а наименьшим — c.

Но тогда уже при $a = 5$, $b = 3$, $c = 1$ получаем неверное неравенство:

$$\frac{5}{3} + 3 > 5 + \frac{1}{5}.$$

2) Пусть $a > c > b$. Попробуем и здесь угадать результат, пользуясь перебором. При $a = 5$, $c = 3$, $b = 1$ получаем верное неравенство:

$$5 + \frac{1}{3} > \frac{5}{3} + \frac{3}{5}.$$

При $a = 10$, $c = 4$, $b = 1$ также имеем верное неравенство:

$$10 + \frac{1}{4} > \frac{10}{4} + \frac{4}{10}.$$

Проверьте самостоятельно, что аналогичная картина будет, скажем, при $a = 100$, $c = 99$, $b = 90$.

Возникает предположение, что данное неравенство справедливо при любых различных положительных значениях a, b и c, удовлетворяющих условию $a > c > b$.

Преобразуем неравенство:

$$a^2c + ab^2 > a^2b + bc^2.$$

Последнее неравенство совсем не очевидно. Применим метод вставки. Очевидно,

$$a^2c + ab^2 > a^2c + cb^2.$$

Но верно ли неравенство

$$a^2c + cb^2 > a^2b + bc^2?$$

Для ответа на этот вопрос составим разность между левой и правой частями последнего неравенства и выясним ее знак:

$$a^2c + cb^2 - a^2b - bc^2 = a^2(c - b) - bc(c - b) = (c - b)(a^2 - bc).$$

Полученное произведение положительно, так как $c - b > 0$ и $a^2 - bc > 0$ (из неравенств $a > b$ и $a > c$ следует неравенство $a^2 > bc$). Следовательно, исходное неравенство доказано.

3) Можно доказать, что исходное неравенство справедливо и в случае, когда $b > a > c$. Докажите неравенство в этом случае самостоятельно.

Ответ: неравенство справедливо при $a > c > b$ или $b > a > c$. ▲

818. Докажите, что если даны три числа, принадлежащие интервалу (0; 1), то можно выбрать из них два числа a и b так, что $a(1 - b) \le \frac{1}{4}$.

819. Докажите, что из любых трех различных положительных чисел можно выбрать два числа a и b так, что

$$0 < \frac{a-b}{1+ab} < 1.$$

При доказательстве некоторых неравенств полезны тригонометрические функции.

820. Докажите, что если $x^2 + y^2 = 1$, то:

а) $|x - y| \le \sqrt{2}$; б) $|3x + 4y| \le 5$.

△ Так как $x^2 + y^2 = 1$, то существует такое α, что

$$x = \cos\alpha, \quad y = \sin\alpha.$$

а) Имеем:

$$|x - y| = |\cos\alpha - \sin\alpha| = |\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) - \sin\alpha| = \sqrt{2}\,|\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha)| \le \sqrt{2}.$$

б) Получаем:

$$|3x + 4y| = |3\cos\alpha + 4\sin\alpha| = 5|\frac{3}{5}\cos\alpha + \frac{4}{5}\sin\alpha|$$

(число 5 взято из выражения $\sqrt{3^2+4^2} = 5$).

Так как $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, то существует такое $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, что

$$\frac{3}{5} = \sin\varphi, \quad \frac{4}{5} = \cos\varphi.$$

Тогда

$$|3x + 4y| = 5|\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha| = 5|\sin(\varphi + \alpha)| \le 5. \blacktriangle$$

821. Докажите, что если

$$a^2 + b^2 = 1, \quad c^2 + d^2 = 1,$$

то $|ac + bd| \le 1$.

822. Докажите, что если

$$a^2 + b^2 = 4, \quad c^2 + d^2 = 9,$$

то $|ac - bd| \le 6$.

Иногда при доказательстве неравенств помогает геометрия. Вспомним, что в § 20 (п. 1) при доказательстве неравенств использовалось скалярное произведение векторов.

823. Докажите неравенство:

$$\sqrt{(a+b)^2+c^2} + \sqrt{(a-b)^2+c^2} \ge 2\sqrt{a^2+c^2}.$$

△ В координатной плоскости рассмотрим точки $O(0; 0)$, $K(a + b; c)$ и $M(2a; 2c)$. Тогда по формуле расстояния между двумя точками плоскости получаем:

$$OK = \sqrt{(a+b)^2+c^2}, \quad KM = \sqrt{(b-a)^2+c^2}, \quad OM = \sqrt{a^2+c^2}.$$

Но справедливо неравенство

$$OK + KM \ge OM.$$

Равенство здесь отнюдь не исключается. ▲

824. Докажите неравенство:

$$\sqrt{a^2+(b-8)^2} + \sqrt{(a-15)^2+b^2} \ge 17.$$

Когда достигается равенство?

825. Докажите, что если

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad m^2 + n^2 = 3,$$

то $|ma + nb + c| \le 2$.

△ Введем векторы в пространстве $\bar{u}$ $(a;\ b;\ c)$ и $\bar{v}$ $(m;\ n;\ 1)$. Применим векторное неравенство Коши—Буняковского

$$|\bar{u}\cdot\bar{v}|\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|$$

(см. § 20, п. 1 или § 13, п. 2). Будем иметь:

$$|\bar{u}\cdot\bar{v}|=|am+bn+c|\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+1}=2.\ ▲$$

826. Имеет ли решение система неравенств:

$$x_1x_2+y_1y_2<0,\quad x_1x_3+y_1y_3<0,\quad x_1x_4+y_1y_4<0,$$
$$x_2x_3+y_2y_3<0,\quad x_2x_4+y_2y_4<0,\quad x_3x_4+y_3y_4<0?$$

827. Докажите, что если числа a, b, c положительны, то

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2}\ge\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

△ Отложим от любой точки O отрезки $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$ так, что

$$\angle AOB=\angle BOC=60°,$$

а следовательно, $\angle AOC=120°$ (*рис.* 8).

По теореме косинусов получаем:

$$AB=\sqrt{a^2+b^2-ab},$$

$$BC=\sqrt{b^2+c^2-bc},$$

$$AC=\sqrt{a^2+c^2+ac}.$$

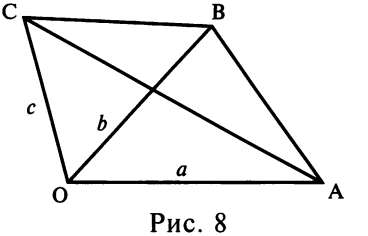

Рис. 8

Но из треугольника ABC

$$AB+BC\ge AC.$$

Равенство здесь возможно — когда точка B находится на отрезке AC. ▲

828. Докажите, что если числа a, b и c положительны, то

$$\sqrt{a^2+ab+b^2}+\sqrt{b^2+bc+c^2}\ge\sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

В §§ 13 и 20 мы рассматривали векторное неравенство Коши—Буняковского $\bar{u}\cdot\bar{v}\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|$. В координатной форме для векторов на плоскости оно записывается в виде

$$x_1x_2+y_1y_2\le\sqrt{(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)},$$

а для векторов в пространстве — в виде

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\le\sqrt{(x_1^2+y_1^2+z_1^2)(x_2^2+y_2^2+z_2^2)}.$$

Нельзя ли эти неравенства обобщить? Оказывается, можно.

829°. Докажите неравенство:

$$a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n\le\sqrt{(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2)},\qquad(1)$$

а также что равенство здесь достигается только при

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}$$

(если $b_1b_2\dots b_n\ne 0$).

Неравенство (1) также называется **неравенством Коши—Буняковского.**

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть левая часть неравенства (1) отрицательна. Тогда это неравенство, конечно, справедливо.

2) Пусть левая часть неравенства (1) неотрицательна. Возведем это неравенство в квадрат (получается равносильное неравенство) и раскроем все скобки:

$$(a_1b_1+a_2b_2+\dots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\dots+b_n^2),$$

$$(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+\dots+a_n^2b_n^2)+2(a_1b_1a_2b_2+a_1b_1a_3b_3+\dots+a_{n-1}b_{n-1}a_nb_n)\le$$

$$\le(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+\dots+a_n^2b_n^2)+(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_1^2b_3^2+a_1^2b_1^2+\dots+a_{n-1}^2b_n^2+a_n^2b_{n-1}^2),$$

$$2(a_1b_1a_2b_2+a_1b_1a_3b_3+\dots+a_{n-1}b_{n-1}a_nb_n)\le$$

$$\le(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2+\dots+a_{n-1}^2b_n^2+a_n^2b_{n-1}^2).$$

Последнее неравенство преобразуем, собирая все члены в правой части и группируя их так, чтобы выделить квадраты разностей:

$$0\le(a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2-2a_1b_1a_2b_2)+(a_1^2b_3^2+a_3^2b_1^2-2a_1b_1a_3b_3)+\dots$$

$$+(a_{n-1}^2b_n^2+a_n^2b_{n-1}^2-2a_{n-1}b_{n-1}a_nb_n),$$

$$(a_1b_2-a_2b_1)^2+(a_1b_3-a_3b_1)^2+\dots+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})^2\ge 0.\qquad(2)$$

Неравенство (1) доказано. Осталось выяснить, когда оно превращается в равенство.

Из неравенства (2) видно, что это возможно только тогда, когда

$$a_1b_2-a_2b_1=0,\quad a_1b_3-a_3b_1=0,\quad\dots,\quad a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1}=0.$$

Если $b_1 b_2 ... b_n \neq 0$, то эти равенства можно представить следующим образом:

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}, \quad \frac{a_1}{b_1}=\frac{a_3}{b_3}, \quad ..., \quad \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}=\frac{a_n}{b_n}.$$

Отсюда

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\dots=\frac{a_n}{b_n}. \blacktriangle$$

830. Докажите неравенства:

а) $(3a + b + c + 2d)^2 \leq (a^2 + b^2 + 5)(c^2 + d^2 + 10)$;

б) $(ac + 2b + 2d + 3)^2 \leq (a^2 + b^2 + 13)(c^2 + d^2 + 5)$.

831. Докажите неравенство

$$\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2}{n}},$$

где числа x_1, x_2, ..., x_n неотрицательны.

832. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c справедливо неравенство:

$$1<\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}<2.$$

△ Обозначим сумму в средней части неравенства через S. Имеем:

$$S=\frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}>\frac{a}{a+b+c}+\frac{b}{a+b+c}+\frac{c}{a+b+c}=1,$$

$$S=\frac{(a+b)-b}{a+b}+\frac{(b+c)-c}{b+c}+\frac{(c+a)-a}{c+a}=$$

$$=3-\frac{b}{a+b}-\frac{c}{b+c}-\frac{a}{c+a}<3-\frac{b}{a+b+c}-\frac{c}{a+b+c}-\frac{a}{a+b+c}=3-1=2.$$

Неравенство доказано. ▲

833. Докажите, что если числа a, b и c положительны и $a^2 + b^2 + c^2 = 2$, то

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{c} \leq \frac{1}{abc}.$$

Когда достигается равенство?

834. Функция $f(x)$, заданная на R, такова, что для любых действительных a и b выполняется неравенство

$$|f(a) - f(a)| \le \frac{1}{2}|a - b|.$$

Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет не более одного корня.

835. Докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge 2.$$

△ Рассмотрим несколько случаев, в зависимости от знаков чисел a, b и c.

1) Пусть все числа a, b и c положительны.

Положим $a + b + c = S$. На основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел получаем:

$$\sqrt{\frac{b+c}{a}} \cdot 1 \le \frac{1}{2}\left(\frac{b+c}{a} + 1\right) = \frac{S}{2a} \Rightarrow \sqrt{\frac{a}{b+c}} \ge \frac{2a}{S}.$$

Аналогично

$$\sqrt{\frac{b}{a+c}} \ge \frac{2b}{S}, \quad \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2c}{S}.$$

Сложим все три последних неравенства:

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{a+c}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} \ge \frac{2a}{S} + \frac{2b}{S} + \frac{2c}{S} = 2.$$

2) Пусть $a = 0$. Тогда исходное неравенство превращается в следующее:

$$\sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt{\frac{c}{b}} \ge 2,$$

где числа b и c имеют одинаковые знаки. Но последнее неравенство справедливо как неравенство со взаимно обратными числами (см. § 19, неравенство (1)).

3) Пусть $a < 0$.

Так как $\frac{a}{b+c} > 0$, то отсюда $b + c < 0$. Тогда среди чисел b и c имеется отрицательное. Предположим, что $b < 0$.

Так как $a < 0$ и $b < 0$, то $a + b < 0$. Но дробь $\frac{c}{a+b}$ должна быть положительной (возможность $c = 0$ мы фактически уже разобрали во втором случае), а значит, и $c < 0$.

Получилось, что все три числа a, b и c отрицательны. Но исходное неравенство не меняется при смене знаков у всех трех чисел a, b и c, следовательно, этот случай сводится к первому. ▲

836. Докажите, что если числа a, b и c неотрицательны, то

$$\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq a\sqrt{b+c}+b\sqrt{a+c}+c\sqrt{a+b}.$$

837. Докажите, что если сумма положительных чисел a, b и c равна 1, то

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geq 12.$$

△ Так как $a^2 + b^2 \geq 2ab$, то $a^2 \geq 2ab - b^2$. Прибавим к обеим частям последнего неравенства по $3a^2$:

$$4a^2 \geq 3a^2 + 2ab - b^2 = (a + b)(3a - b).$$

Выразим отсюда дробь $\frac{a^2}{a+b}$:

$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}.$$

Теперь нужно сложить три неравенства:

$$\frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}, \quad \frac{b^2}{b+c} \geq \frac{3b-c}{4}, \quad \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{3c-a}{4}.$$

Будем иметь:

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{b^2}{b+c}+\frac{c^2}{c+a} \geq \frac{2(a+b+c)}{4} = \frac{1}{2}. \ ▲$$

Приведенное здесь доказательство неравенства выглядит довольно искусственным. Не возьмется ли кто-либо из читателей привести более простое и естественное доказательство?

838. Докажите, что для любых положительных чисел a, b и c, не превосходящих 1, выполняется неравенство

$$\frac{a}{bc+1}+\frac{b}{ac+1}+\frac{c}{ab+1} < 2.$$

839. Рассмотрим «недописанную» систему неравенств:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1 * 0, \\ a_2x+b_2y+c_2 * 0, \\ a_3x+b_3y+c_3 * 0. \end{cases}$$

Докажите, что для любых коэффициентов этих неравенств можно вместо звездочек поставить знаки > или < так, чтобы система не имела решений.

1) Сначала рассмотрим случай, когда в каком-либо из неравенств системы, например в первом, коэффициенты при обоих неизвестных равны нулю: $a_1 = b_1 = 0$. Первое неравенство принимает вид

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + c_1 * 0.$$

Если здесь $c_1 = 0$, то и при знаке >, и при знаке < вместо звездочки неравенство не имеет решений. Если же $c_1 \neq 0$, скажем, $c_1 > 0$, то, поставив вместо звездочки знак <, также получим неравенство, не имеющее решений. Тогда и вся система не имеет решений.

2) Пусть теперь указанное выше условие не выполняется.

В этом случае уравнения

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0, \quad a_2x + b_2y + c_2 = 0, \quad a_3x + b_3y + c_3 = 0$$

задают на координатной плоскости прямые, которые мы обозначим соответственно через l_1, l_2 и l_3. Тогда каждое из неравенств, получающихся при замене звездочек на знак > или <, задает полуплоскость, ограниченную соответствующей прямой.

Пусть среди прямых l_1, l_2 и l_3 имеются две, например l_1 и l_2 которые параллельны или совпадают. В этом случае можно в двух первых неравенствах поставить знаки > или < так, чтобы соответствующие полуплоскости не имели общих точек. Тогда уже система, образованная этими двумя неравенствами, не имеет решений.

Пусть теперь среди прямых l_1, l_2 и l_3 нет параллельных или совпадающих. Система двух первых неравенств при любой расстановке в ней знаков > или < задает некоторый угол между прямыми l_1 и l_2. Выберем в третьем неравенстве знак > или < так, чтобы соответствующая полуплоскость не имела общих точек с этим углом.

Утверждение задачи доказано. ▲

840. На этой неделе по телевизору показывали три интересных фильма A, B и C. Обозначим через $n(A, \overline{B})$ число учащихся нашего класса, видевших фильм A, но не видевших фильм B. Докажите, что

$$n(A,\overline{B}) + n(B,\overline{C}) \geq n(A,\overline{C}).$$

ГЛАВА IV. ЗАДАЧИ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ

Для задач по тригонометрии характерно довольно большое количество формул, используемых при их решении. Приведем здесь все эти формулы, причем без доказательства. Надеюсь, читатель догадается, как доказать те из них, которые были ему до сих пор неизвестны.

1. $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1. \quad (1)$$

2. $$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \quad (2)$$

3. $$\mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{ctg}\alpha = 1. \quad (3)$$

4. $$1+\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1+\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}. \quad (4)$$

Формулы (1)—(4) называются **основными тригонометрическими тождествами.**

5. $$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cos\beta \pm \cos\alpha \sin\beta. \quad (5)$$

6. $$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cos\beta \mp \sin\alpha \sin\beta. \quad (6)$$

7. $$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}. \quad (7)$$

Формулы (5)—(7) называются **формулами сложения.**

8. $$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha. \quad (8)$$

9. $$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha. \quad (9)$$

10. $$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}. \quad (10)$$

Формулы (8)—(10) — это **формулы тригонометрических функций двойного аргумента**, или **формулы удвоения**.

11. $$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \quad (11)$$

12. $$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \quad (12)$$

13. $$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha}. \quad (13)$$

Формулы (11)—(13) являются **формулами тригонометрических функций тройного аргумента,** или **формулами утроения.**

14. $$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}. \qquad (14)$$

15. $$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}. \qquad (15)$$

16. $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \qquad (16)$$

Формулы (14)—(16) — это **формулы тригонометрических функций половинного аргумента.**

17. $$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (17)$$

18. $$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (18)$$

Формулы (17) и (18) в сочетании с формулой (10) выражают тригонометрические функции через **тангенс половинного аргумента.**

19. $$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (19)$$

20. $$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (20)$$

21. $$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (21)$$

22. $$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (22)$$

23. $$\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}. \qquad (23)$$

24. $$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2},\quad 1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (24)$$

Формулы (19)—(24) — это **формулы преобразования суммы и разности тригонометрических функций в произведение.**

25. $$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)). \qquad (25)$$

26. $$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)). \qquad (26)$$

27. $$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)). \qquad (27)$$

Формулы (25)—(27) — это **формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму**.

Кроме того, в ряде задач придется применять формулы приведения и свойства тригонометрических функций, а также значения тригонометрических функций в некоторых точках и определения обратных тригонометрических функций.

§ 23. Тригонометрические тождества 10—11

Литература: [14], [25], [33], [37], [43^{e}], [47], [51].

23.1. 10—11

Сначала займемся задачами на доказательство тригонометрических тождеств.

841. Докажите тождества:

а) $3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 1$;

б) $\sin^2\frac{\pi}{16} + \sin^2\frac{7\pi}{16} = \cos^2\frac{\pi}{16} + \cos^2\frac{7\pi}{16}$.

△ а) Имеем:

$3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) - 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) = 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) -$

$-2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)(\sin^4\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha) =$

$= 3\sin^4\alpha + 3\cos^4\alpha - 2\sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 2\cos^4\alpha =$

$= \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 = 1.$

б) Соберем все члены в одну часть, обозначим их сумму через S и будем доказывать тождество:

$$S = \cos^2\frac{\pi}{16} + \cos^2\frac{7\pi}{16} - \sin^2\frac{\pi}{16} - \sin^2\frac{7\pi}{16} = 0.$$

Применим формулу косинуса двойного аргумента и формулу приведения для $\cos(\pi - \alpha)$:

$$S = (\cos^2\frac{\pi}{16} - \sin^2\frac{\pi}{16}) + (\cos^2\frac{7\pi}{16} - \sin^2\frac{7\pi}{16}) =$$

$$= \cos\frac{\pi}{8} + \cos\frac{7\pi}{8} = \cos\frac{\pi}{8} - \cos\frac{\pi}{8} = 0. \blacktriangle$$

842. Докажите тождества:

а) $\dfrac{\sin^6\alpha + \cos^6\alpha - 1}{\sin^4\alpha + \cos^4\alpha - 1} = \dfrac{3}{2}$;

б) $\cos^2\alpha + \cos^2(\frac{\pi}{3} + \alpha) + \cos^2(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{3}{2}$;

в) $8\cos^4\alpha - \cos 4\alpha - 4\cos 2\alpha = 3$;

г) $\sin^3\alpha\cos 3\alpha + \cos^3\alpha\sin 3\alpha = \frac{3}{4}\sin 4\alpha$;

д) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \dfrac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}$;

е) $\dfrac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \mathrm{tg}^4\alpha$;

ж) $(\sin^2 2\alpha - 3)^2 - 8(\sin^8\alpha + \cos^8\alpha) = 2\sin^2 2\alpha + 1$;

з) $\dfrac{\cos^3\alpha - \cos 3\alpha}{\cos\alpha} + \dfrac{\sin^3\alpha + \sin 3\alpha}{\sin\alpha} = 3$;

и) $\mathrm{tg}\,3\alpha - \mathrm{tg}\,2\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{tg}\,3\alpha\,\mathrm{tg}\,2\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha$.

843. Докажите равенства:

а) $\sin 87° - \sin 59° - \sin 93° + \sin 61° = \sin 1°$;

б) $\mathrm{tg}\,55° - \mathrm{tg}\,35° = 2\mathrm{tg}\,20°$;

в) $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{7}} = \dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}}$.

844. Докажите тождества:

а) $\cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha\cos 2\beta = 1$;

б) $\dfrac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\sin(\beta - \gamma)}{\cos\beta\cos\gamma} + \dfrac{\sin(\gamma - \alpha)}{\cos\gamma\cos\alpha} = 0$.

845°. Докажите тождества:

а) $\sin 3\alpha = 4\sin\alpha \sin(60^\circ - \alpha)\sin(60^\circ + \alpha)$;

б) $\cos 3\alpha = 4\cos\alpha \cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha)$;

в) $\mathrm{tg}\, 3\alpha = \mathrm{tg}\,\alpha\, \mathrm{tg}(60^\circ - \alpha)\mathrm{tg}(60^\circ + \alpha)$.

846*. Докажите тождество:

$$\mathrm{tg}55^\circ \mathrm{tg}65^\circ \mathrm{tg}75^\circ = \mathrm{tg}85^\circ.$$

△ Применим в левой части формулы преобразования произведений тригонометрических функций в сумму и формулы обратных преобразований:

$$\mathrm{tg}55^\circ \mathrm{tg}65^\circ \mathrm{tg}75^\circ = \frac{\sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ}{\cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ} \cdot \mathrm{tg}75^\circ = \frac{\cos 10^\circ - \cos 120^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 120^\circ} \cdot \mathrm{tg}75^\circ =$$

$$= \frac{\cos 10^\circ + 1/2}{\cos 10^\circ - 1/2} \cdot \mathrm{tg}75^\circ = \frac{2\sin 10^\circ(\cos 10^\circ + 1/2)}{2\sin 10^\circ(\cos 10^\circ - 1/2)} \cdot \mathrm{tg}75^\circ = \frac{\sin 20^\circ + \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ - \sin 10^\circ} \cdot \mathrm{ctg}15^\circ =$$

$$= \frac{2\sin 15^\circ \cos 5^\circ}{2\cos 15^\circ \sin 5^\circ} \cdot \frac{\cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} = \mathrm{ctg}5^\circ = \mathrm{tg}85^\circ. \ ▲$$

847*. Докажите равенства:

а) $\mathrm{tg}20^\circ + \mathrm{tg}40^\circ + \mathrm{tg}80^\circ - \mathrm{tg}60^\circ = 8\sin 40^\circ$;

б) $\mathrm{tg}15^\circ \cdot \mathrm{tg}25^\circ \cdot \mathrm{tg}35^\circ = \mathrm{tg}5^\circ$.

848*. Докажите равенство:

$$8\mathrm{ctg}8^\circ + 4\mathrm{tg}4^\circ + 2\mathrm{tg}2^\circ + \mathrm{tg}1^\circ = \mathrm{ctg}1^\circ.$$

△ Перенесем $\mathrm{ctg}1^\circ$ в левую часть равенства и будем его доказывать в полученной форме.

Последовательно имеем:

$$\mathrm{tg}1^\circ - \mathrm{ctg}1^\circ = \mathrm{tg}1^\circ - \frac{1}{\mathrm{tg}1^\circ} = \frac{\mathrm{tg}^2 1^\circ - 1}{\mathrm{tg}1^\circ} = -2\frac{1 - \mathrm{tg}^2 1^\circ}{2\mathrm{tg}1^\circ} = -\frac{2}{\mathrm{tg}2^\circ} = -2\mathrm{ctg}2^\circ;$$

$2\mathrm{tg}2^\circ - 2\mathrm{ctg}2^\circ = -4\mathrm{ctg}4^\circ$;

$4\mathrm{tg}4^\circ - 4\mathrm{ctg}4^\circ = -8\mathrm{ctg}8^\circ$;

$8\mathrm{ctg}8^\circ - 8\mathrm{ctg}8^\circ = 0$.

Равенство доказано. ▲

849*. Докажите тождества:

а) $\text{ctg}\alpha - \text{tg}\alpha - 2\text{tg}2\alpha - 4\text{tg}4\alpha - 8\text{tg}8\alpha = 16\text{ctg}16\alpha$;

б) $\dfrac{1}{\sin 2\alpha} + \dfrac{1}{\sin 4\alpha} + \dfrac{1}{\sin 8\alpha} + \dfrac{1}{\sin 16\alpha} = \text{ctg}\alpha - \text{ctg}16\alpha$.

850. Верно ли, что при любом натуральном n справедливо равенство

$$\cos\frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}$$

(n радикалов)?

851. Существуют ли такие постоянные a, b и c, что выполняется тождество

$$\cos 4x = a\cos^4 x + b\cos^2 x + c?$$

△ Положим в этом равенстве $x = 0$: $1 = a + b + c$.

Положим теперь $x = \dfrac{\pi}{2}$: $c = 1$.

Положим еще $x = \dfrac{\pi}{4}$: $-1 = \dfrac{1}{4}a + \dfrac{1}{2}b + c$.

Из системы уравнений

$$a + b + c = 1, \quad c = 1, \quad \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = -1$$

найдем a, b и c: $a = 8$, $b = -8$, $c = 1$.

Пока что мы выяснили следующее: если такие a, b и c существуют, то $a = 8$, $b = -8$, $c = 1$. Теперь нужно это допущение проверить. С этой целью выясним, является ли равенство

$$\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$$

тождеством.

Преобразуем правую часть равенства:

$8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 = 8\cos^2 x(\cos^2 x - 1) + 1 =$

$= -8\cos^2 x\sin^2 x + 1 = 1 - 2\sin^2 2x = \cos 4x.$

(Здесь применялась одна из формул (9) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ из начала главы.)

Следовательно, записанное выше равенство есть тождество.

Ответ: существуют и единственны — $a = 8$, $b = -8$, $c = 1$. ▲

852. Существуют ли такие постоянные a, b и c, что выполняются тождества:

а) $\sin 4x = a\sin^4 x + b\sin^2 x + c$; б) $\sin 4x = a\sin^3 x\cos x + b\sin x\cos^3 x + c$;

в) $\cos 5x = a\cos^5 x + b\cos^3 x + c\cos x$?

853. Найдите все такие постоянные a, b, c и d, где $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \neq 0$, что выполняется тождество

$$(a\sin x + b\cos x)^2 = c\sin 2x + d.$$

23.2. 10—11

Перейдем к задачам на преобразования сумм тригонометрических функций в произведения. Задачи подобного рода уже встречались в п. 1.

854. Преобразуйте в произведения выражения:

а) $3 - 4\sin\alpha$; б) $S = \sin 5\alpha \sin 4\alpha + \sin 4\alpha \sin 3\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha$.

△ а) Будем иметь:

$$3-4\sin^2\alpha = 4\left(\frac{3}{4}-\sin^2\alpha\right) = 4\left(\sin^2\frac{\pi}{3}-\sin^2\alpha\right) =$$

$$= 4\left(\sin\frac{\pi}{3}+\sin\alpha\right)\left(\sin\frac{\pi}{3}-\sin\alpha\right) = 4\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\cdot$$

$$\cdot 2\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right).$$

б) Применим формулу преобразования произведения двух синусов в сумму:

$$S = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos 9\alpha + \cos\alpha - \cos 7\alpha - \cos\alpha + \cos 3\alpha) =$$

$$= \frac{1}{2}(\cos\alpha + \cos 3\alpha - \cos 7\alpha - \cos 9\alpha).$$

А теперь нужно использовать формулу преобразования суммы двух косинусов в произведение:

$$S = \frac{1}{2}(2\cos 2\alpha\cos\alpha - 2\cos 8\alpha\cos\alpha) = \cos\alpha(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha) = 2\cos\alpha \cdot \sin 5\alpha \sin 3\alpha.$$

Ответ: а) $4\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$; б) $2\cos\alpha \sin 3\alpha \sin 5\alpha$. ▲

855°. Докажите тождества:

а) $\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta)$;

б) $\cos^2\alpha - \cos^2\beta = \sin(\alpha + \beta)\sin(\beta - \alpha)$.

856. Преобразуйте в произведения разности:

а) $1 - 4\sin^2\alpha$; б) $3 - 4\cos^2\alpha$; в) $1 - 4\cos^2\alpha$.

857. Преобразуйте в произведения суммы:

а) $\sin 4x - 2\cos^2 2x + 1$; б) $1 + \sin x - \cos x - \operatorname{tg} x$;

в) $8\cos^4 x + 4\cos 2x - \cos 4x - 3$; г) $\sin^3 x\cos 3x + \cos^3 x\sin 3x$;

д) $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x + \cos^2 4x + \cos^2 5x + \cos^2 6x - 3$.

858*. Преобразуйте в произведение сумму

$$S = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx.$$

△ Группировать слагаемые в пары и преобразовывать каждую пару в произведение бессмысленно — не видно, что делать дальше. Вместо этого сумму умножим и разделим на $2\sin\frac{x}{2}$ (можно и на $2\sin x$). Зачем? Для того, чтобы каждое из произведений

$$2\sin\frac{x}{2}\cos x, \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x, \quad 2\sin\frac{x}{2}\cos 3x$$

и т. д., получающихся в числителе дроби, преобразовать в сумму по формуле для произведения $\sin\alpha\cos\beta$. Это даст результат только в том случае, если приведет к существенному упрощению суммы S. Посмотрим:

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(2\sin\frac{x}{2}\cos x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 2x + 2\sin\frac{x}{2}\cos 3x + \dots + \right.$$

$$\left. + 2\sin\frac{x}{2}\cos nx\right) = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\left(\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5}{2}x - \sin\frac{3}{2}x\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\sin\frac{7}{2}x - \sin\frac{5}{2}x\right) + \dots + \left(\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{2n-1}{2}x\right)\right).$$

Почти все слагаемые последней суммы — от $\sin\frac{3}{2}x$ до $\sin\frac{2n-1}{2}x$ — взаимно уничтожаются. Получаем:

$$S = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\left(\sin\frac{2n+1}{2}x - \sin\frac{1}{2}x\right) = \frac{1}{\sin\frac{x}{2}}\cos\frac{n+1}{2}x \cdot \sin\frac{n}{2}x.$$

Конечно, этот результат справедлив лишь при условии, что

$$\sin\frac{x}{2} \neq 0, \quad \frac{x}{2} \neq \pi k, \quad x \neq 2\pi k \ (k \in Z).$$

Каков ответ при $x = 2\pi k$, догадаться нетрудно.

Ответ: $\sin\frac{n}{2}x \cdot \cos\frac{n+1}{2}x \Big/ \sin\frac{x}{2}$ ($x \neq 2\pi k$, где $k \in Z$). ▲

859*. Преобразуйте в произведения следующие суммы:

а) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos(2n - 1)x$;

б) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx$;

в) $\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \dots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$;

г) $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin(2n - 1)x$;

д) $1 + 2\cos 2x + 2\cos 4x + 2\cos 6x + \dots + 2\cos 2nx$.

860*. Преобразуйте в произведение сумму:

$$S = \frac{1}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ} + \frac{1}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ} + \dots + \frac{1}{\cos 45^\circ \cos 46^\circ}.$$

△ Давайте подумаем: в какой из тригонометрических формул в знаменателе дроби встречается произведение двух косинусов? В формулах суммы и разности двух тангенсов (см. формулу (23) в начале главы).

Запишем серию равенств:

$$\operatorname{tg} 2^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 1^\circ \cos 2^\circ};$$

$$\operatorname{tg} 3^\circ - \operatorname{tg} 2^\circ = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 2^\circ \cos 3^\circ};$$

$$\operatorname{tg} 4^\circ - \operatorname{tg} 3^\circ = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 3^\circ \cos 4^\circ};$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\operatorname{tg} 46^\circ - \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 1^\circ}{\cos 45^\circ \cos 46^\circ}.$$

Сложим эти равенства:

$$\operatorname{tg} 46^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ = \sin 1^\circ \cdot S.$$

Найдем отсюда сумму S:

$$S = \frac{\operatorname{tg} 46^\circ - \operatorname{tg} 1^\circ}{\sin 1^\circ} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 1^\circ \cos 1^\circ \cos 46^\circ} = \frac{2\sin 45^\circ}{2\sin 1^\circ \cos 1^\circ \cos 46^\circ} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 2^\circ \cos 46^\circ}.$$

Ответ: $\sqrt{2}/(\sin 2^\circ \cos 46^\circ)$. ▲

861*. Преобразуйте в произведения следующие суммы:

а) $\dfrac{1}{\cos\alpha\cos 2\alpha}+\dfrac{1}{\cos 2\alpha\cos 3\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{\cos n\alpha\cos(n+1)\alpha}$;

б) $\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}+\cdots+\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos(2n+1)\alpha}$;

в) $\sin^3\alpha+\sin^3\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{9}\right)+\sin^3\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{9}\right)+\sin^3\left(\alpha+\dfrac{6\pi}{9}\right)+\cdots+\sin^3\left(\alpha+\dfrac{16\pi}{9}\right)$;

г) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha+\cdots+\operatorname{tg}99\alpha\operatorname{tg}100\alpha+100$.

23.3. 10—11

Рассмотрим задачи на вычисление числовых значений тригонометрических выражений без калькуляторов и таблиц. Удивительным образом нередко оказывается, что значения тригонометрических функций в некоторых точках являются числами иррациональными, а сумма или произведение — или рациональными числами, или простыми иррациональностями вроде $\sqrt{3}$.

862. Вычислите значения выражений:

а) $P=\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}2^\circ\operatorname{tg}3^\circ\ldots\operatorname{tg}89^\circ$;

б) $S=\cos\dfrac{\pi}{n}+\cos\dfrac{2\pi}{n}+\cos\dfrac{3\pi}{n}+\cdots+\cos\dfrac{(n-1)\pi}{n}$ $(n\in N,\ n>1)$.

△ а) Сгруппируем множители произведения P попарно: первый — с последним, второй — с предпоследним и т. д. Будем иметь:

$P=(\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}89^\circ)\cdot(\operatorname{tg}2^\circ\operatorname{tg}88^\circ)\cdot(\operatorname{tg}3^\circ\operatorname{tg}87^\circ)\cdot\cdots\cdot(\operatorname{tg}44^\circ\operatorname{tg}46^\circ)\cdot\operatorname{tg}45^\circ=$

$=(\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{ctg}1^\circ)\cdot(\operatorname{tg}2^\circ\operatorname{ctg}2^\circ)\cdot(\operatorname{tg}3^\circ\operatorname{ctg}3^\circ)\cdot\cdots\cdot(\operatorname{tg}44^\circ\operatorname{ctg}44^\circ)=1$.

б) Сложим два равенства:

$$S=\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{3\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}$$

и

$$S=\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}+\cos\frac{(n-3)\pi}{n}+\cdots+\cos\frac{\pi}{n}.$$

Получим:

$$2S=\left(\cos\frac{\pi}{n}+\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)+\left(\cos\frac{2\pi}{n}+\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)+$$

$$+\left(\cos\frac{3\pi}{n}+\cos\frac{(n-3)\pi}{n}\right)+\cdots+\left(\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+\cos\frac{\pi}{n}\right).$$

Сумма в каждых скобках правой части последнего равенства равна нулю, так как $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$. Поэтому $S=0$.

Ответ: а) 1; б) 0. ▲

863. Вычислите значения выражений:

а) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{98}\operatorname{tg}\frac{2\pi}{98}\operatorname{tg}\frac{3\pi}{98}\cdots\operatorname{tg}\frac{48\pi}{98}$; б) $\lg\operatorname{tg}1^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}2^\circ\cdot\lg\operatorname{tg}3^\circ\cdot\cdots\cdot\lg\operatorname{tg}89^\circ$;

в) $\sin\frac{\pi}{31}+\sin\frac{2\pi}{31}+\sin\frac{3\pi}{31}+\cdots+\sin\frac{61\pi}{31}$;

г) $\sin^2\alpha+\sin^2(\alpha+1^\circ)+\sin^2(\alpha+2^\circ)+\sin^2(\alpha+3^\circ)+\cdots+\sin^2(\alpha+179^\circ)$.

864. Вычислите значение выражения:

$$S=\operatorname{tg}20^\circ+4\sin20^\circ.$$

△ Имеем:

$$S=\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}+4\sin20^\circ=\frac{\sin20^\circ+4\sin20^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ}=$$

$$=\frac{\sin20^\circ+2\sin40^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{(\sin20^\circ+\sin40^\circ)+\sin40^\circ}{\cos20^\circ}=$$

$$=\frac{\cos10^\circ+\sin40^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{\cos10^\circ+\cos50^\circ}{\cos20^\circ}=\frac{2\cos30^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ}=\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$. ▲

865. Найдите значения выражений:

а) $\cos10^\circ\cos50^\circ\cos70^\circ$; б) $\operatorname{ctg}10^\circ-4\cos10^\circ$;

в) $\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{ctg}27^\circ$; г) $\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{tg}24^\circ+\operatorname{tg}24^\circ\operatorname{tg}54^\circ+\operatorname{tg}54^\circ\operatorname{tg}12^\circ$;

д) $\operatorname{ctg}80^\circ\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}30^\circ+\operatorname{ctg}30^\circ\operatorname{ctg}80^\circ$;

е) $\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}25^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}25^\circ$; ж) $\operatorname{tg}10^\circ\operatorname{tg}30^\circ\operatorname{tg}50^\circ\operatorname{tg}70^\circ$;

з)* $\frac{1}{\cos^2 20^\circ}+\frac{1}{\cos^2 40^\circ}+\frac{1}{\cos^2 80^\circ}$.

866. Вычислите значение выражения:

$$P=\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}.$$

△ Умножим и разделим это выражение на $4\sin\frac{3\pi}{5}$, а затем в числителе получающейся дроби применим дважды формулу синуса двойного аргумента:

$$P=\frac{1}{4\sin\frac{3\pi}{5}}4\sin\frac{3\pi}{5}\cos\frac{3\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}=\frac{1}{4\sin\frac{3\pi}{5}}2\sin\frac{6\pi}{5}\cos\frac{6\pi}{5}=$$

$$=\frac{1}{4\sin\frac{3\pi}{5}}\sin\frac{12\pi}{5}=\frac{1}{4\sin\frac{3\pi}{5}}\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{1}{4}.$$

Ответ: 1/4. ▲

867. Вычислите значения выражений:

а) $\cos\frac{\pi}{9}\cos\frac{2\pi}{9}\cos\frac{4\pi}{9}$;

б) $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{3\pi}{10}$;

в) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$;

г) $\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 96^\circ$;

д) $\sin\frac{\pi}{14}\sin\frac{3\pi}{14}\sin\frac{5\pi}{14}$;

е) $\cos\frac{\pi}{20}\cos\frac{3\pi}{20}\cos\frac{7\pi}{20}\cos\frac{9\pi}{20}$;

ж) $\sin 12^\circ\sin 24^\circ\sin 48^\circ\sin 84^\circ$;

з) $\cos 12^\circ\cos 24^\circ\cos 36^\circ\cos 48^\circ\cos 60^\circ\cos 72^\circ\cos 84^\circ$.

868. Найдите значения сумм:

а) $\sin\frac{\pi}{3}+\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{3\pi}{3}+\cdots+\sin\frac{600\pi}{3}$;

б) $\cos\frac{\pi}{3}+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{3\pi}{3}+\cdots+\cos\frac{22\pi}{3}$;

в) $\sin 0{,}1\pi+\sin 0{,}3\pi+\sin 0{,}5\pi+\cdots+\sin 9{,}9\pi$;

г) $\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{11\pi}{12}+\sin\frac{15\pi}{12}+\cdots+\sin\frac{863\pi}{12}$;

д) $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cdots+\cos\frac{76\pi}{7}$.

869. Вычислите значение выражения:

$$S=\cos\frac{2\pi}{5}-\cos\frac{\pi}{5}.$$

△ Умножим и разделим сумму S на $2\sin\frac{\pi}{5}$. Получим:

$$S=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\left(2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5}-2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\left(\sin\frac{3\pi}{5}-\sin\frac{\pi}{5}-\sin\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{1}{2\sin\frac{\pi}{5}}\cdot(-\sin\frac{\pi}{5})=-\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-1/2$. ▲

870. Вычислите значения сумм:

а) $\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}$;

б) $\cos24^\circ+\cos48^\circ-\cos12^\circ-\cos84^\circ$;

в) $\sin9^\circ+\sin49^\circ+\sin89^\circ+\dots+\sin329^\circ$.

871. Вычислите значения выражений:

а) $\sin18^\circ\cdot\sin54^\circ$; б) $\sin54^\circ-\sin18^\circ$.

872. Вычислите $\sin18^\circ$.

△ Задачу можно решить, пользуясь ответами к задачам 871 а) и 871 б) (соответственно $\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{2}$). Но возможно и совершенно другое решение.

Напишем очевидное равенство

$$\sin36^\circ=\cos54^\circ$$

и выразим обе его части через $\sin18^\circ$ и $\cos18^\circ$ (при этом в правой части нужно использовать формулу (12) для $\cos3\alpha$ из начала главы):

$2\sin18^\circ\cos18^\circ=4\cos^3 18^\circ-3\cos18^\circ$, $2\sin18^\circ=4\cos^2 18^\circ-3$,

$2\sin18^\circ=4-4\sin^2 18^\circ-3$, $4\sin^2 18^\circ+2\sin18^\circ-1=0$.

Отсюда $\sin18^\circ=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Ответ: $(\sqrt{5}-1)/4$. ▲

873*. Найдите произведение:

$$P = \cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ.$$

△ Применим тождество:

$$\cos 3\alpha = 4\cos\alpha \cos(60^\circ - \alpha)\cos(60^\circ + \alpha)$$

(из задачи 845 б)), полагая в нем $\alpha = 6^\circ$ и $\alpha = 18^\circ$:

$$\cos 18^\circ = 4\cos 6^\circ \cos 54^\circ \cos 66^\circ, \quad \cos 54^\circ = 4\cos 18^\circ \cos 42^\circ \cos 78^\circ$$

Перемножим эти равенства:

$$\cos 18^\circ \cos 54^\circ = 16\cos 6^\circ \cos 54^\circ \cos 66^\circ \cos 18^\circ \cos 42^\circ \cos 78^\circ,$$

$$1 = 16\cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ, \quad \cos 6^\circ \cos 42^\circ \cos 66^\circ \cos 78^\circ = \frac{1}{16}.$$

Ответ: 1/16. ▲

874*. Вычислите значения выражений:

а) $\cos 12^\circ \cos 24^\circ \cos 36^\circ \cos 48^\circ \cos 60^\circ \cos 72^\circ \cos 84^\circ$;

б) $\sin\frac{\pi}{64}\sin\frac{3\pi}{64}\sin\frac{5\pi}{64}\cdots\sin\frac{31\pi}{64}$;

в) $\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}$;

г) $\mathrm{tg}^4\frac{\pi}{24}+\mathrm{ctg}^4\frac{\pi}{24}+\mathrm{tg}^4\frac{5\pi}{24}+\mathrm{ctg}^4\frac{5\pi}{24}$;

д) $\mathrm{tg}^2 36^\circ \mathrm{tg}^2 72^\circ$.

23.4. 10—11

Займемся задачами на тождества с обратными тригонометрическими функциями. Вероятно, читатель помнит определения этих функций.

875. Докажите тождество:

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\pi}{4}.$$

△ Вычислим сначала $\operatorname{tg}(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}})$. Для этого положим $\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} = \alpha$. Тогда

$$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{10}}\ (0 < \alpha < \frac{\pi}{2}).$$

Получим:

$$\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \operatorname{tg}2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1-2\sin^2\alpha} =$$

$$= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{1-\frac{1}{10}}\Big/\left(1-2\cdot\frac{1}{10}\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

Теперь по формуле тангенса суммы будем иметь:

$$\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = \operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\alpha\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right) + \operatorname{tg}2\alpha}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{7}\right)\operatorname{tg}2\alpha} = \left(\frac{1}{7}+\frac{3}{4}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{7}\cdot\frac{3}{4}\right) = \frac{25}{25} = 1$$

С другой стороны, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$ также равен 1. Однако означает ли это, что мы доказали данное тождество? Ведь если тангенсы двух углов равны, то сами углы могут быть и не равны. А что, если сумма $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ равна, например, $\frac{5\pi}{4}$?

В силу возрастания тангенса и синуса на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ получаем:

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{7} < \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\pi}{6},$$

$$0 < 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} < 2\arcsin\frac{1}{2} = 2\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Сложим эти неравенства:

$$0 < \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}} < \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}.$$

Оказалось, что сумма $\operatorname{arctg}\frac{1}{7} + 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ принадлежит интервалу $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$. Но на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ существует только один угол, тангенс которого равен 1, а именно $\frac{\pi}{4}$. Поэтому тождество доказано. ▲

876. Вычислите значения выражений:

а) $\cos(\arcsin\frac{3}{5})$; б) $\cos(2\arccos\frac{1}{3})$; в) $\sin(\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5})$.

877. Вычислите:

$$\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3.$$

878°. Докажите тождества:

а) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$ $(-1 \le x \le 1)$; б) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.

(Эти тождества означают, что арксинус и арктангенс являются нечетными функциями.)

879°. Докажите тождества:

а) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$ $(-1 \le x \le 1)$;

б) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.

△ Оба тождества доказываются почти одинаково. Докажем только первое из них.

Возьмем косинусы от обеих частей этого тождества:

$\cos(\arccos(-x)) = -x$,

$\cos(\pi - \arccos x) = -\cos(\arccos x) = -x$.

(Во втором из двух последних равенств применялась формула приведения $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.)

Мы доказали, что косинусы двух углов равны. Но почему же тогда в данном случае равны и сами углы?

По определению арккосинуса

$$0 \le \arccos x \le \pi.$$

Отсюда

$$0 \ge -\arccos x \ge -\pi, \quad \pi \ge \pi - \arccos x \ge 0, \quad 0 \le \pi - \arccos x \le \pi.$$

Далее

$$0 \le \arccos(-x) \le \pi.$$

Получилось, что углы $\arccos(-x)$ и $\pi - \arccos x$ попадают в один и тот же промежуток $[0; \pi]$ монотонности косинуса. На таком промежутке из равенства косинусов двух углов следует равенство самих углов, так как монотонная функция каждое свое значение (в данном случае — значение, равное $-x$) принимает в единственной точке. Следовательно, тождество доказано. ▲

880°. Докажите тождества:

а) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$ $(-1 \le x \le 1)$;

б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

Тождества из задач 878–880 применяются при вычислении значений обратных тригонометрических функций (вычислите, например, пользуясь ими, $\arcsin(-\frac{1}{2})$, $\arccos(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ и $\operatorname{arcctg}(-1)$), а также для упрощения ответов при решении тригонометрических уравнений.

881. Докажите равенства:

а) $\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \operatorname{arctg}(3 + 2\sqrt{2})$;

б) $2\operatorname{arctg}2 - \operatorname{arctg}\dfrac{3}{4} = \dfrac{\pi}{2}$;

в) $2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{4} + \operatorname{arctg}\dfrac{7}{23} = \dfrac{\pi}{4}$.

882. Докажите тождества:

а) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

б) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ $(-1 < x < 1)$.

883. Докажите равенства:

а) $\arccos\frac{3}{5} + \arccos\frac{12}{13} + \arccos\frac{63}{65} = \frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{2}{3} = \operatorname{arctg}5$;

в) $3\arcsin\frac{1}{4} + \arccos\frac{11}{16} = \frac{\pi}{2}$;

г) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

884. Найдите x такое, что:

а) $\arcsin x = \arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$;

б) $\operatorname{arctg} x = \arcsin\frac{3}{5} + \arcsin\frac{5}{13}$.

885*. Вычислите $\arcsin(\sin 5)$.

△ Положим

$$\arcsin(\sin 5) = \alpha,$$

где, по определению арксинуса, $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. Тогда

$$\sin\alpha = \sin 5.$$

Отсюда, конечно, не следует, что $\alpha = 5$. Учтем, что

$$\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi.$$

Теперь попробуем α подбирать. Не подходит ли $\alpha = 2\pi - 5$? Проверим:

$$\sin(2\pi - 5) = -\sin 5.$$

Поэтому $\alpha = 2\pi - 5$ не подходит.
Проверим $\alpha = 5 - 2\pi$:

$$\sin(5 - 2\pi) = -\sin(2\pi - 5) = -(-5) = 5.$$

Как будто это значение α подходит. Но попадает ли угол $5 - 2\pi$ в проме жуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$?

Так как $\frac{3\pi}{2} < 5 < 2\pi$, то

$$\frac{3\pi}{2} - 2\pi < 5 - 2\pi < 2\pi - 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} < 5 - 2\pi < 0.$$

Следовательно,

$$5 - 2\pi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Ответ: $5 - 2\pi$. ▲

886*. Вычислите:

а) $\arcsin(\sin\frac{3\pi}{5})$; б) $\arcsin(\sin\frac{15\pi}{7})$; в) $\arccos(\cos\frac{7\pi}{5})$;

г) $\arccos(\cos 8)$; д) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-2))$; е) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}(-4))$.

§ 24. Условные тригонометрические тождества 10—11

Литература: [33], [37^e], [43^e], [47], [51].

24.1. 10—11

Сначала рассмотрим вводные задачи на условные тригонометрические тождества.

887. Зная, что $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{1}{2}$, найдите $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$.

△ Разложим сумму $\sin^3\alpha + \cos^3\alpha$ на множители:

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = (\sin\alpha + \cos\alpha)(\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \sin\alpha\cos\alpha).$$

Для того чтобы вычислить произведение $\sin\alpha\cos\alpha$, возведем исходное равенство в квадрат:

$$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \frac{1}{4}, \quad 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{4}, \quad \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{3}{8}.$$

Теперь получаем:

$$\sin^3\alpha + \cos^3\alpha = \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{8}) = \frac{11}{16}.$$

Ответ: 11/16. ▲

888. Зная, что $\sin\alpha - \cos\alpha = \alpha$, найдите:

а) $\sin^3x - \cos^3x$; б) $\sin^4x + \cos^4x$; в) $\sin^6x + \cos^6x$.

889. Известно, что $\sin^4x + \cos^4x = \frac{1}{2}$. Вычислите $\sin x + \cos x$.

890. Зная, что $\cos 2x = \frac{1}{3}$, вычислите:

а) $\sin^6x + \cos^6x$; б) $\cos^8x - \sin^8x$.

891. Зная, что $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = 4$, найдите:

а) $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{ctg}^2\alpha$; б) $\mathrm{tg}^3\alpha + \mathrm{ctg}^3\alpha$; в) $\sin\alpha + \cos\alpha$.

892. Известно, что

$$\cos\alpha = \frac{1}{7}, \quad \cos(\alpha + \beta) = -\frac{11}{14},$$

где α и β — углы первой четверти. Вычислите $\cos\beta$.

△ Пользуясь условиями задачи, можно составить уравнение с $\sin\beta$ и $\cos\beta$ и его решить, но это длинный путь. Проще поступить следующим образом:

$\cos\beta = \cos((\alpha + \beta) - \alpha) = \cos(\alpha + \beta)\cos\alpha + \sin(\alpha + \beta)\sin\alpha.$

Для того чтобы воспользоваться этой формулой, найдем $\sin\alpha$ и $\sin(\alpha + \beta)$:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{1}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}, \quad \sin(\alpha + \beta) = \sqrt{1-\frac{121}{196}} = \frac{5\sqrt{3}}{14}.$$

Тогда будем иметь:

$$\cos\beta = -\frac{11}{14}\cdot\frac{1}{7} + \frac{5\sqrt{3}}{14}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{7} = \frac{60}{14\cdot 7} - \frac{11}{14\cdot 7} = \frac{49}{98} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда следует, что $\beta = \frac{\pi}{3}$.

Ответ: 1/2. ▲

893. Зная, что

$$\operatorname{tg}\alpha = 3, \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = 2,$$

вычислите $\operatorname{tg}\beta$.

894. Известно, что $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{12}{13}$, где $\alpha \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$. Найдите $\cos\alpha$.

895. Зная, что

$$\sin\alpha = \frac{5}{13}, \quad \sin(\alpha - \beta) = \frac{9}{41},$$

где α и β — углы первой четверти, найдите $\sin\beta$.

896. Зная, что

$$\frac{\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{3}{5}.$$

вычислите: а) $\operatorname{tg}\alpha$; б) $\sin 2\alpha$.

△ а) Применяя формулы косинуса суммы и разности двух аргументов, преобразуем условие:

$$\frac{\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}{\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin\alpha\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{3}{5},\quad \frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{3}{5}.$$

Для того чтобы в последнем равенстве перейти к $\mathrm{tg}\alpha$, разделим почленно числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части, на $\cos\alpha$ (проверьте, что из последнего равенства следует неравенство $\cos\alpha \neq 0$):

$$\frac{1-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\alpha}=\frac{3}{5},\quad 5-5\mathrm{tg}\alpha=3+3\mathrm{tg}\alpha,\quad \mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{4}.$$

б) Для вычисления $\sin 2\alpha$ проще всего воспользоваться выражением синуса через тангенс половинного аргумента (см. формулу (17) из начала главы):

$$\sin 2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}=\frac{2}{4}\Big/\left(1+\frac{1}{16}\right)=\frac{2\cdot 16}{4\cdot 17}=\frac{8}{17}.$$

Ответ: а) 1/4; б) 8/17. ▲

897. Зная, что

$$\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\frac{3}{2},$$

найдите $\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta$.

898. Известно, что

$$\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{1}{2}\ \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

Вычислите $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$.

899. Известно, что

$$\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{2},\quad \cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}.$$

Найдите $\sin(\alpha+\beta)$.

900. Докажите, что если $\mathrm{tg}\alpha\ \mathrm{tg}\beta=1$, то

$$\sin 2\alpha=\sin 2\beta,\quad \cos 2\alpha=\cos 2\beta.$$

901. Зная, что $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = a$, вычислите

$$\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta).$$

△ Преобразуем произведение косинусов в сумму, а затем применим формулу косинуса двойного аргумента:

$$\cos(\alpha - \beta)\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) =$$

$$= \frac{1}{2}(2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1) = \frac{1}{2}(2a - 2) = a - 1.$$

Ответ: $a - 1$. ▲

902. Тангенсы трех острых углов равны соответственно $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{5}$ и $\frac{1}{8}$. Докажите, что сумма этих углов равна 45°.

903. Зная, что $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$, вычислите:

$$(1 - \mathrm{tg}\alpha)(1 - \mathrm{tg}\beta).$$

904. Зная, что

$$(1 + \mathrm{tg}\alpha)(1 + \mathrm{tg}\beta) = 2,$$

найдите $\alpha + \beta$, если α и β — острые углы.

24.2. 10—11

Займемся задачами на определение вида треугольника по данному соотношению между тригонометрическими функциями его углов.

905. Докажите, что если для треугольника с углами α, β и γ выполняется равенство

$$\sin\alpha = 2\sin\beta\cos\gamma,$$

то он является равнобедренным.

△ Так как $\alpha = \pi - \beta - \gamma$, то $\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$. Теперь получаем:

$\sin(\beta + \gamma) = 2\sin\beta\cos\gamma$, $\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma = 2\sin\beta\cos\gamma$,

$\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma = 0$, $\sin(\beta - \gamma) = 0$.

Отсюда следует, что

$$\beta - \gamma = 0, \quad \beta = \gamma. \blacktriangle$$

906. Определите вид треугольника с углами α, β и γ, если

$$\cos(\alpha - \beta)\cos(\beta - \gamma) = 1.$$

907. Определите вид треугольника, для которого синус суммы двух углов больше косинуса этой суммы на 1.

908. Определите вид треугольника, если для двух его углов α и β выполняется равенство $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = 1$.

909. Определите вид треугольника, если

$$\frac{a}{\cos\alpha} = \frac{b}{\cos\beta},$$

где a и b — стороны треугольника, противолежащие соответственно его углам α и β.

910. Найдите вид треугольника с углами α, β и γ, если:

а) $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) + \operatorname{tg}(\beta - \gamma) + \operatorname{tg}(\gamma - \alpha) = 0$;

б) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin^2\gamma$;

в) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$.

911. Определите вид треугольника с углами α, β и γ, если:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma$;

б) $\sin\alpha = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$;

в) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

912*. Докажите, что если в треугольнике с углами α, β, γ

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{3}{2},$$

то он является правильным.

$\triangle$ Так как $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, то

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta) = -\left(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1\right) = 1 - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Теперь получаем:

$$\cos\alpha+\cos\beta+1-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{3}{2},$$

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{1}{2},$$

$$4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}=1,$$

$$4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+1=0,$$

$$\left(4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}-4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0,$$

$$\left(2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Следовательно,

$$\begin{cases}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0,\\ 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0.\end{cases}$$

Из первого уравнения системы $\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, т. е. $\alpha=\beta$. Тогда из второго уравнения

$$2\cos\alpha-1=0,\quad \cos\alpha=\frac{1}{2},\quad \alpha=\beta=\frac{\pi}{3}.$$

Но в этом случае и $\gamma=\frac{\pi}{3}$. Значит, $\alpha=\beta=\gamma$. ▲

913*. Определите вид треугольника, если

$$a^2=ab\cos\gamma+bc\cos\alpha+ca\cos\beta,$$

где a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — соответственно противолежащие им углы.

А здесь рассмотрим другие задачи, связанные со свойствами углов треугольника.

914. Найдите острые углы прямоугольного треугольника ($\angle C = 90°$), если

$$\cos A + \sin(A - B) = 1.$$

915. Найдите углы равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$), если

$$\cos A + \sqrt{3}\cos B = 0.$$

916. Для углов α, β и γ некоторого равнобедренного треугольника справедливо равенство

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\gamma.$$

Найдите эти углы.

917. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника и

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 4 : 5 : 6,$$

то

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 12 : 9 : 2.$$

△ Пользуясь условием, положим

$$\sin\alpha = 4k, \quad \sin\beta = 5k, \quad \sin\gamma = 6k,$$

где k — коэффициент пропорциональности. Очевидно, $0 < k \le \frac{1}{6}$.

По формуле синуса суммы будем иметь:

$\sin\gamma = \sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$

$6k = 4k\cos\beta + 5k\cos\alpha, \quad 5\cos\alpha + 4\cos\beta = 6.$

Аналогично, исходя из $\sin\alpha$ и $\sin\beta$, получаем:

$$6\cos\beta + 5\cos\gamma = 4, \quad 6\cos\alpha + 4\cos\gamma = 5.$$

Из системы уравнений

$$\begin{cases} 5\cos\alpha + 4\cos\beta = 6, \\ 6\cos\beta + 5\cos\gamma = 4, \\ 6\cos\alpha + 4\cos\gamma = 5 \end{cases}$$

найдем все три косинуса:

$$\cos\alpha = \frac{3}{4}, \quad \cos\beta = \frac{9}{16}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{8}.$$

Приведем все три дроби к общему знаменателю:

$$\cos\alpha = \frac{12}{16}, \quad \cos\beta = \frac{9}{16}, \quad \cos\gamma = \frac{2}{16}.$$

Следовательно,

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = 12 : 9 : 2. \blacktriangle$$

918. α, β, γ — углы треугольника и

$$\sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma = 3 : 4 : 5.$$

Найдите $\cos\alpha$, $\cos\beta$ и $\cos\gamma$.

919. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, не являющегося прямоугольным, то

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma.$$

$\triangle$ Выразим из этого равенства $\operatorname{tg}\gamma$ через $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$:

$$\operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta, \quad \operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1}.$$

(При этом $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1 \neq 0$, иначе $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = 0$, а это невозможно.) Но последнее равенство равносильно исходному и является верным, так как

$$\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}(\pi - \alpha - \beta) = \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = -\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1}. \blacktriangle$$

920. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то:

а) $\operatorname{tg}n\alpha + \operatorname{tg}n\beta + \operatorname{tg}n\gamma = \operatorname{tg}n\alpha \operatorname{tg}n\beta \operatorname{tg}n\gamma$ ($n \in N$),

при условии, что ни один из углов $n\alpha$, $n\beta$, $n\gamma$ не равен $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$);

б) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1.$

921. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$;

б) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$;

в) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = -4\cos\frac{3\alpha}{2} \cos\frac{3\beta}{2} \cos\frac{3\gamma}{2}$

г) $\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$.

922*. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то:

а) $\sin 2n\alpha + \sin 2n\beta + \sin 2n\gamma = 4 \cdot (-1)^{n+1} \sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma$ $(n \in Z)$;

б) $\sin(2n+1)\alpha + \sin(2n+1)\beta + \sin(2n+1)\gamma =$

$$= -4(-1)^n \cos\frac{(2n+1)\alpha}{2} \cos\frac{(2n+1)\beta}{2} \cos\frac{(2n+1)\gamma}{2} \quad (n \in Z)$$

923. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то:

а) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2 + 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$;

б) $\cos\frac{\alpha}{2} \cos(\frac{\alpha}{2} + \beta) + \cos\frac{\beta}{2} \cos(\frac{\beta}{2} + \gamma) + \cos\frac{\gamma}{2} \cos(\frac{\gamma}{2} + \alpha) = 0$;

в) $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$.

924. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то:

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0$$

тогда и только тогда, когда по меньшей мере один из углов треугольника равен 60°.

△ Проще всего применить тождество

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = -4\cos\frac{3\alpha}{2} \cos\frac{3\beta}{2} \cos\frac{3\gamma}{2}$$

из задачи 921в).

1) Пусть один из углов треугольника, например α, равен 60°. Тогда

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0,$$

так как в этом случае

$$\cos\frac{3\alpha}{2} = \cos 90° = 0.$$

2) Обратно, пусть

$$\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\gamma = 0.$$

Тогда один из косинусов в правой части первоначального равенства равен нулю. Пусть $\cos\frac{3\alpha}{2} = 0$. Получаем:

$$\frac{3\alpha}{2} = 90°, \quad \alpha = 60°. \ ▲$$

925. Докажите, что если α, β и γ — углы треугольника, то равенство

$$\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда один из углов треугольника прямой.

926*. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то равенство

$$\sin 5\alpha + \sin 5\beta + \sin 5\gamma = 0$$

выполняется тогда и только тогда, когда один из углов треугольника равен 36° или 108°.

927*. Докажите, что если в треугольнике с углами α, β, γ выполняется равенство

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} = \sqrt{3},$$

то по меньшей мере один из его углов равен 60°.

24.4. 10—11

Займемся разными задачами на условные тригонометрические тождества.

Сначала несколько задач, близких к задачам из п. 3.

928. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, то

$$\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

929. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 - 2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma.$$

930. Докажите, что если $\alpha = \beta + \gamma$, то

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma$$

при всех допустимых значениях α, β и γ.

931. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = 0$, то

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = -4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

932. Верно ли, что если

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha - \beta)\cos 2\beta,$$

где $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha = \beta$?

△ Преобразуем правую часть равенства в сумму:

$\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - 3\beta))$,

$\cos(\alpha - 3\beta) - \cos(\alpha + \beta) = 0, \quad 2\sin(\alpha - \beta)\sin 2\beta = 0.$

Если $\sin(\alpha - \beta) = 0$, то $\alpha - \beta = 0$, $\alpha = \beta$.

Равенство $\sin 2\beta = 0$ невозможно, так как

$$0 < \beta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 2\beta < \pi.$$

Ответ: верно. ▲

933. Зная, что

$$3\sin\alpha = \sin(\alpha + 2\beta),$$

докажите, что $\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = 2\mathrm{tg}\beta$, при условиях $\beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in Z)$, $\alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$ $(n \in Z)$.

△ Преобразуем условие задачи следующим образом:

$$3\sin((\alpha + \beta) - \beta) = \sin((\alpha + \beta) + \beta).$$

Теперь нужно применить формулы синуса суммы и разности двух аргументов:

$3\sin(\alpha + \beta)\cos\beta - 3\cos(\alpha + \beta)\sin\beta = \sin(\alpha + \beta)\cos\beta + \cos(\alpha + \beta)\sin\beta$,

$\sin(\alpha + \beta)\cos\beta = 2\cos(\alpha + \beta)\sin\beta$.

Осталось разделить последнее равенство на $\cos\beta\cos(\alpha + \beta) \neq 0$:

$$\mathrm{tg}(\alpha + \beta) = 2\mathrm{tg}\beta. \ ▲$$

934. Зная, что

$$\sin 2(\alpha + \beta) = 2\sin 2\beta \left(\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

найдите $\frac{\mathrm{tg}(\alpha + 2\beta)}{\mathrm{tg}\alpha}$.

935. Докажите, что если $\sin^2\beta = \sin\alpha\cos\alpha$, то

$$\cos 2\beta = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right).$$

936. Докажите, что если $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = 3\operatorname{tg}\alpha$, то

$$\sin(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin 2\beta.$$

937. Зная, что

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\alpha + \beta) \left(\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right), \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)\right),$$

найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$.

938*. Докажите, что если

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta),$$

где $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$.

△ Преобразуем условие задачи:

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$,

$\sin\alpha(\sin\alpha - \cos\beta) = \sin\beta(\cos\alpha - \sin\beta)$.

Отсюда видно, что если разности $\sin\alpha - \cos\beta$ и $\cos\alpha - \sin\beta$ не обращаются в нуль, то они имеют одинаковые знаки.

1) Пусть эти разности положительны, т. е. $\sin\alpha > \cos\beta$ и $\cos\alpha > \sin\beta$. Тогда

$$1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha > \cos^2\beta + \sin^2\beta = 1,$$

а это невозможно.

2) Пусть разности отрицательны, т. е. $\sin\alpha < \cos\beta$ и $\cos\alpha < \sin\beta$. Аналогично доказывается, что и этот случай невозможен.

3) Остается единственное: разности равны нулю, т. е.

$$\sin\alpha = \cos\beta, \quad \cos\alpha = \sin\beta.$$

Следовательно, $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$. ▲

939*. Докажите, что если

$$\sin 2\alpha \sin(\alpha + 2\beta) = \sin 2\beta \sin(2\alpha + \beta),$$

где $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, то $\alpha = \beta$.

§ 25. Тригонометрические уравнения 10—11

Литература: [25], [34], [37], [43^e], [48], [51].

25.1. 10—11

Сначала рассмотрим тригонометрические уравнения, решающиеся с помощью разложения левой части уравнения на множители, если правая его часть есть нуль.

940. Решите уравнение:

$$\sin^3 x \sin 3x + \cos^3 x \cos 3x = \cos^3 4x.$$

△ Преобразуем произведения в левой части уравнения в суммы и упростим получающееся уравнение:

$\sin^2 x(\sin x \sin 3x) + \cos^2 x(\cos x \cos 3x) = \cos^3 4x,$

$\frac{1-\cos 2x}{2}\cdot\frac{\cos 2x-\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 2x}{2}\cdot\frac{\cos 2x+\cos 4x}{2}=\cos^3 4x,$

$(1 - \cos 2x)(\cos 2x - \cos 4x) + (1 + \cos 2x)(\cos 2x + \cos 4x) = 4\cos^3 4x,$

$2\cos 2x + 2\cos 2x\cos 4x = 4\cos^3 4x, \quad \cos 2x(1 + \cos 4x) = 2\cos^3 4x,$

$2\cos^3 2x = 2\cos^3 4x, \quad \cos 2x = \cos 4x, \quad \cos 2x - \cos 4x = 0,$

$2\sin 3x \sin x = 0.$

Отсюда $x = \frac{k\pi}{3}$ $(k \in Z)$ или $x = n\pi$ $(n \in Z)$. Очевидно, первая формула содержит в себе вторую (при k, делящемся на 3), поэтому множество всех корней уравнения задается первой формулой.

Ответ: $\frac{\pi k}{3}$ $(k \in Z)$. ▲

941. Решите уравнения:

а) $3\cos 3x + 3\cos 5x + 2\cos 13x = 8\cos x \cos^3 4x;$

б) $\sin 2x+\cos 2x=\operatorname{tg}x-\frac{2}{\cos x}+4\cos x;$

в) $\cos 4x = \cos^2 3x;$

г) $\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x};$

д) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2\operatorname{tg}x + 4\operatorname{ctg}2x = \operatorname{ctg}3x;$

е) $3\operatorname{tg}2x = \operatorname{tg}3x(4 + \operatorname{tg}2x \operatorname{tg}3x);$

ж) $2\sin x - 4\cos x - \operatorname{tg}x = \operatorname{ctg}x - 2\cos x \operatorname{ctg}x - 2.$

942. Решите уравнение:

$$4\cos(x - \frac{\pi}{3}) = 3\cos 3x.$$

△ Положим

$$x - \frac{\pi}{3} = y \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + y.$$

Будем иметь:

$4\cos y = 3\cos(\pi + 3y)$, $4\cos y = -3\cos 3y$,

$(3\cos y + 3\cos 3y) + \cos y = 0$, $6\cos 2y \cos y + \cos y = 0$,

$\cos y(6\cos 2y + 1) = 0$.

Отсюда найдем y, а затем x.

Ответ: $\frac{5\pi}{6} + \pi k$ $(k \in Z)$, $\frac{\pi}{3} \pm \arccos(-\frac{1}{6}) + \pi n$ $(n \in Z)$. ▲

943. Решите уравнения:

а) $2(\sin^3 x + \cos^3 x) + \sin 2x = 2$;

б)* $\sqrt{\sin x} + \sin x + \sin^2 x + \cos x = 1$;

в) $\cos 3x = 2\cos x$;

г) $\sin 3x = a \sin x$.

25.2. 10—11

Теперь займемся тригонометрическими уравнениями, которые решаются с помощью метода подстановки. Для того, чтобы можно было применить этот метод, необходимо выразить обе части уравнения через одну и ту же функцию одного и того же аргумента.

944. Решите уравнение:

$$1 + \cos 6x = 32\cos^6 x.$$

△ Выразим обе части уравнения через $\cos 2x$, используя в левой части формулу косинуса тройного аргумента:

$$1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 32\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^3,$$

$1 + 4\cos^3 2x - 3\cos 2x = 4 + 12\cos 2x + 12\cos^2 2x + 4\cos^3 2x$,

$12\cos^2 2x + 15\cos 2x + 3 = 0$, $4\cos^2 2x + 5\cos 2x + 1 = 0$.

Полагая здесь $\cos 2x = y$, получаем квадратное уравнение $4y^2 + 5y + 1 = 0$. Осталось отсюда найти y, а потом x.

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in Z)$, $\pm\frac{1}{2}\arccos(-\frac{1}{4}) + \pi n$ $(n \in Z)$. ▲

945. Решите уравнения:

а) $\sin 3x + 2 = 2\cos 2x$;

б) $6\operatorname{tg} x + 5\operatorname{ctg} 3x = \operatorname{tg} 2x$;

в) $4\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{4} = \operatorname{ctg}\frac{x}{4} + 8\sqrt{3}$;

г) $\cos^8 x + \sin^8 x = \frac{97}{128}$;

д) $\cos^{10} x + \sin^{10} x = \frac{29}{64}$;

е) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x + \sin 2x = 4$;

ж) $\sin^5 x - \cos^5 x = \frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\sin x}$;

з) $2\sin^2 x + \sin x + \frac{1}{\sin x} + \frac{2}{\sin^2 x} = 6$;

и) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x = 4$.

946. Решите уравнение:

$$\sin x + \cos x + \sin 2x + 1 = 0.$$

△ Введем подстановку $\sin x + \cos x = y$. Возведем это равенство в квадрат:

$$\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = y^2, \quad 1 + \sin 2x = y^2.$$

Теперь получаем:

$$y + y^2 = 0, \quad y(1 + y) = 0.$$

Отсюда $y = 0$ или $y = -1$. Осталось решить уравнения $\sin x + \cos x = 0$ и $\sin x + \cos x = -1$.

Ответ: $-\frac{\pi}{4} + \pi k$, $(2m + 1)\pi$, $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(k \in Z, m \in Z, n \in Z)$. ▲

947. Решите уравнения:

а) $\sin x - \cos x = \sin 2x - 1$;

б) $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$;

в) $\sin 3x + \sin x - \sin 2x = 2\cos x(\cos x - 1)$;

г) $\sin x + \sin^2 x + \cos^3 x = 0$;

д) $2(1 - \sin x - \cos x) + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x = 0$.

25.3. 10—11

Рассмотрим уравнения, которые решаются с помощью неравенств. Эти неравенства обычно связаны с множеством значений функции.

948. Решите уравнения:

а) $\cos^2 x + 2\cos x \cos^2 3x + \cos^2 3x = 0$; б) $\cos x(4 - 3\sin^2 x) = 4$.

△ а) Преобразуем левую часть уравнения, дополняя два первых ее члена до квадрата суммы:

$(\cos^2 x + 2\cos x \cos^2 3x + \cos^4 3x) + (\cos^2 3x - \cos^4 3x) = 0$,

$(\cos x + \cos^2 3x)^2 + \cos^2 3x \sin^2 3x = 0$.

Отсюда

$$\cos x + \cos^2 3x = 0, \quad \cos 3x \sin 3x = 0.$$

Теперь нужно разобрать два случая.

1) Пусть $\sin 3x = 0$. Тогда

$$\cos^2 3x = 1 \Rightarrow \cos x = -1.$$

Получаем систему двух уравнений с одним неизвестным:

$$\sin 3x = 0, \quad \cos x = -1.$$

Множество решений первого уравнения — $x = \frac{\pi k}{3}$ $(k \in Z)$, второго — $x = \pi(2n + 1)$ $(n \in Z)$. Для нахождения общих решений этих уравнений нужно решить в целых числах уравнение $\frac{\pi k}{3} = \pi(2n + 1)$:

$$\frac{\pi k}{3} = \pi(2n + 1), \quad \frac{k}{3} = 2n + 1, \quad k = 3(2n + 1).$$

Значит, вторая формула $x = \pi(2n + 1)$ содержится в первой $x = \frac{\pi k}{3}$ при $k = 3(2n + 1)$. (Впрочем, это легко увидеть и с помощью тригонометрического круга.) Но тогда общей частью обеих формул является вторая — $x = \pi(2n + 1)$.

2) Пусть $\cos 3x = 0$. Получаем систему уравнений:

$$\cos 3x = 0, \quad \cos x = 0.$$

Тем же способом находим множество ее решений — $x = \frac{\pi}{2} + \pi m$ $(m \in Z)$.

б) Множитель $4 - \sin^2 x$ в левой части уравнения положителен. Следовательно, и первый множитель $\cos x$ положителен.

Справедливы неравенства

$$\cos x \le 1, \quad 4 - 3\sin^2 x \le 4.$$

Перемножим их почленно:

$$\cos x(4 - \sin^2 x) \le 4.$$

Последнее неравенство по условию должно превратиться в равенство. Это возможно только тогда, когда оба перемножавшихся неравенства превращаются в равенства:

$$\cos x = 1, \quad 4 - 3\sin^2 x = 4.$$

Отсюда $x = 2\pi k$ $(k \in Z)$.

Ответ: а) $\pi(2n + 1)$, $\frac{\pi}{2} + \pi m$ $(n \in Z, m \in Z)$; б) $2\pi k$ $(k \in Z)$. ▲

949. Решите уравнения:

а) $\sin x + \sin 3x = \cos^2 x + 2$;

б) $\cos^4 2x = \sin^6 x + 1$;

в) $2\sin^2 x + 3\sin^2 3x = 5$;

г) $\sin x + \sin 4x + \sin 6x = \cos^2 x + 3$;

д) $4\sin 2x - \mathrm{tg}^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 4$;

е) $1 + \cos^2 x + 2\cos x \cos^2 5x = \sin^2 5x$;

ж) $\sin^2 3x = 2(1 + \cos 2x \cos 3x)$;

з) $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 = 5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right)$;

и) $\sin^5 x + \cos^5 x = 2 - \sin^2 x$;

к) $4x^2 - 4x + 1 + \cos^2 \pi x = 0$;

л) $\cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x} = 1 + \cos 2x - 2\sin^2 2x$;

м) $2\sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right) - 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 5$.

950*. Решите уравнение:

$$\sin^8 x + \cos^8 x = 64(\sin^{20} x + \cos^{20} x).$$

△ При неотрицательных a и b справедливо неравенство:

$$a^{n-1}b + ab^{n-1} \le a^n + b^n \ (n \in N),$$

причем равенство достигается только при $a = b$ (см. § 19, п. 19.5). Будем иметь:

$\sin^8 x + \cos^8 x = (\sin^8 x + \cos^8 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) =$

$= (\sin^{10} x + \cos^{10} x) + (\sin^8 x \cos^2 x + \sin^2 x \cos^8 x) \le$

$\leq (\sin^{10}x + \cos^{10}x) + (\sin^{10}x + \cos^{10}x) = 2(\sin^{10}x + \cos^{10}x) \leq$

$\leq 4(\sin^{12}x + \cos^{12}x) \leq 8(\sin^{14}x + \cos^{14}x) \leq \ldots \leq 64(\sin^{20}x + \cos^{20}x)$.

Так как полученное неравенство

$$\sin^8x + \cos^8x \leq 64(\sin^{20}x + \cos^{20}x)$$

должно превратиться в равенство, то

$$\sin^2x = \cos^2x, \quad \mathrm{tg}^2x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \ (k \in Z).$$

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ $(k \in Z)$. ▲

951*. Решите уравнения:

а) $\sin^4x + \cos^4x + \sin^6x + \cos^6x + \sin\frac{x}{2} = 3$;

б) $\sqrt{1-\sin x} + \sqrt{\sin x} = 2\cos x - \cos^2x$;

в) $\cos x \cos 2x \cos 3x \ldots \cos 100x = 1$;

г) $3\sin x + 4\cos x = \cos 4x + 6$.

25.4*. 10—11

Рассмотрим тригонометрические уравнения с двумя и тремя неизвестными. Такие уравнения, подобно уравнениям из п. 25.3, как правило, решаются с помощью неравенств.

952. Решите уравнение:

$$2\sin x + 2\sin y + \cos(x + y) = 3.$$

△ Сумму $\sin x + \sin y$ преобразуем в произведение, а $\cos(x + y)$ выразим по формуле косинуса двойного аргумента через $\sin\frac{x+y}{2}$:

$$4\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 1 - 2\sin^2\frac{x+y}{2} = 3,$$

$$\sin^2\frac{x+y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 1 = 0.$$

Теперь два первых члена в левой части последнего уравнения дополним до квадрата разности. Для этого достаточно 1 представить в виде $\cos^2\frac{x-y}{2} + \sin^2\frac{x-y}{2}$:

$$(\sin^2\frac{x+y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \cos^2\frac{x-y}{2}) + \sin^2\frac{x-y}{2} = 0,$$

$$(\sin\frac{x+y}{2} - \cos^2\frac{x-y}{2})^2 + \sin^2\frac{x-y}{2} = 0.$$

Отсюда

$$\sin\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2} = 0, \quad \sin\frac{x-y}{2} = 0.$$

Так как $\sin\frac{x-y}{2} = 0$, то $\cos\frac{x-y}{2} = \pm 1$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\cos\frac{x-y}{2} = 1$. Получаем систему уравнений:

$$\sin\frac{x+y}{2} = 1, \quad \cos\frac{x-y}{2} = 1.$$

Из первого уравнения $\frac{x+y}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in Z)$, а из второго — $\frac{x-y}{2} = 2\pi l$ $(l \in Z)$. Складывая и вычитая два последних уравнения, находим:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k + 2\pi l = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k + l) = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,$$

$$y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k - 2\pi l = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k - l) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $m = k + l$, $n = k - l$.

Одно замечание: так как числа $k + l$ и $k - l$ имеют одинаковую четность, то числа m и n здесь — одинаковой четности.

2) Пусть $\cos\frac{x-y}{2} = -1$. Тогда

$$\sin\frac{x+y}{2} = -1, \quad \cos\frac{x-y}{2} = -1.$$

Следовательно,

$$\frac{x+y}{2} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z), \quad \frac{x-y}{2} = \pi + 2\pi l \ (l \in Z).$$

Отсюда

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k + l) = \frac{\pi}{2} + 2\pi m,$$

$$y = -\frac{3\pi}{2} + 2\pi(k - l) = \frac{\pi}{2} - 2\pi + 2\pi(k - l) = \frac{\pi}{2} + 2\pi(k - l - 1) = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

где $m = k + l$, $n = k - l - 1$.

А здесь числа m и n — разной четности.

С учетом первого случая можно ограничения, связанные с четностью и нечетностью m и n, снять.

Ответ: $(\frac{\pi}{2} + 2\pi m, \frac{\pi}{2} + 2\pi n)$ $(m \in Z, n \in Z)$. ▲

953. Решите уравнения:

а) $y^2 - 2y \sin xy + 1 = 0$;

б) $4x^2 + 4x\cos(x + y) + 1 = 0$;

в) $9x^2 + 6x \sin(x - y) + 2 = 0$;

г) $(\sin(x - y) + 1)(2\cos(2x - y) + 1) = 6$;

д) $(3 - \sin x)\left(4 - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = 12 + \cos^2 y$;

е) $\cos x + \cos y - \cos(x + y) = \frac{3}{2}$;

ж) $\left(2 + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(2 - \cos^2 x) = \frac{1}{2}(1 + 5\sin 3y)$;

з) $(2 - \sin^2 x)\left(5 + \frac{3}{\sin^4 x}\right) = \cos 2y + 7$;

и) $\left(\cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}\right)(3 + \sin z) = 4\cos^2 2y$;

к) $1 - 2x - x^2 = \mathrm{tg}^2(x + y) + \mathrm{ctg}^2(x + y)$.

954. Решите уравнение:

$$\sin^4 x + \cos^4 y + 2 = 4\sin x \cos y.$$

△ Соберем все члены в левую часть уравнения, а затем в этой части прибавим и отнимем $2\sin^2 x + 2\cos^2 y$. Зачем? Сейчас узнаете:

$\sin^4 x + \cos^4 y + 2 - 4\sin x \cos y + 2\sin^2 x + 2\cos^2 y - 2\sin^2 x - 2\cos^2 y = 0$,

$(\sin^4 x - 2\sin^2 x + 1) + (\cos^4 y - 2\cos^2 y + 1) + (2\sin^2 x + 2\cos^2 y - 4\sin x \cos y) = 0$,

$(\sin^2 x - 1)^2 + (\cos^2 y - 1)^2 + 2(\sin x - \cos y)^2 = 0$.

Получаем систему уравнений:

$$\sin^2 x - 1 = 0, \quad \cos^2 y - 1 = 0, \quad \sin x - \cos y = 0.$$

Из первого уравнения $\sin x = \pm 1$, из второго — $\cos y = \pm 1$, а из третьего — $\sin x = \cos y$. Следовательно, нужно рассмотреть два случая: $\sin x = \cos y = 1$ и $\sin x = \cos y = -1$.

Закончите решение самостоятельно.

Ответ: $(\frac{\pi}{2} + 2\pi k;\ 2\pi n)$ $(k \in Z, n \in Z)$, $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ (2n + 1)\pi)$ $(k \in Z, n \in Z)$. ▲

955. Решите уравнения:

а) $\sin^2 x + \cos^2 2x + 4 = 6\sin^2 x \sin^2 y$;

б) $\sin^2 x \cos^2 2x + 4 = 5\sin^2 x \sin^2 y$;

в) $\sin^2 x + \sin^2 y = \sin x \sin y + \sin x + \sin y - 1$.

956. Решите уравнения:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y}{1 + \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^2 y} = \sin^2 x + \sin^2 y$;

б) $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 y + \dfrac{1}{\cos^2 y}\right)^2 = 12 + \dfrac{1}{2}\sin y$

25.5. 10—11

Займемся уравнениями с обратными тригонометрическими функциями.

Предварительно вспомним опорные тождества из § 23, связанные с ними:

1) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$;

2) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$;

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$;

4) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$;

5) $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$;

6) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \dfrac{\pi}{2}$.

957. Решите уравнения:

а) $\arcsin\left(3x^2-4x+\frac{17}{8}\right)=\arcsin\left(x^2-x+\frac{9}{8}\right)$;

б) $\arcsin x + \arccos(-x) = \arcsin(-x) + \arccos x$.

△ а) Возьмем синусы от обеих частей уравнения:

$$\sin\left(\arcsin\left(3x^2-4x+\frac{17}{8}\right)\right)=\sin\left(\arcsin\left(x^2-x+\frac{9}{8}\right)\right),$$

$$3x^2-4x+\frac{17}{8}=x^2-x+\frac{9}{8},\quad 2x^2-3x+1=0.$$

Корни последнего уравнения — $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Однако это не все. Ведь равенство $\sin\alpha = \sin\beta$ является лишь следствием равенства $\alpha = \beta$. В данном случае, так как выражение $\arcsin m$ имеет смысл только при условии $-1 \le m \le 1$, последнее уравнение равносильно исходному лишь при условии, что полученные корни удовлетворяют неравенству

$$-1\le x^2-x+\frac{9}{8}\le 1.$$

Сделаем проверку:

$$1-1+\frac{9}{8}=\frac{9}{8}>1,\quad \frac{1}{4}-\frac{1}{2}+\frac{9}{8}=\frac{9}{8}-\frac{1}{4}=\frac{7}{8}<1.$$

Значит, корень $x = 1$ — посторонний, а корень $x = \frac{1}{2}$ удовлетворяет исходному уравнению.

б) Воспользуемся первым и третьим тождествами для $\arcsin(-x)$ и $\arccos(-x)$:

$$\arcsin x + \pi - \arccos x = -\arcsin x + \arccos x,$$

$$\arccos x - \arcsin x = \frac{\pi}{2}.$$

Применим еще пятое тождество, придав ему вид

$$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x.$$

Получим:

$$\arccos x - \frac{\pi}{2} + \arccos x = \frac{\pi}{2},\quad \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

Отсюда $x = 0$.

Ответ: а) 1/2; б) 0. ▲

958. Решите уравнения:

а) $\arcsin x+\arccos(2-x^2)=\frac{\pi}{2}$;

б) $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}$;

в) $\arcsin x - \arcsin 2x = \arccos x - \arccos 2x$;

г) $\arcsin x + \arccos\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2}$;

д) $24(\arcsin x)^2 - 10\pi \arcsin x + \pi^2 = 0$;

е) $36(\arccos x)^2 + 72\arcsin x \arccos x = 5\pi^2$.

959. Решите уравнения:

а) $\arcsin x = \arccos x$; б) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1 + x) = \operatorname{arctg}(1 - x)$.

△ а) Возьмем синусы от обеих частей уравнения:

$\sin(\arcsin x) = \sin(\arccos x)$, $x = \sqrt{1-x^2}$, $x^2 = 1 - x^2$,

$x^2 = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(значение $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ не удовлетворяет иррациональному уравнению).

Проверка показывает, что $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ — корень исходного уравнения.

б) Возьмем тангенсы от обеих частей уравнения, применяя в левой части формулу тангенса суммы:

$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(1 + x)) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(1 - x)$,

$\frac{x+1+x}{1-x(1+x)}=1-x$, $\frac{2x+1}{1-x-x^2}=1-x$,

$2x + 1 = 1 - x - x^2 - x + x^2 + x^3$, $x^3 - 4x = 0$.

Из последнего уравнения $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 2$. Но исходному уравнению удовлетворяет только $x = 0$.

Ответ: а) $\sqrt{2}/2$; б) 0. ▲

960. Решите уравнения:

а) $\arcsin(1-2x)+\arccos x=\pi$;

б) $\arcsin x+\arcsin 2x=\frac{\pi}{2}$;

в) $\arcsin x+\arccos(-x)=\arcsin(1-x)$;

г) $\arcsin\frac{3x}{5}+\arcsin\frac{4x}{5}=\arcsin x$;

д) $\operatorname{arctg}2x+\operatorname{arctg}3x=\operatorname{arctg}6x$;

е) $\operatorname{arctg}2x+\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\pi$;

ж) $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}(1+x)+\operatorname{arctg}(1-x)=\frac{\pi}{2}$;

з) $\arcsin(1-x)=2\arcsin x+\frac{\pi}{2}$.

961*. Решите уравнение:

$$2\operatorname{arctg}x+3\operatorname{arcctg}x=0.$$

△ Приведем уравнение к виду:

$$3\operatorname{arcctg}x=-2\operatorname{arctg}x.$$

Возьмем тангенсы от обеих частей уравнения. При этом в левой части используем формулу тангенса тройного аргумента:

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

(см. формулу (13) из начала главы). Учитывая, что если $\operatorname{ctg}\alpha=x$, то $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{x}$, будем иметь:

$$\operatorname{tg}(3\operatorname{arcctg}x)=\left(3\cdot\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\Big/\left(1-3\cdot\frac{1}{x^2}\right)=\frac{3x^2-1}{x(x^2-3)}.$$

Займемся тангенсом правой части уравнения:

$$\operatorname{tg}(-2\operatorname{arctg}x)=-\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}x)=\frac{2x}{x^2-1}.$$

Теперь получаем:

$$\frac{3x^2-1}{x(x^2-3)}=\frac{2x}{x^2-1},\quad 3x^4-x^2-3x^2+1=2x^4-6x^2,$$

$$x^4+2x^2+1=0,\quad (x^2+1)^2=0.$$

Последнее уравнение не имеет действительных корней.

Ответ: нет решений. ▲

962*. Решите уравнения:

а) $\arcsin 2x = 3\arcsin x$; б) $\arccos x = 2\operatorname{arctg}(2x - 1)$;

в) $\arcsin 2x + \operatorname{arctg}\frac{1-x}{2x} = \frac{\pi}{2}$.

963*. Сколько корней имеют уравнения:

а) $\arcsin x^2 = x$; б) $\arcsin(x - 1) = x$?

25.6*. 10—11

Рассмотрим разные способы решения тригонометрических уравнений.

964. Решите уравнения:

а) $\sin 3x + 2 = 2\cos 2x$; б) $\cos 3x + 1 = 2\cos 2x$;

в) $\operatorname{tg} y = 2\cos\frac{y}{2}$; г) $\sin^{19}\pi y + \cos^{29}\pi y = 1$;

д) $|\cos y| + |\cos 2y| + |\cos 3y| = 1$.

965. Найдите все корни уравнения:

$$\sin\pi x + \cos\pi x\sqrt{1-\operatorname{ctg}^2\pi x} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

принадлежащие отрезку $[-3; 1]$.

966. Решите уравнение:

$$\cos x \cos 4x \cos 5x = \frac{1}{8}.$$

△ Умножим обе части уравнения на $8\sin x\cos 2x$:

$$8\sin x \cos 2x \cos x \cos 4x \cos 5x = \sin x \cos 2x.$$

В левой части последнего уравнения нужно три раза применить формулу синуса двойного аргумента. Получим:

$$\sin 8x \cos 5x = \sin x \cos 2x.$$

Произведения в обеих частях этого уравнения преобразуем в суммы:

$$\frac{1}{2}(\sin 13x + \sin 3x) = \frac{1}{2}(\sin 3x - \sin x).$$

Отсюда

$$\sin 13x = -\sin x, \quad \sin 13x + \sin x = 0, \quad 2\sin 7x \cos 6x = 0.$$

Тогда

$$7x = \pi k \ (k \in Z), \quad x = \frac{\pi k}{7}; \quad 6x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \ (n \in Z), \quad x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}.$$

Возьмем формулу $x = \frac{\pi k}{7}$. Является ли здесь k любым целым числом? Ведь мы умножали исходное уравнение на $8\sin x \cos 2x$, а при этом получается лишь следствие уравнения. Из значений k нужно исключить те, при которых $\sin x = 0$, т. е. все k, делящиеся на 7, так как в точках $x = \pi m$ произведение $\cos x \cos 4x \cos 5x$ равно 1, а не $\frac{1}{8}$. Кроме того, $\cos 2x$ не обращается в нуль ни в одной из точек $x = \frac{\pi k}{7}$.

По аналогичным причинам в формуле $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$ нужно отбросить значения $n = 3a + 1$ $(a \in Z)$; например, при $n = 1$ $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4}$, а тогда $\cos 2x = 0$.

Ответ: $\frac{\pi k}{7}$ $(k \in Z,\ k \neq 7a$, где $a \in Z)$, $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{6}$ $(n \in Z,\ n \neq 3a + 1$, где $a \in Z)$. ▲

967. Решите уравнения:

а) $\cos x \cos 4x \cos 5x = -\frac{1}{8}$;

б) $\cos^2 x + \cos^2 2x - 2\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{3}{4}$;

в) $\sin x \sin 2x \cos 4x + \cos x \sin 2x \cos 4x = \frac{\sqrt{2}}{8}$;

г) $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} 2x + \operatorname{ctg} 3x = \frac{2}{\sin 2x}$;

д) $4\operatorname{tg} 4x + 2\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x = 8 + \operatorname{ctg} x$.

968. Решите уравнения:

а) $2\sin 2x + \sqrt{3}(1 - \sin x) = \cos x$;

б) $4\cos^2 3x - 4\cos^4 x \cos 3x + \cos^2 x = 0$.

△ а) Преобразуем уравнение, собирая все члены в левой части, и попытаемся выделить общий множитель суммы в левой части:

$(2\sin 2x + \sqrt{3}) - (\sqrt{3}\sin x + \cos x) = 0,$

$$\left(\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = 0,$$

$$\left(\sin 2x + \sin\frac{\pi}{3}\right) - \left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right) = 0,$$

$$2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0.$$

Дальнейшее очевидно.

б) Будем рассматривать уравнение как квадратное относительно $\cos 3x$. Получим:

$$\cos 3x = \frac{2\cos^4 x \pm \sqrt{4\cos^8 x - 4\cos^2 x}}{4} = \frac{1}{2}(\cos^4 x \pm \sqrt{\cos^8 x - \cos^2 x}).$$

Дискриминант уравнения должен быть неотрицателен. С другой стороны, так как $\cos^8 x \le \cos^2 x$, то $\cos^8 x - \cos^2 x \le 0$. Следовательно, $\cos^8 x - \cos^2 x = 0$.

Дальнейшее также очевидно.

Ответ: а) $-\frac{\pi}{6} + \pi k$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$ $(k \in Z, n \in Z)$; б) $\frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in Z)$. ▲

969. Решите уравнения:

а) $2\sin 3x + \sin x = \cos 2x + \sqrt{3}(\sin 2x - \cos x)$;

б) $5 + \sin x + \sqrt{3}\cos x = 20\cos^2 x$;

в) $2(\operatorname{tg} x - \sin x) + 3(\operatorname{ctg} x + \cos x) = 5$;

г) $6\sin 2x + \sqrt{3}(2\sin x - 3) = 2\cos x$;

д) $4\cos^5 x - 3\sin^3 x = 4$.

970. Решите уравнение:

$$\sin(\pi\cos x) = \cos(\pi\sin x).$$

△ Соберем оба члена в левой части уравнения и представим левую часть в виде разности синусов:

$\sin(\pi\cos x) - \cos(\pi\sin x) = 0$, $\sin(\pi\cos x) - \sin(\frac{\pi}{2} + \pi\sin x) = 0$,

$2\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x))\sin(\frac{\pi}{2}(\cos x - \sin x) - \frac{\pi}{4}) = 0.$

1) Пусть

$$\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x)) = 0.$$

Получаем:

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(\cos x + \sin x) = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \cos x + \sin x = 2k + \frac{1}{2} \ (k \in Z).$$

Фактически здесь мы встретились с тригонометрическим уравнением с параметром.

Давайте подумаем: разве здесь k — любое целое число? Возьмем $k = 1$. Тогда

$$\cos x + \sin x = 2\frac{1}{2} —$$

уже много. Возьмем $k = -1$:

$$\cos x + \sin x = -1\frac{1}{2} —$$

мало, так как $\cos x + \sin x \geq -\sqrt{2}$ (проверьте!), а $-\sqrt{2} > -1\frac{1}{2}$. Остается только $k = 0$. Будем иметь:

$$\cos x + \sin x = \frac{1}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{2} - x) + \sin x = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2\sqrt{2}}; \quad x = \frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi m \ \ (m \in Z).$$

2) Пусть

$$\sin(\frac{\pi}{2}(\cos x - \sin x) - \frac{\pi}{4}) = 0.$$

Получаем:

$$\frac{\pi}{2}(\cos x - \sin x) - \frac{\pi}{4} = \pi k, \ \cos x - \sin x = 2k + \frac{1}{2} \ (k \in Z).$$

И здесь из всех целых k подходит только $k = 0$. Тогда

$$\cos x - \sin x = \frac{1}{2}, \quad \sin(\frac{\pi}{2} + x) - \sin x = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1}{2},$$

$$\cos(\frac{\pi}{4} + x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad x = -\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n \ (n \in Z).$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1}{2\sqrt{2}} + 2\pi n \ (n \in Z)$. ▲

971. Решите уравнения:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi\sqrt{2}}{4}\sin x\right)+1=0$;

б) $\operatorname{tg}(\pi\operatorname{ctg}x) = \operatorname{ctg}(\pi\operatorname{tg}x)$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{x} = \operatorname{ctg}2\pi x$;

г) $2\cos\left(\frac{5\pi}{3}-4\sin x\right)=1$;

д) $\sin\frac{2000\pi^2}{x}=\frac{1}{\cos x}$.

972. Существуют ли значения параметра a, при которых уравнение

$$1 + \sin^2 x = \cos ax$$

имеет единственный корень?

△ Так как

$$1 + \sin^2 x \geq 1, \quad \cos ax \leq 1,$$

то исходное равенство выполняется тогда и только тогда, когда

$$1 + \sin^2 x = 1, \quad \cos ax = 1.$$

Из первого уравнения этой системы $x = \pi k$ ($k \in Z$), из второго —

$$ax = 2\pi n, \quad x = \frac{2\pi n}{a} \ (n \in Z,\ a \neq 0).$$

(Проверьте, что при $a = 0$ система имеет бесконечное множество решений.) Тогда

$$\pi k = \frac{2\pi n}{a}, \quad ka = 2n.$$

Последнее уравнение должно иметь единственное решение в целых числах k и n. Это возможно лишь в том случае, когда число a иррационально; тогда $k = n = 0$. При любом рациональном a решений бесконечное множество; например, при $a = 3$ получаем $3k = 2n$, а это уравнение имеет множество решений $k = 2m$, $n = 3m$ ($m \in Z$).

Ответ: существуют — это все иррациональные a. ▲

973. Существуют ли значения a, при которых уравнение

$$1 + \cos^2 ax = \sin^2 x$$

имеет единственное решение?

974. Решите в целых числах уравнение:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\left(x - \sqrt{x^2+4x+16}\right)\right) = 0.$$

△ Имеем:

$$\frac{\pi}{2}\left(x - \sqrt{x^2+4x+16}\right) = \pi k \ (k \in Z).$$

$$x - \sqrt{x^2+4x+16} = 2k, \quad \sqrt{x^2+4x+16} = x - 2k.$$

Легко видеть, что при всех действительных x $x^2 + 4x + 16 > 0$. Возведем последнее уравнение в квадрат:

$$x^2 + 4x + 16 = x^2 - 4kx + 4k^2, \quad x + 4 = k^2 - kx,$$

$$x + kx = k^2 - 4, \quad x = \frac{k^2-4}{k+1}.$$

(Проверьте случай $k = -1$.)

Найдем все целые k, при которых дробь $\frac{k^2-4}{k+1}$ равна целому числу. Будем иметь:

$$\frac{k^2-4}{k+1} = \frac{(k^2-1)-3}{k+1} = k - 1 - \frac{3}{k+1}.$$

Дробь $\frac{3}{k+1}$ также должна быть равной целому числу. Следовательно, $k + 1$ должно быть делителем числа 3, т. е. равно 1, -1, 3 или -3. Переберем все четыре случая.

1) Пусть $k + 1 = 1$. Тогда $k = 0$, $x = -4$.

2) Пусть $k + 1 = -1$. Тогда $k = -2$, $x = 0$.

3) При $k + 1 = 3$ получаем $k = 2$, $x = 0$.

4) При $k + 1 = -3$ получаем $k = -4$, $x = -4$.

При возведении иррационального уравнения в квадрат могли появиться посторонние корни. Нужно проверить в каждом из этих случаев, выполняется ли неравенство $x - 2k \geq 0$. Оно выполняется только во втором и четвертом случаях.

Ответ: 0, -4. ▲

975. Решите в целых числах уравнение:

$$\sin\left(\pi\sqrt{51+2x-x^2}\right) = 0.$$

Перейдем к системам тригонометрических уравнений. Они решаются разными способами.

976. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4\sin x = 5\operatorname{ctg}(x+y), \\ \sin x\cos(x+y) + \sin(x+y) = 3\cos(x+y). \end{cases}$$

△ Напрашивается второе уравнение системы разделить на $\cos(x + y)$. Ну, а если $\cos(x + y) = 0$? Тогда из второго уравнения и $\sin(x + y) = 0$, а это невозможно. Итак, $\cos(x + y) \neq 0$, а следовательно, делить на $\cos(x + y)$ можно:

$$\sin x + \operatorname{tg}(x + y) = 3, \quad 3 - \sin x = \operatorname{tg}(x + y).$$

Первое уравнение системы запишем в виде $4\sin x = \dfrac{5}{\operatorname{tg}(x+y)}$. Получаем новую систему:

$$\begin{cases} 4\sin x = \dfrac{5}{\operatorname{tg}(x+y)}, \\ 3 - \sin x = \operatorname{tg}(x+y). \end{cases}$$

Естественно уравнения этой системы перемножить:

$$4\sin x(3 - \sin x) = 5, \quad 4\sin^2 x - 12\sin x + 5 = 0.$$

Отсюда $\sin x = \dfrac{1}{2}$. Тогда из второго уравнения $\operatorname{tg}(x + y) = 2{,}5$. Будем иметь:

$$\begin{cases} x = (-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n \ (n \in Z), \\ x + y = \operatorname{arctg} 2{,}5 + \pi k \ (k \in Z). \end{cases}$$

Вычитая уравнения последней системы, найдем y:

$$y = \operatorname{arctg} 2{,}5 + (-1)^{n+1} \cdot \frac{\pi}{6} + \pi(k - n).$$

Ответ: $\left((-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n;\ \operatorname{arctg} 2{,}5 + (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi(k - n)\right)$ $(n \in Z, k \in Z)$. ▲

977. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0, \\ \cos x + \cos y = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x = 3\sin y, \\ \operatorname{tg} x = 5\operatorname{tg} y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin x - \dfrac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \dfrac{1}{\cos x} = \cos y; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin x = \cos 2y, \\ \sin 2x = \cos y; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2, \\ \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 2y = 2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} \sin^3 x = \sin y, \\ \cos^3 x = \cos y; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \sin x \sin y = \dfrac{3}{4}, \\ \sin y \sin z = \dfrac{3}{4}, \\ \sin z \sin x = \dfrac{3}{4}; \end{cases}$

з) $\begin{cases} x + y + z = \pi, \\ \sin x : \sin y : \sin z = 2:3:4. \end{cases}$

978. Сколько решений имеет система уравнений:

$$\sin x = y, \quad \sin y = x?$$

979*. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \cos 2x = \operatorname{tg}\left(y + \dfrac{\pi}{4}\right), \\ \cos 2y = \operatorname{tg}\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right). \end{cases}$$

△ Положим $\operatorname{tg} x = z$, $\operatorname{tg} y = t$ и выразим обе части каждого из уравнений через z и t. При этом в левых частях нужно применить выражение косинуса через тангенс половинного аргумента (см. формулу (21) в начале главы). Будем иметь:

$$\cos 2x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1 - z^2}{1 + z^2}, \quad \operatorname{tg}\left(y + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{tg} y + \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1 - \operatorname{tg} y \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + t}{1 - t},$$

$$\cos 2x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + z}{1 - z}.$$

Получаем систему рациональных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1-z^2}{1+z^2}=\dfrac{1+t}{1-t}, \\ \dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{1+z}{1-z}. \end{cases}$$

Приведем ее к системе алгебраических уравнений и образующуюся систему упростим:

$$\begin{cases} (1-z^2)(1-t)=(1+z^2)(1+t), \\ (1-t^2)(1-z)=(1+t^2)(1+z); \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-z^2-t+z^2t=1+z^2+t+z^2t, \\ 1-t^2-z+zt^2=1+t^2+z+zt^2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2+t=0, \\ t^2+z=0; \end{cases} \qquad \begin{cases} t=-z^2, \\ z=-t^2. \end{cases}$$

Последняя система сводится к уравнению с одним неизвестным:

$$z = -z^4, \quad z + z^4 = 0, \quad z(1 + z^3) = 0.$$

Отсюда $z = 0$ или $z = -1$; соответственно, $t = 0$ или $t = -1$.

Если $z = t = 0$, то $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = 0$. Получаем множество решений $(\pi k; \pi n)$ $(k \in Z, n \in Z)$.

Если $z = t = -1$, то $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}y = -1$. Получаем еще одно множество решений $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi k; -\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)$ $(k \in Z, n \in Z)$.

Однако нетрудно заметить, что исходная система уравнений имеет еще решение $\left(\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, которое не входит ни в одно из этих множеств. В чем же дело?

Попробуйте сообразить самостоятельно, в чем тут дело.

Ответ: $\left(\dfrac{\pi k}{2}; \dfrac{\pi n}{2}\right)$, $\left(-\dfrac{\pi}{4}+\pi k; -\dfrac{\pi}{4}+\pi n\right)$ $(k \in Z, n \in Z)$. ▲

980*. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} 2\sin x+3\sin y=0, \\ 4\cos x+6\cos y=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x+\cos x=2+\sin y+\cos y, \\ 2\sin 2x+\sin 2y=0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \sin(x-y)=2\cos x\sin y, \\ \cos(2x+y)+\cos x\cos(x+y)=0; \end{cases}$

г) $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sqrt{2}, \\ \operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=x-y\left(x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right),\ y\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right). \end{cases}$

§ 26. Доказательство тригонометрических неравенств 10—11

Литература: [14], [33^e], [37^e], [44].

Учащиеся старших классов более или менее знакомы с решением тригонометрических неравенств. Гораздо менее известно доказательство таких неравенств.

При доказательстве тригонометрических неравенств используются обычные средства и методы. Разница лишь в том, что здесь, кроме очевидных неравенств вроде $a^2 \geq 0$ и опорных неравенств из §§ 18 и 19, применяются и другие, особенно

$$|\sin\alpha| \leq 1, \quad |\cos\alpha| \leq 1.$$

26.1. 10—11

Рассмотрим вводные задачи.

981. Докажите неравенство:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \geq \frac{1}{2}.$$

Когда достигается равенство?

△ Дополним левую часть неравенства до квадрата суммы:

$$\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha) - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\alpha \geq 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Равенство достигается при условии, что

$$\sin^2 2\alpha = 1, \quad \sin 2\alpha = \pm 1, \quad 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2} \ (k \in Z). \ ▲$$

982. Докажите неравенства:

а) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \geq \frac{1}{4}$; б) $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \geq \frac{1}{8}$;

в) $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} \geq 1 \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Когда достигается равенство?

983. Докажите неравенство:

$$\sin^{2k}x + \cos^{2n}x \le 1 \ (k \in N,\ n \in N).$$

984. Докажите, что если $-\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то

$$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} - \alpha) + \mathrm{tg}(\frac{\pi}{4} + \alpha) \ge 2.$$

985. Докажите, что если $\alpha \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, $\beta \in \left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$, то:

а) $\sin(\alpha + \beta) \le \sin\alpha + \sin\beta$; б) $\cos(\alpha + \beta) \le \cos\alpha + \cos\beta$.

986. Что больше: $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$ или $1 + \mathrm{ctg}\alpha$, если $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$?

△ Составим разность $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} - 1 - \mathrm{ctg}\alpha$ и выразим ее через $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$:

$$\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2} - 1 - \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} - 1 - \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} - 1 - \frac{1 - \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2 - 2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - 1 + \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} - 1\right)^2}{2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

Последняя дробь положительна при всех $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$ больше, чем $1 + \mathrm{ctg}\alpha$.

Ответ: $\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$. ▲

987. Что больше: $\mathrm{tg}2\alpha$ или $2\mathrm{tg}\alpha$, если $\alpha \in \left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$ и $\alpha \ne \frac{\pi}{4}$?

988. Что больше: $\sin 19$ или $\sin 99$?

989. Докажите неравенства:

а) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) \le \sin^2\alpha$;

б) $(\sin^2\alpha + 1)(\cos^2\alpha + 1) \ge 9\sin^2\alpha \cos^2\alpha$;

в) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \le 2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha)$;

г) $\sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\gamma + \sin\gamma \cos\alpha \le \frac{3}{2}$;

д) $\cos\alpha + \cos\beta + 2\cos(\alpha + \beta) \ge -\frac{9}{4}$.

990. Докажите, что если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то:

а) $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2}$; б) $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} \ge \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{2}$;

в) $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} \le \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2}$.

Если функция $f(x)$, заданная на некотором промежутке, такова, что для любых x_1 и x_2 из этого промежутка выполняется неравенство $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, то она называется **выпуклой вверх**, а если $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, то **выпуклой вниз** на этом промежутке.

Геометрический смысл этих понятий заключается в следующем: график функции, выпуклой вверх (выпуклой вниз), изображается дугой, которая расположена не ниже (не выше) хорды, соединяющей концы дуги.

Здесь при доказательстве неравенств используются опорные неравенства из задач 991 и 993, а также рассматриваются близкие к ним неравенства.

991°. Докажите неравенство:

$$|\sin x + \cos x| \le \sqrt{2}.$$

△ Имеем:

$$|\sin x + \cos x| = |\sin x + \sin(\frac{\pi}{2} - x)| = |\sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})| \le \sqrt{2}.$$

Из доказанного неравенства следует, что

$$-\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2}.$$

При этом значения $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$ суммой $\sin x + \cos x$ достигаются (например, при $x = \frac{\pi}{4}$ и $x = \frac{5\pi}{4}$). Так как множество значений функции, непрерывной на промежутке, есть промежуток, то полученному результату можно придать такую форму: множество значений функции $y = \sin x + \cos x$ есть отрезок $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. ▲

Этот факт можно использовать при решении уравнений. Например, уравнение $\sin x + \cos x = 1{,}5$ не имеет корней, поскольку

$$\sin x + \cos x \le |\sin x + \cos x| \le \sqrt{2} < 1{,}5.$$

992. Найдите множества значений функций:

а) $y = \sin x - \cos x$; б) $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$;

в) $y = 12\sin x + 5\cos x$; г) $y = a\sin x + b\cos x$.

993°. Докажите неравенство:

$$|\mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x| \ge 2 \quad (x \ne \frac{\pi k}{2}, \text{ где } k \in Z).$$

△ Достаточно применить опорное неравенство

$$\left|a + \frac{1}{a}\right| \ge 2$$

(см. § 19, задачу 631). ▲

994. Найдите множество значений функции:

$$y = \mathrm{tg}\,x + \mathrm{ctg}\,x.$$

995. Что больше: $\sin\alpha + \cos\alpha$ или $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

996. Докажите неравенства:

а) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin\alpha - \cos\alpha - 6 \le 0$;

б) $8 - \sin 2\alpha - \sin\alpha - \cos\alpha \ge 0$;

в) $2(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha) + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + 1 \ge 0$.

997. Найдите множество значений функции:

$$y = \operatorname{tg}x - \operatorname{ctg}x.$$

26.3. 10—11

998. Докажите неравенство:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 4.$$

Когда достигается равенство?

△ Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 2\sqrt{\frac{1}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{2}{|\sin x \cos x|} = \frac{4}{|\sin 2x|} \ge 4.$$

Равенство достигается, когда среднее арифметическое равно среднему геометрическому, т. е. при $\sin^2 x = \cos^2 x$, и, кроме того, при условии $|\sin 2x| = 1$. В обоих случаях получаем, что $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ $(k \in Z)$.

Исходное неравенство можно доказать и другим способом:

$$\frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \ge 4. \ ▲$$

999. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{\sin^4 x} + \frac{1}{\cos^4 x} \ge 8$;

б) $\frac{1}{\sin^6 x} + \frac{1}{\cos^6 x} \ge 16$;

в) $\frac{1}{\sin^8 x} + \frac{1}{\cos^8 x} \ge 32$;

г) $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} \ge 6$.

1000. Что больше: $\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}$ или $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$?

△ Выясним знак разности этих дробей:

$$\frac{\sin 1^\circ}{\sin 2^\circ}-\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}=\frac{\sin 4^\circ \sin 1^\circ-\sin 3^\circ \sin 2^\circ}{\sin 2^\circ \sin 4^\circ}=$$

$$=\frac{(\cos 3^\circ-\cos 5^\circ)-(\cos 1^\circ-\cos 5^\circ)}{2\sin 2^\circ \sin 4^\circ}=\frac{\cos 3^\circ-\cos 1^\circ}{2\sin 2^\circ \sin 1^\circ}<0.$$

Ответ: $\frac{\sin 3^\circ}{\sin 4^\circ}$. ▲

1001. Докажите неравенства:

а) $\frac{1}{8}<\sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ<\frac{1}{4}$;

б) $\frac{\cos^2\alpha+\cos^2\beta}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}\le\frac{1}{2}(\mathrm{ctg}^2\alpha+\mathrm{ctg}^2\beta)$;

в) $\sin\alpha\ \sin 2\alpha\ \sin 3\alpha<\frac{3}{4}$;

г)* $\sin 1+\sin 2+\sin 3>\sqrt{3}$;

д)* $\frac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\cdots+\sin(2n-1)\alpha}{\sin\alpha}\ge 0.$

26.4*. 10—11

Некоторые тригонометрические неравенства доказываются с помощью производной.

С доказательством неравенств с помощью производной мы уже встречались (см. § 20, п. 20.3).

Сначала рассмотрим одно важное неравенство. Оно используется, в частности, на уроках в математических классах при доказательстве соотношения $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$.

1002°. Докажите, что если $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\sin\alpha<\alpha<\mathrm{tg}\alpha.$$

Здесь предполагается, что α — длина дуги, выраженная в радианной мере.

△ В координатной плоскости опишем единичную окружность с центром в начале координат, построим $\angle AOB=\alpha$ (*рис.* 9).

Тогда

$$BC = \sin\alpha, \quad KA = \operatorname{tg}\alpha.$$

Так как треугольник AOB есть часть сектора AOB, а этот сектор есть часть треугольника AOK, то

$$S_{\triangle AOB} < S_{\text{сект}AOB} < S_{\triangle AOK}.$$

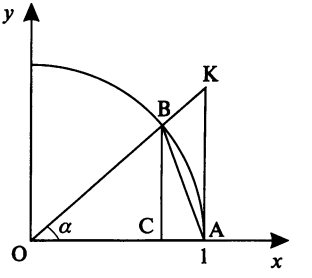

Рис. 9

Выразим все эти площади через α:

$$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2}AO \cdot BC = \frac{1}{2}\sin\alpha,$$

$$S_{\triangle AOK} = \frac{1}{2}AO \cdot AK = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha,$$

$$S_{\text{сект}AOB} = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{1}{2}R^2\frac{\pi n}{180} = \frac{1}{2}R^2\alpha = \frac{1}{2}\alpha,$$

где n — градусная мера угла AOB. Здесь использовалась формула $\alpha = \dfrac{\pi n}{180}$, выражающая радианную меру угла через градусную.

Подставим эти выражения для площадей в записанное выше неравенство:

$$\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{1}{2}\alpha < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha, \quad \sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha. \ \blacktriangle$$

1003°. Пользуясь неравенством из задачи 1002, докажите, что при любом $\alpha > 0$ выполняется неравенство $\sin\alpha < \alpha$, причем равенство достигается только при $\alpha = 0$.

1004. Пусть $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$. Что больше: $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ или $\dfrac{\sin\beta}{\beta}$?

$\triangle$ Вид сравниваемых дробей наводит на следующую мысль: ввести функцию $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ и исследовать ее на возрастание и убывание с помощью производной на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Будем иметь:

$$f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}.$$

Так как $x^2 > 0$, $\cos x > 0$, а $x - \operatorname{tg} x < 0$ на основании неравенства $\alpha < \operatorname{tg}\alpha$ из задачи 1002, то производная на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ отрицательна. Следователь-

но, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ на этом интервале убывает, по признаку возрастания и убывания функции.

Теперь получаем:

$$\beta > \alpha \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta), \quad \frac{\sin\beta}{\beta} < \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

Ответ: $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$. ▲

1005. Пусть $0 < \alpha < \beta < \dfrac{\pi}{2}$. Что больше:

а) $\alpha + \cos\alpha$ или $\beta + \cos\beta$; б) $\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$ или $\beta + \operatorname{ctg}\beta$?

1006. Докажите неравенство:

$$\cos x + x\sin x \geq 1 \ (x \geq 0).$$

1007. Докажите неравенства:

а) $\cos x \geq 1 - \dfrac{x^2}{2}$; б) $\sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$ $(x \geq 0)$.

△ а) Составим функцию

$$f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$$

и будем исследовать ее на возрастание и убывание с помощью производной. Так как она является четной, то можно ограничиться исследованием на промежутке $[0; +\infty)$. Будем иметь:

$$f'(x) = -\sin x + x.$$

Полученное выражение неотрицательно на промежутке $[0; +\infty)$ на основании утверждения задачи 1003, причем оно равно нулю только при $x = 0$. Следовательно, функция $f(x)$ на этом промежутке возрастает. Тогда при $x \geq 0$

$$f(x) \geq f(0) = 0, \quad \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \geq 0, \quad \cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}.$$

б) Составим функцию

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

и исследуем ее на возрастание и убывание на промежутке $[0; +\infty)$. Получаем:

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

На основании неравенства из задачи а) $f'(x) > 0$. Следовательно, функция $f(x)$ на промежутке $[0; +\infty)$ возрастает. Отсюда

$$x \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq f(0) = 0, \quad \sin x - x + \frac{x^3}{6} \geq 0, \quad \sin x \geq x - \frac{x^3}{6}. \ \blacktriangle$$

1008. Докажите неравенства:

а) $\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$; б) $\sin x \leq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$ $(x \geq 0)$.

1009. Докажите, что если $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то:

а) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$; б) $x^2 + 2\ln\cos x < 0$; в) $\sin x < \frac{1}{2}x(\pi - x)$;
г) $\sin x(4 - \cos x) < 3x$; д) $\operatorname{tg} x + \sin x > 2x$.

1010. Докажите неравенство:

$$\sin^2 x \cos^6 x < \frac{27}{256}.$$

△ Рассмотрим функцию $y = \sin^2 x \cos^6 x$. Выразим ее только через $\cos^2 x$:

$$y = \sin^2 x \cos^6 x = (1 - \cos^2 x)\cos^6 x = \cos^6 x - \cos^8 x.$$

Положим $\cos^2 x = t$. Тогда $y = t^3 - t^4$, где $t \in [0; 1]$.
Найдем критические точки функции $y = t^3 - t^4$:

$$y' = 3t^2 - 4t^3 = t^2(3 - 4t); \quad t^2(3 - 4t) = 0; \quad t_1 = 0, \ t_2 = \frac{3}{4}.$$

В точке $t = \frac{3}{4}$ производная меняет знак с плюса на минус, а значит, функция имеет в этой точке максимум. Так как $t = \frac{3}{4}$ — единственная точка экстремума, то функция имеет в этой точке не только максимум, но и наибольшее значение на всем отрезке $[0; 1]$. Вычислим его:

$$y_{\max} = y\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{27}{64} - \frac{81}{256} = \frac{108-81}{256} = \frac{27}{256}.$$

Тогда при любом t из этого отрезка $y \leq \frac{27}{256}$. ▲

1011. Докажите, что если $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) \geq 3+2\sqrt{2}.$$

26.5*. 10—11

Рассмотрим разные задачи на доказательство тригонометрических неравенств.

1012. Докажите неравенство:

$$4\sin 3\alpha + 5 \geq 4\cos 2\alpha + 5\sin\alpha.$$

△ Составим разность между левой и правой частями неравенства и преобразуем ее, выражая все слагаемые через $\sin\alpha = t$:

$4\sin 3\alpha + 5 - 4\cos 2\alpha - 5\sin\alpha =$

$= 4(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha) + 5 - 4(1 - 2\sin^2\alpha) - 5\sin\alpha =$

$= 4(3t - 4t^3) + 5 - 4(1 - 2t^2) - 5t =$

$= 12t - 16t^3 + 5 - 4 + 8t^2 - 5t =$

$= -16t^3 + 8t^2 + 7t + 1 = (t - 1)(-16t^2 - 8t - 1) =$

$= (1 - t)(4t + 1)^2.$

Полученное выражение неотрицательно, так как $t \leq 1$. Следовательно, неравенство доказано. ▲

1013. Докажите неравенство:

$$\sin^2\alpha\cos^2\beta + \sin^2\beta\cos^2\gamma + \sin^2\gamma\cos^2\alpha \leq 1.$$

1014. Докажите неравенство:

$$|\sin nx| \leq n|\sin x| \ (n \in N).$$

1015. Докажите неравенство:

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x).$$

△ Очевидно, $\cos(\sin x) > 0$, так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, а отрезок $[-1; 1]$ составляет часть интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, на котором косинус положителен. Что касается $\sin(\cos x)$, то он может быть и отрицательным.

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\sin(\cos x) \le 0$. Тогда исходное неравенство очевидно: неположительное число меньше положительного.

2) Пусть $\sin(\cos x) > 0$. Составим разность между правой и левой частями исходного неравенства и преобразуем ее в произведение:

$$\cos(\sin x) - \sin(\cos x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \sin x\right) - \sin(\cos x) =$$

$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos x - \sin x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right).$$

Справедливо неравенство

$$-\frac{\pi}{2} < -\sqrt{2} \le \sin x + \cos x \le \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$$

(см. опорное неравенство из задачи 991). Тогда получаем:

$$-\frac{\pi}{2} < \sin x + \cos x < \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{4} < -\frac{\sin x + \cos x}{2} < \frac{\pi}{4},$$

$$0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно,

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right) > 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\cos x - \sin x}{2} < \frac{\pi}{2},$$

а тогда

$$\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\cos x - \sin x}{2}\right) > 0.$$

Отсюда

$$\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > 0, \quad \sin(\cos x) < \cos(\sin x). \ \blacktriangle$$

1016. Докажите неравенство:

$$\sin(\sin x) < \cos(\cos x).$$

1017. Докажите, что периметр правильного n-угольника, вписанного в окружность, возрастает с ростом n.

△ Обозначим этот периметр через p_n. Нужно доказать, что при любом натуральном $n \ge 3$ справедливо неравенство $p_{n+1} > p_n$.

Имеем:

$$p_n = na_n = 2Rn\sin\frac{\pi}{n},$$

где a_n — сторона правильного вписанного n-угольника, R — радиус окружности. Тогда неравенство $p_{n+1} > p_n$ сводится к следующему:

$$2R(n+1)\sin\frac{\pi}{n+1} > 2Rn\sin\frac{\pi}{n}, \quad \left(\sin\frac{\pi}{n+1}\right)\Big/\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\Big/\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Естественно теперь ввести функцию $y = \dfrac{\sin x}{x}$ и доказать с помощью производной, что она убывает на интервале $\left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Впрочем, мы уже делали это при решении задачи 1004. Тогда

$$\frac{\pi}{n+1} < \frac{\pi}{n} \Rightarrow \left(\sin\frac{\pi}{n+1}\right)\Big/\left(\frac{\pi}{n+1}\right) > \left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\Big/\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad p_{n+1} > p_n. \ \blacktriangle$$

1018. Докажите, что периметр правильного n-угольника, описанного около окружности, убывает с ростом n.

§ 27. Доказательство условных тригонометрических неравенств 10—11

Литература: [33], [37], [44^e].

27.1. 10—11

Начнем с вводных задач.

1019. В задаче 991 из § 26 мы доказали, что множество значений функции $y = \sin x + \cos x$, заданной на R, есть отрезок $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$. Найдите множество значений этой функции на промежутках:

а) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; г) $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

1020. Найдите множество значений функции $y = \sin x - \cos x$ на отрезках:

а) $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; б) $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$; в) $\left[\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$; г) $\left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$.

1021. Докажите, что если $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, то

$$\sin^2\gamma \geq \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

△ Так как по условию $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, то неравенство можно привести к виду:

$$\sin^2(\alpha + \beta) \geq \sin 2\alpha \sin 2\beta.$$

Преобразуем обе части последнего неравенства в суммы:

$$\frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha + 2\beta)) \geq \frac{1}{2}(\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(2\alpha + 2\beta)), \quad 1 \geq \cos(2\alpha - 2\beta).$$

Неравенство доказано. ▲

1022. Докажите неравенства:

а) $\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\beta} + \frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\beta} \geq 1 \quad (\alpha \in (0;\pi),\ \beta \in (0;\pi),\ \beta \neq \frac{\pi}{2})$;

б) $\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha > 0 \ (\alpha \in (0; \pi))$;

в) $(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{ctg}\alpha)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)>64 \quad \left(\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)\right)$.

1023. Докажите, что если числа α и β положительны и $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$, то

$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta<\sqrt{3}.$$

△ Так как $\alpha+\beta=\frac{\pi}{3}$, то $\beta=\frac{\pi}{3}-\alpha$. Выразим отсюда $\mathrm{tg}\beta$ через $\mathrm{tg}\alpha$:

$$\mathrm{tg}\beta=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}-\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}\mathrm{tg}\alpha}=\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

Теперь преобразуем исходное неравенство:

$$\mathrm{tg}\alpha\cdot\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}\alpha}{1+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha}<\sqrt{3},\quad \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha<\sqrt{3}+3\mathrm{tg}\alpha,$$

$$\mathrm{tg}^2\alpha+(3-\sqrt{3})\mathrm{tg}\alpha+\sqrt{3}>0.$$

Выясним знак дискриминанта D квадратного трехчлена (относительно $\mathrm{tg}\alpha$), стоящего в левой части последнего неравенства:

$$D=(3-\sqrt{3})^2-4\sqrt{3}=9-6\sqrt{3}+3-4\sqrt{3}=12-10\sqrt{3}<0.$$

Следовательно, этот трехчлен положителен при любом $\alpha\in\left(0;\ \frac{\pi}{3}\right)$. ▲

1024. Докажите, что если числа α, β и γ положительны и $\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2}$, то:

а) $\cos\gamma<\cos\alpha+\cos\beta$;

б) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma+3\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\frac{9}{8}$.

27.2. 10—11

Задачи на условные тригонометрические неравенства чаще всего связаны с углами треугольника.

В § 24 (пп. 24.2 и 24.3) мы встречались с задачами на условные тригонометрические тождества, связанными с углами треугольника. При решении некоторых задач данного пункта целесообразно сопоставлять их с соответствующими задачами § 24.

1025. Существует ли треугольник, в котором синус одного из углов больше суммы синусов двух других углов?

1026. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}.$$

Когда достигается равенство?

△ Так как $\gamma = 180° - \alpha - \beta$, то $\cos\gamma = -\cos(\alpha + \beta)$. Преобразуем сумму в левой части неравенства:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha + \beta) =$$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - (2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1) =$$

$$= -2(\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}) + 1 =$$

$$= -2((\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})^2 - \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}) + 1 =$$

$$= -2(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})^2 + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} + 1 \le 0 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Равенство достигается, если

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 1, \quad \cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Тогда

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 0, \quad \frac{\alpha+\beta}{2} = 60°.$$

Отсюда $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. ▲

1027. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то:

а) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \le \frac{9}{4}$;

в) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$.

1028°. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \frac{1}{8}.$$

Докажите также, что равенство достигается только в случае равностороннего треугольника.

△ Проделаем примерно такие же преобразования, что и при решении задачи 1026:

$$\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)) \cdot \cos(\alpha+\beta) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos^2(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) =$$

$$= -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta))^2 + \frac{1}{8}\cos^2(\alpha-\beta) \le 0 + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}.$$

Равенство достигается при условиях:

$$\cos(\alpha-\beta) = 1, \quad \cos(\alpha+\beta) + \frac{1}{2}\cos(\alpha-\beta) = 0.$$

В этом случае

$$\alpha - \beta = 0, \quad \alpha + \beta = 120°,$$

откуда $\alpha = \beta = \gamma = 60°$. ▲

1029. Докажите, что если α, β, γ — углы треугольника, то выполняется по меньшей мере одно из неравенств:

$$\cos\alpha\cos\beta \le \frac{1}{4}, \quad \cos\beta\cos\gamma \le \frac{1}{4}, \quad \cos\gamma\cos\alpha \le \frac{1}{4}.$$

1030. Докажите, что если α, β, γ — углы остроугольного треугольника, то

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\cos\gamma} \ge 6.$$

Когда достигается равенство?

△ Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел (§ 19, задача 644), пользуясь тем, что косинусы всех трех углов треугольника по условию положительны:

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\cos\beta}+\frac{1}{\cos\gamma}\geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}.$$

Но $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\leq\frac{1}{8}$ (см. опорное неравенство из задачи 1028). Тогда

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma}}\geq 3\sqrt[3]{8}=6.$$

Отсюда и следует исходное неравенство. Для достижения здесь знака равенства нужно, чтобы среднее арифметическое трех чисел было равно среднему геометрическому, а это возможно только тогда, когда все три косинуса равны, и, кроме того, опорное неравенство из задачи 1028 превращается в равенство. То и другое достигается лишь при $\alpha=\beta=\gamma=60°$. ▲

1031. Докажите, что если треугольник с углами α, β, γ является остроугольным, то

$$\frac{1}{\cos^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\beta}+\frac{1}{\cos^2\gamma}\geq 12.$$

1032. Докажите, что в непрямоугольном треугольнике с углами α, β, γ

$$\frac{1}{\cos^4\alpha}+\frac{1}{\cos^4\beta}+\frac{1}{\cos^4\gamma}\geq 48.$$

1033. Докажите, что если треугольник с углами α, β, γ является остроугольным, то

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\geq 3\sqrt{3}.$$

1034. Докажите, что если α, β, γ — углы остроугольного треугольника и $\alpha<\beta<\gamma$, то

$$\sin 2\alpha>\sin 2\beta>\sin 2\gamma.$$

1035. α, β, γ — углы остроугольного треугольника. Что больше: сумма $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ или сумма $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma$?

1036. Докажите, что треугольник с углами α, β, γ является остроугольным тогда и только тогда, когда для некоторых двух его углов α и β выполняется неравенство $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>1$.

△ 1) Сначала докажем, что если $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$, то треугольник является остроугольным.

Если $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$, то углы α и β — острые. Но почему же и угол γ острый?

Преобразуем неравенство:

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1, \quad \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} > 1, \quad \sin\alpha \sin\beta > \cos\alpha \cos\beta,$$

$$\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta < 0, \quad \cos(\alpha + \beta) < 0.$$

Тогда угол $\alpha + \beta$ — тупой, а следовательно, угол γ — острый.

2) Докажем обратное утверждение: если каждый из углов α, β и γ треугольника является острым, то $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1$ (для любых двух его углов из трех).

Так как угол γ — острый, то угол $\alpha + \beta$ — тупой. Дальше проделаем те же преобразования, но в обратном направлении:

$$\cos(\alpha + \beta) < 0, \quad \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta < 0,$$

$$\sin\alpha \sin\beta > \cos\alpha \cos\beta, \quad \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} > 1, \quad \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta > 1. \ ▲$$

1037. Докажите, что треугольник с углами α, β и γ является остроугольным тогда и только тогда, когда:

а) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma > 2$; б) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma < 1$.

1038*. Докажите, что для любого непрямоугольного треугольника с углами α, β, γ

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma \neq \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma.$$

△ Составим разность между левой и правой частями этого неравенства и ее преобразуем:

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma - \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} - \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)^2 - \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}(\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}((\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\beta + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) + (\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\gamma + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma) + (\operatorname{tg}^2\beta + \operatorname{tg}^2\gamma + 2\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma) =$$

$$= \frac{1}{2\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma}(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)^2 + (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma)^2 + (\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma)^2).$$

(Здесь по ходу дела применялось тождество

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma.$$

Его нужно или доказать самостоятельно, или использовать утверждение задачи 926 из § 25.)

Очевидно, последнее выражение не равно нулю. ▲

1039*. Докажите, что для любых углов α, β, γ треугольника и для любых положительных чисел x, y и z выполняется неравенство

$$x^2 + y^2 + z^2 \geq 2yz\cos\alpha + 2xz\cos\beta + 2xy\cos\gamma.$$

27.3*. 10—11

Рассмотрим разные задачи на доказательство условных тригонометрических неравенств.

1040. Докажите, что если углы α, β, γ — острые и $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, то

$$\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma < \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma.$$

△ Приведем неравенство к виду:

$$\operatorname{tg}\gamma\,(\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1) < \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1 \leq 0$. Тогда последнее неравенство очевидно.

2) Пусть $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1 > 0$. Тогда

$$\frac{\sin\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta} - 1 > 0, \quad \sin\alpha \sin\beta - \cos\alpha \cos\beta > 0, \quad \cos(\alpha + \beta) < 0.$$

Теперь получаем:

$$\operatorname{tg}\gamma < \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta - 1} = -\operatorname{tg}(\alpha + \beta),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) + \operatorname{tg}\gamma < 0, \quad \frac{\sin(\alpha + \beta + \gamma)}{\cos(\alpha + \beta)\cos\gamma} < 0.$$

Последнее неравенство, равносильное исходному, справедливо, так как

$$\sin(\alpha + \beta + \gamma) > 0, \quad \cos\gamma > 0, \quad \cos(\alpha + \beta) < 0. \ ▲$$

1041. Докажите, что если углы α, β, γ — острые и $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то

$$\frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\sin^2\beta} + \frac{1}{\sin^2\gamma} \geq 12.$$

1042. Докажите, что если углы α, β, γ — острые и $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$, то:

а) $\mathrm{tg}^2\alpha + \mathrm{tg}^2\beta + \mathrm{tg}^2\gamma \geq 1$; б) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma \geq \frac{3}{4}$.

1043. Докажите, что если $\alpha \in (0; \pi)$, $\beta \in (0; \pi)$, то

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta} \geq \frac{2}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

1044. Докажите, что если

$$\sin(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha,$$

где α и β — острые углы, то $\alpha < \beta$.

△ Преобразуем данное равенство:

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin\alpha = \sin\alpha, \quad 2\cos(\alpha + \frac{\beta}{2})\sin\frac{\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\cos(\alpha + \frac{\beta}{2})\sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Из последнего равенства следует, что

$$\cos(\alpha + \frac{\beta}{2}) > 0, \quad \alpha + \frac{\beta}{2} < \frac{\pi}{2}.$$

Предположим, что $\alpha \geq \beta$. Будем иметь:

$$\frac{\alpha}{2} \geq \frac{\beta}{2}, \quad \sin\frac{\alpha}{2} \geq \sin\frac{\beta}{2}.$$

Тогда из последнего равенства получаем:

$$\cos\frac{\alpha}{2} \leq \cos(\alpha + \frac{\beta}{2}).$$

Так как косинус на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ убывает, то

$$\frac{\alpha}{2} \geq \alpha + \frac{\beta}{2}, \quad \alpha \geq 2\alpha + \beta, \quad \alpha + \beta \leq 0.$$

Но последнее неравенство невозможно.
Остается принять, что $\alpha < \beta$. ▲

1045. Докажите, что если $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \frac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\alpha_1 < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n} < \operatorname{tg}\alpha_n.$$

ГЛАВА V. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

§ 28. Наибольшие и наименьшие значения выражений 9—11

Литература: [30^e], [38], [44], [56].

Эта тема тесно связана с доказательством неравенств (§§ 18—21 и § 26). Неудивительно, что в указанных параграфах задачи на наибольшие и наименьшие значения выражений уже встречались.

Здесь мы не будем рассматривать текстовые задачи на нахождение наибольших и наименьших значений функций с помощью производной. Такие задачи уместнее решать на уроках.

28.1. 9—11

Начнем с вводных задач.

1046. Найдите наименьшие значения функций:

а) $y = x + \frac{9}{x}$ $(x > 0)$; б) $y = x + \frac{1}{x-1}$ $(x > 1)$; в) $y = x^2 + \frac{16}{x}$ $(x > 0)$.

△ а) Применим неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел:

$$x + \frac{9}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{9}{x}} = 6.$$

Наименьшее значение суммы достигается, когда числа x и $\frac{9}{x}$ равны:

$$x = \frac{9}{x}, \quad x^2 = 9, \quad x = 3.$$

б) Здесь неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим пока что не помогает. Отнимем от функции и прибавим к ней 1:

$$y = (x-1) + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Теперь получаем:

$$y=1+(x-1)+\frac{1}{x-1}\geq 1+2\sqrt{(x-1)\frac{1}{x-1}}=1+2=3.$$

Равенство достигается, когда

$$x-1=\frac{1}{x-1},\quad (x-1)^2=1,\quad x-1=1,\quad x=2.$$

в) Проделаем с функцией следующие преобразования:

$$y=x^2+\frac{16}{x}=x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}.$$

Теперь можно применить неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел:

$$y=x^2+\frac{8}{x}+\frac{8}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{8}{x}\cdot\frac{8}{x}}=12.$$

Равенство достигается, когда

$$x^2=\frac{8}{x},\quad x^3=8,\quad x=2.$$

Ответ: а) 6 при $x=3$; б) 3 при $x=2$; в) 12 при $x=2$. ▲

Задачи 1046 а)–в) можно решать и с помощью производной — конечно, при условии, что читатель знаком с производной и с исследованием функций с помощью производной.

1047. Найдите наименьшие значения функций:

а) $y=\dfrac{x^2+6x+1}{x}$ $(x>0)$;

б) $y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2}$;

в) $y=x+\dfrac{4}{(x-2)^2}$ $(x>2)$.

1048. Найдите наименьшее значение выражения:

$$z=\frac{y^2-4xy+7x^2}{x^2}.$$

1049. Найдите наибольшие значения выражений:

а) $z=\dfrac{5x^2+6xy-y^2}{x^2}$;

б) $z=\dfrac{y^2}{y^2+4xy+5x^2}$ $(y\neq 0)$.

1050. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции:

$$y = \sin^2 x - 4\sin x + 1.$$

△ Дополним два первых члена этой суммы до квадрата разности:

$$y = (\sin^2 x - 4\sin x + 4) + 1 - 4 = (\sin x - 2)^2 - 3.$$

Отсюда видно, что наибольшее значение функцией y достигается при $\sin x = -1$ (например, при $x = -\frac{\pi}{2}$) и равно $3^2 - 3 = 6$, а наименьшее — при $\sin x = 1$ (например, при $x = \frac{\pi}{2}$) и равно $1 - 3 = -2$.

Ответ: наибольшее значение равно 6, например, при $x = -\frac{\pi}{2}$; наименьшее равно -2, например, при $x = \frac{\pi}{2}$. ▲

1051. Найдите наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $y = \sin x + \cos^2 x$; б) $y = \sin^4 x + 2\cos^4 x$.

1052. Найдите наибольшее и наименьшее значения отношения двузначного числа к сумме его цифр.

△ Преобразуем это отношение, выделяя у дроби целую часть:

$$\frac{\overline{xy}}{x+y} = \frac{10x+y}{x+y} = \frac{(x+y)+9x}{x+y} = 1 + \frac{9x}{x+y} = 1 + \frac{9}{1+y/x}.$$

(Здесь в ходе решения числитель и знаменатель дроби $\frac{9x}{x+y}$ делились почленно на x.)

Отсюда видно, что исходное отношение будет наибольшим, когда дробь $\frac{y}{x}$ наименьшая, т. е. при $y = 0$ и любом $x \neq 0$, и наименьшим, когда эта дробь наибольшая, т. е. при $y = 9$, $x = 1$.

Ответ: 10 для числа $\overline{x0}$ (x — любая цифра, кроме нуля); 1,9 для числа 19. ▲

1053. Найдите наибольшее значение отношения трехзначного числа к сумме его цифр.

△ Преобразуем отношение, выделяя у дроби целую часть и оценивая получающееся выражение сверху:

$$\frac{\overline{xyz}}{x+y+z} = \frac{100x+10y+z}{x+y+z} = \frac{(x+y+z)+(99x+9y)}{x+y+z} =$$

$$=1+\frac{99x+9y}{x+y+z}\le 1+\frac{99x+9y}{x+y}=1+\frac{(9x+9y)+90x}{x+y}=$$

$$=1+9+\frac{90x}{x+y}=10+\frac{90x}{1+y/x}\le 10+\frac{90}{1+0}=100.$$

Отсюда видно, что исходное отношение достигает значения, равного 100, при $z = 0$, $y = 0$.

Ответ: 100 для числа $\overline{x00}$ (x — любая цифра, кроме нуля). ▲

1054. Найдите наибольшее значение отношения четырехзначного числа к сумме его цифр.

1055. Найдите наименьшее значение отношения
а) трехзначного; б)* четырехзначного числа к сумме его цифр.

28.2. 9—11

Рассмотрим задачи на наименьшее значение суммы.

1056. Найдите наименьшее значение суммы:

$$S = x + y + \frac{8}{xy} \ (x > 0,\ y > 0).$$

△ Используем неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел:

$$S = x + y + \frac{8}{xy} \ge 3\sqrt[3]{xy\frac{8}{xy}} = 3 \cdot 2 = 6.$$

Наименьшего значения, равного 6, сумма S достигает тогда, когда среднее арифметическое равно среднему геометрическому, т. е. когда все три числа равны между собой:

$$x = y = \frac{8}{xy}.$$

Решая эту систему уравнений, получаем: $x = y = 2$.
Ответ: 6 при $x = y = 2$. ▲

Похожие задачи нам уже встречались в п. 28.2 (см., например, задачи 1046 а) и 1046 в)). Читатель, вероятно, догадывается, что за утверждениями этих задач стоит некоторое общее предложение.

Теорема 1. **Если произведение n положительных чисел постоянно:**

$$x_1 x_2 \ldots x_n = P,$$

то их сумма

$$S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

будет наименьшей при равенстве этих чисел.

Для доказательства теоремы применим неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел:

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n},$$

$$\frac{S}{n} \geq \sqrt[n]{P}, \quad S \geq n\sqrt[n]{P}.$$

Правая часть последнего неравенства — постоянная, левая — переменная. Поэтому наименьшее значение S равно правой части $n\sqrt[n]{P}$ неравенства. Достигается оно только тогда, когда неравенство Коши превращается в равенство, т. е. при $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

1057. Найдите наименьшие значения сумм:

а) $S = x + \frac{1}{y} + \frac{27y}{x}$ $(x > 0,\ y > 0)$; б) $S = x + y + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2}$ $(x > 1,\ y > 2)$.

△ а) Произведение всех трех слагаемых суммы S постоянно:

$$x \cdot \frac{1}{y} \cdot \frac{27y}{x} = 27.$$

Тогда на основании теоремы 1 сумма S будет наименьшей, когда эти слагаемые равны между собой:

$$x = \frac{1}{y} = \frac{27y}{x}.$$

Решая эту систему уравнений, получаем: $x = 3$, $y = \frac{1}{3}$. Осталось найти наименьшее значение суммы S:

$$S_{\min} = 3 + 3 + \frac{9}{3} = 9.$$

б) Преобразуем сумму, выделяя такие слагаемые, чтобы их произведение было постоянным:

$$S = x + y + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2} = (x-1) + (y-2) + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-2} + 3.$$

Произведение слагаемых последней суммы (за исключением слагаемого, равного 3, на которое лучше не обращать внимания) постоянно. Тогда сумма S будет наименьшей, когда эти слагаемые равны:

$$x-1=\frac{1}{x-1}=y-2=\frac{1}{y-2}.$$

Решим эту систему трех уравнений с двумя неизвестными: $x = 2$, $y = 3$. Отсюда

$$S_{\min} = 2 + 3 + 1 + 1 = 7.$$

Ответ: а) 9 при $x = 3$, $y = 1/3$; б) 7 при $x = 2$, $y = 3$. ▲

1058. Найдите наименьшие значения сумм:

а) $S=\frac{1}{2x}+2y+\frac{8x}{y}$ $(x > 0,\ y > 0)$; б) $S=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+z+\frac{16}{x}$ $(x>0, y>0, z>0)$;

в) $S=x^2y+\frac{1}{y}+\frac{8}{x}$ $(x > 0,\ y > 0)$; г) $S=x+\frac{y}{(x-1)^2}+\frac{z}{y}+\frac{4}{z}$ $(x>1, y>0, z>0)$.

1059. Прямоугольный участок земли площадью S м^2 нужно огородить забором. При каких размерах участка длина забора будет наименьшей?

1060. Прямоугольный участок земли площадью 200 м^2 нужно огородить забором, используя в качестве одной из сторон стену склада. При каких размерах участка длина забора будет наименьшей?

1061. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 27 дм^3. При каких размерах параллелепипеда площадь его полной поверхности будет наименьшей?

△ Обозначим стороны основания параллелепипеда через x дм и y дм, высоту — через h дм. Тогда $xyh = 27$.

Площадь S полной поверхности параллелепипеда равна:

$$S = 2xy + 2xh + 2yh.$$

Верно ли, что произведение слагаемых этой суммы постоянно? Верно:

$$2xy \cdot 2xh \cdot 2yh = 8x^2y^2z^2 = 8 \cdot 27^2.$$

Тогда сумма S будет наименьшей при условиях:

$$2xy = 2xh = 2yh.$$

Отсюда $x = y = h$. Так как $xyh = 27$, то $x^3 = 27$. Следовательно, $x = y = h = 3$.

Ответ: когда каждое из измерений параллелепипеда равно 3 дм, т. е. когда параллелепипед является кубом. ▲

1062. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 64 дм^3. Найдите наименьшее значение длины его диагонали.

28.3. 9—11

Займемся задачами на наибольшее значение произведения.

1063. Найдите наибольшее значение произведения:

$$P = (x + y + 1)(5 - x)(6 - y) \ (0 < x < 5,\ 0 < y < 6).$$

△ На основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел получаем:

$$\frac{(x+y+1)+(5-x)+(6-y)}{3} \geq \sqrt[3]{(x+y+1)(5-x)(6-y)},$$

$$4 \geq \sqrt[3]{P}, \quad \sqrt[3]{P} \leq 4, \quad P \leq 64.$$

Следовательно, наибольшее значение произведения P равно 64.

Найдем значения x и y, при которых $P = 64$. Для этого решим систему уравнений:

$$x + y + 1 = 5 - x = 6 - y.$$

Отсюда $x = 1$, $y = 2$.

Ответ: 64 при $x = 1$, $y = 2$. ▲

Вообще, справедливо следующее предложение.

Теорема 2. **Если сумма n положительных чисел постоянна:**

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = S,$$

то их произведение

$$P = x_1 x_2 \dots x_n$$

будет наибольшим при равенстве этих чисел.

Для доказательства применим неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим n чисел. При этом можно использовать неравенство $\frac{S}{n} \geq \sqrt[n]{P}$, полученное при доказательстве теоремы 1. Выразим из него P:

$$\sqrt[n]{P} \leq \frac{S}{n}, \quad P \leq \left(\frac{S}{n}\right)^n.$$

В последнем неравенстве правая часть — постоянная, левая — переменная. Следовательно, наибольшее значение произведения P равно $\left(\frac{S}{n}\right)^n$. Достигается оно только тогда, когда неравенство Коши превращается в равенство, т. е. при равенстве всех чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ между собой.

1064. Найдите наибольшие значения произведений:

а) $P = x(6 - x)$ $(0 < x < 6)$;

б) $P = (2x + 3y)(6 - x)(2 - y)$ $(0 \le x < 6,\ 0 \le y < 2)$.

△ а) Так как сумма множителей постоянна: $x + (6 - x) = 6$, то произведение P на основании теоремы 2 будет наибольшим при равенстве этих множителей:

$$x = 6 - x \Rightarrow x = 3.$$

Тогда наибольшее значение произведения

$$P_{\max} = 3 \cdot 3 = 9.$$

Задачу можно решить и по-другому. Функция P является квадратным трехчленом:

$$P = -x^2 + 6x.$$

Тогда на соответствующей параболе имеется самая высокая точка. Абсцисса вершины параболы $y = ax^2 + bx + c$ находится по формуле $x = -\frac{b}{2a}$, в данном случае $x = \frac{6}{2} = 3$.

Последний результат полезен в следующем отношении: получилось, что для функции $P = -x^2 + 6x$ ее значение $P = 9$ является наибольшим не только на интервале (0; 6), но и на множестве всех действительных чисел.

б) Сумма множителей произведения P непостоянна:

$$(2x + 3y) + (6 - x) + (2 - y) = x + 2y + 8.$$

Как сделать ее постоянной? Для этого нужно, чтобы второй множитель имел вычитаемым не x, а $2x$, а третий — не y, а $3y$. Указанной цели можно достичь таким путем:

$$P = \frac{1}{6}(2x + 3y)(12 - 2x)(6 - 3y).$$

Теперь сумма трех переменных множителей постоянна:

$$(2x + 3y) + (12 - 2x) + (6 - 3y) = 18.$$

Тогда произведение P будет наибольшим при равенстве этих множителей:

$$2x + 3y = 12 - 2x = 6 - 3y.$$

Решим полученную систему уравнений: $x = 3$, $y = 0$. Отсюда

$$P_{\max} = \frac{1}{6} \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 36.$$

Ответ: а) 9 при $x = 3$; б) 36 при $x = 3$, $y = 0$. ▲

1065. Найдите наибольшие значения произведений:

а) $P = x(15 - 2x)$ $(0 < x < 7{,}5)$;

б) $P = (y - x)(3x - 3y + 1)$ $(0 < y - x < \frac{1}{3})$;

в) $P = (3x - 4y)(1 - x)(1 + y)$ $(x < 1,\ -1 < y < \frac{3}{4}x)$;

г) $P = (x + y)(1 - x)^2(2 - y)$ $(x < 1,\ -x < y < 2)$.

1066. В круг радиуса R вписан прямоугольник. При каких сторонах прямоугольника он имеет наибольшую площадь?

1067. В полукруг радиуса R вписан прямоугольник. Какими должны быть его стороны для того, чтобы он имел наибольшую площадь?

1068. Прямоугольный параллелепипед имеет диагональ l. При каких измерениях параллелепипеда его объем будет наибольшим?

28.4. 9—11

Рассмотрим задачи, при решении которых применяется векторное неравенство Коши — Буняковского.

С векторным неравенством Коши — Буняковского мы встречались уже дважды — при решении уравнений и систем уравнений (§ 13, п. 13.2) и при доказательстве неравенств (§ 20, п. 20.1).

Все задачи данного пункта — на наибольшие значения сумм.

1069. Найдите наибольшее значение функции:

$$y = \sqrt{x+28} + \sqrt{22-x}.$$

△ Областью определения функции является отрезок $[-28;\ 22]$.

В векторном неравенстве Коши — Буняковского

$$\bar{u} \cdot \bar{v} \le |\bar{u}| \cdot |\bar{v}|$$

введем векторы $\bar{u}(\sqrt{x+28}; \sqrt{22-x})$ и $\bar{v}$ $(1;\ 1)$. Получаем:

$$\bar{u} \cdot \bar{v} = \sqrt{x+28} + \sqrt{22-x} \le |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| = \sqrt{(x+28)+(22-x)} \cdot \sqrt{1+1} = \sqrt{50 \cdot 2} = 10.$$

Видимо, наибольшее значение функции y есть 10. Достигается оно тогда, когда неравенство превращается в равенство, т. е. когда координаты векторов $\bar{u}$ и $\bar{v}$ пропорциональны:

$$\sqrt{x+28}=\sqrt{22-x} \Rightarrow x+28=22-x \Rightarrow x=-3.$$

Существенно, что значение $x = -3$ входит в область определения функции.
Ответ: 10 при $x = -3$. ▲

1070. Найдите наибольшие значения функций:

а) $y=\sqrt{x-8}+\sqrt{16-x}$; б) $y=\sqrt{x}+2\sqrt{4-x}$;

в) $y=\sqrt{\sin^2 x+1}+\sqrt{\cos^2 x+1}$.

1071. Найдите наибольшие значения выражений:

а) $z=\sqrt{x-y}+\sqrt{x+2y-18}+\sqrt{36-2x-y}$;

б) $t=\sqrt{x+2y}+\sqrt{2x+y}+\sqrt{7-x-y}$.

1072. Найдите наибольшее значение выражения

$$y=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+3}+\sqrt{2c+5}$$

при условии $a + b + c = 36$.

1073. Найдите наибольшее значение выражения

$$y=\sqrt{a+2}+\sqrt{b+4}+\sqrt{c+6}$$

при условии $a + b + c = 15$.

28.5. 9—11

Здесь мы познакомимся с задачами на нахождение наибольших и наименьших членов последовательностей.

1074. Найдите наибольший член последовательности:

$$x_n=\frac{n^2+2n+4}{n^2}.$$

△ Представим общий член последовательности в таком виде:

$$x_n=1+\frac{2}{n}+\frac{4}{n^2}.$$

Ясно, что x_n с ростом n убывает. Значит, наибольший член последовательности находится в ее начале: $x_1 = 7$.
Ответ: $x_1 = 7$. ▲

1075. Найдите наименьшие члены последовательностей:

а) $x_n = \dfrac{n^2}{n^2+6}$; б) $x_n = \dfrac{n^2+3n+9}{n}$; в) $x_n = \dfrac{n^2+4n+19}{n}$.

1076. Найдите наибольший член последовательности:

$$x_n = \frac{2^n+3^n}{n!}.$$

△ Исследуем общий член x_n последовательности на возрастание и убывание. Для этого составим разность $x_{n+1} - x_n$ и выясним ее знак:

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{2^n+3^n}{n!} =$$

$$= \frac{2^{n+1}+3n+1-2^n(n+1)-3^n(n+1)}{(n+1)!} = \frac{2^n(1-n)+3^n(2-n)}{(n+1)!}.$$

Отсюда видно, что при $n \geq 2$ разность $x_{n+1} - x_n$ отрицательна, т. е. x_n убывает. Тогда наибольшим членом последовательности является x_1 или x_2. Для того, чтобы выяснить, что больше — x_1 или x_2, подставим в выражение для разности $x_{n+1} - x_n$ значение $n = 1$:

$$x_2 - x_1 = \frac{3}{2} > 0, \quad x_2 > x_1.$$

Следовательно, наибольшим членом последовательности является x_2.
Ответ: $x_2 = 6{,}5$. ▲

1077. Найдите наименьший член последовательности:

$$x_n = \frac{n!}{3^n+5^n}.$$

1078. Найдите наименьший член последовательности:

$$a_n = 9n^4 - 118n^3 + 399n^2.$$

△ Составим функцию

$$y = 9x^4 - 118x^3 + 399x^2$$

и исследуем ее на возрастание и убывание с помощью производной на промежутке $[1; +\infty)$. Будем иметь:

$y' = 36x^3 - 354x^2 + 798x$; $36x^3 - 354x^2 + 798x = 0$,

$6x^2 - 59x + 133 = 0$; $x_1 = 6\frac{1}{3}$, $x_2 = 3\frac{1}{2}$.

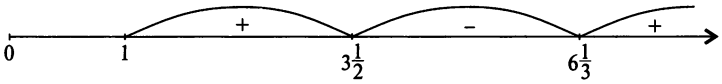

Рис. 10

На *рис.* 10 расставлены знаки производной на соответствующих интервалах. По признаку возрастания и убывания функция в точке $x = 6\frac{1}{3}$ переходит от убывания к возрастанию. Этот результат справедлив и для последовательности (a_n) — с поправкой на то, что переменная n принимает только натуральные значения. Значит, наименьшим членом последовательности является или a_6, или a_7, или a_1 (в последнем случае — учитывая, что функция y на промежутке $\left[1; 3\frac{1}{2}\right)$ возрастает).

Вычислим эти члены и сравним их между собой:

$$a_6 = 540, \quad a_7 = 686, \quad a_1 = 290.$$

Ответ: $a_1 = 290$. ▲

1079. Найдите наибольший член последовательности:

$$a_n = -11n^3 + 256n^2 - 92n.$$

1080. Найдите наименьший член последовательности:

$$a_n = n + \frac{2000}{n^2}.$$

28.6*. 10—11

Рассмотрим разные задачи на наибольшие и наименьшие значения.

1081. Из числа

12345678910111213...50

(выписываются последовательные натуральные числа от 1 до 50) вычеркните 80 цифр так, чтобы оставшееся число было наименьшим из всех возможных.

△ Данное число содержит $9 \cdot 1 + 41 \cdot 2 = 91$ цифру, а после вычеркивания 80 цифр останется 11 цифр. Для того чтобы оставшееся число было наименьшим из всех возможных, нужно в начале данного числа оставить как можно больше цифр, равных нулю.

Вычеркнем в начале исходного числа первые 10 цифр 1234567891; затем — такие 19 цифр: 111213...192; потом — такие 19 цифр: 212223...293; потом — следующие 19 цифр: 313233...394.

Всего вычеркнуто $10 + 19 \cdot 3 = 67$ цифр. Осталось 24-значное «число» (считая и нули в начале)

$$000041424344454647484950.$$

Из него нужно вычеркнуть еще $80 - 67 = 13$ цифр. Вычеркнем все цифры 5, 6, 7, 8 и 9 (6 цифр), а затем — первые 7 четверок. Получилось:

$$00001234440.$$

Ответ: остающееся число — 1234440. ▲

1082. Из числа

$$12345678910111213...60$$

(выписываются последовательные натуральные числа от 1 до 60) вычеркните 100 цифр так, чтобы оставшееся число было наибольшим из всех возможных.

1083. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения:

$$z = \frac{3y^2 - 4xy}{x^2 + y^2}.$$

1084. Найдите наименьшее значение выражения:

$$y = |11^k - 5^n| \quad (k \in N,\ n \in N).$$

△ Так как число 11^k оканчивается цифрой 1, а число 5^n — цифрой 5, то число y оканчивается цифрой 6 или 4; второе происходит тогда, когда

$$|11^k - 5^n| = 5^n - 11^k.$$

Может ли y принимать значение, равное 4? Если да, то оно и является наименьшим значением y.

Последний вопрос сводится к следующему: имеет ли уравнение

$$5^n - 11^k = 4$$

решение в натуральных числах? Оказывается, имеет — например, $n = 3$, $k = 2$.

Ответ: 4, например, при $k = 2$, $n = 3$. ▲

1085. Найдите наименьшее значение выражения:

$$y = |36^k - 5^n| \quad (k \in N,\ n \in N).$$

1086. Найдите наименьшее положительное значение выражения:

$$y = \frac{1}{2} - \frac{1}{k} - \frac{1}{n} \quad (k \in N,\ n \in N).$$

△ Очевидно, $k \geq 3$, $n \geq 3$, иначе y будет отрицательным.
Пусть $k \leq n$. Тогда

$$\frac{1}{k}+\frac{1}{n} \leq \frac{1}{k}+\frac{1}{k}=\frac{2}{k}.$$

Следовательно,

$$y=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n}\right) \geq \frac{1}{2}-\frac{2}{k}=\frac{k-4}{2k}.$$

Далее, дробь $\frac{k-4}{2k}$ неположительна, так как если y принимает при некоторых k и n наименьшее положительное значение, то при уменьшении y может получиться только неположительное число. Решим соответствующее неравенство:

$$\frac{k-4}{2k} \leq 0, \quad k \leq 4.$$

Так как, по предыдущему, $k \geq 3$, то $3 \leq k \leq 4$. Отсюда $k = 3$ или $k = 4$. Рассмотрим оба случая.

1) Пусть $k = 3$. Тогда

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{n}=\frac{1}{6}-\frac{1}{n}.$$

Число n должно быть большим 6 и максимально близким к 6, поэтому $n = 7$. Следовательно,

$$y=\frac{1}{6}-\frac{1}{7}=\frac{1}{42}.$$

2) Пусть $k = 4$. Будем иметь:

$$y=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{n}=\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{20}.$$

Так как $\frac{1}{42}<\frac{1}{20}$, то наименьшим положительным значением y является $\frac{1}{42}$.

Ответ: 1/42 при $k = 3$, $n = 7$. ▲

1087. Найдите наименьшие положительные значения выражений:

а) $y=\frac{1}{3}-\frac{1}{k}-\frac{1}{n}$ $(k \in N, n \in N)$;

б) $y=\frac{1}{2}-\frac{1}{k}-\frac{1}{m}-\frac{1}{n}$ $(k \in N, m \in N, n \in N)$.

1088. Найдите наименьшее значение функции:

$$y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \cdots + |x - 10|.$$

△ На каждом из промежутков

$$(-\infty;\ 1],\quad (1;\ 2],\quad (2;\ 3],\quad \ldots,\quad (10;\ +\infty)$$

функция является линейной. Следовательно, наименьшее значение достигается ею на одном из концов промежутков, т. е. в одной из точек 1, 2, 3,..., 10.

Теперь можно вычислить значения функции в каждой из указанных точек и сравнить их между собой, но это долгий путь. Будем считать x любым натуральным числом от 1 до 10 и попробуем раскрывать модули.

Очевидно, $|x - 1| = x - 1$. Если $x \geq 2$, то $|x - 2| = x - 2$. Если $x \geq 3$, то $|x - 3| = x - 3$. И т. д.

Теперь подойдем к данной сумме с другого конца. Очевидно, $|x - 10| = 10 - x$. Если $x \leq 9$, то $|x - 9| = 9 - x$. Если $x \leq 8$, то $|x - 8| = 8 - x$. И т. д.

Получаем:

$$y = ((x - 1) + (x - 2) + \cdots + 3 + 2 + 1 + 0) + (1 + 2 + \cdots + (9 - x) + (10 - x)) =$$

$$= \frac{1+(x-1)}{2}(x - 1) + \frac{1+(10-x)}{2}(10 - x) = \frac{1}{2}(x(x - 1) + (11 - x)(10 - x)) =$$

$$= \frac{1}{2}(x^2 - x + x^2 - 21x + 110) = \frac{1}{2}(2x^2 - 22x + 110) = x^2 - 11x + 55.$$

Квадратный трехчлен $y = x^2 - 11x + 55$ принимает наименьшее значение при $x = \frac{11}{2}$, но это значение x не является целым. Учтем, что функция y убывает на промежутке $\left(-\infty;\ \frac{11}{2}\right]$ и возрастает на промежутке $\left[\frac{11}{2};\ +\infty\right)$. Тогда она достигает наименьшего значения в точке $x = 5$ или в точке $x = 6$.

Так как парабола $y = x^2 - 11x + 55$ симметрична относительно прямой $x = 5\frac{1}{2}$, то значения функции в этих двух точках равны. Вычислим их:

$$y(5) = y(6) = 25.$$

Ответ: 25 при $x = 5$ или $x = 6$. ▲

1089. Найдите наименьшее значение функции:

$$y = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + \cdots + |x - 2001|.$$

1090. Найдите наименьшее значение функции:

$$z=\sqrt{x^2+(y-5)^2}+\sqrt{y^2+(x-12)^2}.$$

△ Каждый из радикалов, входящих в z, напоминает формулу расстояния между двумя точками координатной плоскости.

Первый из этих радикалов будем рассматривать как расстояние между точками $A(0;\ 5)$ и $M(x;\ y)$, а второй — как расстояние между точками $B(12;\ 0)$ и $M(x;\ y)$ (*рис.* 11). Тогда

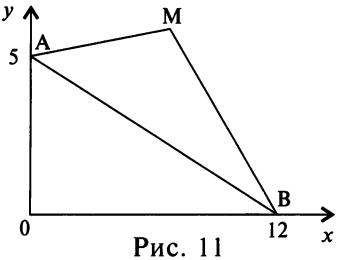

Рис. 11

$$z = AM + MB.$$

Но на основании неравенства треугольника

$$z = AM + MB \geq AB = 13.$$

По-видимому, наименьшее значение z равно 13. Когда оно достигается?

Когда точка M принадлежит отрезку AB. Уравнение прямой AB — $y = 5 - \frac{5}{12}x$. (Подумайте, как его вывести.) Здесь x может принимать только значения от 0 до 12.

Ответ: 13 при $y = 5 - \frac{5}{12}x$, где $x \in [0;\ 12]$. ▲

А ведь неожиданное, оригинальное и красивое решение. Не правда ли?

1091. Найдите наибольшее значение выражения:

$$z=\sqrt{x^2+(y-4)^2}-\sqrt{y^2+(x-3)^2}.$$

1092. Сумма неотрицательных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ равна 1. Найдите наибольшее значение суммы:

$$S = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + \cdots + x_9x_{10}.$$

△ Справедливо неравенство

$$S \leq (x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9)(x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10}).$$

В самом деле, если у произведения в правой части неравенства раскрыть скобки, то разложение, кроме слагаемых суммы S, будет содержать и другие неотрицательные слагаемые, например, x_1x_4.

Положим

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 + x_9 = A, \quad x_2 + x_4 + x_6 + x_8 + x_{10} = B.$$

Тогда

$$S \le AB \le \left(\frac{A+B}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Докажите самостоятельно, что значение, равное $\frac{1}{4}$, суммой S достигается.

Ответ: 1/4, например, при $x_1 = x_2 = 1/2$, $x_3 = x_4 = \dots = x_{10} = 0$. ▲

1093. Каждое из чисел $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ может принимать только значения 0, 1 или -1. Найдите наименьшее значение суммы всевозможных попарных произведений этих чисел.

1094. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения

$$z = x^2 + 3xy + y^2$$

при условии $1 \le x^2 + y^2 \le 4$.

§ 29. Иррациональные числа 9—11

Литература: [15], [18^e], [27], [45].

Основной вопрос, который рассматривается здесь, — **рационально или иррационально данное действительное число**.

Любое рациональное число можно представить в виде дроби $\frac{k}{n}$ ($n \in N$, $k \in Z$). Кроме того, любое рациональное число можно представить бесконечной десятичной периодической дробью. Например:

$$\frac{1}{15} = 0{,}06666... = 0{,}0(6); \quad \frac{1}{4} = 0{,}25 = 0{,}250000... = 0{,}25(0).$$

При этом допускаются периодические дроби с нулем в периоде, но исключаются периодические дроби с девяткой в периоде. Такое соглашение связано с необходимостью для каждого действительного числа иметь единственное представление его бесконечной десятичной дробью. Можно доказать, что бесконечная десятичная периодическая дробь с девяткой в периоде равна бесконечной десятичной периодической дроби с нулем в периоде, которая получается из первой дроби с помощью отбрасывания всех девяток, стоящих в периоде, и увеличения последней цифры, не равной 9, на 1. Например:

$$0{,}9999... = 1 = 1{,}0000...; \quad 0{,}479999... = 0{,}48 = 0{,}480000....$$

Любое иррациональное число можно представить бесконечной десятичной непериодической дробью.

Множество рациональных чисел, как известно, обозначается буквой Q. Множество иррациональных чисел будем обозначать буквой J.

Очевидно, пересечение этих множеств пусто (т. е. множества Q и J не имеют общих элементов), а объединение равно множеству R всех действительных чисел:

$$Q \cap J = \varnothing, \quad Q \cup J = R.$$

1095°. Докажите, что **сумма и разность рационального и иррационального чисел являются числами иррациональными.**

Докажем это предложение для случая суммы.

△ Применим доказательство от противного. (Доказательство от противного является характерной особенностью многих задач данной темы.)

Пусть число a рационально, число b иррационально: $a \in Q$, $b \in J$.

Предположим, что сумма $a + b$ рациональна:

$$a + b = c \in Q.$$

Выразим из этого равенства b: $b = c - a$. Получилось, что иррациональное число b равно рациональному числу $c - a$. Мы пришли к противоречию.

Остается принять, что сумма $a + b$ есть число иррациональное. ▲

Аналогичное предложение справедливо для произведения и частного рационального и иррационального чисел. Есть лишь одно исключение: для любого иррационального числа a

$$0 \cdot a = 0, \quad \frac{0}{a} = 0.$$

а следовательно, являются числами рациональными.

1096. Докажите, что корни уравнения $x^2 - 6x + 7 = 0$ иррациональны.

△ По формуле корней квадратного уравнения получаем:

$$x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{2}.$$

Осталось применить утверждение задачи 1095, учитывая, что $3 \in Q$, $\sqrt{2} \in J$. ▲

1097°. Докажите, что сумма двух иррациональных чисел может быть числом рациональным.

△ Очевидно, достаточно составить соответствующий пример.

Вернемся к иррациональным корням x_1 и x_2 квадратного уравнения $x^2 - 6x + 7 = 0$ из задачи 1096. По теореме Виета (или с помощью непосредственного сложения и умножения выражений для x_1 и x_2) получаем:

$$x_1 + x_2 = 6, \quad x_1x_2 = 7.$$

Следовательно, не только сумма, но и произведение двух иррациональных чисел могут быть числами рациональными. ▲

Нетрудно составить и примеры таких иррациональных чисел, разность или частное которых являются числами рациональными.

1098. Зная, что число π иррационально, докажите, что число $\frac{\pi}{2} + \pi k$ при любом целом k также иррационально.

1099. Докажите, что число: а) противоположное; б) обратное иррациональному — также иррационально.

1100°. Докажите, что корень любой степени из положительного иррационального числа есть число иррациональное.

1101. Рациональны или иррациональны числа:

а) $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}}$ (n радикалов, $n > 1$)?

1102. Числа $a + b$ и $a - b$ рациональны. Могут ли числа a и b быть иррациональными?

△ Положим

$$a + b = c, \quad a - b = d,$$

где числа c и d по условию рациональны. Будем эти равенства рассматривать как систему уравнений с неизвестными a и b (при известных c и d). Найдем из нее a и b:

$$a = \frac{c+d}{2}, \quad b = \frac{c-d}{2}.$$

Так как числа $\frac{c+d}{2}$ и $\frac{c-d}{2}$ рациональны, то и числа a и b рациональны.

Ответ: не могут. ▲

1103. Могут ли быть иррациональными различные числа a и b, если рациональны числа:

а) $a - b$ и ab;

б) $a + b \neq 0$ и a/b;

в) ab и a/b;

г) $a + b \neq 0$, a^2 и b^2?

1104. Числа $\frac{a+1}{a^2+2}$ и $\frac{a^2+3}{a^2+4}$ рациональны. Может ли число a быть иррациональным?

1105. Существуют ли положительные рациональные числа a и b такие, что

а) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt[4]{2}$?

1106*. Докажите, что любое рациональное число, не равное нулю, является периодом так называемой функции Дирихле $D(x)$ — такой, что

$$D(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \in Q,\\ 0, \text{ если } x \in J.\end{cases}$$

Является ли какое-нибудь иррациональное число периодом этой функции?

1107°. Докажите, что если $\sqrt[n]{a}$, где a и n — натуральные числа, $n \neq 1$, не равен никакому натуральному числу, то $\sqrt[n]{a}$ есть число иррациональное.

△ Предположим противное: $\sqrt[n]{a}$ при некоторых n и a является числом рациональным. Тогда по условию этот корень может быть только дробным числом:

$$\sqrt[n]{a}=\frac{b}{c},$$

где b и с — числа натуральные, $c \neq 1$, а дробь $\frac{b}{c}$ несократима. Отсюда

$$a = \frac{b^n}{c^n}.$$

Обозначим через p какой-либо простой делитель числа c. Будем считать известным следующее предложение: если произведение натуральных чисел делится на простое число, то по меньшей мере один из множителей делится на это простое число.

Получаем: b^n делится на c^n (так как частное $\frac{b^n}{c^n}$ равно натуральному числу a), c^n делится на c, c делится на p, следовательно, $b^n = b \cdot b \cdot \dots \cdot b$ делится на p:

$$b^n \vdots c^n, \quad c^n \vdots c, \quad c \vdots p \Rightarrow b^n \vdots p.$$

На основании сформулированного выше предложения число b делится на p.

Оказалось, что числа b и c оба делятся на p. Но это противоречит тому, что дробь $\frac{b}{c}$ несократима.

Остается принять, что $\sqrt[n]{a}$ есть число иррациональное. ▲

В школьном учебнике алгебры 8 класса [3] доказывается, да и то мелким шрифтом, иррациональность единственного числа $-\sqrt{2}$. С помощью утверждения задачи 1107 можно доказать иррациональность большого класса действительных чисел.

1108. Докажите, что число $\sqrt{3}$ иррационально.

△ Справедливо неравенство: $1 < \sqrt{3} < 2$, так как $1 < 3 < 4$. Получилось, что $\sqrt{3}$ заключен между двумя ближайшими друг к другу натуральными числами 1 и 2, а следовательно, не равен никакому натуральному числу. Тогда на основании утверждения задачи 1107 $\sqrt{3}$ есть число иррациональное. ▲

1109. Докажите иррациональность следующих чисел:

а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt[3]{6}$; г) $\sqrt[5]{3}$.

1110. Докажите, что число $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ иррационально.

△ Допустим, что это число рационально:

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = a \in Q.$$

Приведем это равенство к виду $\sqrt{3} = a - \sqrt{2}$ и возведем новое равенство в квадрат:

$$3 = a + 2 - 2a\sqrt{2}.$$

Выразим отсюда $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{2} = \frac{a-1}{2a}.$$

Получилось противоречивое равенство: иррациональное число равно рациональному. Впрочем, противоречие можно было обнаружить и раньше: уже равенство $3 = (a + 2) - 2a\sqrt{2}$ невозможно, так как число $a + 2$ рационально, число $2a\sqrt{2}$ — иррационально, а следовательно, разность $(a + 2) - 2a\sqrt{2}$ есть число иррациональное (см. утверждение задачи 1095). ▲

1111. Докажите иррациональность чисел:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$; б) $\sqrt{3} + \sqrt{5} + \sqrt{7}$; в) $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}$;

г) $\sqrt{2} + \sqrt[4]{2}$; д) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}$.

1112. Рационально или иррационально число

$$x = \sqrt{9+4\sqrt{2}} - \sqrt{9-4\sqrt{2}}?$$

△ Здесь уменьшаемое и вычитаемое являются числами иррациональными (подумайте, почему), но отсюда еще не следует, что сама разность есть число иррациональное. Можно применить формулу сложного квадратного радикала (см. § 3, задачу 116), но проще возвести это равенство в квадрат:

$x^2 = (9 + 4\sqrt{2}) + (9 + 4\sqrt{2}) - 2\sqrt{81-32}$,

$x^2 = 18 - 14 = 4, \quad x = 2.$

Ответ: рационально. ▲

1113. Рациональны или иррациональны числа:

а) $\sqrt{6+\sqrt{11}} - \sqrt{6-\sqrt{11}}$; б) $\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}$;

в) $\sqrt{11+2\sqrt{10}} - \sqrt{11-2\sqrt{10}}$; г) $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} + \sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$;

д) $\sqrt[3]{3+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{3-\sqrt{5}}$?

1114*. Докажите, что действительное число

$$a = 0{,}12345678910111213...$$

(после запятой выписываются в последовательном порядке все натуральные числа) иррационально.

△ Допустим, что число a рационально. Тогда данная бесконечная десятичная дробь является периодической.

Обозначим количество цифр в периоде этой дроби через n. А теперь заметим, что в записи дроби можно найти любое число нулей (или единиц, или двоек, и т. д.) подряд — это участки, соответствующие натуральным числам вида $\overline{b000...0}$. Если число нулей k выбрать так, чтобы $k \geq 2n$, то такой участок целиком содержит в себе период дроби, а следовательно, период состоит из одних нулей. Однако это невозможно, поскольку в записи дроби как угодно далеко от запятой встречаются и цифры, отличные от нуля. ▲

1115*. Докажите, что действительное число

$$a = 0{,}15155155515555...$$

(количество пятерок последовательно увеличивается на 1) иррационально.

1116. Докажите, что $\cos\frac{\pi}{2^n}$ при любом натуральном $n \geq 2$ есть число иррациональное.

△ Допустим противное: $\cos\frac{\pi}{2^n}$ при некотором n является числом рациональным.

Полагая в формуле

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$\alpha = \frac{\pi}{2^n}$, будем иметь:

$$\cos\frac{\pi}{2^{n-1}} = 2\cos^2\frac{\pi}{2^n} - 1,$$

откуда $\cos\frac{\pi}{2^{n-1}}$ есть число рациональное. Аналогичным путем получаем, что $\cos\frac{\pi}{2^{n-2}}$ есть число рациональное. И т. д. Продолжая этот процесс, доходим до

$\cos\frac{\pi}{4} : \cos\frac{\pi}{4}$ — число рациональное. Мы пришли к противоречию: в действительности

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \notin Q. \blacktriangle$$

1117. Докажите иррациональность чисел:

а) tgl°; б) cos10°; в) sin10°.

1118. Докажите, что lg2 есть число иррациональное.

△ Допустим, что lg2 является рациональным числом. Тогда это число может быть только дробным: $\lg 2 = \frac{a}{b}$, где a и b — натуральные числа, дробь $\frac{a}{b}$ несократима.

Освободимся здесь от знака логарифма:

$$10^{\frac{a}{b}} = 2, \quad 10^a = 2^b.$$

Однако последнее равенство невозможно, так как его левая часть делится на 5, а правая — не делится. ▲

1119*. Докажите, что десятичный логарифм любого натурального числа, не являющегося степенью 10 с целым неотрицательным показателем, есть число иррациональное.

§ 30. Функциональные уравнения 9—11

Литература: [12^e], [29], [45].

Функциональным уравнением называется уравнение, в котором неизвестным является некоторая функция (или функции). Функция называется **решением** функционального уравнения, если при подстановке ее в уравнение оно превращается в тождество. **Решить** функциональное уравнение — значит найти множество всех его решений.

Замечание для одиннадцатиклассников: дифференциальные уравнения, с которыми вы знакомы (или скоро познакомитесь), являются частными случаями функциональных уравнений.

30.1. 9—11

1120. Решите функциональное уравнение

$$f(x) - 2f(-x) = x + 1,$$

если x принимает любые действительные значения.

△ Найти неизвестную функцию $f(x)$ мешает $f(-x)$.

Пользуясь тем, что здесь x — любое действительное число, заменим x на $-x$. Это вовсе не означает, что мы полагаем $x = -x$, так как последнее равенство выполняется только при $x = 0$. Будем иметь:

$$f(-x) - 2f(x) = 1 - x.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} f(x)-2f(-x)=1+x, \\ f(-x)-2f(x)=1-x \end{cases}$$

с неизвестными $f(x)$ и $f(-x)$. Исключим из нее $f(-x)$. Для этого сложим первое уравнение с удвоенным вторым:

$$-3f(x) = 3 - x, \quad f(x) = \frac{1}{3}x - 1.$$

Пока что мы с вами установили следующее: если функция $f(x)$ является решением данного функционального уравнения, то $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$.

Теперь нужно это допущение оправдать. Выполним проверку найденной функции по функциональному уравнению:

$$\frac{1}{3}x - 1 - 2\left(-\frac{1}{3}x - 1\right) = x + 1, \quad x + 1 = x + 1.$$

Получилось тождество. Следовательно, функция $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$ есть решение функционального уравнения.

Отсюда видно, что это решение единственно.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{3}x - 1$. ▲

1121. Решите функциональные уравнения:

а) $f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = x$ $(x \neq 0)$; б) $xf(x) + 2f(-\frac{1}{x}) = 3$ $(x \neq 0)$;

в) $(1 - x)f(x) - 2xf(1 - x) = 1$ $(x \neq 1)$.

1122. Найдите все функции f и φ, если при любых действительных x выполняются равенства:

$$\begin{cases} 2f(x)+\varphi(-x)=x, \\ f(-x)+\varphi(x)=1. \end{cases}$$

1123. Решите функциональные уравнения:

а) $f(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ $(x \neq 0)$; б) $f(\frac{2x+1}{x-1}) = x$ $(x \neq 1, x \neq 2)$.

△ а) Было бы хорошо, если бы под знаком f вместо суммы $x + \frac{1}{x}$ стояла одна буква. Одна-единственная буква... Но откуда ее взять?

Положим $x + \frac{1}{x} = y$. Возведем это равенство в квадрат:

$$x^2+\frac{1}{x^2}+2=y^2 \Rightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=y^2-2.$$

Тогда функциональное уравнение примет следующий вид:

$$f(y) = y^2 - 2.$$

Следовательно, $f(x) = x^2 - 2$.

Сделаем проверку найденного решения. Она нужна, в частности, по следующей причине: функция $y = x + \frac{1}{x}$ обладает тем свойством, что $|y|=\left|x+\frac{1}{x}\right|\geq 2$ (см. § 19, задача 631), поэтому вопрос — удовлетворяет ли функция $f(x) = x^2 - 2$ функциональному уравнению при $|f(x)| < 2$? Посмотрим:

$$(x + \frac{1}{x})^2 - 2 = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

Полученное равенство выполняется при всех $x \neq 0$, следовательно, функция $f(x) = x^2 - 2$ есть решение функционального уравнения.

б) Наученные некоторым опытом, положим $\frac{2x+1}{x-1} = y$. Выразим отсюда x через y:

$$2x + 1 = xy - y, \quad 1 + y = xy - 2x, \quad x = \frac{y+1}{y-2}.$$

Тогда

$$f(y) = \frac{y+1}{y-2}.$$

Отсюда $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. Ограничение $x \neq 2$ в условии задачи нам понадобилось.

Проверка показывает, что эта функция удовлетворяет функциональному уравнению.

Ответ: а) $f(x) = x^2 - 2$; б) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$. ▲

При решении задач 1120—1123 применялась замена переменной. **Метод замены переменной,** или **метод подстановки,** является основным при решении функциональных уравнений.

1124. Решите функциональные уравнения:

а) $f(x^2 + 4) = x + 2$;

б) $f\left(\frac{x+3}{2x-1}\right) = \frac{x+2}{x-2} \left(x \neq \frac{1}{2}, x \neq 2, x \neq \frac{5}{3}\right)$;

в) $f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x \ (x \neq 0, x \neq \pm 1, x \neq 2)$.

1125. Существует ли функция f такая, что при любых действительных x и y выполняются равенства:

а) $f(x) + f(y) = xy$;

б) $f(x) + f(y) = x^2 + y^2$?

△ а) Пользуясь тем, что x и y — любые числа, положим $y = x$:

$$2f(x) = x^2, \quad f(x) = \frac{1}{2}x^2.$$

Проверка, которая до сих пор носила более или менее формальный характер, в данном случае обязательна: если при $y = x$ получается функция

$f(x) = \frac{1}{2}x^2$, которая при подстановке в функциональное уравнение превращает его в тождество, то это еще не значит, что аналогичное положение будет и при $y \neq x$. Получаем:

$$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 = xy,$$

а это равенство тождеством не является. Следовательно, здесь такая функция не существует.

б) Положим $y = x$:

$$2f(x) = 2x^2, \quad f(x) = x^2.$$

Сделаем проверку:

$$x^2 + y^2 = x^2 + y^2.$$

Так как получилось тождество, то функция $f(x) = x^2$ есть решение, причем единственное, функционального уравнения.

Ответ: а) не существует; б) существует и единственна — $f(x) = x^2$. ▲

1126. Решите функциональные уравнения:

а) $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$; б) $f(x)f(y) + 1 = f(x) + f(y) + xy$;

в) $f(x + y) + f(x - y) = 6(x^2 + y^2)$,

где x и y принимают любые действительные значения.

1127. Найдите функцию $f(x, y)$ двух переменных x и y, если при любых действительных x и y выполняется равенство:

$$f(x - y, 2x + y) = 17x^2 + 14xy + 5y^2.$$

1128. Решите функциональное уравнение

$$f(xy) = x^2f(y),$$

где x и y — любые действительные числа.

△ Положим здесь $y = 1$:

$$f(x) = x^2f(1) = Cx^2,$$

где $C = f(1)$.

Выполним проверку функции $f(x) = Cx^2$:

$$C(xy)^2 = x^2Cy^2.$$

Это равенство справедливо при любых x и y и любом C.

Ответ: $f(x) = Cx^2$, где C — любая постоянная. ▲

1129. Решите функциональные уравнения:

а) $f(x + y) = x + f(y)$; б) $f(x + y) - f(x - y) = 4xy$,

где x и y — любые действительные числа.

1130. Существуют ли функции f и g такие, что при любых x и y выполняется равенство

$$f(x)g(y) = x + y + 1?$$

△ Допустим, что такие функции f и g существуют.

Положим в функциональном уравнении $x = y = 0$:

$$f(0)g(0) = 1.$$

Теперь положим в нем $x = 0$:

$$f(0)g(y) = y + 1.$$

Наконец, положим в исходном равенстве $y = 0$:

$$f(x)g(0) = x + 1.$$

Перемножим два последних равенства:

$$f(0)g(y)f(x)g(0) = (y + 1)(x - 1).$$

Но в этом равенстве $f(0)g(0) = 1$, следовательно,

$$f(x)g(y) = (y + 1)(x + 1), \quad x + y + 1 = (y + 1)(x + 1).$$

Однако последнее равенство тождеством не является. Мы пришли к противоречию.

Ответ: не существуют. ▲

1131. Докажите, что не существуют функции f и g такие, что при любых x и y выполняется равенство:

$$f(x) + g(y) = x^2 - 3xy + y^2.$$

1132*. Решите функциональное уравнение:

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x \ (x \neq 0, x \neq 1).$$

△ Положим $\frac{1}{1-x} = y$. Выразим из этого равенства x через y:

$$1 - x = \frac{1}{y}, \quad x = 1 - \frac{1}{y} = \frac{y-1}{y}.$$

Тогда функциональное уравнение принимает следующий вид:

$$f(\frac{y-1}{y}) + f(y) = \frac{y-1}{y}.$$

Вернемся в последнем уравнении к переменной x (вместо y):

$$f(\frac{x-1}{x}) + f(x) = \frac{x-1}{x}.$$

Положим в последнем равенстве $x = \frac{t-1}{t}$, где t — новая переменная. Нужно выразить дробь $\frac{x-1}{x}$ через t:

$$\frac{x-1}{x} = \left(\frac{t-1}{t} - 1\right) \Big/ \left(\frac{t-1}{t}\right) = \frac{-1}{t-1} = \frac{1}{1-t}.$$

Теперь последнее функциональное уравнение становится таким:

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right) + f\left(\frac{t-1}{t}\right) = \frac{t}{1-t},$$

или

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x}{1-x}.$$

Получилась система трех уравнений

$$\begin{cases} f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x, \\ f\left(\frac{x-1}{x}\right) + f(x) = \frac{x-1}{x}, \\ f\left(\frac{1}{1-x}\right) + f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{x}{1-x} \end{cases}$$

с тремя неизвестными $f(x)$, $f(\frac{1}{1-x})$ и $f(\frac{x-1}{x})$.

Для нахождения из нее $f(x)$ сложим два первых уравнения и вычтем третье:

$$2f(x) = x + \frac{x-1}{x} - \frac{1}{1-x},$$

$$2f(x)=\frac{1}{x(1-x)}(x^2-x^3-x^2+2x-1-x),$$

$$2f(x)=\frac{-x^3+x-1}{x(1-x)},\quad f(x)=\frac{x^3-x+1}{2x(x-1)}.$$

Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет исходному функциональному уравнению.

Ответ: $f(x)=\dfrac{x^3-x+1}{2x(x-1)}$. ▲

1133*. Решите функциональное уравнение:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=2\ (x\neq 0,\ x\neq 1).$$

1134*. Найдите функцию f, заданную на R, если для любой функции φ такой, что $E(\varphi)=R$, выполняется тождество

$$f(\varphi(x))=\varphi(f(x)).$$

30.2. 10—11

1135. Решите функциональное уравнение

$$f(xy)=f(x)\cos y,$$

где x и y — любые действительные числа.

△ Положим здесь $y=0$:

$$f(0)=f(x),\quad f(x)=f(0).$$

Обозначая $f(0)$ через C, получаем: $f(x)=C$. Следовательно, функция f, если она существует, является постоянной.

Сделаем проверку по первоначальному уравнению:

$$C=C\cos y.$$

Последнее уравнение есть тождество только при $C=0$.

Ответ: $f(x)=0$. ▲

1136. Существует ли функция f такая, что при всех действительных x выполняется равенство

$$f(\cos 2x)=\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}?$$

1137. Функция f при некоторых x удовлетворяет уравнению

$$f(x) + f(-x) = \sin x.$$

Найдите наиболее широкую область определения этой функции и саму функцию.

△ Заменим в функциональном уравнении x на $-x$:

$$f(-x) + f(x) = \sin(-x).$$

Тогда

$$\sin x = \sin(-x), \quad \sin x = -\sin x, \quad 2\sin x = 0; \quad x = \pi k \ (k \in Z).$$

Следовательно, наиболее широкая область определения функции f есть множество всех чисел вида πk, где $k \in Z$.

Для нахождения самой функции положим в функциональном уравнении $x = \pi k$:

$$f(\pi k) + f(-\pi k) = 0 \Rightarrow f(-\pi k) = -f(\pi k).$$

Последнему уравнению удовлетворяет любая нечетная функция, заданная во всех точках вида πk.

Ответ: $D(f) = \{\pi k | k \in Z\}$, $f(x)$ — любая нечетная функция. ▲

1138. Функция f при некоторых x удовлетворяет уравнению:

а) $f(x) - f(-x) = \sin x$; б) $f(x) + f(-x) = \cos x$.

Найдите наиболее широкую область определения этой функции и саму функцию.

1139*. Решите функциональное уравнение

$$f(x + y) - f(x - y) = 2f(y)\cos x,$$

где x и y — любые действительные числа.

△ Положим в уравнении последовательно

$$x = 0, \quad y = t; \quad x = \frac{\pi}{2}, \quad y = \frac{\pi}{2} + t; \quad x = \frac{\pi}{2} + t, \quad y = \frac{\pi}{2},$$

где t — новая переменная. Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} f(t) - f(-t) = 2f(t), \\ f(t+\pi) - f(-t) = 0, \\ f(t+\pi) - f(t) = -2a\sin t. \end{cases}$$

Здесь через a обозначено значение $f(\frac{\pi}{2})$.

Из первого уравнения этой системы следует, что $f(-t) = -f(t)$.

Вычитая второе и третье уравнения, будем иметь:

$$f(t) - f(-t) = 2a\sin t, \quad 2f(t) = 2a\sin t, \quad f(t) = a\sin t.$$

Нужно сделать проверку функции $f(x) = a\sin x$ по исходному функциональному уравнению:

$$a\sin(x + y) - a\sin(x - y) = 2a\sin y\cos x.$$

Это равенство при любом a является тождеством. Кроме того, для функции $f(x) = a\sin x$ выполняется равенство $f(\frac{\pi}{2}) = a$.

Ответ: $f(x) = a\sin x$, где a — любая постоянная. ▲

1140*. Решите функциональное уравнение

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\cos y,$$

где x и y — любые действительные числа.

1141*. Найдите функции f и g, если при любых действительных x и y выполняется равенство

$$f(x)g(y) = \sin(x + y) + \sin(x - y).$$

△ Положим в функциональном уравнении $y = 0$:

$$f(x)g(0) = 2\sin x.$$

Из этого равенства следует, что $g(0) \neq 0$. Пусть $g(0) = a$, где $a \neq 0$. Тогда

$$f(x) \cdot a = 2\sin x, \quad f(x) = \frac{2}{a}\sin x.$$

Для нахождения функции g подставим полученное выражение для $f(x)$ в исходное функциональное уравнение:

$$\frac{2}{a}\sin x g(y) = 2\sin x\cos y \Rightarrow g(y) = a\cos y.$$

Проверка показывает, что функции $f(x) = \frac{2}{a}\sin x$ и $g(y) = a\cos y$ удовлетворяют уравнению при любом $a \neq 0$.

Ответ: $f(x) = \frac{2}{a}\sin x$, $g(y) = a\cos y$, где a — любая постоянная, отличная от нуля. ▲

1142*. Найдите функции f и g, если при любых действительных x и y выполняется равенство

$$f(x) + f(y) + g(x) - g(y) = \sin x + \cos y.$$

1143. Решите функциональное уравнение:

$$f(x + y) = (f(x))^y \ (x \in R, y \in R, f(x) > 0).$$

△ Положим здесь $y = 0$:

$$f(x) = (f(x))^0, \quad f(x) = 1.$$

Выполним проверку функции $f(x) = 1$ по исходному уравнению: $1 = 1^y$. Это равенство справедливо при любом y, следовательно, функция $f(x) = 1$ есть решение (причем единственное) функционального уравнения.

Ответ: $f(x) = 1$. ▲

1144. Решите функциональное уравнение:

$$f(xy) = (f(x))^y \ (x \in R, y \in R, f(x) > 0).$$

1145. Найдите все многочлены $P(x)$ такие, что при любом действительном x выполняется равенство

$$(x - 1)P(x) = (x + 5)P(x - 1).$$

△ Перед нами несколько иная по своему характеру задача: во-первых, в условии сказано, что $P(x)$ есть многочлен, а во-вторых, как мы сейчас увидим, решение задачи связано с делимостью многочленов.

Положим в данном равенстве $x = -5$:

$$-6P(-5) = 0, \quad P(-5) = 0.$$

Положим в том же равенстве $x = -4$:

$$-5P(-4) = P(-5) = 0, \quad P(-4) = 0.$$

Далее, дадим x значение $x = -3$:

$$-4P(-3) = 0, \quad P(-3) = 0.$$

Аналогично, при $x = -2$, $x = -1$, $x = 0$ получим соответственно:

$$P(-2) = 0, \quad P(-1) = 0, \quad P(0) = 0.$$

(Проверьте самостоятельно, что значение $x = 1$ уже ничего не дает.)

Так как многочлен $P(x)$ в точках $-5, -4, -3, -2, -1, 0$ обращается в нуль, то он делится на произведение

$$(x + 5)(x + 4)(x + 3)(x + 2)(x + 1)x$$

(см. § 1, теорема 5). Это значит, что

$$P(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)Q(x),$$

где $Q(x)$ — многочлен. Подставим последнее выражение для $P(x)$ в функциональное уравнение:

$(x-1)x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)Q(x) =$

$= (x+5)(x+4)(x+3)(x+2)(x+1)x(x-1)Q(x-1).$

Отсюда $Q(x) = Q(x-1)$. В частности, тогда

$$Q(0) = Q(1) = Q(2) = Q(3) = \dots = C,$$

где C — постоянная. Следовательно, многочлен $Q(x) - C$ имеет бесконечное множество корней. Но это возможно только тогда, когда он тождественно равен нулю:

$$Q(x) - C = 0, \quad Q(x) = C.$$

Получается, что

$$P(x) = Cx(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5).$$

Нужна проверка. Она показывает, что этот многочлен при любом C удовлетворяет функциональному уравнению.

Ответ: $P(x) = Cx(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)(x+5)$, где C — любая постоянная. ▲

1146. Решите функциональные уравнения:

а) $xP(x-1) = (x-2)P(x)$; б) $(x-8)P(x) = (x-2)P(x-1)$,

где $P(x)$ — многочлен, а x принимает любые действительные значения.

1147. Найдите функцию f, заданную на множестве натуральных чисел, такую, что $f(1) = 2$ и при любых натуральных k и n выполняется равенство

$$f(k+n) = f(k)f(n).$$

△ По существу, это задача на нахождение общего члена последовательности. Подобные задачи встречались в § 5 «Последовательности» (п. 5.2), только там для такой цели использовались рекуррентные соотношения.

Заменим данное функциональное уравнение уравнением

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1)f(x_2),$$

где x_1 и x_2 — любые натуральные числа. Методом математической индукции нетрудно доказать, что справедливо равенство

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n),$$

где n — любое натуральное число, большее 1, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — любые натуральные числа.

Положим в последнем равенстве $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$:

$$f(n) = f(1)f(1)\dots f(1) = (f(1))^n = 2^n.$$

Проверка функции $f(n) = 2^n$ по первоначальному функциональному уравнению приводит к верному тождеству $2^{k+n} = 2^k \cdot 2^n$. Следовательно, эта функция есть решение уравнения.

Ответ: $f(n) = 2^n$ $(n \in N)$. ▲

1148. Найдите функцию f, заданную на множестве натуральных чисел, такую, что $f(1) = 1$ и при любых натуральных k и n справедливо равенство

$$f(k + n) = f(k) + f(n) + kn.$$

1149*. Найдите функцию f, заданную на множестве Q рациональных чисел, такую, что $f(1) = a$ и для любых рациональных чисел x и y выполняется равенство

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

△ Методом математической индукции легко доказывается равенство

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n),$$

где n — любое натуральное число, большее 1, $x_1, x_2, \dots, x_n$ — любые рациональные числа.

Дальше задачу будем решать в несколько шагов.

1) Положим в последнем равенстве $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$:

$$f(n) = nf(1) = an,$$

где $a = f(1)$.

2) Для того чтобы найти $f(0)$, положим в исходном функциональном уравнении $x = y = 0$:

$$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

3) Вычислим $f\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n \in N)$. С этой целью в последнем функциональном уравнении положим $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$:

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right), \quad a = nf\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = a \cdot \frac{1}{n}.$$

4) Пусть x — любое положительное рациональное число: $x = \frac{m}{n}$ $(m \in N, n \in N)$. Будем иметь:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}\right) = mf\left(\frac{1}{n}\right) = m \cdot a \cdot \frac{1}{n} = \frac{m}{n}a.$$

5) Осталось найти значения функции $f(x)$ при отрицательных рациональных x. Положим в исходном функциональном уравнении $y = -x$:

$$f(0) = f(x) + f(-x), \quad 0 = f(x) + f(-x) \Rightarrow f(-x) = -f(x).$$

Теперь в последнем равенстве возьмем $x = \frac{m}{n}$ ($m \in N$, $n \in N$):

$$f\left(-\frac{m}{n}\right) = -f\left(\frac{m}{n}\right) = -\frac{m}{n}a.$$

Нетрудно заметить, что во всех рассмотренных случаях получилась одна и та же формула: $f(x) = ax$.

Ответ: $f(x) = ax$ ($x \in Q$). ▲

Обратим внимание на схему решения последней задачи. Сначала мы находили функцию $f(x)$ при натуральных значениях аргумента (первый шаг), затем — при положительных рациональных значениях x (третий и четвертый шаги), потом — при отрицательных рациональных x (второй и пятый). (Обычно к этому добавляется нахождение значений функции в иррациональных точках, но мы не будем заниматься этим, так как последнее нередко приводит к некоторым трудностям в связи с необходимостью использовать понятие непрерывности функции.) Такой метод решения функциональных уравнений называется **методом Коши.**

1150*. Найдите функцию f, заданную и положительную на множестве рациональных чисел, такую, что $f(1) = a$ ($a > 0$) и при любых рациональных x и y выполняется равенство

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

30.3*. 10—11

Займемся функциональными уравнениями, решение которых связано с непрерывностью или дифференцируемостью функции.

Вспомним, что функция f называется непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

1151°. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на R и при всех действительных x удовлетворяет уравнению

$$f(x) = f(kx)$$

(k — постоянная, $|k| \neq 1$), то она является постоянной.

△ Рассмотрим два случая.

1) Пусть $|k| < 1$.

Так как данная функция не меняет своего значения при замене x на kx, то, в частности,

$$f(kx) = f(k \cdot kx) = f(k^2x).$$

Теперь тем же способом получаем:

$$f(x) = f(kx) = f(k^2x) = f(k^3x) = \dots = f(k^nx),$$

где n — любое натуральное число.

Перейдем в равенстве $f(x) = f(k^nx)$ к пределу при $n \to +\infty$ (и фиксированном x), учитывая, что если $|k| < 1$, то $\lim k^n = 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} f(x) = \lim_{n\to+\infty} f(k^nx), \quad f(x) = f(0) = C,$$

где C — постоянная. Равенство

$$\lim_{n\to+\infty} f(k^nx) = f(0)$$

объясняется тем, что при $n \to +\infty$ произведение k^nx стремится к нулю, а $f(k^nx)$ — к $f(0)$ в силу непрерывности функции в точке $x = 0$.

2) Пусть $|k| > 1$.

Положим в функциональном уравнении

$$kx = y, \quad x = \frac{1}{k}y.$$

Тогда оно примет такой вид:

$$f\left(\frac{1}{k}y\right) = f(y), \quad f(y) = f\left(\frac{1}{k}y\right).$$

Так как $|k| > 1$, то $\left|\frac{1}{k}\right| < 1$. На основании первого случая функция $f(y)$, а следовательно, и функция $f(x)$ является постоянной: $f(x) = C$.

Проверка показывает, что в качестве C можно взять любую постоянную.

(При доказательстве использовалась непрерывность функции только в точке $x = 0$, а не на всем множестве R.) ▲

1152. Решите функциональные уравнения:

а) $f(2x - 1) = f(x)$; б) $f(x) = f\left(\frac{x+3}{2}\right)$,

где функция f непрерывна на R.

1153. Решите функциональное уравнение

$$f(x) + x = 2f(2x),$$

если функция f непрерывна на R.

△ Заменим в этом равенстве x на $\frac{x}{2}$:

$$f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}=2f(x)\Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}x.$$

В последнем равенстве заменим x на $\frac{x}{2}$, на $\frac{x}{4}$, на $\frac{x}{8}$:

$$f\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{8}x,\quad f\left(\frac{x}{4}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{8}\right)+\frac{1}{16}x,\quad f\left(\frac{x}{8}\right)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{16}\right)+\frac{1}{32}x.$$

Пользуясь этими выражениями, преобразуем уравнение для $f(x)$:

$$f(x)=\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{1}{4}x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{4}\right)+\frac{1}{8}x\right)+\frac{1}{4}x=\frac{1}{4}f\left(\frac{x}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}f\left(\frac{x}{8}\right)+\frac{1}{16}x\right)+\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x\right)=\frac{1}{8}f\left(\frac{x}{8}\right)+\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{16}x+\frac{1}{64}x\right)=$$

$$=\frac{1}{16}f\left(\frac{x}{16}\right)+\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4^2}x+\frac{1}{4^3}x+\frac{1}{4^4}x\right)=\dots=$$

$$=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(\frac{1}{4}x+\frac{1}{4^2}x+\dots+\frac{1}{4^n}x\right),$$

где n — любое натуральное число. Сумму в последних скобках преобразуем по формуле суммы n членов геометрической прогрессии:

$$f(x)=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{4}\cdot\frac{1}{4^n}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2^n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)+\frac{x}{3}-\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{4^n}.$$

В полученном равенстве нужно перейти к пределу при $n \to +\infty$:

$$f(x) = 0 \cdot f(0) + \frac{x}{3} - \frac{x}{3} \cdot 0,\quad f(x) = \frac{x}{3}.$$

Проверка показывает, что функция $f(x) = \frac{1}{3}x$ удовлетворяет исходному функциональному уравнению.

Ответ: $f(x) = \frac{1}{3}x$. ▲

1154. Решите функциональное уравнение:

$$f(x) = \frac{1}{3}f(\frac{x}{2}) + x,$$

если функция f непрерывна на R.

1155. Сколько непрерывных функций $y = y(x)$ являются решениями функционального уравнения

$$2y^2 - 2(\sin x + \cos x)y + \sin 2x = 0$$

на отрезке $[0; 2\pi]$?

1156. Решите функциональное уравнение

$$f(3x) = 3f(x),$$

если функция f имеет непрерывную производную на R.

△ Данное равенство является тождеством с переменной x. Продифференцируем это тождество:

$$3f'(3x) = 3f'(x), \quad f'(3x) = f'(x).$$

Так как функция $f'(x)$ по условию является непрерывной, то на основании утверждения задачи 1150 она постоянна: $f'(x) = a$, где a — постоянная. Для того чтобы найти саму функцию $f(x)$, найдем множество всех первообразных для функции, равной a:

$$f(x) = ax + b,$$

где b — постоянная.

Выполним проверку функции $f(x) = ax + b$ по исходному функциональному уравнению:

$$a \cdot 3x + b = 3(ax + b), \quad 3ax + b = 3ax + 3b.$$

Последнее равенство является тождеством при $b = 0$ и любом a. Тогда $f(x) = ax$.

Ответ: $f(x) = ax$, где a — любая постоянная. ▲

1157. Решите функциональные уравнения:

а) $f(x) = 2f(\frac{x}{2})$; б) $f(2x - 1) = 2f(x)$,

если функция f имеет непрерывную производную на R.

1158. Решите функциональные уравнения:

а) $f(2x) = f(x)$; б) $f(2x - 1) = f(x)$,

если функция f дифференцируема на R.

1159. Найдите функцию f, дифференцируемую на R, если при всех действительных x выполняются равенства

$$f(x) + f(x - 1) = 2x + 5, \quad f'(x) = f'(x - 1).$$

△ Продифференцируем первое из этих тождеств по переменной x:

$$f'(x) + f(x - 1) = 2.$$

Получаем систему уравнений

$$f'(x) + f'(x - 1) = 2, \quad f'(x) = f'(x - 1)$$

с неизвестными $f'(x)$ и $f'(x - 1)$. Из нее $f'(x) = 1$. Теперь с помощью первообразных находим функцию f: $f(x) = x + C$.

Является ли здесь C любой постоянной? Сделаем проверку по первому из исходных уравнений:

$$x + C + x - 1 + C = 2x + C, \quad 2C = 6, \quad C = 3.$$

Оказывается, C может быть равной только 3. Тогда $f(x) = x + 3$.

Ответ: $f(x) = x + 3$. ▲

1160. Найдите функцию f, дифференцируемую на R, если при любых действительных x выполняются равенства:

$$f(x + 2) - f(x) = 4x - 3, \quad f'(x + 2) + f'(x) = 0.$$

1161. Найдите функцию f, дифференцируемую на R, если при любых действительных x и y выполняется равенство:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy.$$

△ Сначала вычислим $f(0)$. Для этого положим в функциональном уравнении $x = y = 0$:

$$f(0) = 2f(0), \quad f(0) = 0.$$

Теперь преобразуем функциональное уравнение таким образом, чтобы в левой части получить отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$f(x + y) - f(x) = f(y) + 2xy,$$

$$\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + 2x = \frac{f(y)-f(0)}{y-0} + 2x \ (y \neq 0).$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $y \to 0$ (и фиксированном x):

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \lim_{y\to 0}\left(\frac{f(y)-f(0)}{y-0} + 2x\right), \quad f'(x) = f'(0) + 2x.$$

Пусть $f'(0) = a$. Тогда

$$f'(x) = 2x + a \Rightarrow f(x) = x^2 + ax + b,$$

где b — постоянная.

Выполним проверку. Прежде всего, поскольку $f(0) = 0$, из последнего равенства получим, что $b = 0$. Следовательно, $f(x) = x^2 + ax$. А теперь проверка по исходному функциональному уравнению:

$$(x + y)^2 + a(x + y) = x^2 + ax + y^2 + ay + 2xy.$$

Последнее равенство является тождеством при любом a.

Ответ: $f(x) = x^2 + ax$, где a — любая постоянная. ▲

1162. Найдите функцию f, дифференцируемую на R, если $f(1) = 1$ и при любых действительных x и y справедливо равенство:

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy.$$

(Сравните эту задачу с задачей 1147.)

1163. Найдите функцию f, если при любых действительных x и y справедливо неравенство:

$$(f(y) - f(x))^2 \le |y - x|^3.$$

Перед вами пример **функционального неравенства.**

△ Приведем неравенство к виду:

$$0 \le \left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|^2 \le |y-x|,$$

где $y \ne x$. Перейдем здесь к пределу при $y \to x$, где x фиксировано. Так как в этом случае $|y - x|$ стремится к нулю, то тем более $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|^2$ стремится к нулю.

Так как

$$\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(x),$$

то

$$\lim_{y\to x}\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right|^2 = |f'(x)|^2.$$

Тогда

$$|f'(x)|^2 = 0 \Rightarrow f'(x) = 0.$$

(По ходу дела получилось, что функция $f(x)$ дифференцируема на R.)

Следовательно, $f(x) = C$, где C — постоянная.

Выполним проверку по исходному неравенству:

$$(C - C)^2 \leq |y - x|^3.$$

Так как последнее неравенство выполняется при любых x и y и любой постоянной C, то функция $f(x) = C$, где C — любая постоянная, есть решение функционального неравенства.

Ответ: $f(x) = C$, где C — любая постоянная. ▲

1164. Найдите функцию f, если при любых действительных x и y справедливо неравенство:

$$f(y) - f(x) \leq (y - x)^2.$$

§ 31. Целая и дробная часть числа 10—11

Литература: [29], [45^{e}], [52].

Начнем с определений.

Целой частью действительного числа x называется наибольшее целое число, не превосходящее x.

Целая часть числа x обозначается через $[x]$.

Например,

$$[3{,}8] = 3, \quad [-3{,}8] = -4.$$

Из этого определения следует важное неравенство:

$$[x] \le x < [x] + 1. \tag{1}$$

Дробной частью действительного числа x называется разность между x и целой частью x.

Дробная часть числа x обозначается через $\{x\}$. Тогда

$$\{x\} = x - [x]. \tag{2}$$

Например,

$$\{3{,}8\} = 3{,}8 - 3 = 0{,}8; \quad \{-3{,}8\} = (-3{,}8) - (-4) = 4 - 3{,}8 = 0{,}2.$$

Из равенства (2) следует, что

$$x = [x] + \{x\}. \tag{3}$$

Например,

$$-3{,}8 = (-4) + 0{,}2.$$

Целая часть числа x принимает только целые значения: $[x] \in Z$. Что касается дробной части, то она удовлетворяет неравенству

$$0 \le \{x\} < 1. \tag{4}$$

Для доказательства неравенства (4) отнимем от всех частей неравенства (1) число $[x]$:

$$[x] - [x] \le x - [x] < [x] + 1 - [x], \quad 0 \le \{x\} < 1.$$

Перейдем к задачам.

31.1. 10—11

1165. Решите уравнения:

а) $[x] = 5$; б) $\{x\} = 0{,}4$; в) $[x] = \{x\}$; г) $[x] = \{y\}$.

1166°. Докажите, что для любого целого n и любого действительного x выполняется равенство:

$$[x + n] = [x] + n. \qquad (5)$$

△ Прибавим ко всем частям неравенства (1) по n:

$$[x] + n \le x + n < [x] + 1 + n.$$

Отсюда чему же равна целая часть числа $x + n$, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее $x + n$? Только $[x] + n$. Тогда справедливо равенство (5). ▲

1167. Решите уравнение:

$$[x - 1] + [x + 3] = 12.$$

△ На основании равенства (3)

$$[x - 1] = [x] - 1, \quad [x + 3] = [x] + 3.$$

Теперь получаем:

$$[x] - 1 + [x] + 3 = 12, \quad 2[x] = 10, \quad [x] = 5.$$

При каких x целая часть x равна 5? При всех, удовлетворяющих неравенству $5 \le x < 6$.

Ответ: $5 \le x < 6$. ▲

1168. Решите уравнения:

а) $[x] - [x + 2] + [x + 4] = 18$;

б) $[-2x] + [1 - 2x] + [3 - 2x] = 1$.

1169. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} [x+y+1] = 6 - x, \\ [x+2] + [y-2] = 6 - x + y. \end{cases}$$

1170. Докажите неравенство:

$$[x + y] \ge [x] + [y].$$

△ Сложим почленно неравенства:

$$[x] \le x < [x] + 1,$$

$$[y] \le y < [y] + 1.$$

Будем иметь:

$$[x] + [y] \le x + y < [x] + [y] + 2.$$

Тогда чему же равна целая часть суммы $x + y$? Или $[x] + [y]$, или $[x] + [y] + 1$. В обоих случаях

$$[x + y] \geq [x] + [y]. \blacktriangle$$

1171. Докажите неравенство:

$$\{x + y\} \leq \{x\} + \{y\}.$$

1172. Решите уравнение:

$$[x] = 3x + 1.$$

△ Положим $[x] = n$, где $n \in Z$. Тогда

$$3x + 1 = n, \quad x = \frac{n-1}{3}.$$

Верно ли, что здесь n — любое целое число? Неверно, так как должно выполняться неравенство (1). В данном случае оно принимает следующий вид:

$$n \leq \frac{n-1}{3} < n + 1.$$

Следовательно, нужно решить систему неравенств

$$n \leq \frac{n-1}{3}, \quad \frac{n-1}{3} < n + 1$$

в целых числах. Решая эту систему, получаем:

$$-2 < n \leq -\frac{1}{2}.$$

Какие целые n попадают в промежуток $\left(-2; -\frac{1}{2}\right]$? Только $n = -1$. Тогда

$$x = \frac{n-1}{3} = \frac{-1-1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Ответ: $-2/3$. ▲

1173. Решите уравнения:

а) $[x] = \frac{3}{4}x$; б) $[2x - 1] = x + 1$;

в) $\{x\} = 1 - x$; г) $x = 2[x] - \{x\}$;

д) $\left[\frac{6x+5}{8}\right] = \frac{15x-7}{5}$;

е) $[x + 1] + [x + 2] + [x + 3] + \cdots + [x + 100] = 200x$.

1174. Решите уравнения:

а) $[x] \cdot \{x\} = 1$; б) $x \cdot [x - 1] = 1$.

1175. Решите уравнение:

$$[\sin x] = [\cos x].$$

△ Числа $[\sin x]$ и $[\cos x]$ могут принимать только значения -1, 0 и 1. Соответственно рассмотрим три случая.

1) Пусть

$$[\sin x] = [\cos x] = 1.$$

Но тогда $\sin x = \cos x = 1$, а синус и косинус одновременно равняться 1 не могут. Следовательно, этот случай невозможен.

2) Пусть

$$[\sin x] = [\cos x] = 0.$$

Тогда

$$0 \le \sin x < 1, \quad 0 \le \cos x < 1.$$

Значит, x принадлежит первой четверти:

$$2\pi k < x < \frac{\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z).$$

3) Пусть

$$[\sin x] = [\cos x] = -1.$$

Тогда

$$-1 \le \sin x < 0, \quad -1 \le \cos x < 0.$$

Следовательно, x принадлежит третьей четверти:

$$\pi + 2\pi k < x < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \ (k \in Z).$$

Множества решений из второго и третьего случаев можно объединить в одном множестве.

Ответ: $(\pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$ $(n \in Z)$. ▲

1176. Решите уравнения:

а) $[\cos x] = [x^2 + 1]$; б) $\operatorname{tg} x - 2[\operatorname{tg} x] - 3 = 0$;

в) $[\operatorname{tg} x] = 2\cos^2 x$; г) $[\sin x + \cos x] = 1$;

д) $[\sin x] \cdot \{\sin x\} = \sin x$.

31.2*. 10—11

Рассмотрим более сложные уравнения с целой частью числа.

1177. Решите уравнение:

$$[x^2 - x] = 2.$$

△ По условию

$$2 \le x^2 - x < 3.$$

Решим левое неравенство:

$$x^2 - x \ge 2, \quad x^2 - x - 2 \ge 0; \quad x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty).$$

Решим правое неравенство:

$$x^2 - x < 3, \quad x^2 - x - 3 < 0; \quad \frac{1-\sqrt{13}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{13}}{2}.$$

Теперь с помощью координатной прямой находим множество решений первоначальной системы неравенств.

Ответ: $\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}; -1\right] \cup \left[2; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$. ▲

1178. Решите уравнения:

а) $[x] = x^3 + 3$; б) $[x[x]] = 1$.

1179. Решите уравнение:

$$x = \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{4}\right] + \dots + \left[\frac{x}{2000}\right].$$

△ Из условия следует, что число x — целое.

Воспользуемся неравенством:

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] \le \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = x < \left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x}{6}\right] + 3.$$

Может возникнуть вопрос: почему именно этим неравенством? Уже потому, что

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = x.$$

Отсюда

$$-\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right] - 3 < -x < -\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right].$$

Прибавим ко всем частям последнего неравенства x, т. е. сумму, стоящую в правой части исходного уравнения:

$$\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x}{7}\right]+\dots+\left[\frac{x}{2000}\right]-3<0\le\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x}{7}\right]+\dots+\left[\frac{x}{2000}\right].$$

Тогда

$$0\le\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x}{5}\right]+\left[\frac{x}{7}\right]+\dots+\left[\frac{x}{2000}\right]<3.$$

Следовательно, $x \ge 0$. Кроме того, все слагаемые суммы из последнего неравенства, начиная с третьего слагаемого, равного $\left[\frac{x}{7}\right]$, равны нулю. Отсюда $x < 7$.

Осталось перебрать случаи:

$$x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

Подходят только 0, 4 и 5.
Ответ: 0, 4, 5. ▲

1180. Решите уравнение:

$$|\sin x + \cos x| = 5 - 4[x].$$

1181. Решите уравнение:

$$[x]+\frac{1}{[x]}=\{x\}+\frac{1}{\{x\}}.$$

1182. Решите уравнение:

$$[x - 1] = \left[\frac{x+2}{2}\right].$$

△ Положим $[x - 1] = n$. Тогда и $\left[\frac{x+2}{2}\right] = n$. Отсюда

$$n \le x - 1 < n + 1,\quad n \le \frac{x+2}{2} < n + 1.$$

Дальнейшее зависит от того, что больше: $x - 1$ или $\frac{x+2}{2}$. Рассмотрим два случая.

1) Пусть $x - 1 \ge \frac{x+2}{2}$. Тогда $x \ge 4$.

Будем иметь:

$$n \le \frac{x+2}{2} \le x - 1 < n + 1.$$

Получаем систему неравенств с двумя неизвестными:

$$x \geq 4, \quad \frac{x+2}{2} \geq n, \quad x - 1 < n + 1.$$

Отсюда

$$x \geq 4, \quad 2n - 2 \leq x < n + 2.$$

Следовательно,

$$2n - 2 < n + 2, \quad 4 \leq x < n + 2.$$

Из неравенств $2n - 2 < n + 2$ и $4 < n + 2$ находим, что $2 < n < 4$. Последнему неравенству удовлетворяет только одно целое n — $n = 3$. Неравенство $4 \leq x < n + 2$ и неравенство $2n - 2 \leq x < n + 2$ превращаются в одно и то же неравенство: $4 \leq x < 5$.

2) Пусть $x - 1 < \frac{x+2}{2}$, т. е. $x < 4$.

Получаем:

$$n \leq x - 1 < \frac{x+2}{2} < n + 1.$$

Тем же способом, что и в первом случае, находим: $3 \leq x < 4$.
Ответ: $[3; 5)$. ▲

1183. Решите уравнения:

а) $\left[\frac{x-3}{2}\right] = \left[\frac{x-2}{3}\right]$; б) $[x] = \left[x + \frac{3}{8}\right] = \frac{7x-2}{8}$.

1184. Решите уравнение:

$$2^{[x]} = 2x + 1.$$

31.3. 10—11

Займемся задачами на нахождение целой части числа.

1185. Найдите целую часть числа:

$$a_n = \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \cdots + \sqrt{6}}}} \quad (n \text{ радикалов}).$$

△ Очевидно, при любом натуральном n $a_n > \sqrt{4} = 2$. Попробуем найти верхнюю границу для a_n.

Заменим в выражении для a_n последний радикал $\sqrt{6}$ на $\sqrt{9}$. Будем иметь:

$$a_n=\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}<\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6+\sqrt{9}}}}=\sqrt{6+\sqrt{6+\dots+\sqrt{6+\sqrt{6+3}}}}$$

(n – 1 радикал). Продолжая эти вычисления дальше, мы в конце концов полу чаем: $a_n < \sqrt{9} = 3$.

Итак, при любом натуральном n справедливо неравенство $2 < a_n < 3$. От сюда $[a_n] = 2$.

Ответ: 2. ▲

1186. Найдите целую часть числа:

а) $a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2}}}}$ (n радикалов);

б) $a_n=\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{2+\sqrt[3]{2+\dots+\sqrt[3]{2}}}}$ (n радикалов);

в) $\sqrt{n(n+2)(n+4)(n+6)}$ ($n \in N$).

1187*. Найдите целую часть числа:

$$a_k=\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\dots+\sqrt{n^2-n}}}}\quad (k \text{ радикалов, } n \in N).$$

△ Так как $a_1 = \sqrt{n^2-n} < n$, то при любом $k > 1$ получаем:

$$a_k=\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\dots+\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n}}}}<\sqrt{n^2-n+\sqrt{n^2-n+\dots+\sqrt{n^2-n+n}}},$$

где число радикалов равно уже k – 1. Продолжая этот процесс, будем иметь, что $a_k < n$ при любом k. (Фактически доказательство последнего неравенства проводилось методом математической индукции: если при некотором k $a_k < n$, то

$$a_{k+1}=\sqrt{n^2-n+a_k}<\sqrt{n^2-n+n}=n).$$

Верно ли, что при любом натуральном k $a_k \ge n - 1$? Начнем с a_1:

$$a_1 = \sqrt{n^2-n} \ge n - 1, \quad n^2 - n \ge n^2 - 2x + 1, \quad n \ge 1,$$

а это неравенство справедливо.

Допустим, что при некотором k $a_k \geq n - 1$. Тогда получаем:

$$a_{k+1} = \sqrt{n^2 - n + a_k} > \sqrt{n^2 - n + n - 1} = \sqrt{n^2 - 1},$$

а последний радикал не меньше $n - 1$. В самом деле,

$$\sqrt{n^2 - 1} \geq n - 1, \quad n^2 - 1 \geq n^2 - 2n + 1, \quad 2n \geq 2, \quad n \geq 1.$$

Итак, если $a_k > n - 1$, то и $a_{k+1} \geq n - 1$. По принципу математической ин дукции при любом k $a_k \geq n - 1$.

Оказалось, что $n - 1 \leq a_k < n$. Следовательно, $[a_k] = n - 1$.

Ответ: $n - 1$. ▲

1188*. Найдите целую часть числа:

а) $a_k = \sqrt{n^2 + n + \sqrt{n^2 + n + \cdots + \sqrt{n^2 + n}}}$ (k радикалов, $n \in N$);

б) $a_k = \sqrt[3]{n^3 - n + \sqrt[3]{n^3 - n + \cdots + \sqrt[3]{n^3 - n}}}$ (k радикалов, $n \in N$).

1189*. Найдите целую часть числа:

$$\log_2 3 + \log_3 5 + \log_5 8.$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

ГЛАВА I. ТОЖДЕСТВА

§ 1. Делимость многочленов

2. а) -1; б) $3, -3, -4$; в) -2; г) $1, 1$; д) $2, -1, -2, -2$; е) $3, 2, -3$; ж) 1; з) 1; и) $4, 2, -3$.

4. а) $1, 1, -2$; б) $1, -1, 3/2$; в) $2, -2, 1/3$; г) $-1/3, -1/3, -1/3, 5$; д) $2, 3/2, -3/2, 1/2$.

5. а) $-1, -2, -1/2$; б) $1, 1, (3 \pm \sqrt{5})/2$; в) $1, -1/2, (1 \pm \sqrt{13})/2$; г) $\pm 1/2, -1/3, 3 \pm \sqrt{2}$. **6.** 4. **9.** а) 2; б) 4; в) $x + 1$. **11.** $p = q = 0$; $p = 1/2$, $q = 0$; $p = 1$, $q = -1$. **13.** $a = 3$, $b = -4$. **14.** а) $a = 4$, $b = -6$; б) $a = 4$, $b = -3$; в) $a = 5$, $b = -5$. **15.** $a = -6$, $b = 11$, $c = -6$. **16.** $a = -21$, $b = -45$, $x_3 = 5$. **17.** $a_1 = 3$, $a_2 = -2$; в обоих случаях $x_2 = 4$, $x_3 = -3$. **18.** 3. **19.** $3 - x$. **20.** -1 и -5. **22.** $a_1 = -52$, $b_1 = -40$; $a_2 = 135/4$, $b_2 = -297/16$. **23.** $a = -60$, $b = 36$. **25.** $Cx(x + 1)^2(2x - 3)^3$ $(C \neq 0)$.

27. Не существует. **29.** Рассмотрите случаи $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ $(k \in N)$. **30.** Продифференцируйте тождество

$$p(x) = (x - a)^k \cdot \varphi(x),$$

где многочлен $\varphi(x)$ не делится на $x - a$.

33. Достаточно доказать это свойство для степени x^n $(n \in N)$. Примените метод математической индукции.

35. $3 + \sqrt{2}, 2, -1$. **36.** $1 - \sqrt{2}, -2, \pm 1$.

38. а) $x^2 - 6x + 4$; б) $x^3 - 5$; в) $(x - 2)^3 + 3$; г) $(x + 1)^4 - 2$.

39. а) $(x - 1)(x + 2)^2$; б) $(x - 1)(x + 3)(x + 7)$; в) $(x - 2)(x - 1)(x + 1)(x + 2)$; г) $(x - 1)(x + 2)(x^2 + x + 5)$; д) $(x - 3)(x + 11)(x^2 + 8x + 55)$;
е) $(x + 1 + \sqrt{2})^2(x + 1 - \sqrt{2})^2$; ж) $(x^2 + x + 3)(x^2 - x + 3)$;
з) $(x + (3 + \sqrt{5})/2)(x + (3 - \sqrt{5})/2)(x^2 + 3x + 3)$.

40. а) $(x - y - 2)(x - 2y)$; б) $(x - 11y + 1)(2x + y - 3)$; в) $(x - y)^2(x + 2y)$; г) $3(x + y)(x + z)(y + z)$; д) $(x - y)(y - z)(z - x)$.

42. а) $(x + y + z)(xy + yz + zx)$; б) $(x + y)(y + z)(z + x)$;
в) $(x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$; г) $2(x^2 + xy + y^2)^2$.

44. а) $(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$; б) $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)$.

45. а) $(2^{32} + 2^{16} + 1)/7$. **46.** $(4xy + x + y)^2 - (xy + x - y)^2$.

48. а) $(x^2 - 4x + 8)(x^2 + 4x + 8)$; б) $(x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$; в) $(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)$.

50. а) $(x^2 + x + 1)(x^3 - x + 1)$. Прибавьте и вычтите x^3; б) $(x^2 - x + 1)(x^2 + 2x + 2)$; в) $(x^2 + x - 1)(x^3 + x - 1)$.

52. а) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 - 4x + 5)$; б) $(x^2 + 2x + 3)(x^2 - x + 4)$.

53. а) $a = 8$, $b = 14$ или $a = -8$, $b = 18$; б) $a = 310$, $b = 6889$.

§ 2. Другие задачи на многочлены

54. Например, $p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3) + x$.

57. а) Не существует; б) существует, например, $p(x) = 910x^2 - 830x + 19$.

59. 1. **60.** $2^{12} = 4096$. **61.** а) 6; б) 5. **63.** а) 1; б) -1.

66. $b = a \pm 3$, где a — любое целое число.

67. Может. Например, многочлен

$$p(x) = x(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5)(x + 6)/7,$$

у которого коэффициент старшего члена равен $1/7$, при всех целых x принимает целые значения, так как из 7 последовательных целых чисел одно делится на 7.

70. Допустим, что это возможно: существуют такие многочлены $f(x)$ и $\varphi(y)$, что

$$x^{10}y^{10} + 1 = f(x)\varphi(y).$$

Положим здесь $x = y = 0$: $f(0)\varphi(0) = 1$.

Теперь положим в тождестве $x = 0$, а затем $y = 0$:

$$f(0)\varphi(y) = 1, \quad f(x)\varphi(0) = 1.$$

Перемножим эти равенства:

$$f(0)\varphi(y)f(x)\varphi(0) = 1, \quad f(x)\varphi(y) = 1, \quad x^{10}y^{10} + 1 = 1.$$

Но последнее равенство тождеством не является — противоречие.

72. Существуют, например,

$$P(x, y) = -x - 3y, \quad Q(x, y) = x + y.$$

74. 24, 25, 26 или 16, 15, 14.

76. Предположим противное. Тогда

$$P_1(x) = Q_1(x) + R_1(x), \quad P_2(x) = Q_2(x) + R_2(x),$$

где $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$ — многочлены, у которых все коэффициенты делятся на 3, а $R_1(x)$ и $R_2(x)$ — многочлены, у которых ни один из коэффициентов не делится на 3. По нашему предположению ни один из многочленов $R_1(x)$ и $R_2(x)$ не равен тождественно нулю. Получаем:

$$(P_1(x) - Q_1(x))(P_2(x) - Q_2(x)) = R_1(x)R_2(x).$$

Левая часть этого тождества есть многочлен, у которого все коэффициенты делятся на 3, так как если в ней раскрыть скобки, то каждое из четырех получающихся слагаемых, включая и $P_1(x)P_2(x)$, обладает этим свойством. Тогда и

у правой части все коэффициенты делятся на 3. Однако в правой части уже коэффициент старшего члена не делится на 3, так как он равен произведению двух целых чисел, не делящихся на 3. Мы получили противоречие.

78. Примените метод математической индукции.

§ 3. Тождественные преобразования выражений

79. $2^{64} - 1$. Умножьте все произведение на $2 - 1$ и примените шесть раз формулу разности квадратов.

80. $(2^{64} - 1)/3 \cdot 2^{31}$. Умножьте и разделите все выражение на $2 - \frac{1}{2}$.

82. $(-1)^n \cdot \frac{2n+1}{2n-1}$. **83.** $\frac{2(n^2+3n+3)}{3(n+1)(n+2)}$.

84. 1. Воспользуйтесь тождеством $2^{n+1} - 2^n = 2^n$.

85. $(n + 1)! - 1$. Прибавьте и вычтите 1 и используйте тождество $k! + k \cdot k! = (k + 1)!$.

87. $1/(x - 1) - 256/(x^{256} - 1)$. Прибавьте и вычтите $1/(1 - x)$.

89. а) 0; б) 1; в) $a + b + c$. **90.** а) 0; б) 0; в) 0; г) 1.

91. а) 0; б) 0. **92.** $(10^{n+1} - 9n - 10)/81$.

94. $(-1)^{n+1} \cdot n(n + 1)/2$. **95.** 1.

96. 3. Сложите два крайних слагаемых, затем — их сумму с предпоследним слагаемым и т. д.

100. Обозначим левую часть этого равенства через S. Преобразуйте сумму $S+\frac{1}{(n+k+1)!}$, с тем, чтобы в конце получилось $\frac{1}{n!}$.

104. Умножьте обе части равенства на $n!$.

107. а) $\frac{n}{n+1}$; б) $\frac{n}{2n+1}$; в) $\frac{n}{2(3n+2)}$; г) $\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$; д) 9; е) $1-\frac{1}{(n+1)!}$.

109. $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$. Воспользуйтесь равенством

$$\frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{4}\frac{4k^2}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{4}\frac{(4k^2-1)+1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}\right).$$

111. 510/511. **113.** 2. **115.** а) 4; б) 1.

118. а) $\sqrt{6} + 1$; б) $2\sqrt{2} + 1$; в) $\sqrt{2}(\sqrt{5} - 1)/2$.

119. а) $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/2$; б) $\sqrt{2}(\sqrt{7} + 1)/2$; в) $\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)/2$.

121. а) $\sqrt{2} - 1$; б) $(3 + \sqrt{5})/2$. **122.** $(\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b})/(a - b)$.

124. $\sqrt[3]{2} - 1$. **125.** а) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2})/2$;
б) $(\sqrt[3]{9} - \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3} + 2)(3 - 2\sqrt{2})$; в) $((1 + \sqrt{2})^2 + \sqrt[3]{2}(1 + \sqrt{2}) + \sqrt[3]{4})(\sqrt{2} - 1)/5$.

§ 4. Условные тождества

127. 13/12. **129.** а) 4; б) 7. **130.** 3. **131.** 322. **132.** $a^2 = 2b + c$.
133. 8. **134.** $a^2 - b^2$. **135.** 1/2.

138. Из условия следует, что числа a, b, c образуют геометрическую прогрессию.

142. 0. **145.** –2. **146.** 0. **147.** 1.

150. Воспользуйтесь тождеством

$$\frac{x^4-2x^3+x^2-3x+5}{x^5-x^2-x+2}=\frac{(x^4+x^2-x)-(2x^3+2x-2)+3}{(x^5+x^3-x^2)-(x^3+x-1)+1}.$$

152. 1. **153.** $xyz + x + y + z = 0$.

155. В исходном равенстве освободимся от знаменателей дробей и соберем все члены полученного равенства в одну часть. После упрощений будем иметь:

$$a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 + 2abc = 0.$$

Разлагая левую часть этого равенства на множители, получим:

$$(a + b)(a + c)(b + c) = 0.$$

Отсюда и следует утверждение задачи.

156. Возведем первое из исходных равенств в квадрат и вычтем второе равенство. Получим (после сокращения на 2): $xy = zt$. Рассмотрим систему уравнений

$$x + y = z + t, \quad xy = zt.$$

Если положить

$$x + y = a, \quad xy = b,$$

то по теореме, обратной теореме Виета, числа x и y являются корнями квадратного уравнения $u^2 - au + b = 0$. Но и числа z и t являются корнями того же уравнения.

Тогда $(x, y) = (z, t)$ (т. е. $x = z$ и $y = t$) или $(x, y) = (t, z)$. Отсюда и вытекает утверждение задачи.

160. Освободимся в равенстве от знаменателей дробей и в полученном равенстве соберем все члены в левой части. После разложения ее на множители будем иметь:

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) = 0.$$

Если здесь, например, $a + b - c = 0$, то первая дробь равна –1, а две другие равны 1 (проверьте!).

162. Каждую из дробей из условия задачи приравняйте одному и тому же числу k. Выразите из получающихся равенств a, b и c через x, y и z.

166. Верно.

Из решения задачи 165 видно, что

$$\frac{S}{b-c}+\frac{S}{c-a}+\frac{S}{a-b}=S'.$$

Пусть здесь $S' = 0$. Будем иметь:

$$S\cdot\left(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b}\right)=0,\quad S(ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2)=0.$$

Может ли сумма в скобках из последнего равенства быть равной нулю? Пусть

$$ab+ac+bc-a^2-b^2-c^2=0,\quad a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0.$$

Умножим это равенство на 2 и полученное равенство преобразуем:

$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc=0,$

$(a^2+b^2-2ab)+(b^2+c^2-2bc)+(c^2+a^2-2ac)=0,$

$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$

Последнее равенство выполняется только при $a=b=c$. Но это невозможно по условию.

Остается единственная возможность: $S=0$.

§ 5. Последовательности

170. Не является. Докажите, что данная последовательность — убывающая.

171. 2. Докажите, что последовательность является периодической с периодом $p=4$.

173. $p=4$. **174.** а) 84; б) 49. **176.** 2/3.

177. 1 или 2. Приведите условие к виду

$$x_{n+1}-1=(x_n-1)^2.$$

178. 0, 1.

180. а) $a_n=2\cdot 3^{n-1}$. Последнее условие можно привести к виду

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_n}{a_{n-1}}.$$

Отсюда видно, что последовательность является геометрической прогрессией.

б) $a_n=\dfrac{6}{n+1}$. Последнее условие приведем к виду

$$\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}.$$

Тогда последовательность $\left(\dfrac{1}{a_n}\right)$ является арифметической прогрессией.

185. а) $a_n=2^{n-1}+1$; б) $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}}$; в) $a_n=2+(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{1}{2^{n-2}}$; г) $a_n=2^n-1$.

187. а) $a_n=(2n-1)^2$; б) $a_n=n^2+4n+1$; в) $a_n=3^n+2$.

188. а) $x_n = 2(n + 1)$; б) $x_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Указание к а). Запишем второе условие в виде

$$x_{k+1} = \frac{k+2}{k+1}x_k, \quad \frac{x_{k+1}}{x_k} = \frac{k+2}{k+1}.$$

Положим в последнем равенстве $k = 1, 2, ..., n - 1$. Полученные равенства перемножим почленно.

190. 1. **193.** $x_n = \frac{3+2^{n-1}}{3-2^{n-1}}$.

196. Используйте тождество

$$(k + 1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1.$$

197. $S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

199. а) $n(n + 1)^2$; б) $n(n + 1)(n + 2)(3n + 1)/12$;
в) $n(n + 1)(3n^2 + 7n + 8)/12$; г) $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)/4$.

200. а) $n(4n^2 - 1)/3$; б) $n^2(2n^2 - 1)$.

Указание к а): вычислите суммы $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + (2n)^2$ и $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2$.

202. $S = (nq^{n+2} - (n + 1)q^{n+1} + q)/(q - 1)^2$.

203. а) $(n - 1)3^{n+1} + 3$; б) $(3^{n+1} - 2n - 3)/(4 \cdot 3^{n-1})$.

204. а) $(1 + (-1)^{n+1} \cdot 2^n \cdot (3n + 1))/9$; б) $(2^n + (-1)^{n+1} \cdot (6n + 1))/(9 \cdot 2^{n-1})$.

205. $S = (n^2 - 2n + 3) \cdot 2^{n+1} - 6$.

207. а) Положите в равенстве $a_{k+1} = a_{k+2} - a_k$ $k = 2, 4, 6,..., 2n - 2$; б) положите в равенстве $a_{k+1} = a_{k+2} - a_k$ $k = 1, 3, 5, ..., 2n - 1$. Можно также использовать утверждения задач 206 и 207 а); в) примените метод математической индукции.

§ 6. Прогрессии

209. 453150. **210.** 2970000. **211.** 34850. **212.** 700. **215.** 3 : 4 : 5.

216. 5 : 3. **218.** 2; 6; 10; ... . **220.** Неверно. **221.** Не могут.

223. $a_k = (b + c)/2$, $a_m = (2bm + (c - b)k)/2m$.

224. 0. **225.** $(b - c)(k + n)/(k - n)$.

229. 27. Обозначим общий член данной последовательности через a_n. Сложите равенства

$$a_1 = 1,\ a_2 - a_1 = 6,\ a_3 - a_2 = 12,\ ...,\ 2107 - a_{n-1} = 6(n - 1).$$

231. В качестве такой арифметической прогрессии можно взять последовательность

$$\frac{1}{k!};\ \frac{2}{k!};\ \frac{3}{k!};\ \ldots;\ \frac{k}{k!}.$$

233. -1; 0; 1; 2 или 2; 1; 0; -1.

235. Достаточно доказать неравенство $a_2a_{n-1} > a_1a_n$ $(n > 3)$, где a_n — n-й член арифметической прогрессии.

236. 1; 2; 4 или 1; -3; 9. **237.** 2.

238. Равносторонние треугольники. **239.** $6a(2 + \sqrt{3})$, $a^2\sqrt{3}$.

240. $2\pi a\sqrt{3}/3$, $\pi a^2/9$. **241.** Могут, например, 1; 4; 4^2;...; 4^{n-1}.

242. $(\sqrt{5} - 1)/2 < q < (\sqrt{5} + 1)/2$.

246. $a_k = \sqrt{bc}$, $a_m = b\cdot\left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{k}{2m}}$. **247.** $\left(\frac{S}{S'}\right)^{\frac{n}{2}}$.

249. а) Можно, например, $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{8^2}$; $\frac{1}{8^3}$; ...;

б) можно, например, $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{36}$; $\frac{1}{216}$; ...; в) нельзя, так как сумма исходной геометрической прогрессии, равная 2, меньше $\frac{5}{2}$.

251. $q \geq 2$. Очевидно, $q > 1$. На основании условия получаем:

$$a_{n+1} > S_n, \quad a_1q^n > \frac{a_1q^n - a_1}{q-1}, \quad q^n > \frac{q^n - 1}{q-1},$$

$$q^n \cdot (q - 1) > q^n - 1, \quad q^n(q - 2) > -1, \quad q^n(2 - q) < 1.$$

Рассмотрим два случая.

1) Пусть $q \geq 2$. Тогда последнее неравенство выполняется при любом n.

2) Пусть $1 < q < 2$. Приведем это неравенство к виду: $q^n < \frac{1}{2-q}$. Но последнее неравенство не может выполняться при любом n, так как при $q > 1$ степень q^n при неограниченном возрастании n неограниченно возрастает.

254. 531. **255.** Когда они равны. **257.** 3, 6, 12 или 27, 18, 12.

258. 6, 18, 54 или 26, 26, 26. **259.** 1, 3, 9 или 1/9, $-5/9$, 25/9.

260. 12, 3, -6 или -6, 3, 12. **261.** 2, 6, 18, 30 или 32, 16, 8, 0.

263. -2. **264.** 1, $3 \pm 2\sqrt{2}$. **265.** 0,2.

267. Обозначим n-й член геометрической прогрессии через b_n. Тогда на основании характеристического свойства геометрической прогрессии

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1}, \quad (a + md)^2 = (a + kd)(a + ld),$$

где m, k, l — натуральные числа. Выразите отсюда отношение $\frac{a}{d}$.

268. Если первый член обеих прогрессий положителен, то у арифметической прогрессии, а если отрицателен, то у геометрической.

Обозначим члены арифметической прогрессии через a, $a + d$, $a + 2d$, а члены геометрической — через a, aq, aq^2. При этом $aq^2 = a + 2d$. Отсюда

$$a + d = aq^2 - d.$$

Составим разность между числами $a + d$ и aq и исследуем ее знак:

$$a+d-aq=aq^2-d-aq=aq^2-\frac{aq^2-a}{2}-aq=\frac{1}{2}(aq^2-2aq+q)=\frac{1}{2}a(q-1)^2.$$

Следовательно, знак этой разности совпадает со знаком a.

Глава II. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

§ 7. Алгебраические уравнения

269. а) -2, $2/3$, $3/2$; б) -1, 3, 4; в) 1, 1, $(3 \pm \sqrt{5})/2$; г) 1, -1, 2, 4; д) 2, $\sqrt{2} \pm 1$, $-\sqrt{2} \pm 1$. В каждом из примеров а)—д) проверьте делители свободного члена многочлена, стоящего в левой части уравнения.

270. а) $2/3$, $2/3$, $-5/3$. Введите подстановку $3x = y$. б) $-2/3$, $(1 \pm \sqrt{10})/3$. Умножьте уравнение на 3 и положите $3x = y$. в) $-3/5$, $(3 \pm \sqrt{109})/10$; г) $1/2$, $-1/2$; д) 2, $-1/2$, $\pm\sqrt{3}/3$.

271. а) $(5 \pm \sqrt{21})/2$, $(-5 \pm \sqrt{17})/2$. Разложите многочлен в левой части уравнения на множители, являющиеся квадратными трехчленами. б) $\pm\sqrt{3}$; в) $\pm\sqrt{10}$, $(-1 \pm \sqrt{21})/2$; г) -1, $(3 \pm \sqrt{5})/2$, $(1 \pm \sqrt{5})/2$.

273. а) 1, 1. Разложите трехчлен $x^4 + x^2 + 1$ на множители $x^2 + x + 1$ и $x^2 - x + 1$. б) Если $a \neq b$, то $x = -a - b$; если $a = b$, то $x_1 = -2a$, $x_2 = x_3 = a$. Представьте $a^3 + b^3$ в виде $(a + b)^3 - 3ab(a + b)$.

275. а) $(-3 \pm \sqrt{21})/2$; б) 2, 3; в) -1, $2/3$, $(-1 \pm \sqrt{17})/6$; г) -1, 1, 3, 5; д) $(3 \pm \sqrt{29})/2$, $(3 \pm \sqrt{25+4\sqrt{30}})/2$, $(3 \pm \sqrt{25-4\sqrt{30}})/2$; е) $-1/2$, $-5/4$; ж) $2 \pm \sqrt{2}$, $-3 \pm \sqrt{7}$.

277. а) 1, $(-1 \pm \sqrt{33})/16$; б) $(1 \pm \sqrt{5})/2$; в) $6 \pm 4\sqrt{2}$. Введите подстановку $\frac{x+2}{\sqrt{x}} = y$ и возведите это равенство в квадрат.

279. а) 1, 3; б) a, b; в) -3, -5, $(-9 \pm \sqrt{5})/2$; г) 2, 4; д) -2, -1, 0; е) 2, 4; ж) -2, 2.

281. а) $-8/3$, $2 \pm \sqrt{19}$; б) -1; в) 1, 2, $(1 \pm \sqrt{5})/2$, $(2 \pm \sqrt{2})/2$; г) $-11/5$.

283. а) $2/3$, $3/2$, -2, $-1/2$; б) 2, $1/2$; в) -1, -1. **287.** а) -1; б) -1, 2, 2, $1/2$, $1/2$.

289. а) $(3 \pm \sqrt{5})/2$; б) 4, $-3/4$, $(-21 \pm \sqrt{633})/8$; в) -1, $(-1 \pm \sqrt{5})/2$, $(-1 \pm \sqrt{17})/2$.

291. $a \neq -1/2$.

292. Если $b = a + c$, то $x_1 = -1$, $x_2 = -c/a$; если $b = -a - c$, то $x_1 = 1$, $x_2 = c/a$.

294. -6. **295.** $3x^2 + 4x + 1 = 0$ или $3x^2 + 2x - 1 = 0$.

297. Рассмотрим два случая, в зависимости от знака $a + c$.

1) Пусть $a + c \geq 0$.

Так как $b > a + c \geq 0$, то

$$b^2 > (a + c)^2 \geq 4ac, \quad D = b^2 - 4ac > 0.$$

2) Пусть $a + c < 0$.

Так как по условию $a > 0$, то отсюда $c < 0$. Тогда

$$-ac > 0, \quad D = b^2 - 4ac > 0.$$

299. а) -1, a, $2a$; б) если $a \geq 0$, то $x_1 = 1$, $x_{2,3} = a \pm \sqrt{a}$; если $a < 0$, то $x = 1$; в) a, b, c.

300. $a \geq -25/4$. Преобразуем левую часть уравнения:

$$(x-1)(x-2)(x+3)(x+4) = (x^2+2x-3)(x^2+2x-8).$$

Положим $x^2 + 2x - 8 = y$. Теперь нужно найти множество значений функции $z = y(y+5)$, учитывая, что

$$y = x^2 + 2x - 8 = (x+1)^2 - 9 \geq -9.$$

301. $(-2; 2)$, $(2; -2)$, $(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2}; -\sqrt{2})$. Приведите уравнение к виду:

$$(3x^2 - 2a^2 + ab)^2 + (3a^2 - ab + 2b^2 - 12x)^2 + (x-2)^2 = 0.$$

302. Если $a \neq \pm 1$, $a \neq 0$, то $x = a + \dfrac{1}{a}$; если $a = 1$, то $x_1 = 2$, $x_2 = -1$; если $a = -1$, то $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; при $a = 0$ уравнение теряет смысл.

304. а) $2a + 2$, $(2a + 1 \pm \sqrt{4a^2 - 4a + 9})/2$; б) если $|a| \geq 2\sqrt{2}$, то $x_1 = -a$, $x_{2,3} = (-a \pm \sqrt{a^2 - 8})/2$; если $|a| < 2\sqrt{2}$, то $x = -a$; в) если $a \geq 3/4$, то

$$x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{4a+1})/2, \quad x_{3,4} = (1 \pm \sqrt{4a-3})/2;$$

если $-1/4 \leq a < 3/4$, то $x_{1,2} = (-1 \pm \sqrt{4a+1})/2$; если $a < -1/4$, то решений нет; г) если $a \geq 1$, то

$$x_1 = (2a + 1 + \sqrt{4a+1})/2, \quad x_2 = (2a - 1 - \sqrt{4a-3})/2;$$

если $3/4 < a < 1$, то $x = (2a - 1 - \sqrt{4a-3})/2$; если $0 < a \leq 3/4$, то $x = (2a + 1 + \sqrt{4a+1})/2$; если $-1/4 \leq a \leq 0$, то $x_{1,2} = (2a + 1 \pm \sqrt{4a+1})/2$, если $a < -1/4$, то решений нет.

306. а) $(-\sqrt{2} \pm \sqrt{8\sqrt{2} - 2})/2$. Приведите уравнение к виду:

$$(x^4 + 2x^2 + 1) - 2(x^2 - 4x + 4) = 0.$$

б) $(-\sqrt{2} \pm \sqrt{4\sqrt{2} - 2})/2$; в) 2, -4.

308. а) Нет решений; б) $\sqrt{2}$, $(1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}})/2$. Докажите, что $x = \sqrt{2}$ — корень уравнения.

310. а) $-1/3$; б) $1 \pm \sqrt[4]{2}$. **311.** а) Нет решений. Положите $x\sqrt{2} = y$. б) 1, $1/2$, $(3 \pm \sqrt{13})/2$. **312.** 0.

313. 0, -1. Умножьте уравнение на $(x-1)^2$ и воспользуйтесь формулой разложения на множители выражения $x^n - a^n$ (§ 1, п. 1.1).

316. а) $\cos 2\pi/9$, $\cos 4\pi/9$, $\cos \pi/7$, $\cos 3\pi/7$; б) $\cos \pi/9$, $\cos 5\pi/9$, $\cos 7\pi/9$. Приведите уравнение к виду: $4x^3 - 3x = \dfrac{1}{2}$. Положите $x = \cos\alpha$, где $\alpha \in (0; 2\pi)$, и воспользуйтесь формулой косинуса тройного аргумента.

§ 8. Системы алгебраических уравнений

318. а) $(-2; 5; 1; -2)$; б) $(1; 1; 1; ...; 1)$. **319.** а) $16/7$; б) $4, -9/11$. **321.** $(1/2; \pm 4)$. **322.** а) $(0; 0; 0)$, $(2; 3; 1)$, $(2; -3; -1)$, $(-2; 3; -1)$, $(-2; -3; 1)$; б) $(1; 2; 3)$, $(-1; -2; -3)$.

323. а) $(2; -1; 3; -2)$; б) $(-1; 1; -1; 1; ...; -1; 1)$.

325. а) Нет решений; б) $(0; -1)$, $(-1; 0)$, $(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$, $(-\sqrt{2}/2; -\sqrt{2}/2)$. **326.** а) $(3; 5)$, $(-3; -5)$, $(5/3; 13/3)$, $(-5/3; -13/3)$. Вычтите уравнения системы. б) $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(-2; 0)$.

328. а) $(0; 0; 0)$, $(2; 2; 2)$, б) $(1; 1; 1)$. Сложите все три уравнения системы. в) $(20/7; 13/14; 45/14)$, $(-20/7; -13/14; -45/14)$. Приведите систему к виду:

$$(x + y + z)(x + y - z) = 4,$$
$$(x + y + z)(y + z - x) = 9,$$
$$(x + y + z)(z + x - y) = 36$$

и сложите все три уравнения последней системы.

331. а) $(3; 1)$, $(-1; -3)$, $(\sqrt[3]{13}; -\sqrt[3]{13})$; б) $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(1; -3)$; в) $(0; 0)$, $(2; 2)$, $(-2; -2)$, $(\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; \sqrt{2})$, $((1 + \sqrt{5}/2; (1 - \sqrt{5})/2)$, $((1 - \sqrt{5})/2; (1 + \sqrt{5})/2)$, $(\sqrt{5} - 1)/2); -(\sqrt{5} + 1)/2)$, $(-(\sqrt{5} + 1)/2; (\sqrt{5} - 1)/2)$; г) $(2; 3)$, $(601/26; -19/14)$; д) $(2; 1)$, $(-2; -1)$, $(2; -1)$, $(-2; 1)$; е) $(1; 0)$; ж) $(1 \pm \sqrt{2}; -1)$. Прибавьте к первому уравнению удвоенное второе; з) $(0; 0)$, $(2/(3 + \sqrt[3]{2}); -2/(3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}))$. Умножьте первое уравнение на x, второе — на y и сложите полученные уравнения.

333. а) $(2; 1)$, $(-1; 2)$, $(11/5; 2/5)$, $(-11/5; -2/5)$; б) $(1; 1)$, $(-1; 2)$, $(-2/7; -11/7)$, $(-22/13; 23/13)$; в) $(0; 0)$, $(-1; 2)$, $(-4/7; -10/7)$.

335. а) $(0; 0; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(0; 1; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(1/4; 1/4; 1/4)$; б) $(1; 1; 1)$, $(-2; -2; -2)$; в) $(0; 0; 0)$, $(0; -1; 1)$; г) $(0; 0; 0)$, $(0; 1; 1)$, $(1; 0; 1)$, $(1; 1; 0)$; д) $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$, $(-5/4; 3/4; 3/4)$, $(3/4; -5/4; 3/4)$, $(3/4; 3/4; -5/4)$, $((-1 + \sqrt{17})/2; (-1 + \sqrt{17})/2; (-1 + \sqrt{17}/2)$, $(-(1 + \sqrt{17}/2; -(1 + \sqrt{17})/2; -(1 + \sqrt{17})/2)$.

337. а) $(1; 3; 6)$, $(-1; -3; -6)$; б) $(0; 0; 0)$, $(-1; -2; 3)$, $(-13/5; -13/10; 39/10)$; в) $(1; 3; 2)$, $(-3; -5; -4)$. Прибавьте по 1 к обеим частям каждого из уравнений.

339. а) $(-1; 2; 5)$, $(-1; -5; -2)$, $(-2; 1; 5)$, $(-2; -5; -1)$, $(5; 1; -2)$, $(5; 2; -1)$; б) $(0; 0; 0)$, $(\sqrt{2}/4; \sqrt{2}/4; \sqrt{2}/4)$, $(-\sqrt{2}/4; -\sqrt{2}/4; -\sqrt{2}/4)$; в) $(4; 3; 1)$, $(32/3; -1/3; -7/3)$, $(32/3; -31/3; 23/3)$, $(52/3; -41/3; 13/3)$; г) $(0; 0; 0)$, $(1; 1; 1)$, $(-1; -1; -1)$. Перемножьте все три уравнения системы; д) $(1; -1; 2)$, $(-1; 1; 2)$, $(1; 2; -1)$, $(2; 1; -1)$, $(-1; 2; 1)$, $(2; -1; 1)$. Равенство $x + y = 2 - z$ возведите в квадрат и в куб.

341. а) $(2; 3)$, $(3; 2)$; б) $(3; 2)$, $(2; 3)$, $(1; -6)$, $(-6; 1)$; в) $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(0; -3)$, $(-3; 0)$, $(1; -2)$, $(-2; 1)$; г) $(2; 2)$; д) $(1; 2)$, $(2; 1)$; е) $(3; -2)$, $(-2; 3)$; ж) $(1; 2)$, $(2; 1)$; з) $(0; 0)$, $(2; 1)$, $(1; 2)$, $(-2; -1)$, $(-1; -2)$; и) $(0; 0)$, $(-2; -1)$, $(-1; -2)$, $(2/3; -1/3)$, $(-1/3; 2/3)$; к) $(2; 3)$, $(3; 2)$, $(-2; -3)$, $(-3; -2)$; л) $(3; 1)$, $(1; 3)$; м) $(a + b; a - b)$, $(a - b; a + b)$, $(b - a; -a - b)$, $(-a - b; b - a)$.

344. а) (0; 0), (4; 2), (−2; −4); б) (4; 6); в) (4; 1), (1; 4); г) (8; 64), (64; 8); д) (12; 3), (3; 12); е) (5; 1), (−1; −5).

345. а) 0, 2; б) 1, 4; в) $3\sqrt{21}$, $-3\sqrt{21}$; г) 0.

347. а) (7; −1), (40/3; 35/3), (−4/3; 13/3), (−23/3; −25/3); б) (5; −2), (−5; 2), $(3\sqrt{7}/7; \sqrt{7})$, $(-3\sqrt{7}/7; -\sqrt{7})$; в) (5; 1), (−5; −1), $(\sqrt{6}; 4\sqrt{6})$, $(-\sqrt{6}; -4\sqrt{6})$; г) (2; 3; 4).

349. а) (2; 1), (−2; −1); б) (4; 4), (−4; −4), $(8\sqrt{10}/5; -4\sqrt{10}/5)$, $(-8\sqrt{10}/5; 4\sqrt{10}/5)$; в) (1; 1), (−1; −1); г) (2; 1), $(19\sqrt[3]{4}/4; -17\sqrt[3]{4}/4)$; д) (2; 1), $(19\sqrt{2}/4; -17\sqrt{2}/4)$.

350. а) (0; 0), $(2/(3+\sqrt[3]{2}); -\sqrt[3]{4}/(3+\sqrt[3]{2})$; б) $((\sqrt{3}+1)/2; (\sqrt{3}-1)/2)$, $(-(\sqrt{3}+1)/2; (1-\sqrt{3})/2)$. Из второго уравнения выразим x^2+y^2: $x^2+y^2=\dfrac{1}{xy}$. Сложим и вычтем уравнения

$$x^2+y^2=\frac{1}{xy},\quad x^2-y^2=\sqrt{3}.$$

Будем иметь:

$$2x^2=\frac{1}{xy}+\sqrt{3},\quad 2y^2=\frac{1}{xy}-\sqrt{3}.$$

Перемножим почленно уравнения последней системы.

в) (3; 2; 1), $(343/\sqrt[3]{18}; 1/\sqrt[3]{18}; -5/\sqrt[3]{18})$. Приведите систему к виду

$$x^3=xyz+21,\quad y^3=xyz+2,\quad z^3=xyz-5$$

и перемножьте почленно все три последних уравнения.

г) (0; 0; 0), (1; 2; 5), (−1; −2; 5), (−1; 2; −5), (1; −2; −5).

352. а) $(2\cos 3\pi/8; 2\sin 3\pi/8)$, $(2\cos 7\pi/8; 2\sin 7\pi/8)$, $(2\cos 11\pi/8; 2\sin 11\pi/8)$, $(2\cos 15\pi/8; 2\sin 15\pi/8)$; б) (0; 0), $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Приведите систему к виду:

$$y=\frac{2x}{1-x^2},\quad x=\frac{2y}{1-y^2}.$$

(Проверьте, что при делении на $1-x^2$ и на $1-y^2$ решения не теряются.) Введите подстановку: $x=\operatorname{tg}\alpha$, где $\alpha\in\left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\alpha\neq\pm\dfrac{\pi}{4}$. Тогда

$$y=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha,\quad x=\operatorname{tg}4\alpha\Rightarrow\operatorname{tg}4\alpha=\operatorname{tg}\alpha.$$

354. а) $(x; x; x)$, где x — любое число; б) (0; 0; 0); в) (0; 0; 0), (1; 1; 1), (−1; −1; −1); г) (1; 1; 1). Сложите первое и третье уравнения и вычтите удвоенное второе. д) (2; 1); е) (1; 1), (−1; 1). Приведите первое уравнение системы к виду

$$x^2-1=(y-1)(y^2-y-1)$$

и докажите невозможность каждого из случаев $y > 1$, $0 \le y < 1$ и $y < 0$. Остается $y = 1$; ж) (1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 0), (0; 0; 1; 0), (0; 0; 0; 1). Из второго уравнения системы следует, что каждое из неизвестных по модулю не превосходит 1. Тогда

$$x^3 \le x^2, \quad y^3 \le y^2, \quad z^3 \le z^2, \quad t^3 \le t^2.$$

Сложим эти неравенства почленно:

$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \le x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

Это неравенство должно превратиться в равенство, а следовательно, каждое из записанных выше неравенств превращается в равенство. Значит, каждое из неизвестных может принимать только значения 0 или 1. з) (0; 0; 0; 0), (1/9; 1/9; 1/9; 1/9).

356. а) (9; 3; 1), (1; 3; 9); б) (1; 2; 1), (2; 1; 1); в) если $a = 0$, то $(x; x)$, где x — любое; если $a \ne 0$, то (0; 0), $(2a; 4a)$, $(2a/3; -4a/3)$; г) если $a = 0$, то (0; 0); если $a \ne 0$, то $(a; 0)$, $(0; a)$; д) (10; 5; 6; 3), (10; 6; 5; 3), (3; 5; 6; 10), (3; 6; 5; 10).

358. а) (0; 0; 0), (0; 1; 1), (1; 0; 1), (−1; 0; −1), (−1; −1; 0), $((1 + \sqrt{5})/2; (1 + \sqrt{5})/2; (1 + \sqrt{5})/2)$; $((1 - \sqrt{5})/2; (1 - \sqrt{5})/2; (1 - \sqrt{5})/2)$; б) (0; 0; 0), (1; 1; 1), (−1; −1; −1); в) (0; 0), (2; 4), (4; 2); г) (0; 0; 0), (0; 0; 3), (0; 2; 0), (1; 0; 0); д) (5; −2; −3), (−5; 2; 3), (2; −5; 3), (−2; 5; −3); е) (1; 1; 1; 1), (3; −1; −1; −1), (−1; 3; −1; −1), (−1; −1; 3; −1), (−1; −1; −1; 3).

360. а) (12; 3; 1), (3; 3; 4); б) $(x; 2x; x)$, $(x; 2x; -x)$, где x — любое. Исключите из первых двух уравнений z^2; получится уравнение, однородное относительно x и y; в) $(2; \sqrt[3]{3}; \sqrt[3]{9})$, $(\sqrt[3]{4}/2; -\sqrt[3]{36}/2; \sqrt[3]{12}/2)$. Выразите из уравнений системы x^3, y^3 и z^3 через xyz. Должно получиться:

$$x^3 = xyz + 2, \quad y^3 = xyz - 3, \quad z^3 = xyz + 3.$$

Перемножьте эти три уравнения; г) (3; 2; 1; 2), (2; 3; 2; 1). Умножьте второе и третье уравнения системы на $z + t$.

361. $a + b + c = 0$. Пусть система имеет решение. Складывая все три уравнения, будем иметь:

$$(a + b + c)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Так как $x^2 + x + 1$ не обращается в нуль, то $a + b + c = 0$. Обратно, пусть $a + b + c = 0$. Тогда система имеет решение, а именно, $x = 1$.

§ 9. Дробно-рациональные уравнения

363. а) ±3, $\pm\sqrt{65}/13$; б) 2, 1/2; в) 2, 1/2, $2 \pm \sqrt{3}$; г) 7, 1/7; д) 2, 1/2; е) 2, −7; ж) 1, 2, $-2 \pm \sqrt{2}$; з) 0, −5/2.

365. а) −1, 3; б) 0; в) $\pm\sqrt{2}$, $\pm\sqrt{3}$; г) $(5 \pm \text{v}/33)/8$. Освободитесь от знаменателей дробей, соберите все члены в левой части уравнения и разложите многочлен четвертой степени, образовавшийся в левой части (подумайте, как полу-

чить многочлен именно четвертой степени, а не шестой), на квадратные множители. См., например, решение задачи 51 из § 1.

367. а) $(1 \pm \sqrt{13})/6$, $(1 \pm \sqrt{37})/18$; б) 0, 1; в) 2, 4, $-1 \pm 2\sqrt{2}$; г) 0, -3, $(-3 \pm \sqrt{13})/2$; д) ± 2, $\pm 3\sqrt{21}/7$; е) $-7/2$; ж) $(1 + \sqrt{2} + \sqrt{2\sqrt{2}-1})/2$; з) $(\pm 3 \pm \sqrt{5})/2$ (четыре решения); и) $1 \pm \sqrt{19}$; к) 0, ± 2, ± 4; л) 3, 1/3.

369. а) 2, -1; б) 1, $-5/7$; в) 0, $6(1 \pm \sqrt{26})/5$; г) $7 \pm \sqrt{34}$. Положите $x^2 - 8x + 15 = y$; д) $-11/5$. Введите новые переменные:

$$4\frac{x+3}{x-1} = y, \quad \frac{x+3}{x+2} = z.$$

Тогда

$$y^3 - z^3 = 63, \quad y - z = \frac{3}{4}yz;$$

е) $-5/2$. Представьте 370 в виде $31 \cdot 11 + 29$.

371. а) 0, $\pm 5\sqrt{2}$; б) 0, $-5/2$; в) 0, 99, 4901/99; г) 6/5, 12/5; д) -1, -2, -3; е) если $a \neq 0$, то $x_1 = -5a/2$, $x_{2,3} = (-5a \pm a\sqrt{5})/2$; если $a = 0$, то решений нет.

§ 10. Системы рациональных уравнений

373. а) (6; 6), $(3(\sqrt{5} - 1)/2; -3(\sqrt{5} + 1)/2)$, $(-3(\sqrt{5} + 1)/2; 3(\sqrt{5} - 1)/2)$; б) (4; 2), $(-4; -2)$; в) (3; 1), $(-5/3; \sqrt{65}/3)$, $(-5/3; -\sqrt{65}/3)$; г) (1; 1; 1), $(-1; -1; -1)$.

375. а) (5; 1), $(-5/7; -11/29)$; б) (0; 2), $(0; -2)$, $(1; -3)$; в) (1; 2; 1/2), (1; 1/2; 2), (2; 1; 1/2), (2; 1/2; 1), (1/2; 1; 2), (1/2; 2; 1); г) (1/20; 7/20; $-3/20$); д) $(-2; 3; 4)$, $(2; -3; 4)$, $(2; 3; -4)$.

377. а) (17/4; 9); б) (2; 1), $(6; -3)$, $(2\sqrt{3}(\sqrt{3} - 1); 2(\sqrt{3} - 1))$, $(2\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1); -2(\sqrt{3} + 1))$; в) $(-12/5; 12/29)$, $(-12/5; 12/11)$; г) (2; 5), $(-2; -5)$, (1/2; 5), $(-1/2; -5)$; д) $(6; -3)$, $(-6; 3)$, $(3; -6)$, $(-3; 6)$; е) (18; 12; 6), $(18; -12; -6)$, $(-18; 12; -6)$, $(-18; -12; 6)$.

379. а) $(\sqrt{3}/5; 5\sqrt{3}/9; 6\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}/5; -5\sqrt{3}/9; -6\sqrt{3})$. Из первого уравнения выразим xy:

$$xy = 2 - \frac{6}{xz}.$$

Это выражение для xy подставим в третье уравнение:

$$yz - 3\Big/\left(2 - \frac{6}{xz}\right) = 1, \quad yz - \frac{3xz}{2xz - 6} = 1.$$

Теперь нужно решить систему двух уравнений, состоящую из последнего уравнения и второго уравнения исходной системы.

б) (3; 3; 3). Приведите второе уравнение к виду

$$\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{x}\right)\Big/\left(\frac{y}{x}\right)=3$$

и положите $\frac{y}{x}=t$. Тогда

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3t-t^2.$$

Кроме того, из первого уравнения системы

$$\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=3-t.$$

в) (1; 2; 3), (2; 3; 1).

381. а) $(\sqrt{2}/2;\ \sqrt{2}/2;\ 2\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}/2;\ -\sqrt{2}/2;\ -2\sqrt{2})$; б) (4; 5; 6), (355/42; 190/21; −5/2); в) (3; 2; 1), (3; −2; −1), (−3; 2; −1), (−3; −2; 1); г) (1; 3; 1/3), (1; 1/3; 3), (3; 1; 1/3), (3; 1/3; 1), (1/3; 1; 3), (1/3; 3; 1); д) (1; 2). Приведите систему к виду

$$\frac{y^2+1}{y(xy-1)}=\frac{5}{2},\quad \frac{x^2+1}{x(xy-1)}=2$$

и вычтите эти уравнения. Из полученного уравнения выразите y через x (или x через y).

383. а) (1; 1; −2), (−1; −1; 2); б) (1; 1; −1), (1; −1; 1), (−1; 1; 1), (−1; −1; −1); в) (4; 2), (−4; −2); г) (2; 2; 0).

384. а) (2; 1; 1), (1; 2; 1), (1; 1; 2); б) (1; 1; 1), (1; −1; −1), (−1; 1; −1), (−1; −1; 1); в) (5/3; 1; 1/3), (−5/3; −1; −1/3); г) (15/8; 15/8; 4/15), (−37/72; −37/8; 12/37); д) (3; 1), (1/3; −1).

386. а) (1; 1), (−1, −1); б) (1; 1; 1), (−1; −1; −1); в) (0; 0; 0).

387. а) (2; 1/2), (1/2; 2); б) (2; −1), (−2; 1), (1; −2), (−1; 2); в) (2; 3), (3; 2), (1/2; 1/3), (1/3; 1/2).

§ 11. Иррациональные уравнения

389. а) 11; б) 1, $\sqrt{5}-2$; в) 1; г) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$; д) $2\sqrt{3}$; е) $5(1+\sqrt{2})$; ж) 0; з) 3; и) $(5\pm\sqrt{13})/2$, $(5\pm\sqrt{33})/2$; к) $\sqrt{(1+\sqrt{2})/2}$.

391. а) 2, 11; б) $3\sqrt{21}$, $-3\sqrt{21}$; в) 0; г) 1/3, −3/2, −2/5.

393. а) −1, $(3+\sqrt{41})/2$; б) нет решений; в) 6, −3; г) $(-1\pm\sqrt{5})/2$; д) 841/144 (подстановка $\sqrt{x}+\sqrt{x+7}=t$); е) 64; ж) 1; з) 5/3, 5/4; и) 3, −3/4, $9(9-\sqrt{97})/8$. Приведите уравнение к виду

$$4\left(\frac{x}{\sqrt{x+1}}\right)^2-12\frac{x}{\sqrt{x+1}}-27=0$$

и введите подстановку $\frac{x}{\sqrt{x+1}} = y$.

395. а) 49, 12; б) $-3/4$; в) 1, -6; г) 81, 16; д) 8; е) 1, 2, 10.

396. а) 1, $(1 + \sqrt{5}/2$; б) 2, -2; в) $-1/2$.

398. а) $1/6$; б) 2; в) 2. **400.** а) 2; б) 1; в) нет решений; г) 0; д) нет решений; е) нет решений, ж) -1. **402.** а) 12; б) 16; в) 80; г) 3. **404.** 1. **406.** а) $6 \pm 4\sqrt{2}$; б) $2/3$, $4\sqrt{2}/3$; в) $\sqrt{2} - 1$; г) 8; д) -2. Приведите уравнение к виду

$$\sqrt{2x^2-1}-\sqrt{x^2-x+2}=\sqrt{2x^2+2x+3}-\sqrt{x^2-3x-2}$$

и возведите это новое уравнение в квадрат.

408. а) $\cos(3\pi/10)$; б) $\sqrt{2}$; в) $(4 + \sqrt{6} \pm \sqrt{2})/4$; г) $\frac{1}{2}\cos(3\pi/10)$. Введите подстановку: $2x = \cos 2\alpha$, где $\alpha \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; д) $2\cos(2\pi/9)$. Введите подстановку: $x = 2\cos t$, где $t \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

§ 12. Системы уравнений, содержащие иррациональные уравнения

410. а) (9; 4), (4; 9); б) (1; 2); в) (3; 4), (4; 3), $(-3; -4)$, $(-4; -3)$; г) $(19; -15)$; д) $(25/3; 16/3)$; е) (0; 0); ж) (1; 0).

411. а) (1; 1); б) $(2\sqrt{65}; 1/\sqrt{65})$, $(-1/\sqrt{65}; -2/\sqrt{65})$; в) $(5\sqrt{2}/2; -7\sqrt{2}/2)$, $(-5\sqrt{2}/2; 7\sqrt{2}/2)$, $(2\sqrt{2} - \sqrt{3}; 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$, $(-2\sqrt{2} + \sqrt{3}; -2\sqrt{2} - \sqrt{3})$. Возведите оба уравнения в квадрат и сложите полученные уравнения; г) $((32 + 7\sqrt{15})/4; 7 + 2\sqrt{15})$. Возведите оба уравнения в квадрат и вычтите новые уравнения.

413. а) (18; 8); б) (3; 3/2), (24/23; 24).

415. а) (8; 1), (1; 8); б) (9; 4), (4; 9); в) $(\sqrt{2}/4; -\sqrt{2}/4)$, $(-\sqrt{2}/4; \sqrt{2}/4)$; г) (3; 1), (5; -1), $(4 + \sqrt{10}; 3 - \sqrt{10})$, $(4 - \sqrt{10}; 3 + \sqrt{10})$; д) $(\pm 2; \pm 3)$ (четыре решения); е) (9; 4), (4; 9), $(-9; -4)$, $(-4; -9)$. По условию x и y имеют одинаковые знаки. Приведите систему к виду

$$|x|+|y|=\sqrt{xy}+7, \quad \sqrt{xy}(|x|+|y|)=78$$

и введите новые переменные $|x| + |y| = z$, $\sqrt{xy} = t$; ж) $(\sqrt{10}; \sqrt{6})$, $(\sqrt{10}; -\sqrt{6})$; з) (26; 10), (650; -646); и) (64; 1), (1; 64); к) (12; 4), (34; -30); л) (0; 0; 0), (2; 1; 3), $(\sqrt[3]{876}/36; -5\sqrt[3]{876}/36; 7\sqrt[3]{876}/36)$. Введем новые переменные:

$$xyz = t, \quad \sqrt{x^3+y^3+z^3}=u.$$

Тогда

$$x^3-t=\frac{1}{3}u,\quad y^3-t=-\frac{5}{6}u,\quad z^3-t=\frac{7}{2}u;$$

$$x^3=t+\frac{1}{3}u,\quad y^3=t-\frac{5}{6}u,\quad z^3=t+\frac{7}{2}u.$$

Сложите и перемножьте уравнения последней системы.

417. а) (1; 2); б) (5; 4; 5); в) (−1; −1; −1); г) (1; 4; 9). Введите подстановки:

$$x^{\frac{3}{2}}=t,\quad y^{\frac{3}{2}}=u,\quad z^{\frac{3}{2}}=v.$$

420. а) (0; 0), ($\sqrt{2}$; $\sqrt{2}/2$), ($3\sqrt{3}/4$; $\sqrt{3}/4$); б) (0; 0), (4; 3); в) (81; 729); г) (9; 1), (1; 9). Разделите первое уравнение на второе, воспользовавшись разложением на множители выражения $x^4 + x^2y^2 + y^4$ по формуле из задачи 43 (§ 1); д) (1; 1/5), (1; −1/5). Представьте первое уравнение системы в следующем виде:

$$(x-9y^2)-8y\sqrt{x^2-9xy^2}+16xy^2=0,\quad (\sqrt{x-9y^2}-4y\sqrt{x})^2=0.$$

е) (−1; 1). Приведите первое уравнение системы к квадратному относительно y.

§ 13. Уравнения и системы уравнений, у которых число неизвестных больше числа уравнений

422. а) (−1; −1); б) (2; 25); в) (1; y; z), где y и z — любые числа; (x; 2; z), где z — любое, $x \neq 1$; (x; y; −3), где $x \neq 1$, $y \neq 2$; г) (1; 1). Умножьте уравнение на 2; д) (±1/2; ±1/2) — четыре решения; е) (1/3; 2/3). Запишем уравнение в виде квадратного относительно x:

$$5x^2 - 2(y + 1)x + 2y^2 - 2y + 1 = 0.$$

Найдем его дискриминант:

$$\frac{1}{4}D=(y+1)^2-5(2y^2-2y+1)=-9y^2+12y-4=-(3y-2)^2\geq 0.$$

Отсюда $y = \frac{2}{3}$, $x = \frac{1}{3}$; ж) (1/3; 2/3).

423. а) (3; 2; −2); б) (−2; 1; 5); в) (3; 3; 0); г) (1/2; 0; 3/2).

Приведем систему к виду:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=4,\quad (x-1)^2+y^2+\left(z-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{1}{4}.$$

Из первого уравнения этой системы следует, что

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2\leq 4,\quad \left|x+\frac{3}{2}\right|\leq 2,\quad -2\leq x+\frac{3}{2}\leq 2,\quad -\frac{7}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}.$$

Аналогично из второго уравнения получаем: $\frac{1}{2} \le x \le \frac{3}{2}$. Тогда x может быть равен только $\frac{1}{2}$.

425. а) (± 1; 0; 0; 0), (0; ± 1; 0; 0), (0; 0; ± 1; 0), (0; 0; 0; ± 1); б) (2; 0; 0), (0; 2; 0), (0; 0; 2); в) (1; 1; 1). Сложим оба уравнения и учтем, что если $x > 0$, то $x + \frac{1}{x} \ge 2$, причем равенство здесь возможно только при $x = 1$.

427. а) (x; x), где $x \ge 0$; (x; 1), где $x \ge 0$, $x \ne 1$; б) (2; 2). По условию $x \ge 1$; $y \ge 1$. Положим

$$x = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad y = \frac{1}{\cos^2 \beta},$$

где α и β принадлежат промежутку $\left[0; \frac{\pi}{2}\right)$. Уравнение после упрощений сводится к уравнению

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta = 2.$$

Сумма двух синусов может быть равной 2 только тогда, когда каждый из синусов равен 1. Тогда

$$2\alpha = 2\beta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{\pi}{4}.$$

Осталось вычислить x и y.

429. а) (5; $1/10 + 2k/5$) ($k \in Z$); (-5; $1/10 + 2n/5$) ($n \in Z$); б) ($1 + (2k + 1)\pi$; 1) ($k \in Z$); ($2\pi n - 1$; -1) ($n \in Z$); в) нет решений; г) ($2\pi n$; $2\pi n$) ($n \in Z$).

430. $\left(1; 1; \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$ ($k \in Z$).

432. а) (x; x), где x — любое; б) (x; x), где $x > 0$; в) (x; x), где x — любое. Приведем уравнение к виду:

$$x - \sin x = y - \sin y.$$

Функция $z = x - \sin x$ возрастает на множестве действительных чисел, так как ее производная $z' = 1 - \cos x$ неотрицательна, обращаясь в нуль лишь в отдельных точках вида $x = 2\pi k$ ($k \in Z$). Поэтому имеется только одна возможность — $y = x$, где x — любое число.

434. а) (4; 2; 40); б) (1; 0; -1). **435.** (1/3; 1/3; 1/3). Возведем первое уравнение системы в квадрат и из полученного уравнения вычтем второе:

$$2xy + 2xz + 2yz = \frac{2}{3}.$$

На основании второго уравнения

$$3(x^2 + y^2 + z^2) = 1.$$

Теперь будем иметь:

$$1 = (x^2 + y^2 + z^2) + (x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) \ge \frac{1}{3} + 2xy + 2yz + 2zx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Полученное неравенство должно превратиться в равенство. Это возможно лишь при $x = y = z$, так как неравенство $x^2 + y^2 \geq 2xy$ превращается в равенство только при $x = y$.

437. а) $(x;\ 15x/8)$, где $x \geq 0$; б) $(x;\ 2/x)$, где $x > 0$; в) нет решений. Введем векторы $\bar{u}\ (x, y)$ и $\bar{v}\ (1;\ -1)$. Тогда

$$x - y - 2 < x - y = \bar{u} \cdot \bar{v} \leq |\bar{u}| \cdot |\bar{v}| = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{2}.$$

Отсюда следует, что при всех x и y

$$x - y - 2 < \sqrt{2(x^2 + y^2)}.$$

440. а) $(2;\ 2;\ -2)$; б) $(3/13;\ -4/13;\ 12/13)$; в) нет решений.

441. $(2 \pm \sqrt{3};\ 0)$. **443.** $(\pm\sqrt{2};\ \pm\sqrt{3};\ \pm\sqrt{2})$ (8 решений).

445. а) $1,\ 4 + \sqrt{23}$; б) $\pm\sqrt{5}$. **446.** а) $(\pm 1;\ \pm 1)$ (4 решения); б) $(3/2;\ \sqrt{3}/2;\ \sqrt{15}/2)$, $(-3/2;\ -\sqrt{3}/2;\ \sqrt{15}/2)$, $(15/14;\ -5\sqrt{3}/14;\ 5\sqrt{15}/14)$, $(-5/2;\ 5\sqrt{3}/6;\ 5\sqrt{15}/6)$.

§ 14. Составление уравнений (задачи на движение)

449. 60 км/ч. **450.** 12 км/ч, 4 км/ч. **451.** 8 км/ч. **453.** 4 м/с, 3 м/с.

454. В $2 + \sqrt{2}$ раза. Примем длину всей окружности за единицу. Обозначим путь AB по окружности через a (в долях этой единицы), а скорости мотоциклиста и велосипедиста соответственно через v_1 и v_2 (в долях единицы в час). Тогда

$$\frac{1+a}{v_1} = \frac{a}{v_2}, \quad \frac{3+a}{v_1} = \frac{1}{v_2}.$$

456. 36 км/ч, 18 км/ч. **458.** 8 км. **459.** 3 ч 40 мин, 2 ч 12 мин. **460.** В 11 ч. **461.** 12 м/с и 3 м/с, 360 м. **462.** 30 км/ч, 45 км/ч. **464.** 6 ч, 4 ч. **465.** 6 ч. **466.** 6,5 ч. **467.** 40 км/ч, 10 км/ч. Пусть K_1 и K_2 — пункты, в которых автомобиль оказался в первый и во второй раз (*рис.* 12). При этом K_1 находится между A и C; что касается пункта K_2, то он может оказаться между A и C, а может — между C и B. Пусть M_1 и M_2 — пункты, в которых велосипедист оказался в первый и во второй раз.

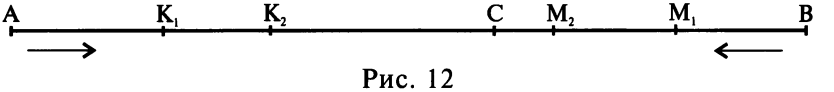

Рис. 12

Обозначим через v_1 км/ч и v_2 км/ч скорости автомобиля и велосипедиста. Будем иметь:

$$AK_1 = \frac{1}{4}v_1, \quad K_1C = 25 - \frac{1}{4}v_1,$$

$$AK_2 = \frac{1}{2}v_1, \quad K_2C = \left|25 - \frac{1}{2}v_1\right|,$$

$$M_1B = \frac{1}{4}v_2, \quad CM_1 = 15 - \frac{1}{4}v_2,$$

$$M_2B = \frac{1}{2}v_2, \quad CM_2 = \left|15 - \frac{1}{2}v_2\right|,$$

Так как по условию

$$K_1C = 1{,}2 \cdot CM_1, \quad K_2C = \frac{1}{2} \cdot CM_2,$$

то $25 - \frac{1}{4}v_1 = 1{,}2(15 - \frac{1}{4}v_2)$, $\left|25 - \frac{1}{2}v_1\right| = \frac{1}{2}\left|15 - \frac{1}{2}v_2\right|$.

469. 15 км/ч, 20 км/ч. **470.** 5 ч. **472.** В 3 раза. **473.** 18 км/ч. **474.** 12 км/ч. **475.** 14 мин, 18 мин 40 с. **477.** 10 км/ч, 50 км/ч. В условии не сказано, едут ли велосипедист и мотоциклист навстречу друг другу или один догоняет другого, поэтому при решении нужно рассмотреть оба случая.

479. В 9/8 раза. **480.** 5 мин 50 с. **481.** 3/2. Примем расстояние AB за единицу. Обозначим скорости первого, второго и третьего пешеходов соответственно через v_1, v_2 и v_3 (в долях единицы в час).

Обозначим через C место встречи первого и второго пешеходов, через M — пункт, в котором окажется третий пешеход, пройдя $\frac{1}{4}$ пути от B до A (*рис.* 13).

Следовательно, $BM = \frac{1}{4}$, $MA = \frac{3}{4}$.

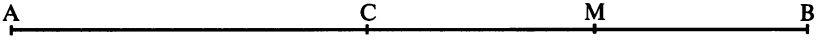

Рис. 13

Первый и второй пешеходы до встречи шли $\frac{1}{v_1 + v_2}$ ч. Тогда

$$AC = \frac{v_1}{v_1 + v_2}, \quad BC = \frac{v_2}{v_1 + v_2}.$$

Так как второй и третий пешеходы прибыли в A одновременно, то время второго пешехода на путь CA равно времени третьего на путь MA:

$$\frac{v_1}{(v_1 + v_2)v_2} = \frac{3}{4v_3}.$$

Третий пешеход на путь BM потратил время $\frac{1}{4v_3}$ ч. Тогда второй пешеход к тому моменту, когда третий оказался в пункте М, прошел путь

$$\frac{v_2}{v_1+v_2}+\frac{v_2}{4v_3}.$$

Первый пешеход к этому моменту прошел путь

$$\frac{v_1}{v_1+v_2}+\frac{v_2}{4v_3},$$

а значит, до B ему осталось пройти

$$1-\frac{v_1}{v_1+v_2}-\frac{v_1}{4v_3}.$$

Следовательно, по условию задачи

$$\frac{v_2}{v_1+v_2}+\frac{v_2}{4v_3}=2\left(1-\frac{v_1}{v_1+v_2}-\frac{v_1}{4v_3}\right).$$

После упрощений последнее уравнение приводится к такому виду:

$$\frac{v_1}{v_1+v_2}+\frac{2v_1+v_2}{4v_3}=1.$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\dfrac{v_1}{(v_1+v_2)v_2}=\dfrac{3}{4v_3},\\[2mm] \dfrac{v_1}{v_1+v_2}+\dfrac{2v_1+v_2}{4v_3}=1.\end{cases}$$

Из нее нужно найти отношение $\frac{v_3}{v_2}$.

483. 10 км/ч. **484.** 18 км/ч. **485.** 45 км/ч. **487.** Через 13 мин 20 с. **488.** 0,5 круга. **490.** 2 км. **491.** Через 1 ч. При решении нужно рассмотреть два случая: когда третий автомобиль за 2,5 ч не обогнал первый и когда он за 2,5 ч обогнал первый.

492. 45 мин. Обозначим скорости грузовика, пешехода и автобуса соответственно через v_1, v_2 и v_3 км/ч. Очевидно, $v_1 > v_2$, $v_3 > v_2$.

Пусть грузовик и автобус встретились в пункте K, пешеход и грузовик — в пункте М, пешеход и автобус — в пункте P (*рис.* 14).

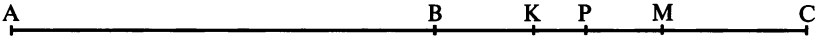

Рис. 14

Время грузовика на путь AK (и автобуса на путь CK) равно $\frac{20}{v_1+v_3}$, а время пешехода на путь BP (и автобуса на путь CP) равно $\frac{5}{v_2+v_3}$.

Какой из пунктов K и P находится ближе к C? Для ответа на этот вопрос сравним время автобуса на путь CK и его время на путь CP. Будем иметь:

$$\frac{20}{v_1+v_3}-\frac{5}{v_2+v_3}=\frac{20v_2+20v_3-5v_1-5v_3}{(v_1+v_3)(v_2+v_3)}=\frac{20v_2+15v_3-5v_1}{(v_1+v_3)(v_2+v_3)}>0.$$

Следовательно, $CK > CP$, т. е. P находится ближе к C, чем K.

Аналогично доказывается, что пункт M находится ближе к C, чем пункт P.

Выразим время пешехода на путь BM (или грузовика на путь AM) двумя способами и эти выражения приравняем:

$$\frac{BM}{v_2}=\frac{15+BM}{v_1}.$$

Отсюда $BM=\frac{15v_2}{v_1-v_2}$, а значит, интересующее нас время равно $\frac{15}{v_1-v_2}$.

Теперь получаем систему уравнений:

$$\begin{cases}\frac{15}{v_1-v_2}-\frac{20}{v_1+v_3}=0{,}5,\\ \frac{4}{v_1+v_3}=\frac{3}{v_2+v_3}.\end{cases}$$

Исключая из нее v_3, находим, что $v_1 - v_2 = 20$.

Тогда время грузовика на путь AM равно

$$\frac{15}{v_1-v_2}=\frac{15}{20}=\frac{3}{4}\ (\text{ч}).$$

§ 15. Другие задачи на составление уравнений

494. 100, 80, 40 м^3/ч. **495.** За 10 дней. **496.** 50 ч. **497.** 6 м^3/ч, 4 м^3/ч. **499.** 750 м^3. **500.** 120 м^3. **501.** За 10 ч. **502.** 2 м^3/ч, 5 м^3/ч. **504.** 5 га. **505.** В 2 раза. **506.** 6 ч.

508. ≈ 2,77 кг. **509.** На 50%. **510.** 22,5 т. **511.** 52,5%. **513.** 10 кг, 69%. **514.** 2,1 кг. Пусть процентное содержание магния в первом сплаве равно x%, во втором — y%, а от обоих сплавов отрезали по куску массой m кг. Тогда процентное содержание магния в первом новом сплаве равно

$$\frac{\frac{m\cdot x}{100}+\frac{(3-m)y}{100}}{m+(3-m)}\cdot 100=\frac{mx+(3-m)y}{3},$$

а во втором новом сплаве —

$$\frac{\frac{my}{100}+\frac{(7-m)x}{100}}{m+(7-m)}\cdot 100=\frac{my+(7-m)x}{7}.$$

Так как процентное содержание магния в новых сплавах одинаково, то

$$\frac{mx+(3-m)y}{3}=\frac{my+(7-m)x}{7}.$$

Упростим это уравнение с тремя неизвестными:
$7mx + 21y - 7my = 3my + 21x - 3mx$,
$10mx - 10my = 21x - 21y$, $10m(x - y) = 21(x - y)$.

Поскольку $x - y \neq 0$, то

$$10m = 21, \quad m = 2{,}1.$$

515. 3:1. **516.** 1,92 кг, 0,96 кг и 9,12 кг. **517.** 44%. **518.** 7 кг, 4 кг и 4 кг. **520.** 1 л. **521.** 2 л, 1,5 л. **522.** 1 л, 2 л. **523.** 18 л. **524.** ≈ 0,96. **527.** 0,25 л, 1,75 л. **528.** 8 л, 7 л. **530.** 18 · 3 – 24. **531.** $a = 35$, $b = 42$. **533.** 11. **534.** В 2,5 раза.

535. 167, 334, 27889. Обозначим трехзначные числа через a и b, а пятизначное число — через c. Тогда

$$\frac{1000a+b}{c}=3\frac{ab}{c}, \quad 1000a + b = 3ab.$$

Выразим отсюда b через a:

$$b=\frac{1000a}{3a-1}.$$

Для того чтобы у этой дроби выделить целую часть, умножим последнее равенство на 3. Получим:

$$3b=\frac{3000a}{3a-1}=\frac{(3000a-1000)+1000}{3a-1}=1000+\frac{1000}{3a-1}.$$

Дробь $\frac{1000}{3a-1}$ должна быть равна натуральному числу. Переберем делители числа 1000, учитывая, что число $3a - 1$ — трехзначное.

537. $-32°$. **538.** 24 и 20. **540.** Через $32\frac{8}{11}$ мин. **541.** 2 ч.

542. 5 км/ч, 4 км/ч, 4 км/ч, 3 км/ч.

Обозначим скорости туристов на этих участках соответственно через v_1, v_2, v_3 и v_4 (в км/ч). Тогда

$$\begin{cases} \frac{25}{v_1}+\frac{16}{v_2}+\frac{16}{v_3}+\frac{9}{v_4}=16, \\ v_1+v_2+v_3+v_4=16. \end{cases}$$

Для решения этой системы сложим уравнения:

$$\left(v_1+\frac{25}{v_1}\right)+\left(v_2+\frac{16}{v_2}\right)+\left(v_3+\frac{16}{v_3}\right)+\left(v_4+\frac{9}{v_4}\right)=32.$$

На основании неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим двух неотрицательных чисел получаем:

$$\begin{cases} v_1+\frac{25}{v_1}\geq 10, \\ v_2+\frac{16}{v_2}\geq 8, \\ v_3+\frac{16}{v_3}\geq 8, \\ v_4+\frac{9}{v_4}\geq 6. \end{cases}$$

Известно, что неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел превращается в равенство только тогда, когда эти числа равны между собой. Но, складывая неравенства системы, будем иметь:

$$\left(v_1+\frac{25}{v_1}\right)+\left(v_2+\frac{16}{v_2}\right)+\left(v_3+\frac{16}{v_3}\right)+\left(v_4+\frac{9}{v_4}\right)\geq 32.$$

Теперь сопоставьте последнее неравенство с уравнением, полученным после сложения уравнений системы.

Глава III. НЕРАВЕНСТВА

§ 16. Положительные и отрицательные числа

543. -7 и -1. **546.** $a > 0$, $b = 0$, $c < 0$. **548.** Таких столбцов может быть 1, 3 или 5. **549.** Могут (см., например, *рис.* 15).

1	1	–2
1	–2	1
–2	1	1

Рис. 15

551. Обозначим эти 7 чисел через

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7.$$

Нужно сложить неравенства:
$a_1 + a_2 > 0$, $a_2 + a_3 > 0$, $a_3 + a_4 > 0$,
$a_4 + a_5 > 0$, $a_5 + a_6 > 0$, $a_6 + a_7 > 0$,
$a_7 + a_1 > 0$.

552. Нельзя, так как 15 делится на 3 и на 5. **554.** Не существуют. **555.** Сложите первое и третье, а также второе и четвертое числа.

558. Допустим, что это возможно. Так как $11 = 7 + 4$ и сумма любых 11 соседних чисел отрицательна, а сумма любых 7 соседних чисел положительна, то сумма любых 4 соседних чисел может быть только отрицательной.

Возьмем любые 28 соседних чисел. Их сумма, с одной стороны, отрицательна, так как ее можно представить в виде суммы четверок соседних чисел, а с другой стороны — положительна, по аналогичной причине. Получили противоречие.

561. Предположим, что среди чисел a, b и c имеются отрицательные. Тогда их два; пусть это b и с. Значит, число a положительно.

Неравенство $a + b + c > 0$ приведем к виду $a > -b - c$. Умножим последнее неравенство на число $b + c < 0$:

$$a(b + c) < -(b + c)^2, \quad ab + ac < -(b + c)^2.$$

К обеим частям последнего неравенства прибавим bc. Будем иметь:

$$0 < ab + ac + bc < -(b+c)^2 + bc = -b^2 - bc - c^2 = -\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}c^2.$$

Но неравенство $0 < -\left(b + \frac{c}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}c^2$ невозможно. Противоречие.

563. $a < 0$. По условию получаем:

$$\begin{cases} a - b + c < 1, \\ a + b + c > -1, \\ 9a + 3b + c < -9. \end{cases}$$

Второе из неравенств этой системы умножим на -2 и новое неравенство сложим с первым и третьим: $8a < -6$. Отсюда и следует, что $a < 0$.

§ 17. Сравнение чисел

565. а) Первое число; б) первое число. **566.** Правильная.

567. Правильная. Пусть a и b — натуральные числа, $a < b$. Тогда

$$\frac{a}{b} < 1 < \frac{b}{a}.$$

Для того чтобы установить, какая из дробей $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ ближе к 1, нужно сравнить разности $1 - \frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a} - 1$.

568. Числа равны.

570. а) Второе число; б) первое число. Представим разность между первым и вторыми числами в виде

$$(2001^{10} - 2000^{10}) - (2000^{10} - 1999^{10})$$

и каждую из полученных разностей разложим на множители, пользуясь формулой разложения на множители разности $a^n - b^n$ (см. формулу (3) из § 1).

572. а) Первое число; б) второе число. **573.** $x < y < z$.

574. Меньше. Обозначим 0,0001 через a. Тогда данное выражение можно представить в виде:

$$(1 - a)^{1+a} \cdot (1 + a)^{1-a}.$$

576. а) 100^{20}; б) 5^{78}.

578. а) Числа равны; б) 5; в) 3^{23}. Воспользуйтесь равенствами:

$$5^{15} = 5 \cdot 25^7, \quad 3^{23} = 3^2 \cdot 27^7.$$

580. а) 18^{13}; б) $3^{\sqrt{2}}$. Неравенство $3^{\sqrt{2}} > 2^{\sqrt{3}}$ возведем в степень с показателем $\frac{1}{\sqrt{3}}$: $3^{\sqrt{\frac{2}{3}}} > 2$.

Теперь имеем:

$$3^{\sqrt{\frac{2}{3}}} > 3^{\sqrt{0,64}} = 3^{0,8} > 2$$

(проверьте неравенство $3^{0,8} > 2$ самостоятельно).

582. а) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{18}$; б) 20!. Получаем:

$20! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 20 > 2 \cdot 5 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 20 > 10^{12}$,

$1 + 2 + 3 + \dots + 1000000 < 1000000 \cdot 1000000 = 10^{12}$.

в) 50^{99}. Будем иметь:

$99! = (1 \cdot 99) \cdot (2 \cdot 98) \cdot (3 \cdot 97) \cdot \dots \cdot (49 \cdot 51) \cdot 50 <$

$$< \left(\frac{1+99}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2+98}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3+97}{2}\right)^2 \cdot \dots \cdot \left(\frac{49+51}{2}\right)^2 \cdot 50 = 50^{99}.$$

583. $b < a < c$. **585.** Одновременно. **586.** Второй. **587.** Первый. **588.** Одинаковое время. **590.** Длина спусков. **591.** Одновременно. **592.** Больше часа.

593. Кофе. Всего человек выпил ровно одну чашку кофе, а молока выпил столько, сколько долил. Примем объем чашки за 1. Если таких операций с доливанием молока было n, то он выпил молока

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{2^n}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n\right):\left(1-\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n<1.$$

594. На одинаковом расстоянии.

Примем путь AB за единицу. Обозначим скорости катеров в стоячей воде через v_1, скорость течения реки — через v_2 (в долях единицы в час).

Время первого катера на путь AB равно $t=\dfrac{1}{v_1+v_2}$.

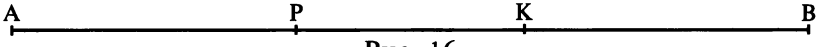

Рис. 16

За это время плот пройдет путь $AP=v_2t=\dfrac{v_2}{v_1+v_2}$, а второй катер — путь $BK=(v_1-v_2)t=\dfrac{v_1-v_2}{v_1+v_2}$ (*рис.* 16).

При этом возможен только случай, изображенный на рис. 16: если бы точка K находилась левее точки P, то

$$BK > BP, \quad (v_1 - v_2)t > 1 - AP = 1 - v_2t,$$

откуда

$$(v_1 - v_2)t + v_2t > 1, \quad v_1t > 1,$$

а это невозможно.

Тогда

$$AP + BK = v_2t + (v_1 - v_2)t = v_1t.$$

Следовательно, расстояние между плотом и вторым катером

$$PK=1-AP-BK=1-v_1t=1-\frac{v_1}{v_1+v_2}=\frac{v_2}{v_1+v_2}.$$

Получилось, что $AP = PK$.

§ 18. Доказательство неравенств

597. Верно. **598.** $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. **605.** а) Воспользуйтесь разложением на множители выражения $x^4 + x^2y^2 + y^4$ (см. задачу 43 из § 1). б) Неравенство приводится к виду: $(a + 1)(a - 2)^2 \geq 0$.

612. а) Верно; б) верно; в) верно. **616.** б) Приведите левую часть неравенства к виду: $\left(x^4 - x^2 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)$; в) правая часть неравенства симметрична относительно a, b и c (проверьте). Пусть $a \geq b \geq c$. Раскроем все модули и соберем все члены в левой части неравенства.

620. а) Пусть $x \geq y \geq z$; это ограничение не нарушает общности доказательства, так как неравенство симметрично относительно x, y и z. Составим разность между правой и левой частями неравенства и приведем ее к виду:

$$(x - y)^2(x + y - z) + z(x - z)(y - z).$$

б) Составим разность $x^4 - (x + 1)^3$ и преобразуем ее так, чтобы выделить разность $x - 3$:

$x^4 - (x + 1)^3 = x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x - 1 =$
$= x^3(x - 3) + 2x^2(x - 3) + 3x(x - 3) + 6(x - 3) + 17 > 0.$

622. а) Каждое из слагаемых суммы S, стоящей в левой части неравенства, начиная со второго, заменим дробью $\frac{1}{n^2}$:

$$S > \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}(n^2 - n) = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} = 1.$$

623. Неверно. Допустим, что это неравенство справедливо. Получим:
$\sqrt[2000]{2000!} > \sqrt[2001]{2001!}$, $(2000!)^{2001} > (2001!)^{2000}$,
$(2000!)^{2000} \cdot 2000! > (2000!)^{2000} \cdot 2001^{2000}$, $2000! > 2001^{2000}$.

Последнее неравенство неверно, так как его левая и правая части содержат по 2000 множителей, причем каждый множитель правой части больше каждого множителя левой. Противоречие.

625. а) Воспользуйтесь неравенством $(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ (проверьте его справедливость); б) используйте неравенство $2x^4 + 1 \geq 2x^3 + x^2$ (проверьте его справедливость); в) используйте неравенство $\frac{a^2}{a^4 + 1} \leq \frac{1}{2}$; е) сгруппируем слагаемые суммы в левой части неравенства попарно:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99}\right) + \frac{1}{100} =$$

$$= \frac{1}{6} + \frac{1}{20} + \frac{1}{42} + \dots + \frac{1}{98 \cdot 99} + \frac{1}{100} > \frac{1}{6} + \frac{1}{20} = \frac{13}{60} > \frac{1}{5}.$$

ж) $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{(n-1)n}=$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1.$$

627. б) Докажите неравенство: $25^{40} > 35^{32}$. **629.** а) 3^{29}; б) 8^{91}.

§ 19. Доказательство неравенств с помощью теоретических неравенств

633. –2, –3. **635.** Так как

$$\sqrt[n]{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt[n]{4-\sqrt{15}}=\sqrt[n]{16-15}=1,$$

то числа $\sqrt[n]{4+\sqrt{15}}$ и $\sqrt[n]{4-\sqrt{15}}$ являются взаимно обратными.

638. Так как $abc = 1$, то

$$ab=\frac{1}{c},\quad ac=\frac{1}{b},\quad bc=\frac{1}{a}.$$

Тогда

$$a+b+c+ab+ac+bc=a+b+c+\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}=$$

$$=\left(a+\frac{1}{a}\right)+\left(b+\frac{1}{b}\right)+\left(c+\frac{1}{c}\right)\geq 2+2+2=6.$$

639. Верно. Нужно привести неравенство к виду

$$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)\geq 6abc$$

и рассмотреть два случая: $abc = 0$ и $abc > 0$. Во втором случае разделим последнее неравенство почленно на abc.

650. По условию $a - b > 0$. Будем иметь:

$$\frac{a^2+b^2}{a-b}=\frac{(a-b)^2+2ab}{a-b}=\frac{(a-b)^2+4}{a-b}=(a-b)+\frac{4}{a-b}\geq 2\sqrt{(a-b)\cdot\frac{4}{a-b}}=4.$$

Равенство достигается при $a-b=\frac{4}{a-b}$, т. е. при $a - b = 2$. С учетом уравнения $ab = 2$ получаем, что это возможно при $a = 1+\sqrt{3}$, $b = -1+\sqrt{3}$ или при $a = 1-\sqrt{3}$, $b = -1-\sqrt{3}$.

651. Так как $a + b + c = 1$, то $a = 1 - b - c$. Будем иметь:

$$1+a=2-b-c=(1-b)+(1-c)\geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)}.$$

Подобным же образом преобразуем $1 + b$ и $1 + c$. Осталось перемножить получающиеся неравенства

$$\begin{cases}1+a\geq 2\sqrt{(1-b)(1-c)},\\ 1+b\geq 2\sqrt{(1-a)(1-c)},\\ 1+c\geq 2\sqrt{(1-a)(1-b)}.\end{cases}$$

655. Нужно сложить неравенства

$$a^2+b^2+c^2\geq 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}=3 \quad \text{и} \quad a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}=3.$$

657. а) Имеем:

$$x^2+\frac{2}{x}=x^2+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}}=3.$$

б) Преобразуем левую часть неравенства подобным же образом:

$$x+\frac{4}{x^2}=\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+\frac{4}{x^2}\geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{4}{x^2}}=3.$$

658. а) Докажите неравенство $x^2+\frac{16}{x}\geq 12$ (см., например, решение задачи 657 а)) и используйте условие обращения неравенства Коши в равенство; б) (2; 2).

659. Будем иметь:

$$\frac{a+nb}{n+1}=\frac{a+b+b+\cdots+b}{n+1}\geq \sqrt[n+1]{abb\ldots b}=\sqrt[n+1]{ab^n}.$$

660. Получаем:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 3\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}.$$

Кроме того,

$$1=a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc},$$

откуда $\frac{1}{\sqrt[3]{abc}}\geq 3$. Из первого и последнего неравенств и следует требуемое неравенство.

661. Представим n в виде $\frac{n^2}{n}$. Справедливо тождество

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

(проверьте!). Теперь получаем:

$$n = \frac{n^2}{n} = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{n} \geq \sqrt[n]{1\cdot 3\cdot 5\cdot \dots \cdot (2n-1)}.$$

Осталось возвести последнее неравенство в n-ю степень.

664. б) Имеем:

$$\frac{1}{(0{,}99)^{100}} = \left(\frac{0{,}99+0{,}01}{0{,}99}\right)^{100} = \left(1+\frac{1}{99}\right)^{100} > 1+\frac{100}{99} = \frac{199}{99}.$$

Тогда

$$(0{,}99)^{100} < \frac{99}{199} < \frac{1}{2}.$$

669. Положим $a_1 = b_1 = a$. Так как $a_2 = b_2$, то $a + d = aq$, где d — разность арифметической прогрессии, q — знаменатель геометрической прогрессии. Отсюда

$$q = \frac{a+d}{a} = 1 + \frac{d}{a}.$$

Теперь применим неравенство Бернулли:

$$b_n = aq^{n-1} = a\left(1+\frac{d}{a}\right)^{n-1} > a\left(1+(n-1)\frac{d}{a}\right) = a + d(n-1) = a_n.$$

678. Не имеет. Сложите неравенства системы.

683. Имеем:

$$ab + ac + bc - abc \leq \frac{1}{3}(a + b + c)^2 - abc = \frac{1}{3} - abc < \frac{1}{3}.$$

Полученное неравенство может быть только строгим, так как если $ab + ac + bc = \frac{1}{3}(a + b + c)^2$, то $a = b = c$, а тогда, учитывая, что $a + b + c = 1$, отсюда следует, что

$$a = b = c = \frac{1}{3}, \quad abc = \frac{1}{27} > 0.$$

684. Неверно. Контрпример — $a = b = c = d = 1$. **686.** 2 при $a = b = 1$.

692. б) Сложите неравенства:

$$a^6 + b^6 \geq a^5b + ab^5 \text{ и } a^6 + b^6 \geq a^4b^2 + a^2b^4.$$

§ 20. Доказательство неравенств с помощью специальных методов

695. Введите векторы $\bar{u}$ ($\sin\alpha$; $\cos\alpha$) и $\bar{v}$ (5; -12) и примените неравенство (2).
702. Не существуют.

707. Введем векторы на плоскости $\bar{u}$ ($\sin x\sin y$; $\cos x\cos y$) и $\bar{v}$ ($\sin z$; $\cos z$). Тогда $\bar{u}\cdot\bar{v}=\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\le|\bar{u}|\cdot|\bar{v}|=\sqrt{\sin^2 x\sin^2 y+\cos^2 x\cos^2 y}$.

Но $\sin^2x\sin^2y+\cos^2x\cos^2y<\sin^2x\cdot 1+\cos^2x\cdot 1=1$.

Последнее неравенство является строгим, так как $\sin^2y$ и $\cos^2y$ не могут одновременно быть равными 1.

712. Верно. При переходе от $n=k$ к $n=k+1$ используйте теоретическое неравенство

$$a^{k+1}+b^{k+1}\ge a^kb+ab^k$$

(см. § 19, п. 19.5, неравенство (11)).

714. г) При $n=3$ данное неравенство справедливо: $27=27$. Кроме того, оно справедливо при $n=4$: $81>64$.

Допустим, что это неравенство выполняется при $n=k\ge 3$: $3^k\ge k^3$. Докажем, что тогда оно выполняется и при $n=k+1$.

Умножим последнее неравенство на 3:

$$3^{k+1}\ge 3k^3.$$

Теперь достаточно доказать, что $3k^3\ge(k+1)^3$. Имеем:

$$3k^3\ge(k+1)^3,\quad k\sqrt[3]{3}\ge k+1,\quad \frac{k+1}{k}\le\sqrt[3]{3},\quad 1+\frac{1}{k}\le\sqrt[3]{3}.$$

Так как $k\ge 3$, то

$$1+\frac{1}{k}\le 1+\frac{1}{3}=\frac{4}{3}.$$

В свою очередь, $\frac{4}{3}<\sqrt[3]{3}$, поскольку $\frac{64}{27}<3$.

Следовательно, $3k^3>(k+1)^3$ при всех $k\ge 3$.

Получилось, что если исходное неравенство справедливо при $n=k\ge 3$, то оно справедливо и при $n=k+1$.

Тогда оно справедливо при всех натуральных $n\ge 3$.

715. а) $n=1$ и все $n\ge 17$; б) $1\le n\le 10$.

717. При $n=1$ получаем:

$$x_1^2<x_1-x_2<x_1,\quad x_1^2<x_1\Rightarrow x_1<1.$$

Значит, при $n=1$ доказываемое неравенство справедливо. Кроме того, при $n=2$ имеем: $x_2<x_1-x_1^2<x_1<1$.

Допустим, что оно справедливо при $n=k\ge 2$: $x_k<\frac{1}{k}$. Докажем, что тогда оно справедливо и при $n=k+1$.

Условие задачи $x_{n+1} < x_n - x_n^2$ наводит на мысль — ввести функцию $f(x) = x - x^2$ и исследовать ее на возрастание и убывание на промежутке $(0; +\infty)$. Получаем, что она возрастает на промежутке $\left(0; \frac{1}{2}\right]$. Теперь будем иметь (при условии, что $k \geq 2$):

$$x_{k+1} < x_k - x_k^2 = f(x_k) < f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k^2} < \frac{1}{k+1}.$$

Следовательно, неравенство $x_n < \frac{1}{n}$ доказано при всех натуральных n.

720. Если $a > b \geq 1$, то $a + \frac{2}{\sqrt{a}}$; если $1 > a > b > 0$, то $b + \frac{2}{\sqrt{b}}$. **721.** $x^3 + 3x$. **732.** e^x. **733.** а) $x \geq 4$, $x = 0$; б) $x \neq 0$, $x \neq 1$.

734. а) Найдите производную функции $y = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$ и для исследования знака производной примените неравенство (3); в) найдите производную функции

$$y = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$$

и используйте неравенства из задач а) и б).

737. а) $-1 < x \leq 3$; б) $x = 1$. **740.** $\log_5 6$. Составьте функцию $y = \log_x(x + 1)$. Приведите ее к виду $y = \ln(x + 1)/\ln x$ и исследуйте на возрастание и убывание с помощью производной на интервале $(1; +\infty)$.

§ 21. Доказательство условных неравенств

745. Верно. **747.** 1/4. Возведем неравенство $a + b \geq 1$ в куб:

$$a^3 + b^3 + 3ab(a + b) \geq 1.$$

Так как $\frac{1}{4}(a + b)^2 \geq ab$, то

$$\frac{3}{4}(a + b)^3 \geq 3ab(a + b).$$

Тогда

$$a^3 + b^3 + \frac{3}{4}(a + b)^3 \geq a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = (a + b)^3.$$

Отсюда

$$a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}(a + b)^3 \geq \frac{1}{4}.$$

Нужно еще убедиться, что значение $\frac{1}{4}$ суммой $a^3 + b^3$ достигается. Оно достигается при условиях:

$$\frac{1}{4}(a + b)^2 = ab, \quad a + b = 1.$$

Из этой системы уравнений $a = b = \frac{1}{2}$.

748. Неверно. Контрпример — $a = b = -1$.

750. Возведем равенство $a + b + c = 1$ в квадрат:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1.$$

Каждое из удвоенных произведений в левой части последнего равенства заменим суммой двух соответствующих квадратов, не меньшей этого произведения (например, $2ab$ — на $a^2 + b^2$):

$$a^2 + b^2 + c^2 + (a^2 + b^2) + (a^2 + c^2) + (b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = 1.$$

Отсюда и следует, что $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.

753. Положим

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k,$$

где по условию $k > 1$. Тогда $a = bk$, $c = dk$. Теперь нужно составить разность $(a + d) - (b + c)$ и доказать, что она положительна.

754. Будем иметь:

$$2 = x^3 + y^3 = (x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2) - (3x^3y + 3xy^2) =$$

$$= (x + y)^3 - 3xy(x + y) \geq (x+ y)^3 - \frac{3}{4}(x + y)^2(x + y) = \frac{1}{4}(x + y)^3.$$

Получилось, что

$$2 \geq \frac{1}{4}(x + y)^3, \quad (x + y)^3 \leq 8, \quad x + y \leq 2.$$

756. В первом пакете — 1 кг, 3 кг; во втором — 0 кг, 1,5 кг; в третьем — 0 кг, 1 кг.

760. Так как

$$a > |b - c|, \quad b > |a - c|, \quad c > |a - b|,$$

то $a^2 > b^2 + c^2 - 2bc$, $\quad b^2 > a^2 + c^2 - 2ac$, $\quad c^2 > a^2 + b^2 - 2ab$.

Теперь сложим все три последних неравенства и упростим получающееся неравенство.

762. Острым. Примените теорему косинусов. **767.** Следует.

769. Умножим данное равенство на x:

$$x^4 + x^2 - x = 0, \quad x^4 = x - x^2.$$

Так как $x^4 \geq 0$, то $x - x^2 \geq 0$. Отсюда $0 \leq x \leq 1$. Но случаи $x = 0$ и $x = 1$ невозможны.

773. Имеем:

$$((a + b + c) + 1)^2 \geq 4(a + b + c) \geq 4(a^2 + b^2 + c^2).$$

774. $a < c < b$.

776. Приведем условие к виду:

$$a^{1999}(a^2 - 1) = b^{1999}(1 - b^2).$$

Отсюда, если $a = 1$, то и $b = 1$, и обратно. В этом случае $a^2 + b^2 = 2$.

Пусть $a \neq 1$ и $b \neq 1$. Предположим, что $a \geq b$. Тогда $b < 1 < a$ (так что нера венство $b \leq a$ превращается в строгое неравенство $b < a$). Получаем:

$$\frac{a^2-1}{1-b^2} = \frac{b^{1999}}{a^{1999}} < 1.$$

Так как $\frac{a^2-1}{1-b^2} < 1$, то $a^2 + b^2 < 2$.

777. Верно. Из условия следует, что $a > b$. Получаем:

$$0 < a^3 - b^3 < a^3 + b^3 = a - b.$$

Рассмотрим неравенство:

$$a^3 - b^3 < a - b, \quad a^2 + ab + b^2 < 1.$$

Теперь будем иметь:

$$a^2 + b^2 < a^2 + ab + b^2 < 1.$$

780. Воспользуйтесь неравенством $2\sqrt{a-1} \leq a$ (выясните, почему оно справедливо). **781.** Следует. Примените неравенство $2x\sqrt{1-x^2} \leq 1$ (проверьте его справедливость). Приведите это неравенство к виду: $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \geq 2x^3$.

782. Освободимся в неравенстве от знаменателей, учитывая, что все они положительны (в частности, $1 - ab > 0$, так как $ab \leq |ab| < 1$):

$(1 - ab)(1 - b^2) + (1 - ab)(1 - a^2) \geq 2(1 - a^2)(1 - b^2)$,

$1 - ab - b^2 + ab^3 + 1 - ab - a^2 + a^3b \geq 2 - 2a^2 - 2b^2 + 2a^2b^2$,

$(a^2 + b^2 - 2ab) + ab(a^2 + b^2 - 2ab) \geq 0$, $(a - b)^2(1 + ab) \geq 0$.

Последнее неравенство справедливо, так как $1 + ab > 0$ ($-ab \leq |ab| < 1$).

§ 22. Разные задачи на неравенства

785. $x > -1$. **786.** а) $5{,}31 \le xy \le 8{,}28$; б) $59/12 \le x/y \le 23/3$. **788.** Существуют, например, $x_1 = x_2 = x_3 = 0{,}0001$, $x_5 = 0{,}9996$. **790.** Примените неравенство $2(x^2 + y^2) \ge (x + y)^2$. **794.** -2, -1.

795. Соберите все члены в левую часть неравенства, положите $\sqrt{a} = t$ и рассмотрите квадратный трехчлен с переменной t, считая b и c известными.

797. Рассмотрите квадратный трехчлен

$$f(x) = ax^2 + (b - c)x + (a + b + c) \ (a \ne 0)$$

и вычислите $f(0)$ и $f(-1)$.

798. Приведем данные равенства к виду:

$$b + c = 2 - a, \quad bc = (a - 1)^2.$$

Пользуясь теоремой, обратной теореме Виета для корней квадратного уравнения, составим квадратное уравнение

$$y^2 - (2 - a)y + (a - 1)^2 = 0$$

с корнями b и c. Теперь нужно воспользоваться неотрицательностью дискриминанта этого уравнения.

799. Уравнение $cx^2 + bx + a = 0$ имеет корень $x_2 = \dfrac{1}{x_1}$ (проверьте!). Тогда

$$x_1 + x_2 = x_1 + \frac{1}{x_1} \ge 2.$$

801. а) 0,99...9 или 1,00...0 (100 знаков после запятой); б) 0,33...3 или 0,33...34 (10 знаков после запятой). Умножьте равенство $x = \sqrt{0{,}11...1}$ на 3.

802. $S \approx 0{,}10$. Имеем:

$$S > \frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \frac{1}{12\cdot 13} + \dots + \frac{1}{1000\cdot 1001} = \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{13}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001}\right) = \frac{1}{10} - \frac{1}{1001} > 0{,}1 - 0{,}001 = 0{,}099;$$

$$S < \frac{1}{9\cdot 10} + \frac{1}{10\cdot 11} + \frac{1}{11\cdot 12} + \dots + \frac{1}{999\cdot 1000} = \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{11}\right) +$$

$$+ \left(\frac{1}{11} - \frac{1}{12}\right) + \dots + \left(\frac{1}{999} - \frac{1}{1000}\right) = \frac{1}{9} - \frac{1}{1000} < 0{,}112 - 0{,}001 = 0{,}111.$$

Получилось, что

$$0{,}099 < S < 0{,}111.$$

Тогда $S \approx 0{,}099$ или $S \approx 0{,}111$ с погрешностью, меньшей

$$0{,}111 - 0{,}099 = 0{,}002 < 0{,}01,$$

т. е. $S \approx 0{,}10$ с точностью до 0,01.

804. 3. **805.** $(2\sqrt{2};\ 2-2\sqrt{2})$, $(-2\sqrt{2};\ 2+2\sqrt{2})$. Сложите неравенства системы и приведите получающееся неравенство к виду $(x+y-2)^2 \le 0$.

806. $(-\infty;\ 0) \cup [2;\ 3) \cup (3;\ 3{,}5] \cup [4;\ +\infty)$.

807. Допустим, что эта система неравенств имеет решение. Перемножим первое и второе неравенства:

$$(x+y)^2(z+t) < (z+t)(xy+zt),\quad (x+y)^2 < xy+zt.$$

Но $(x+y)^2 \ge 4xy$, поэтому

$$xy+zt > 4xy,\quad zt > 3xy.$$

Теперь перемножим второе и третье неравенства системы:

$$(x+y)^2(z+t)zt < xy(z+t)(xy+zt),\quad (x+y)^2zt < xy(xy+zt).$$

Так как $4xy \le (x+y)^2$, то

$$4xyzt \le (x+y)^2zt < xy(xy+zt).$$

Отсюда

$$4zt < xy+zt,\quad 3zt < xy,\quad xy > 3zt.$$

Но неравенства $zt > 3xy$ и $xy > 3zt$ несовместимы.

809. Преобразуем сумму S в левой части неравенства:

$$S=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{4}\right)+\dots+\left(\frac{100}{101}-\frac{99}{100}\right)=\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5}+\frac{1}{6\cdot7}+\dots+\frac{1}{100\cdot101}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5}+\dots+\frac{1}{100\cdot101}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5}+\dots+\frac{1}{100\cdot101}\right)\right)<$$

$$<\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{3\cdot4}+\dots+\frac{1}{99\cdot100}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{4\cdot5}+\dots+\frac{1}{100\cdot101}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{100}-\frac{1}{101}\right)\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{50}{101}.$$

811. Наименьшее значение произведения в левой части неравенства равно

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

(проверьте!), поэтому достаточно доказать неравенство

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)>\frac{1}{2}.$$

Дальше см. задачу 614 а).

812. 4^7. **815.** Достаточно доказать, что первое слагаемое в левой части неравенства меньше 3, а второе — меньше 2.

816. Допустим противное: каждый из радикалов $\sqrt[k]{n}$ и $\sqrt[n]{k}$ при некоторых k и n больше $\sqrt[3]{3}$:

$$\sqrt[k]{n} > \sqrt[3]{3}, \quad \sqrt[n]{k} > \sqrt[3]{3}.$$

Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть $k = n = 2$. Но неравенство $\sqrt{2} > \sqrt[3]{3}$ неверно.

2) Пусть $k = 2$, $n \geq 3$. Тогда из второго неравенства последней системы

$$\sqrt[n]{2} > \sqrt[3]{3}, \quad 2^3 > 3^n,$$

а это неверно.

3) По аналогичной причине отпадает и возможность $n = 2$, $k \geq 3$.

4) Случай $k = n = 3$, очевидно, также невозможен.

5) Осталось рассмотреть случай $k > 3$, $n > 3$.

Приведем здесь систему к виду:

$$n^3 > 3^k, \quad k^3 > 3^n.$$

Пусть $k \geq n$. Тогда

$$k^3 \geq n^3 > 3^k, \quad k^3 > 3^k.$$

Но последнее неравенство при $k > 3$ неверно: в действительности при $k > 3$ выполняется неравенство $3^k > k^3$. Докажите это утверждение самостоятельно методом математической индукции.

Во всех случаях мы пришли к противоречию. Остается принять, что утверждение задачи справедливо.

818. Обозначим эти числа через a, b и c (в любом порядке).

Допустим противное: каждое из произведений вида $a(1 - b)$ больше $\frac{1}{4}$. Получаем:

$$a(1 - b) > \frac{1}{4}, \quad b(1 - a) > \frac{1}{4}, \quad a(1 - c) > \frac{1}{4}, \quad c(1 - a) > \frac{1}{4},$$

$$b(1 - c) > \frac{1}{4}, \quad c(1 - b) > \frac{1}{4}.$$

Перемножим все 6 неравенств:

$$a^2b^2c^2(1 - a)^2(1 - b)^2(1 - c)^2 > \frac{1}{4^6}, \quad abc(1 - a)(1 - b)(1 - c) > \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}.$$

Но справедливо неравенство $a(1 - a) \leq \frac{1}{4}$ (проверьте, почему). Тогда

$$a(1 - a) \leq \frac{1}{4}, \quad b(1 - b) \leq \frac{1}{4}, \quad c(1 - c) \leq \frac{1}{4}.$$

Перемножая эти последние неравенства, будем иметь:

$$abc(1 - a)(1 - b)(1 - c) \leq \frac{1}{64}.$$

Мы пришли к противоречию.

819. Обозначим три исходных числа через a, b и c.

Пусть $0 < a < b < c$. Положим

$$a = \operatorname{tg}\alpha, \quad b = \operatorname{tg}\beta, \quad c = \operatorname{tg}\gamma,$$

где α, β, γ — углы первой четверти. Тогда

$$0 < \alpha < \beta < \gamma < \frac{\pi}{2}.$$

По меньшей мере у одного из отрезков $[\alpha; \beta]$ и $[\beta; \gamma]$ длина меньше $\frac{\pi}{4}$, иначе длина отрезка $[\alpha; \gamma]$ удовлетворяла бы неравенству

$$\gamma - \alpha = (\gamma - \beta) + (\beta - \alpha) \geq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

а это невозможно.

Пусть длина отрезка $[\alpha; \beta]$ меньше $\frac{\pi}{4}$: $0 < \beta - \alpha < \frac{\pi}{4}$. Получаем:

$$0 < \operatorname{tg}(\beta - \alpha) < \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}, \quad 0 < \frac{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} < 1, \quad 0 < \frac{a-b}{1+ab} < 1.$$

824. Рассмотрим в координатной плоскости точки $A(0; 8)$, $B(15; 0)$ и $M(a; b)$. Тогда

$$AM = \sqrt{a^2 + (b-8)^2}, \quad BM = \sqrt{(a-15)^2 + b^2}, \quad AB = \sqrt{15^2 + 8^2} = 17.$$

Но так как для любых точек A, B и M плоскости справедливо неравенство $AM + MB \geq AB$, то исходное неравенство доказано.

Равенство достигается, когда точка M принадлежит отрезку AB.

Уравнение прямой AB — $\frac{x}{15} + \frac{y}{8} = 1$ (подумайте, как его вывести).

Выразим отсюда y через x:

$$y = 8\left(1 - \frac{x}{15}\right).$$

Итак, равенство достигается при $b = 8\left(1 - \frac{a}{15}\right)$, где a — любое число из отрезка $[0; 15]$.

826. Не имеет. Введем в координатной плоскости векторы

$$\bar{a}(x_1; y_1), \quad \bar{b}(x_2; y_2), \quad \bar{c}(x_3; y_3), \quad \bar{d}(x_4; y_4).$$

Тогда по условию

$$\bar{a} \cdot \bar{b} < 0, \quad \bar{a} \cdot \bar{c} < 0, \quad \bar{a} \cdot \bar{d} < 0, \quad \bar{b} \cdot \bar{c} < 0, \quad \bar{b} \cdot \bar{d} < 0, \quad \bar{c} \cdot \bar{d} < 0.$$

Следовательно, на плоскости любые два из четырех векторов образуют тупой угол.

Пусть векторы идут в порядке $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ (против часовой стрелки), а углы между соседними векторами равны соответственно α_1, α_2, α_3 и α_4. Получаем:

$$\alpha_1 > 90°, \quad \alpha_2 > 90°, \quad \alpha_3 > 90°, \quad \alpha_4 > 90°,$$

откуда

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 > 360°.$$

Но последнее неравенство невозможно.

830. а) Положите в неравенстве (1) Коши — Буняковского
$n = 4$, $a_1 = a$, $a_2 = b$, $a_3 = 1$, $a_4 = 2$,
$b_1 = 3$, $b_2 = 1$, $b_3 = c$, $b_4 = d$.

831. Положите в неравенстве Коши — Буняковского

$$a_1 = \frac{x_1}{n},\ a_2 = \frac{x_2}{n},\ \ldots,\ a_n = \frac{x_n}{n};\quad b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1.$$

833. Равенство достигается при любых a, b и c таких, что $a^2 + ab + b^2 = 1$, $c = a + b$.

Приведем неравенство к виду: $bc + ac - ab \le 1$.

Начнем с очевидного неравенства $(a + b - c)^2 \ge 0$. Раскроем в нем скобки и выразим из получающегося неравенства сумму $ac + bc - ab$.

834. Допустим, что уравнение $f(x) = x$ имеет два различных корня x_1 и x_2. Тогда

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le \frac{1}{2}|x_1 - x_2|,\quad |x_1 - x_2| \le \frac{1}{2}|x_1 - x_2|.$$

Но последнее неравенство невозможно.

836. Нужно сложить 6 неравенств:

$$a^2 + bc \ge 2a\sqrt{bc},\quad b^2 + ac \ge 2b\sqrt{ac},\quad c^2 + ab \ge 2c\sqrt{ab},$$

$$\frac{1}{2}(ab + ac) \ge a\sqrt{bc},\quad \frac{1}{2}(ab + bc) \ge b\sqrt{ac},\quad \frac{1}{2}(ac + bc) \ge c\sqrt{ab}.$$

838. Пусть $0 < a \le b \le c \le 1$. Тогда

$$1 + ab \le 1 + ac \le 1 + bc.$$

Так как $(1 - a)(1 - b) \ge 0$, то

$$a + b \le 1 + ab.$$

Но $1 + ab < 1 + 2ab$, поэтому

$$a + b \le 1 + 2ab.$$

Так как $c \le 1$, то

$$a + b + c \le a + b + 1 < 1 + 2ab + 1 = 2 + 2ab.$$

Теперь будем иметь:

$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \le \frac{a}{1+ab} + \frac{b}{1+ab} + \frac{c}{1+ab} = \frac{a+b+c}{1+ab} < \frac{2+2ab}{1+ab} = 2.$$

840. Обозначим через $n(A, B, \overline{C})$ число учащихся класса, которые видели фильмы A и B, но не видели фильм C, а через $n(A, \overline{B}, \overline{C})$ — число учащихся, которые видели только фильм A. Тогда

$$\begin{cases} n(A, \overline{B}) \ge n(A, \overline{B}, \overline{C}), \\ n(B, \overline{C}) \ge n(A, B, \overline{C}). \end{cases}$$

Сложим эти неравенства:

$$n(A, \overline{B}) + n(B, \overline{C}) \ge n(A, \overline{B}, \overline{C}) + n(A, B, \overline{C}) = n(A, \overline{C}).$$

Глава IV. ЗАДАЧИ ПО ТРИГОНОМЕТРИИ
§ 23. Тригонометрические тождества

842. а) Выразим из равенства $\operatorname{tg}3\alpha$ через $\operatorname{tg}2\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

847. б) Приведем равенство к виду:

$$\operatorname{tg}25^\circ\operatorname{tg}35^\circ = \operatorname{tg}5^\circ\operatorname{ctg}15^\circ.$$

В каждой из частей этого равенства преобразуем произведения синусов и косинусов в суммы.

850. Верно. Примените метод математической индукции.

852. а) Не существуют; б) существуют и единственны — $a = -4$, $b = 4$, $c = 0$; в) существуют и единственны — $a = 16$, $b = -20$, $c = 5$.

853. $a = b = c = d \neq 0$ или $a = d = -b = -c \neq 0$.

856. а) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$; б) $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$;

в) $4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

857. а) $\sqrt{2}\sin\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)$; б) $2\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\Big/\cos x$; в) $8\cos 2x$; г) $\frac{3}{4}\sin 4x$; д) $\sin 6x\cos 7x/\sin x$.

859. а) $\sin 2nx/(2\sin x)$; б) $\sin\frac{n}{2}x\sin\frac{n+1}{2}x\Big/\sin\frac{x}{2}$; в) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2n}$; г) $\sin^2 nx/\sin x$; д) $\sin(2n+1)x/\sin x$.

861. а) $2\sin n\alpha/(\sin 2\alpha\cos(n+1)\alpha)$; б) $\sin n\alpha/(\sin 2\alpha\cos(n+1)\alpha)$; в) 0. Преобразуйте в сумму каждое из слагаемых. г) $\operatorname{tg}100\alpha/\operatorname{tg}\alpha$. Формулу

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha = \frac{\operatorname{tg}k\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}k\alpha\operatorname{tg}\alpha}$$

нужно привести к виду

$$\operatorname{tg}(k+1)\alpha - \operatorname{tg}(k+1)\alpha\operatorname{tg}k\alpha\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}k\alpha + \operatorname{tg}\alpha$$

и выразить отсюда произведение $\operatorname{tg}(k+1)\alpha\operatorname{tg}k\alpha$. В получающейся формуле положим $k = 1, 2, \ldots, 99$.

863. а) 1; б) 0; в) 0; г) 90. Представьте сумму в виде:
$(\sin^2\alpha + \sin^2(\alpha+90^\circ)) + (\sin^2(\alpha+1^\circ) + \sin^2(\alpha+91^\circ)) + \cdots +$
$+ (\sin^2(\alpha+89^\circ) + \sin^2(\alpha+179^\circ))$.

865. а) $\sqrt{3}/8$; б) $\sqrt{3}$; в) 4; г) 1; д) 1; е) 1; ж) 1/3; з) 36.

867. а) 1/8; б) 1/4; в) 1/8; г) −1/16; д) 1/8; е) 1/16; ж) 1/16; з) 1/128.

868. а) 0; б) −1,5; в) 0; г) $-\sqrt{2}/2$; д) 0. **870.** а) −1/2; б) 1/2; в) 0. Умножьте и разделите сумму на $2\sin 20^\circ$. **871.** а) 1/4; б) 1/2.

874. а) 1/128; б) $\sqrt{2}/2^{16}$. Сгруппируйте множители попарно: первый — с последним, второй — с предпоследним и т. д. При этом, например, будем иметь:

$$\sin\frac{\pi}{64}\sin\frac{31\pi}{64}=\sin\frac{\pi}{64}\cos\frac{\pi}{64}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{32};$$

в) 7/64. Преобразуйте каждый из трех множителей в сумму и раскройте скобки в получающемся произведении; г) 3332. Выразите сумму $\operatorname{tg}^4\frac{\pi}{24}+\operatorname{ctg}^4\frac{\pi}{24}$ через сумму $\operatorname{tg}\frac{\pi}{24}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{24}$, а сумму $\operatorname{tg}^4\frac{5\pi}{24}+\operatorname{ctg}^4\frac{5\pi}{24}$ — через $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{24}+\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{24}$; д) 5. Представьте данное произведение в виде

$$(\operatorname{tg}^2 36^\circ \operatorname{tg}^2 72^\circ - 1) + 1$$

и преобразуйте разность в скобках.

876. а) 4/5; б) −7/9; в) $\sqrt{10}/10$. **877.** $3\pi/4$. **884.** а) 56/65; б) 56/33.
886. а) $2\pi/5$; б) $\pi/7$; в) $3\pi/5$; г) $8 - 2\pi$; д) $\pi - 2$; е) $2\pi - 4$.

§ 24. Условные тригонометрические тождества

888. а) $a(3 - a^2)/2$; б) $(1 + 2a^2 - a^4)/2$; в) $(1 + 6a^2 - 3a^4)/2$. **889.** 0 или $\pm\sqrt{2}$.

890. а) 1/3; б) 5/27. **891.** а) 14; б) 52; в) $\pm\sqrt{6}/2$. **893.** 1/7. **894.** $7\sqrt{2}/26$.

895. 92/533. **897.** −1/5. **898.** $(2 + \sqrt{7})/3$. **899.** 12/13. **900.** Полагая $\operatorname{tg}\alpha = t$, выразите через t сначала $\operatorname{tg}\beta$, затем $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\cos 2\alpha$, $\cos 2\beta$. **903.** 2. **904.** $\pi/4$.
906. Равносторонний. **907.** Прямоугольный. **908.** Прямоугольный: $\gamma = 90^\circ$.
909. Равнобедренный: $\alpha = \beta$.
910. а) Равнобедренный; б) прямоугольный: $\gamma = 90^\circ$; в) прямоугольный.
911. а) Прямоугольный; б) равнобедренный — $\beta = \gamma$; в) прямоугольный: $\gamma = 90^\circ$.
913. Прямоугольный — $\alpha = 90^\circ$. Примените трижды теорему косинусов и сложите получающиеся равенства.
914. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$. **915.** $\angle A = \angle C = 30^\circ$, $\angle B = 120^\circ$.
916. $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$; $\alpha = \gamma = \arcsin(\sqrt{2} - 1)/2$,
$\beta = \arccos(1 - 2\sqrt{2})/2$; $\beta = \gamma = \arcsin(\sqrt{2} - 1)/2$,
$\alpha = \arccos(1 - 2\sqrt{2})/2$. **918.** 4/5, 3/5, 0.
925. Примените тождество из задачи 921 г). **926.** Примените тождество из задачи 922 б) при $n = 2$.
927. Приведите данное равенство к виду:

$$(\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha) + (\sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta) + (\sin\gamma - \sqrt{3}\cos\gamma) = 0$$

и умножьте последнее равенство на $\frac{1}{2}$. Дальше воспользуйтесь преобразованием

$$\frac{1}{2}\sin\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right).$$

934. 3. **937.** 1/3. **939.** Применим формулу синуса двойного аргумента к $\sin 2\alpha$ и $\sin 2\beta$:

$$2\cos\alpha \sin\alpha \sin(\alpha + 2\beta) = 2\cos\beta \sin\beta \sin(2\alpha + \beta).$$

Теперь преобразуем произведения синусов в левой и правой частях последнего равенства в суммы:

$\cos\alpha\,(\cos 2\beta - \cos(2\alpha + 2\beta)) = \cos\beta\,(\cos 2\alpha - \cos(2\alpha + 2\beta))$,

$\cos\alpha \cos 2\beta - \cos\beta \cos 2\alpha - \cos(2\alpha + 2\beta)(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$.

Преобразуем $\cos 2\beta$ и $\cos 2\alpha$ по формуле $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$:

$\cos\alpha\,(2\cos^2\beta - 1) - \cos\beta\,(2\cos^2\alpha - 1) - \cos 2(\alpha + \beta)(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$,

$2\cos\alpha \cos\beta(\cos\beta - \cos\alpha) + (\cos\beta - \cos\alpha) - \cos 2(\alpha + \beta)(\cos\alpha - \cos\beta) = 0$.

$(\cos\beta - \cos\alpha)(2\cos\alpha \cos\beta + 1 + \cos 2(\alpha + \beta)) = 0$.

Закончите решение самостоятельно.

§ 25. Тригонометрические уравнения

941. а) $\frac{\pi k}{12}$ $(k \in Z)$; б) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$ $(k \in Z)$; в) πk $(k \in Z)$, $\pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$ $(n \in Z)$; г) $\frac{\pi(2k+1)}{7}$ $(k \in Z;\ k \neq 7a + 3$, где $a \in Z)$; д) $\frac{2\pi k}{5}$ $(k \in Z;\ k \neq 5a$, где $a \in Z)$; е) πk $(k \in Z)$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{4} + \pi n$ $(n \in Z)$; ж) $\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(k \in Z)$, $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in Z)$.

943. а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $(k \in Z)$, $2\pi n$ $(n \in Z)$; б) $2\pi k$ $(k \in Z)$, $(2n+1)\pi - \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ $(n \in Z)$. Приведите уравнение к виду:

$\cos x + \sqrt{\sin x} = \cos^2 x - \sin x$,

$\cos x + \sqrt{\sin x} = (\cos x + \sqrt{\sin x})(\cos x - \sqrt{\sin x})$.

в) $\frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in Z)$; г) если $a \in [-1;\ 3]$, то $x_1 = \pi k$,

$x_2 = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{a-1}{2} + \pi n$ $(k \in Z;\ n \in Z)$; если $a \notin [-1;\ 3]$, то $x = \pi k$ $(k \in Z)$.

945. а) πk, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(k\in Z, n\in Z)$; б) $\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{3}+\pi k$, $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{1}{4}\right)+\pi n$ $(k\in Z, n\in Z)$; в) $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$ $(n\in Z)$; г) $\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}$ $(k\in Z)$; д) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{4}$ $(k\in Z)$; е) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{1}{2}(-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3}+\frac{\pi n}{2}$ $(k\in Z, n\in Z)$; ж) $\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k\in Z)$; з) $\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(k\in Z, n\in Z)$. Введите подстановку $\sin x+\frac{1}{\sin x}=y$; и) $\frac{\pi}{4}+\pi k$ $(k\in Z)$.

947. а) $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $2\pi m$, $-\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $(k\in Z, m\in Z, n\in Z)$; б) $2\pi k$, $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(k\in Z, n\in Z)$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $-\frac{\pi}{4}+\pi m$, $2\pi n$ $(k\in Z, m\in Z, n\in Z)$; г) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1-\sqrt{2}}{2}+2\pi n$ $(k\in Z, n\in Z)$; д) $-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{\pi}{4}\pm\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}+\pi n$ $(k\in Z, n\in Z)$.

949. а) Нет решений; б) πn $(n\in Z)$; в) $\frac{\pi}{2}+\pi n$ $(n\in Z)$; г) нет решений; д) $\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(n\in Z)$; е) $\frac{\pi}{2}+\pi k$, $\pi(2n+1)$ $(k\in Z, n\in Z)$; ж) $\pi(2n+1)$ $(n\in Z)$; з) $\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(n\in Z)$; и) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$ $(n\in Z)$; к) $\frac{1}{2}$; л) πn $(n\in Z)$; м) нет решений.

951. а) $\pi(4k+1)$ $(k\in Z)$. Докажите неравенства:

$$\sin^4 x+\cos^4 x\le 1,\quad \sin^6 x+\cos^6 x\le 1;$$

б) $2\pi k$ $(k\in Z)$; в) πk $(k\in Z)$; г) нет решений. Пользуясь равенством

$$3\sin x+4\cos x=5\left(\frac{3}{5}\sin x+\frac{4}{5}\cos x\right)$$

и вводя вспомогательный аргумент $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ такой, что $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, докажите, что левая часть уравнения не превосходит 5.

953. а) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;1\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n;-1\right)$ $(k\in Z, n\in Z)$; б) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}+(2k+1)\pi\right)$, $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}+2\pi n\right)$ $(k\in Z, n\in Z)$; в) нет решений; г) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;(2n+1)\pi\right)$ $(k\in Z, n\in Z)$; д) $\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ $(k\in Z, n\in Z)$; е) $\left(\frac{\pi}{3}+2\pi k;\frac{\pi}{3}+2\pi n\right)$ $(k\in Z, n\in Z)$;

ж) $\left(\pi k; \frac{\pi}{6}+\frac{2\pi n}{3}\right)$ ($k \in Z$, $n \in Z$); з) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \pi n\right)$ ($k \in Z$, $n \in Z$); и) $\left(\pi k; \frac{\pi m}{2}; -\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ ($k \in Z$, $m \in Z$, $n \in Z$); к) $\left(-1; 1+\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right)$ ($n \in Z$).

955. а) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ ($k \in Z$, $n \in Z$); б) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$ ($k \in Z$, $n \in Z$); в) $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$ ($k \in Z$, $n \in Z$). Умножьте уравнение на 2. Другой вариант решения — используйте опорное неравенство

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$$

(§ 20, п. 20.4) и условие обращения его в равенство.

956. а) $(\pi k; y)$ ($k \in Z$, $y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$), $(x; x - \pi m)$ ($m \in Z$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$). В правой части уравнения используйте тождества:

$$\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}, \quad \sin^2 y = \frac{\operatorname{tg}^2 y}{1+\operatorname{tg}^2 y}.$$

б) Нет решений. Преобразуем уравнение:

$$\sin^4 x + \frac{1}{\sin^4 x} + \cos^4 x + \frac{1}{\cos^4 x} = 8 + \frac{1}{2}\sin y.$$

Так как

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \sin^2 2x \frac{1}{2},$$

то левую часть последнего уравнения можно привести к такому виду:

$$1-\frac{1}{2}\sin^2 2x + \frac{16\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)}{\sin^4 2x} = \frac{\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)(\sin^4 2x+16)}{\sin^4 2x}.$$

Полагая $\sin^2 2x = t$, где $0 < t \leq 1$, выразим $\sin y$ через t:

$$\sin y = \left(\frac{\left(1-\frac{1}{2}t\right)(t^2+16)}{t^2} - 8\right)2.$$

Теперь нужно учесть, что $\sin y \leq 1$, и решить соответствующее неравенство.

958. а) 1; б) ± 1; в) 0; г) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; д) $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$.

960. а) 0; б) $\frac{1}{\sqrt{5}}$; в) 0; г) 0, ± 1; д) $\pm\frac{1}{6}$; е) нет решений; ж) 0,2; з) 0.

962. а) 0; $\pm\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{2}{5}$. **963.** а) Два; б) один. **964.** а) πk, $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$ ($k \in Z$, $n \in Z$); б) $2\pi k$, $\pm\frac{\pi}{6} + \pi n$ ($k \in Z$, $n \in Z$); в) $(2k + 1)\pi$, $(-1)^n\frac{\pi}{3} + 2\pi n$ ($k \in Z$, $n \in Z$); г) $2k$, $2n + \frac{1}{2}$ ($k \in Z$, $n \in Z$); д) $\frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in Z$). **965.** $\frac{1}{4}$, $-\frac{7}{4}$. **967.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi k$ ($k \in Z$), $\frac{2\pi}{3} + \pi n$ ($n \in Z$); б) $\frac{2\pi k}{3}$ ($k \in Z$, $k \neq 3a$, где $a \in Z$), $\frac{\pi}{13} + \frac{2\pi n}{13}$ ($n \in Z$, $n \neq 13b + 6$, где $b \in Z$). Умножьте уравнение на $4\sin x$; в) $\frac{\pi}{28} + \frac{2\pi n}{7}$ ($n \in Z$), $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi k}{9}$ ($k \in Z$, $k \neq 9a$, где $a \in Z$); г) $\frac{\pi}{6} + \pi k$ ($k \in Z$), $\pm\frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + \pi n$ ($n \in Z$); д) $\frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{8}$ ($k \in Z$).

969. а) $\frac{5\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi m$, $-\frac{\pi}{6} + 2\pi n$ ($k \in Z$, $m \in Z$, $n \in Z$). Выполним следующие преобразования:

$$\sin 3x + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) - \left(\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x\right) = 0,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

$$2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right)\cdot\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0,$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\left(2\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) - 1\right) = 0.$$ И т. д.

б) $-\frac{\pi}{3} + \pi k$, $\frac{\pi}{3} + (-1)^{n+1}\arcsin\frac{1}{10} + \pi n$ ($k \in Z$, $n \in Z$); в) $\operatorname{arctg}\frac{3}{2} + \pi k$, $\frac{\pi}{4} \pm \arccos\frac{1-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} + 2\pi n$ ($k \in Z$, $n \in Z$); г) $\frac{\pi}{6} + \pi k$, $-\frac{\pi}{6} \pm \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) + 2\pi n$ ($k \in Z$, $n \in Z$); д) $2\pi k$ ($k \in Z$). Докажем, что левая часть уравнения не превосходит 4. Имеем:

$$4\cos^5 x - 3\sin^3 x \leq 4\cos^2 x + 3\sin^2 x = 4 - \sin^2 x \leq 4.$$

Равенство достигается при условиях $\sin x = 0$, $\cos x = 1$.

971. а) $(-1)^{n+1}\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(n \in Z)$; б) $\operatorname{arctg}\frac{2k+1\pm\sqrt{4k^2+4k-15}}{8}$ $(k \in Z,\ k \geq 2$ или $k \leq -3)$; в) $\frac{2k+1\pm\sqrt{4k^2+4k-31}}{8}$ $(k \in Z,\ k \geq 3$ или $k \leq -4)$;
г) πk, $(-1)^{n+1}\arcsin\frac{\pi}{6}+\pi n$ $(k \in Z,\ n \in Z)$; д) 32π, 160π, 800π, 4000π.

973. Не существуют. **975.** ± 5, 7, -3.

977. а) $(x;\ x+\pi(2k+1))$ $(k \in Z,\ x \in R)$; б) $(\pi k,\ \pi n)$ $(k \in Z,\ n \in Z)$,

$(\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}+\pi k;\ \arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}+\pi n)$ ($k \in Z$, $n \in Z$, k и n — одинаковой четности),

$(-\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}+\pi k;\ -\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}+\pi n)$ ($k \in Z$, $n \in Z$, k и n — одинаковой четности);

в) $(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}+(2n+1)\pi)$ $(k \in Z,\ n \in Z)$; г) $(-\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n)$,

$((-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{6}+\pi n)$, $((-1)^k\cdot\arcsin\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\pi k;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1+\sqrt{5}}{4}+\pi n)$,

$((-1)^k\cdot\arcsin\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\pi k;\ \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1-\sqrt{5}}{4}+\pi n)$ $(k \in Z,\ n \in Z)$;

д) $(\operatorname{arctg}(1+\sqrt{6})+\pi k;\ (\operatorname{arctg}(1-\sqrt{6})+\pi n)$, $(\operatorname{arctg}(1-\sqrt{6})+\pi k;\ (\operatorname{arctg}(1+\sqrt{6})+\pi n)$ $(k \in Z,\ n \in Z)$; е) $(\pi k,\ \pi n)$ $(k \in Z,\ n \in Z,\ k$ и n — одинаковой четности),

$(\frac{\pi}{2}+\pi k;\ \frac{\pi}{2}+\pi n)$ ($k \in Z$, $n \in Z$, k и n — одинаковой четности);

ж) $((-1)^k\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k;\ (-1)^m\cdot\frac{\pi}{3}+\pi m;\ (-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n)$,

$((-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\pi k;\ (-1)^{m+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\pi m;\ (-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n)$ $(k \in Z,\ m \in Z,\ n \in Z)$;

з) $(\pm\arccos\frac{7}{8}+2\pi k;\ \pm\arccos\frac{11}{16}+2\pi m;\ \pm\arccos(-\frac{4}{7})+2\pi n)$ $(k \in Z,\ m \in Z,\ n \in Z)$.

978. Одно. **980.** а) $(\arccos\frac{1}{8}+2\pi k;\ -\arccos\frac{3}{4}+2\pi n)$,

$(\arccos\frac{1}{8}+2\pi k;\ \arccos\frac{3}{4}+2\pi n)$ $(k \in Z,\ n \in Z)$. Приведем систему к виду:

$$4\sin x=-6\sin y,\quad 4\cos x=5-6\cos y.$$

Возведем эти уравнения в квадрат и сложим новые уравнения.

б) $(2\pi k;\ (2n+1)\pi)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ (2n+1)\pi\right)$, $\left(2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k;\ \frac{3\pi}{2}+2\pi n\right)$ ($k \in Z$, $n \in Z$). Введите подстановки:

$$\sin x + \cos x = z, \quad \sin y + \cos y = t.$$

в) $\left(\frac{\pi}{2}+\pi k; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ \operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\frac{\pi k}{2}+\pi n\right)$ ($k \in Z$, $n \in Z$).

Преобразуем систему:

$$\begin{cases}\sin x\cos y-\cos x\sin y=2\cos x\sin y,\\ \cos(x+y)\cos x-\sin(x+y)\sin x+\cos x\cos(x+y)=0,\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin x\cos y=3\cos x\sin y,\\ \sin(x+y)\sin x=2\cos(x+y)\cos x.\end{cases}$$

Теперь нужно рассмотреть четыре случая: 1) $\cos x\cos y \neq 0$ (в этом случае следует первое уравнение последней системы разделить на $\cos x\cos y$, а в дальнейшем разобрать две возможности: $\cos(x+y) \neq 0$ и $\cos(x+y) = 0$); 2) $\cos x \neq 0$, $\cos y = 0$; 3) $\cos x = 0$, $\cos y \neq 0$; 4) $\cos x = 0$, $\cos y = 0$; г) $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$. Рассмотрим два случая.

Пусть $x = y$. Тогда первое уравнение системы приводится к виду:

$$2\sin x = \sqrt{2}, \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Пусть $x \neq y$, например, $x > y$. Приведем второе уравнение к виду:

$$\operatorname{tg}x - x = \operatorname{tg}y - y.$$

Функция $z = \operatorname{tg}x - x$ возрастает на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, так как ее производная положительна:

$$z' = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 > 0.$$

Но тогда из неравенства $x > y$ следует неравенство

$$\operatorname{tg}x - x > \operatorname{tg}y - y.$$

Мы пришли к противоречию. Следовательно, случай $x \neq y$ невозможен.

§ 26. Доказательство тригонометрических неравенств

983. Используйте неравенства $\sin^{2k}x \le \sin^2 x$ и $\cos^{2n}x \le \cos^{2n}x$.

987. Если $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, то $\mathrm{tg}2\alpha > 2\mathrm{tg}\alpha$; если $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то $\mathrm{tg}2\alpha < 2\mathrm{tg}\alpha$. **988.** $\sin 19$.

989. г) Воспользуйтесь неравенствами: $\sin\alpha\cos\beta \le \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \cos^2\beta)$,

$\sin\beta\cos\gamma \le \frac{1}{2}(\sin^2\beta + \cos^2\gamma)$, $\sin\gamma\cos\gamma \le \frac{1}{2}(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma)$;

д) преобразуем левую часть неравенства: $\cos\alpha + \cos\beta + 2\cos(\alpha + \beta) =$

$$= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + 2(2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - 1) = 4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2 =$$

$$= (4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} + 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}) - \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 2 =$$

$$= (2\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2})^2 - \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} - 2 \ge 0 - \frac{1}{4} - 2 = -\frac{9}{4}.$$

992. а) $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$; б) $[-2; 2]$; в) $[-13; 13]$, г) $[-\sqrt{a^2+b^2}; \sqrt{a^2+b^2}]$.
994. $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. **995.** $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha$. **996.** в) Введите подстановку: $\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{ctg}\alpha = y$. **997.** $(-\infty; +\infty)$.

1001. б) Используйте в правой части неравенства тождество $1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$;

в) преобразуйте произведение в левой части неравенства в сумму трех слагаемых;

г) имеем:

$$\sin 1 + \sin 2 + \sin 3 = 2\sin 2\cos 1 + \sin 2 = \sin 2(2\cos 1 + 1) =$$

$$= \sin(\pi - 2)(2\cos 1 + 1) > \sin\frac{\pi}{3}(2\cos\frac{\pi}{3} + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}(2 \cdot \frac{1}{2} + 1) = \sqrt{3}.$$

Подумайте, почему $\sin(\pi - 2) > \sin\frac{\pi}{3}$ (и зачем нужно было переходить к $\sin(\pi - 2)$) и $\cos 1 > \cos\frac{\pi}{3}$.

д) Умножьте числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части неравенства, на $2\sin\alpha$ и преобразуйте каждое произведение в числителе в сумму.

1005. а) $\beta + \cos\beta$; б) $\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$. **1009.** в) Рассмотрим функцию $y = \sin x - \frac{1}{2}x(\pi - x)$.

Найдем производную функции и исследуем ее знак на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$:

$$y' = \cos x - \frac{1}{2}(\pi - x) + \frac{1}{2}x = \cos x + \left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) < 0.$$

1011. Преобразуем функцию y в левой части неравенства:

$$y = \left(1 + \frac{1}{\sin x}\right)\left(1 + \frac{1}{\cos x}\right) = \frac{(\sin x + 1)(\cos x + 1)}{\sin x \cos x} =$$

$$= \frac{\sin x \cos x + \sin x + \cos x + 1}{\sin x \cos x} = \frac{2\sin x \cos x + 2(\sin x + \cos x) + 2}{2\sin x \cos x} =$$

$$= \frac{(\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) + 1}{(\sin x + \cos x)^2 - 1} = \frac{(\sin x + \cos x + 1)^2}{(\sin x + \cos x)^2 - 1} = \frac{\sin x + \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 1}.$$

Положим $\sin x + \cos x = t$, где $1 < t \le \sqrt{2}$. Тогда $y = \frac{t+1}{t-1}$. Найдем производную этой функции и исследуем ее знак на промежутке $(1; \sqrt{2}]$:

$$y' = \frac{t - 1 - t - 1}{(t-1)^2} = -\frac{2}{(t-1)^2} < 0.$$

Следовательно, функция y убывает на этом промежутке. Отсюда

$$t \le \sqrt{2} \Rightarrow y(t) \ge y(\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3 + 2\sqrt{2}.$$

1013. Положим

$$\sin^2\alpha = a, \quad \sin^2\beta = b, \quad \sin^2\gamma = c.$$

Тогда каждое из чисел a, b и c принадлежит отрезку $[0; 1]$.

Неравенство принимает следующий вид:

$$a(1 - b) + b(1 - c) + c(1 - a) \le 1, \quad a + b + c \le ab + bc + ca + 1.$$

Так как $0 \le 1 - b \le 1$, $0 \le c \le 1$, то

$$(1 - b)ac \le ac, \quad c(1 - a)(1 - b) \le (1 - a)(1 - b).$$

Сложим эти два последних неравенства:

$c(1 - b) \le ac + (1 - a)(1 - b)$, $c - cb \le ac + 1 - a - b + ab$,

$a + b + c \le ab + bc + ca + 1$.

1014. Примените метод математической индукции, а также свойство модуля суммы (см. § 18, задачу 609).

1016. Доказательство можно провести, как в задаче 1015. Впрочем, неравенство

$$\sin(\cos x) < \cos(\sin x)$$

из этой задачи можно свести к данному, если заменить в нем x на $\frac{\pi}{2} - x$.

§ 27. Доказательство условных тригонометрических неравенств

1019. а) $[1; \sqrt{2}]$; б) $[-1; 1]$; в) $[-\sqrt{2}; -1]$; г) $[-1; 1]$. **1020.** а) $[-1; 1]$; б) $[1; \sqrt{2}]$; в) $[-1; 1]$; г) $[-\sqrt{2}; -1]$.

1025. Не существует. Примените теорему синусов и неравенство треугольника. **1029.** Допустив противное, перемножьте неравенства:

$$\cos\alpha\cos\beta > \frac{1}{4}, \quad \cos\beta\cos\gamma > \frac{1}{4}, \quad \cos\gamma\cos\alpha > \frac{1}{4}.$$

1035. Сумма $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ не меньше суммы $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma$.

1039. Приведем неравенство к виду:

$$x^2 - 2x(z\cos\beta + y\cos\gamma) + (y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha) \geq 0.$$

Достаточно доказать, что дискриминант D квадратного трехчлена с переменной x, стоящего в левой части этого неравенства, неположителен. Имеем:

$$\frac{1}{4}D = (z\cos\beta + y\cos\gamma)^2 - (y^2 + z^2 - 2yz\cos\alpha) =$$

$$= z^2\cos^2\beta + y^2\cos^2\gamma + 2yz\cos\beta\cos\gamma - y^2 - z^2 + 2yz\cos\alpha =$$

$$= -z^2(1 - \cos^2\beta) - y^2(1 - \cos^2\gamma) + 2yz(\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha) =$$

$$= (-z^2\sin^2\beta - y^2\sin^2\gamma + 2yz\sin\beta\sin\gamma) + 2yz(\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha - \sin\beta\sin\gamma) =$$

$$= -(z\sin\beta - y\sin\gamma)^2 + 2yz(\cos(\beta + \gamma) + \cos\alpha) = -(z\sin\beta - y\sin\gamma)^2 \leq 0.$$

Здесь использовалось равенство

$$\cos(\beta + \gamma) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha.$$

1041. Воспользуйтесь неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим трех чисел и неравенством

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \leq \frac{1}{8}$$

из задачи 1027 в).

1045. Так как $0 < \sin\alpha_1 < \sin\alpha_2 < \cdots < \sin\alpha_n$, то

$$n\sin\alpha_1 < \sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n < n\sin\alpha_n.$$

Так как $0 < \cos\alpha_n < \cos\alpha_{n-1} < \cdots < \cos\alpha_1$, то

$$n\cos\alpha_n < \cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n < n\cos\alpha_1.$$

Тогда

$$\frac{n\sin\alpha_1}{n\cos\alpha_1} < \frac{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \cdots + \sin\alpha_n}{\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \cdots + \cos\alpha_n} < \frac{n\sin\alpha_n}{n\cos\alpha_n}.$$

Отсюда и следует рассматриваемое неравенство.

Глава V. ДРУГИЕ ЗАДАЧИ ПО АЛГЕБРЕ

§ 28. Наибольшие и наименьшие значения выражений

1047. а) 8 при $x = 1$; б) 3/4 при $x = 2$. Представьте функцию в виде

$$y=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=1-t+t^2,$$

где $t = \frac{1}{x}$, и используйте формулу для абсциссы вершины соответствующей параболы; в) 5 при $x = 4$. Представьте функцию в виде:

$$y=(x-2)+\frac{4}{(x-2)^2}+2=\frac{x-2}{2}+\frac{x-2}{2}+\frac{4}{(x-2)^2}+2.$$

1048. 3 при $y = 2x$, где x — любое, не равное нулю.

1049. а) 14 при $y = 3x$; б) 5 при $x = -\frac{2}{5}y$. **1051.** а) Наибольшее значение равно 5/4, например, при $x = \pi/6$; наименьшее равно -1, например, при $x = -\pi/2$; б) наибольшее значение равно 2, например, при $x = 0$; наименьшее — 3/4, например, при $x = \pi/4$. **1054.** 1000 для чисел $\overline{x000}$. **1055.** а) $10\frac{9}{19}$ для числа 199; б) $57\frac{16}{19}$ для числа 1099. **1058.** а) 6 при $x = 1/4$, $y = 1$; б) 16 при $x = 8$, $y = 4$, $z = 2$; в) 8 при $x = 2$, $y = 1/2$; г) 6 при $x = 3$, $y = 4$, $z = 4$. **1059.** $\sqrt{S}$ и $\sqrt{S}$ м. **1060.** Сторона, прилегающая к складу, равна 20 м, другая — 10 м. **1062.** $4\sqrt{3}$ дм.

1065. а) 225/8 при $x = 15/4$; б) 1/12 при $y - x = 1/3$; в) 343/108 при $x = 2/9$, $y = -5/12$; г) 81/64 при $x = -1/2$, $y = 5/4$. **1066.** $R\sqrt{2}$ и $R\sqrt{2}$. **1067.** Сторона, лежащая на диаметре, равна $R\sqrt{2}$, другая — $R\sqrt{2}/2$. **1068.** $l\sqrt{3}/3$, $l\sqrt{3}/3$ и $l\sqrt{3}/3$.

1070. а) 4 при $x = 2$; б) $2\sqrt{5}$ при $x = 4/5$; в) $\sqrt{6}$ при $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$ $(k \in Z)$.

1071. а) $3\sqrt{6}$ при $x = 12$, $y = 6$; б) 7 при $x = y = 3$. **1072.** $9\sqrt{3}$ при $a = 13$, $b = 12$, $c = 11$. **1073.** 9 при $a = 7$, $b = 5$, $c = 3$.

1075. а) $x_1 = \frac{1}{7}$; б) $x_3 = 9$; в) $x_4 = 12\frac{3}{4}$. Исследуйте x_n на возрастание и убывание, для чего выясните знак разности $x_{n+1} - x_n$. **1077.** $x_4 = \frac{12}{353}$. **1079.** $a_{16} = 19008$. **1080.** $a_{16} = 23\frac{13}{16}$.

1082. Остающееся число — 99999785960.

1083. $z_{\max} = 4$ при $y = -2x$ $(x \neq 0)$, $z_{\min} = -1$ при $y = \frac{1}{2}x$ $(x \neq 0)$.

Пусть сначала $x = 0$, $y \neq 0$. Тогда $z = 3$.

Пусть $x \neq 0$. Разделим числитель и знаменатель этой дроби почленно на x^2:

$$z = \left(3\frac{y^2}{x^2} - 4\frac{x}{y}\right) \Big/ \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = \frac{3t^2 - 4t}{1 + t^2};$$

где $t = \frac{y}{x}$. Теперь нужно исследовать полученную функцию переменной t с помощью производной и построить ее график.

1085. 11, например, при $k = 1$, $n = 2$. Переберите случаи $y = 1$, $y = 9$, $y = 11$ и докажите, что первые два из них невозможны.

1087. а) 1/156 при $k = 4$, $n = 13$; б) 1/1806 при $k = 3$, $m = 7$, $n = 43$.

1089. 3004001 при $x = 1001$. **1091.** 5 при $y = 4 - \frac{4}{3}x$, где $x \leq 0$.

1093. -50, например, при

$$x_1 = x_2 = \dots = x_{50} = 1, \quad x_{51} = x_{52} = \dots = x_{100} = -1.$$

Имеем:

$$S = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{99}x_{100} = \frac{1}{2}((x_1 + x_2 + \dots + x_{100})^2 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{100}^2) \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(0 - 1 - 1 - \dots - 1) = -50.$$

1094. $z_{\max} = 10$, например, при $x = y = \sqrt{2}$; $z_{\min} = -\frac{1}{2}$, например, при $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Введем новые переменные r и φ такие, что

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

где $r \geq 0$. Эти подстановки объясняются тем, что сумма $x^2 + y^2$ упрощается:

$$x^2 + y^2 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2.$$

Тогда

$$1 \leq r^2 \leq 4 \Rightarrow 1 \leq r \leq 2.$$

Упрощается и исходное выражение:

$$z = x^2 + 3xy + y^2 = r^2\cos^2\varphi + 3r^2\cos\varphi\sin\varphi + r^2\sin^2\varphi =$$

$$= r^2(\cos^2\varphi + 3\cos\varphi\sin\varphi + \sin^2\varphi) = r^2(1 + \frac{3}{2}\sin 2\varphi).$$

Отсюда видно, что выражение z достигает наибольшего значения при $r^2 = 4$ и $\sin 2\varphi = 1$. Можно взять, например, $2\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{4}$. В этом случае

$$x = r\cos\varphi = 2\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}, \quad y = 2\sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{2},$$

а $z_{\max} = 4(1 + \frac{3}{2}) = 10$.

Аналогично находится и наименьшее значение z.

§ 29. Иррациональные числа

1100. Допустим, что $\sqrt[n]{a}$, где a — положительное иррациональное число, есть число рациональное: $\sqrt[n]{a} = b$, где $b \in Q$. Возведем это равенство в n-ю степень: $a = b^n$. Получилось противоречие — иррациональное число равно рациональному.

1101. а) Иррационально; б) иррационально. **1103.** а) Могут, например, $a = \sqrt{2} + 1$, $b = \sqrt{2} - 1$; б) не могут; в) могут, например, $a = \sqrt{2}$, $b = 3\sqrt{2}$; г) не могут. **1104.** Не может. Положим

$$\frac{a+1}{a^2+2} = b, \quad \frac{a^2+3}{a^2+4} = c,$$

где числа b и c рациональны. Из второго из этих равенств выразим a^2:

$$a^2 = \frac{4c-3}{1-c},$$

откуда число a^2 рационально. Теперь из первого равенства выразим a:

$$a = b(a^2 + 2) - 1.$$

Тогда и число a рационально.

1105. а) Существуют, например, $a = b = \frac{1}{2}$; б) не существуют.

1106. Пусть a — любое рациональное число, отличное от нуля.

Если x рационально, то сумма $x + a$ рациональна, а тогда

$$D(x + a) = D(x) = 1.$$

Если x иррационально, то и сумма $x + a$ иррациональна, откуда

$$D(x + a) = D(x) = 0.$$

Пусть a — любое иррациональное число. Если x иррационально, то сумма $x + a$ может быть рациональным числом (например, при $x = 2 - a$), а в этом случае равенство $D(x + a) = D(x)$ не выполняется, так как

$$D(x + a) = 1, \; D(x) = 0.$$

Следовательно, никакое иррациональное число не может быть периодом этой функции.

1111. в) Положим $\sqrt{2} + \sqrt[3]{3} = a$. Предположим, что число a рационально. Приведем это равенство к виду $\sqrt[3]{3} = a - \sqrt{2}$ и возведем его в этой форме в куб; д) положим $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3} = a$. Пусть число a рационально. Возведем это равенство в куб:

$$2 + 3 + 3\sqrt[3]{6}(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{3}) = a^3, \quad 5 + 3a\sqrt[3]{6} = a.$$

Мы пришли к противоречию: иррациональное число равно рациональному.

1113. а) Иррационально; б) иррационально; в) рационально; г) рационально; д) иррационально.

1119. Пусть a — любое натуральное число, не являющееся степенью 10 с целым неотрицательным показателем.

Допустим, что $\lg a$ есть число рациональное. По условию это число может быть только дробным:

$$\lg a = \frac{b}{c},$$

где b и c — натуральные числа, а дробь $\frac{b}{c}$ несократима. Тогда

$$a = 10^{\frac{b}{c}}, \quad a^c = 10^b, \quad a^c = 2^b \cdot 5^b.$$

Последнее равенство невозможно, так как его правая часть содержит 2 и 5 в одинаковых степенях, а левая — в разных или совсем не содержит двоек или пятерок в качестве множителей.

§ 30. Функциональные уравнения

1121. а) $f(x) = \frac{3-x^2}{8x}$; б) $f(x) = \frac{6x+3}{5x}$; в) если $x \neq 0$, то $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $f(0) = 1$. **1122.** $f(x) = x - 1$, $\varphi(x) = x + 2$. **1124.** а) $f(x) = 2 \pm \sqrt{x-4}$, где $x \geq 4$; при $x < 4$ функция не определена; б) $f(x) = \frac{5x+1}{5-3x}$; в) $f(x) = \frac{4x+5}{3(1-x)}$. **1126.** а) $f(x) = x^2$; б) $f(x) = 1 \pm x$; в) $f(x) = 3x^2$.

1127. $f(x, y) = x^2 + 4y^2$. Положим

$$x - y = z, \quad x + 2y = t.$$

Выразим отсюда x и y через z и t:

$$x = \frac{t+x}{3}, \quad y = \frac{t-2z}{3}.$$

Теперь выразим сумму в правой части функционального уравнения через z и t:

$$17x^2 + 14xy + 5y^2 = \frac{1}{9}(17(t+z)^2 + 14(t+z)(t-2z) + 5(t-2z)^2) =$$

$$= \frac{1}{9}(17t^2 + 34tz + 17z^2 + 14t^2 - 14tz - 28z^2 + 5t^2 - 20tz + 20z^2) =$$

$$= \frac{1}{9}(36t^2 + 9z^2) = z^2 + 4t^2.$$

Получилось, что

$$f(z, t) = z^2 + 4t^2.$$

Тогда $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

1129. а) $f(x) = x + a$, где a — любая постоянная; б) $f(x) = x^2 + a$, где a — любая постоянная. Введем подстановки:

$$x + y = z, \quad x - y = t.$$

Тогда

$$x = \frac{z+t}{2}, \quad y = \frac{z-t}{2}.$$

Функциональное уравнение принимает следующий вид:

$$f(z) - f(t) = z^2 - t^2.$$

Положим здесь $t = 0$.

1133. Функция $f(x)$ не существует. **1134.** $f(x) = x$. Пусть функция $\varphi(x)$ является постоянной: $\varphi(x) = C$, где C — любая постоянная. Тогда $f(C) = C$. Это значит, что для любого x $f(x) = x$.

1136. Не существует. Выразим обе части уравнения через $\cos x$:

$$f(2\cos^2 x - 1) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 2x),$$

$$f(2\cos^2 x - 1) = \frac{1}{2}(-2\cos^2 x + \cos x + 1).$$

В последнем уравнении нужно положить $\cos x = 1$ и $\cos x = -1$.

1138. а) $D(f) = R, f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — любая четная функция. Уравнению удовлетворяет функция, равная $\frac{1}{2}\sin x$. Положим

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — неизвестная функция. Подставляя это выражение для $f(x)$ в уравнение, получаем: $\varphi(-x) = \varphi(x)$; б) $D(f) = R, f(x) = \frac{1}{2}\cos x + \varphi(x)$, где $\varphi(x)$ — любая нечетная функция.

1140. $f(x) = a\cos x + b\sin x$, где a и b — любые постоянные.

1142. $f(x) = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)$, $g(x) = \frac{1}{2}(\sin x - \cos x) + C$, где C — любая постоянная. **1144.** $f(x) = a^x$, где a — любая положительная постоянная. **1146.** а) $P(x) = ax(x - 1)$, где a — любая постоянная; б) $P(x) = a(x - 2)(x - 3)...(x - 7)$, где a — любая постоянная.

1148. $f(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ $(n \in N)$.

1149. $f(x) = a^x$ $(x \in Q)$. Сначала выведем равенство

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1)f(x_2)...f(x_n),$$

где n — любое натуральное число, большее 1, $x_1, x_2,..., x_n$ — любые натуральные числа.

Полагая здесь $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1$, найдем, что $f(n) = a^n$ $(n \in N)$.

Полагая, что $x_1 = x_2 = \dots = x_n = \frac{1}{n}$ $(n \in N)$, вычисляем $f\left(\frac{1}{n}\right)$: $f\left(\frac{1}{n}\right) = a^{\frac{1}{n}}$.

Теперь нетрудно вычислить $f\left(\frac{m}{n}\right)$ $(m \in N, n \in N)$.

Для вычисления $f(0)$ положим в исходном функциональном уравнении $x = y = 0$, откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = 1$. Но случай $f(0) = 0$ невозможен, так как тогда, полагая в том же уравнении, что $y = 0$, получаем: $f(x) = 0$ при любом рациональном x, а это противоречит условию $f(1) = a > 0$. Остается принять, что $f(0) = 1$.

Для нахождения $f\left(-\frac{m}{n}\right)$ $(m \in N, n \in N)$ выведите равенство:

$$f(x)f(-x) = f(0) = 1.$$

1152. а) $f(x) = C$, где C — любая постоянная. Положим $2x - 1 = t$; тогда $x = \frac{t+1}{2}$. Будем иметь:

$$f(t) = f\left(\frac{t+1}{2}\right).$$

Следовательно, искомая функция не меняет своего значения при замене t на $\frac{t+1}{2}$. Последовательно получаем:

$$f(t) = f\left(\frac{t+1}{2}\right) = f\left(\left(\frac{t+1}{2} + 1\right)\Big/2\right) = f\left(\frac{t+3}{4}\right) =$$

$$= f\left(\left(\frac{t+1}{2} + 3\right)\Big/4\right) = f\left(\frac{t+7}{8}\right) = \dots = f\left(\frac{t+2^n-1}{2^n}\right),$$

где n — любое натуральное число. Перейдем в равенстве $f(t)=f\left(\frac{(t-1)+2^n}{2^n}\right)$ к пределу при $n \to +\infty$:

$$f(t)=\lim_{n\to+\infty} f\left(\frac{t-1}{2^n}+1\right)=f(1)=C,$$

где C — постоянная.

Проверим функцию $f(x) = C$. Проверка показывает, что эта функция есть решение уравнения при любом C.

б) $f(x) = C$, где C — любая постоянная.

1154. $f(x) = \frac{6}{5}x$. **1155.** 8. Приведем уравнение к виду:

$$(y - \sin x)(y - \cos x) = 0.$$

На одном чертеже построим графики функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Из чертежа видно, что на отрезке $[0; \frac{\pi}{4}]$ непрерывную функцию, являющуюся решением уравнения, можно выбрать двумя способами, на отрезке $[\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}]$ — двумя и на отрезке $[\frac{5\pi}{4}; 2\pi]$ — тоже двумя. Следовательно, общее число способов, которыми можно выбрать функцию $y(x)$, равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$.

1157. а) $f(x) = ax$, где a — любая постоянная; б) $f(x) = C$, где C — любая постоянная. После дифференцирования функционального уравнения получаем: $f'(2x - 1) = f'(x)$. Дальше см. ответ к задаче 1152 а). **1158.** а) $f(x) = C$, где C — любая постоянная. Известно, что если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке. Примените утверждение задачи 1151; б) $f(x) = C$, где C — любая постоянная.

1160. Функция f не существует. **1162.** $f(x) = \frac{1}{2}x(x + 1)$. **1164.** $f(x) = C$, где C — любая постоянная.

§ 31. Целая и дробная часть числа

1165. а) $5 \le x < 6$; б) $x = n + 0{,}4$, где $n \in Z$; в) 0; г) $0 \le x < 1$, $y \in Z$.

1168. а) $16 \le x < 17$; б) $0 \le x < 1$. **1169.** $(3; -1)$. **1171.** Используйте утверждение задачи 1170. **1173.** а) 0, 4/3, 8/3; б) 2; в) 1/2; г) 0, 3/2; д) 4/5, 7/15; е) 101/4.

1174. а) $n + 1/n$, где $n \in N$, $n > 1$; б) $-1/2$. **1176.** а) 0; б) $-\mathrm{arctg}3 + \pi n$ $(n \in Z)$; в) $\pi/4 + \pi n$ $(n \in Z)$; г) $[2\pi k; \pi/2 + 2\pi k]$ $(k \in Z)$; д) πk $(k \in Z)$, $(-1)^{n+1} \cdot \pi/6 + \pi n$ $(n \in Z)$. **1178.** а) $-\sqrt[3]{5}$; б) $[1; 2)$, -1. **1180.** $\pi/2$.

1181. $n + 1/n$, где $n \in N$, $n > 1$. Прежде всего, $x \notin Z$, иначе $\{x\} = 0$. Далее, $x \notin (0; 1)$, иначе $[x] = 0$. Так как правая часть уравнения положительна, то и левая часть положительна, откуда $x > 0$.

Заменим в правой части уравнения $\{x\}$ на $x - [x]$ и преобразуем получающееся уравнение, освободившись в нем от знаменателей дробей:

$$[x]+\frac{1}{[x]}=x-[x]+\frac{1}{x-[x]}, \quad 2[x]=x-\frac{x}{[x](x-[x])},$$

$$2x[x]^2 - 2[x]^3 + x - [x] = x^2[x] - x[x]^2 + [x],$$

$$x^2[x] - (3[x]^2 - 1)x + (2[x]^3 + 2[x]) = 0.$$

Из последнего уравнения выразите x через $[x]$, рассматривая уравнение как квадратное относительно x.

1183. а) $[1; 2) \cup [3; 7) \cup [8; 9)$; б) $2/7$. **1184.** $-1/4$, 0, $7/2$.

Положим

$$[x] = n, \quad \{x\} = \alpha.$$

Тогда $x = n + \alpha$. Далее,

$$2^n = 2(n + \alpha) + 1 = (2n + 1) + 2\alpha.$$

При $x \geq 0$ и $n \geq 0$. Тогда число 2α — целое, причем $0 \leq 2\alpha < 2$. Отсюда $2\alpha = 0$ или $2\alpha = 1$. В обоих случаях находим n, а затем — x.

При $x < 0$ и $n < 0$. Положим $n = -k$, где $k \in N$. Тогда

$$2^{-k} = (1 - 2k) + 2\alpha.$$

Если при этом $k \geq 2$, то последнее уравнение не имеет решений, так как

$$1 - 2k + 2\alpha < 0$$

(подумайте, почему). Осталось рассмотреть случай $k = 1$.

1186. а) 1; б) 1; в) $n^2 + 6n + 3$. **1188.** а) n; б) $n - 1$.

1189. 4. Воспользуйтесь неравенствами:

$$3/2 < \log_2 3 < 2, \quad 4/3 < \log_3 5 < 3/2, \quad 5/4 < \log_5 8 < 3/2$$

(проверьте истинность каждого из них).

ЛИТЕРАТУРА

1. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. 2-е изд. М.: Просвещение, 1994. — 239 с. (Раздел «Задачи для внеклассной работы».)

2. Алгебра для 8 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Под ред. П. Я. Виленкина. М.: Просвещение, 1995. — 256 с.

3. Алгебра: Учебник для 8 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. 2-е изд. М.: Просвещение, 1994. — 239 с. (Раздел «Задачи повышенной трудности».)

4. Алгебра: Учебник для 9 класса общеобразовательных учреждений / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. 2-е изд. М.: Просвещение, 1995. — 223 с. (Раздел «Задачи для внеклассной работы»).

5. Алгебра: Учебник для 9 класса средней школы / Под ред. С. А. Теляковского. 2-е изд. М.: Просвещение, 1993. — 272 с. (Раздел «Задачи повышенной трудности».)

6. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10—11 классов средней школы / Под ред. А. Н. Колмогорова. 6-е изд. М.: Просвещение, 1997. — 320 с.

7. Алгебра и начала анализа: Учебник для 10—11 классов средней школы. / Ш. А. Алимов, Ю. М. Колягин, Ю. В. Сидоров и др. 3-е изд. М.: Просвещение, 1994. — 254 с. (Раздел «Задачи для внеклассной работы».)

8. Баранова И. В., Борчугова З. Г. Сборник задач по элементарной алгебре: Учебное пособие для студентов педагогических институтов. Изд. 3-е. М.: Просвещение, 1987. — 368 с.

9. Баранова И. В., Ляпин С. Е. Задачи на доказательство по алгебре: Пособие для учителя. Л.: Учпедгиз, 1954. — 160 с.

10. Бартенев Ф. А. Нестандартные задачи по алгебре: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1976. — 95 с.

11. Болтянский В. Г., Виленкин Н. Я. Симметрия в алгебре. М.: Наука, 1967. — 284 с.

12. Бродский Я. С., Слипенко А. К. Функциональные уравнения. Киев: Вища школа, 1983. — 96 с.

13. Васильев Н. Б., Егоров А. А. Задачи Всесоюзных математических олимпиад. М.: Наука, 1988. — 288 с.

14. Вересова Е. Е., Денисова Н. С., Полякова Т. Н. Практикум по решению математических задач: Учебное пособие для студентов педагогических институтов. М.: Просвещение, 1979. — 240 с.

15. Виленкин Н. Я., Ивашев-Мусатов О. С., Шварцбурд С. И. Алгебра и математический анализ для 10 класса: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. 3-е изд., дораб. М.: Просвещение, 1992. — 335 с.

16. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. 4-е изд., дополн. М.: Наука, 1978. — 144 с. (Популярные лекции по математике. Вып. 6.)

17. Всероссийские математические олимпиады школьников: Книга для учащихся / Г. Н. Яковлев, Л. П. Купцов, С. В. Резниченко, П. Б. Гусятников. М.: Просвещение, 1992. — 384 с.

18. Галицкий М. Л., Гольдман А. М., Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре для 8—9 классов: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. 2-е изд. М.: Просвещение, 1994. — 271 с.

19. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Задачи логического характера: Пособие для учащихся 5—11 классов. М.: Просвещение, 1996. — 160 с.

20. Галкин Е. В. Нестандартные задачи по математике. Ч. II. Задачи с целыми числами: Пособие для учащихся 5—11 классов. Челябинск, 2003. — 286 с.

21. Гальперин Г. А., Толпыго А. К. Московские математические олимпиады: Книга для учащихся / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Просвещение, 1986. — 303 с.

22. Генкин С. А., Итенберг П. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Киров: Аса, 1994. — 272 с.

23. Доброва О. Н. Задания по алгебре и математическому анализу: Пособие для учащихся 9—11 классов общеобразовательных учреждений. М.: Просвещение, 1996. — 352 с.

24. Дополнительные главы по курсу математики 10 класса для факультативных занятий: Пособие для учащихся / Сост. З. А. Скопец. М.: Просвещение, 1979. — 256 с.

25. Дорофеев Г. В., Потапов М. К., Розов Н. Х. Математика: Для поступающих в вузы. М.: Дрофа, 1996. — 560 с.

26. Дынкин Е. Б., Молчанов С. А., Розенталь А. Л. Математические соревнования. Арифметика и алгебра. М.: Наука, 1970. — 95 с. (Библиотечка физико-математической школы. Вып. 2.)

27. Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: Учебное пособие для 10—11 классов средней школы / Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Шварцбурд. М.: Просвещение, 1990. — 48 с.

28. Заочные математические олимпиады / Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот, А. Л. Тоом. М.: Наука, 1981. — 128 с.

29. Зарубежные математические олимпиады / Под ред. Ю. Н. Сергеева. М.: Наука, 1987. — 415 с. (Библиотечка математического кружка. Вып. 17.)

30. Зетель С. И. Задачи на максимум и минимум. М.: Гостехиздат, 1948. — 224 с.

31. Карп А. П. Сборник задач по алгебре и началам анализа: Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1995. — 176 с.

32. Кречмар В. А. Задачник по алгебре. 7-е изд. М.: Наука, 1972. — 416 с.

33. Литвиненко В. Н., Мордкович А. Г. Практикум по решению математических задач. Алгебра. Тригонометрия: Учебное пособие для студентов педагогических институтов. 2-е изд., перераб. и дополн. М.: Просвещение, 1991. — 352 с.

34. Лоповок Л. М. 1000 проблемных задач по математике: Книга для учащихся. М.: Просвещение, 1995. — 239 с.

35. Лурье М. В., Александров В. И. Задачи на составление уравнений. М.: Наука, 1976. — 79 с.

36. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности. 2-е изд. М.: Наука, 1975. — 48 с. (Популярные лекции по математике. Вып. 1.)

37. Моденов П. С. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики: Учебное пособие для вузов. М.: Советская наука, 1957. — 666 с.

38. Новоселов С. И. Специальный курс элементарной алгебры: Учебник для педагогических институтов. 4-е изд., перераб. М.: Советская наука, 1956. — 528 с.

39. Олехник С. Н., Потапов М. Е., Пасиченко П. И. Нестандартные методы решения уравнений и неравенств. М.: Изд. МГУ, 1991. — 144 с.

40. Петраков И. С. Математические олимпиады школьников: Пособие для учителей. М.: Просвещение, 1982. — 96 с.

41. Петраков И. С. Математические кружки в 8—10 классах: Книга для учителя. М.: Просвещение, 1987. — 224 с.

42. Петров К. Сборник задач по алгебре: Книга для учителя. Пер. с болг. М.: Просвещение, 1984. — 208 с.

43. Сборник задач по математике для поступающих во втузы: Книга для ученика и учителя / Под ред. М. И. Сканави. 6-е изд. М.: Высшая школа, 1993. — 528 с.

44. Сивашинский И. Х. Неравенства в задачах. М.: Наука, 1967. — 304 с.

45. Смышляев В. Е. Практикум по решению задач школьной математики. Вып. 5: Учебное пособие для студентов-заочников V курса физико-математических факультетов педагогических институтов. М.: Просвещение, 1978. — 96 с.

46. Соросовские олимпиады школьников. М.: МЦНМО, 1995. — 412 с.

47. Стратилатов П. В. Сборник задач по тригонометрии: Для 9 и 10 классов средней школы. 2-е изд. М.: Учпедгиз, 1964. — 112 с.

48. Ткачук В. В. Математика — абитуриенту. 3-е изд., испр. и дополн. М.: МЦНМО, 1996. — Т. I — 415 с. Т. II — 415 с.

49. Фомин Д. В. Задачи ленинградских математических олимпиад: Методическое пособие. Л., 1990. — 80 с.

50. Шарыгин И. Ф. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 10 класса средней школы. М.: Просвещение, 1989. — 352 с.

51. Шарыгин И. Ф., Голубев В. И. Факультативный курс по математике. Решение задач: Учебное пособие для 11 класса средней школы. М.: Просвещение, 1991. — 384 с.

52. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. 5-е изд., перераб. М.: Наука, 1976. — 384 с. (Библиотека математического кружка. Вып. 1.)

53. Журнал «Квант», 1970–1999. (Разделы: «Задачник “Кванта”», «“Квант” для младших школьников», «Математический кружок», «Практикум абитуриента», «Варианты вступительных экзаменов».)

54. Журнал «Математика в школе», 1934–1999. (Разделы: «Задачи», «Готовимся к олимпиаде», «Внеклассная работа», «Вступительные экзамены в вузы».)

55. Бендукидзе А. Д., Сулаквелидзе А. К. Вычисление сумм. // Квант. 1970. № 9. С. 37–40.

56. Гальперин И. М., Габович И. Г. Использование векторного неравенства Коши — Буняковского при решении задач по алгебре // Математика в школе. 1991. № 2. С. 54–57.

57. Гутенмахер В. Неравенства с фиксированной суммой // Квант. 1979. № 9. С. 29–31.

58. Дорофеев Г. В. Применение производной при решении задач школьной математики // Математика в школе. 1989. № 5–6. № 5. С. 12—15, 16; № 6. С. 24–30.

59. Затакавай В. Решаем системы уравнений // Квант. 1992. № 3. С. 48–52.

60. Курландчик Л. Высокие степени // Квант. 1978. № 11. С. 13–16.

61. Халиков А. Примеры применения скалярного произведения векторов // Математика в школе. 1991. № 2. С. 59–61.

СОДЕРЖАНИЕ