



п я т ь



к о л е ц

# МАТЕМАТИКА ОБЛАСТНЫЕ ОЛИМПИАДЫ



ПРОСВЕЩЕНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО



# МАТЕМАТИКА ОБЛАСТНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

8–11 классы

Москва  
«Просвещение»  
2010

УДК 372.8:51  
ББК 74.262.21  
М34

*Серия «Пять колец» основана в 2007 г.*

Авторы:  
**Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников,  
О. К. Подлипский, Д. А. Терешин**

**Математика. Областные олимпиады. 8—11 классы / [Н. Х. Агаханов, И. И. Богданов, П. А. Кожевников и др.]. — М. : Просвещение, 2010. — 239 с. : ил. — (Пять колец). — ISBN 978-5-09-018999-6.**

Книга содержит условия и решения задач, предлагавшихся на III этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике в 1993—2008 гг.

УДК 372.8:51  
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-018999-6

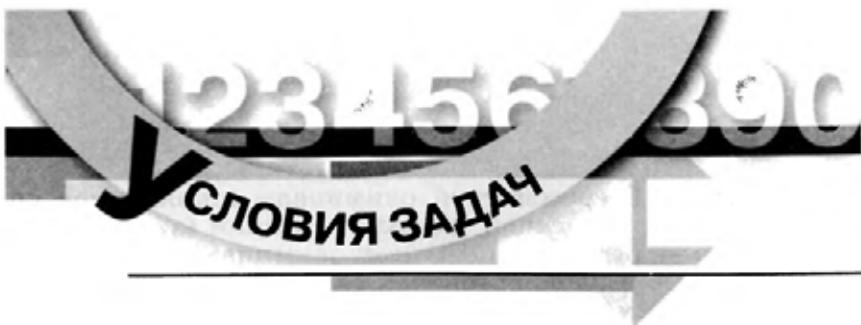


© Издательство «Просвещение», 2010  
© Художественное оформление.  
Издательство «Просвещение», 2010  
Все права защищены

В системе Всероссийской олимпиады школьников по математике III, областной, республиканский (а по новому Положению — региональный) этап олимпиады носит ключевой характер. С одной стороны, он достаточно массовый, и в нем принимают участие практически все талантливые в математике школьники России. С другой стороны, он является отборочным к заключительным этапам Всероссийской олимпиады, а лучшие участники по выпускному классу получают льготы при поступлении в региональные вузы. Поэтому задания олимпиады, начиная с III этапа, формируются только из новых (авторских) задач. Ежегодно «олимпиадная» математика обогащается новыми идеями. Многие задачи Всероссийских олимпиад по математике становятся мировой олимпиадной классикой.

Задания III этапа олимпиады составляются Методической комиссией Всероссийской олимпиады школьников по математике. В последние годы в нее входят преподаватели вузов и профильных физико-математических школ, сотрудники научных учреждений Долгопрудного, Иваново, Калуги, Кирова, Москвы, Новосибирска, Санкт-Петербурга, Саратова, Уфы, Ярославля. Также в работе Методической комиссии активно участвуют недавние «олимпийцы» — победители всероссийских и международных олимпиад последних лет — студенты и аспиранты ведущих вузов России (МГУ, МФТИ(ГУ), СПбГУ).

Данная книга содержит условия и решения задач, предложавшихся на III этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике в 1993—2008 гг. Наиболее сложные задачи олимпиад отмечены звездочкой. Книга адресована старшеклассникам, увлекающимся математикой, а также учителям, методистам, руководителям кружков и факультативов, ведущим подготовку обучающихся к математическим олимпиадам различного уровня и другим математическим соревнованиям.



1993–1994

**Задачи предложили:** Н. Агаханов, А. Белов, С. Берлов, А. Голованов, Р. Женодаров, А. Калинин, А. Качуровский, Д. Кузнецов, Б. Кукушкин, В. Производов, С. Рукшин, И. Сергеев, М. Сонкин, Д. Тамаркин, С. Токарев, А. Фомин.

## ▼ 9 класс

1. Натуральное число  $n$  является произведением двух различных простых чисел, а сумма всех его делителей, считая 1, но не считая  $n$ , равна 1000. Найдите все такие  $n$ .
2. На стороне  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = BC$ ) взяли точки  $N$  и  $M$  ( $N$  ближе к  $B$ , чем  $M$ ), такие, что  $NM = AM$  и  $\angle MAC = \angle BAN$ . Найдите угол  $CAN$ .
3. Докажите, что при любых отличных от нуля числах  $a, b$  и  $c$  хотя бы одно из квадратных уравнений  $ax^2 + 2bx + c = 0$ ,  $bx^2 + 2cx + a = 0$  и  $cx^2 + 2ax + b = 0$  имеет корень.
4. Каждую грань кубика разбили на четыре одинаковых квадрата, а затем раскрасили эти квадраты в несколько цветов так, что квадраты, имеющие общую сторону, оказались окрашенными в различные цвета. Какое наибольшее количество квадратов одного цвета могло получиться?
5. На главной диагонали шашечной доски  $10 \times 10$  стоит десять шашек (все в разных клетках). За один ход разрешается выбрать любую пару шашек и передвинуть каждую из них на одну клетку вниз. Можно ли за несколько таких ходов поставить все шашки на нижнюю горизонталь?
6. Найдите все целые  $a$ , при которых уравнение  $x^2 + ax + a = 0$  имеет целый корень.
7. В окружности проведены две пересекающиеся хорды  $AB$  и  $CD$ . На отрезке  $AB$  взяли точку  $M$  так, что  $AM = AC$ ,

а на отрезке  $CD$  — точку  $N$  так, что  $DN = DB$  (рис. 1). Докажите, что если точки  $M$  и  $N$  не совпадают, то прямая  $MN$  параллельна прямой  $AD$ .

8. На полке в произвольном порядке стоит десятитомное собрание сочинений Ильфа и Петрова. Библиотекарь может взять любой том с полки и поставить его на пятое место (считая слева). Докажите, что с помощью нескольких таких операций библиотекарь сможет расставить тома в порядке возрастания номеров.

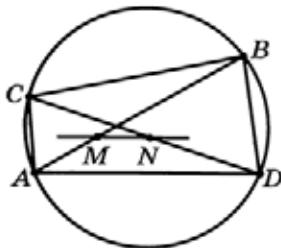


Рис. 1

## 10 класс

9. Рассматривается последовательность натуральных чисел  $2, 6, 30, \dots$ , в которой  $k$ -й член есть произведение первых  $k$  простых чисел,  $k = 1, 2, \dots$ . Известно, что разность некоторых двух чисел этой последовательности равна 30 000. Найдите эти числа.
10. В каждую клетку прямоугольника  $10 \times 19$  записали одно из чисел 0 или 1, после чего подсчитали суммы чисел в каждом столбце и в каждой строке. Какое наибольшее количество различных чисел могло получиться?
11. Угол при вершине  $A$  равнобедренного треугольника  $ABC$  ( $AB = AC$ ) равен  $30^\circ$ . На сторонах  $AB$  и  $AC$  взяты точки  $Q$  и  $P$  соответственно так, что  $\angle QPC = 45^\circ$  и  $PQ = BC$ . Докажите, что  $BC = CQ$ .
12. Найдите наименьшее целое  $a$ , при котором для всех действительных  $x$  выполняется неравенство  $x^4 + 2x^2 + a \geq 4x$ .
13. Докажите, что если  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ , то  $a^3(b+1) + b^3(a+1) \geq a^2(b+b^2) + b^2(a+a^2)$ .
14. Натуральные числа  $a$  и  $b$  имеют ровно по 99 натуральных делителей (считая 1 и само число). Может ли число  $ab$  иметь ровно 1000 натуральных делителей?
15. Через точку  $S$ , лежащую вне окружности с центром  $O$ , проведены две касательные, касающиеся окружности в точках  $A$  и  $B$ , и секущая, пересекающая окружность в точках  $M$  и  $N$ . Прямые  $AB$  и  $SO$  пересекаются в точке  $K$ . Докажите, что точки  $M, N, K$  и  $O$  лежат на одной окружности.
16. После проведения чемпионата России по футболу в два круга оказалось, что все команды набрали различное число очков, причем шесть московских команд набра-

ли вместе столько же очков, сколько набрали вместе остальные двенадцать команд. Докажите, что среди московских команд есть призер чемпионата (команда, занявшая первое, второе или третье место).

(Примечание: за победу команда получала 2 очка, за ничью — 1, за поражение — 0.)

## ▼ 11 класс

17. В коробке лежат красные, желтые и зеленые карандаши трех размеров: короткие, средние и длинные. Известно, что имеются карандаши всех трех цветов и всех трех размеров. Верно ли, что обязательно найдутся три карандаша, попарно различающиеся одновременно и по цвету, и по размеру?
18. Докажите, что для любых действительных чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , таких, что  $a > b > c > 0$ , выполнено неравенство  $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} < \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$ .
- 19\*. Центры четырех окружностей  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $S_3$  и  $S_4$  лежат на окружности  $S$ . Окружности  $S_1$  и  $S_2$  пересекаются в точках  $A_1$  и  $B_1$ , окружности  $S_2$  и  $S_3$  — в точках  $A_2$  и  $B_2$ , окружности  $S_3$  и  $S_4$  — в точках  $A_3$  и  $B_3$ , окружности  $S_4$  и  $S_1$  — в точках  $A_4$  и  $B_4$ , причем точки  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  и  $A_4$  лежат на окружности  $S$ , а точки  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  и  $B_4$  различные и лежат внутри окружности  $S$ . Докажите, что  $B_1B_2B_3B_4$  — прямоугольник.
20. На координатной плоскости построены две параболы:  $y = x^2 + 4$  и  $y = -x^2 + 2x$  — и к ним проведены две общие касательные. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках касания является параллелограммом.
21. На шахматную доску размером  $(2n - 1) \times (2n - 1)$  поставили  $(2n - 1)$  ладью так, что ни одна из них не бьет другую. Докажите, что в любом квадрате  $n \times n$  стоит хотя бы одна ладья.
22. Точки  $E$  и  $F$  — середины сторон  $AB$  и  $AD$  параллелограмма  $ABCD$ , а отрезки  $CE$  и  $BF$  пересекаются в точке  $K$ . Точка  $M$  лежит на отрезке  $EC$ , причем  $BM \parallel KD$ . Докажите, что площади треугольника  $KFD$  и трапеции  $KBMD$  равны.
23. Для каких натуральных  $n$  числа  $1, 2, 3, \dots, 4n$  можно разбить на  $n$  групп по четыре числа так, чтобы в каждой группе одно из чисел равнялось среднему арифметическому трех остальных?
- 24\*. Через точку внутри прямоугольного параллелепипеда провели три плоскости, параллельные его граням. При этом он оказался разбитым на восемь меньших парал-

лелепипедов. Докажите, что по крайней мере у четырех из этих параллелепипедов объем не превышает  $\frac{1}{8}$  объема исходного параллелепипеда.

## 1994—1995

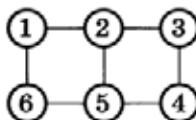
Задачи предложили: Н. Агаханов, А. Голованов, С. Дворянинов, Р. Женодаров, С. Конягин, Л. Купцов, Д. Митъкин, С. Рукшин, М. Смурров, М. Сонкин, Д. Тамаркин, Д. Терешин, С. Токарев, В. Федотов, А. Храбров, А. Шапиро, А. Шаповалов, И. Шарыгин.



### 8 класс

25. Существуют ли такие двузначные числа  $\overline{ab}$  и  $\overline{cd}$ , что  $\overline{ab} \cdot \overline{cd} = \overline{abcd}$ ?
26. В классе не менее 95,5% и не более 96,5% учеников учатся без двоек. При каком наименьшем количестве учеников это возможно?
27. Дан равнобедренный треугольник с углом  $20^\circ$  при вершине. Докажите, что его боковая сторона больше удвоенного основания.
28. В кружочках расположены числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 2, а). За один ход разрешается выбрать любую пару соседних (соединенных отрезком) чисел и прибавить к каждому из них одно и то же целое число (это число может меняться от шага к шагу). Можно ли из совокупности чисел на рисунке 2, а получить совокупность чисел, изображенных на рисунке 2, б?

а)



б)

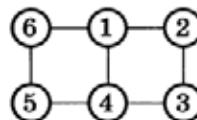


Рис. 2

29. Двое по очереди закрашивают клетки таблицы  $8 \times 8$ . Одним ходом разрешается закрасить одну или несколько клеток, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце таблицы. Клетки, закрашенные ранее, закрашивать вторично запрещается. Проигравшим считается тот из игроков, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?
30. Докажите, что для любых чисел  $x$  и  $y$  справедливо неравенство  $2x^4 + 2y^4 \geq xy(x + y)^2$ .

31. Назовем натуральное число *симметричным*, если число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, совпадает с исходным. Найдите все симметричные числа, которые при прибавлении к ним числа 1995 остаются симметричными.
32. В треугольниках  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  отрезки  $CD$  и  $C_1D_1$  — биссектрисы углов  $C$  и  $C_1$  соответственно. Известно, что  $AB = A_1B_1$ ,  $CD = C_1D_1$  и  $\angle ADC = \angle A_1D_1C_1$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны.



## 9 класс

33. Докажите, что сумма попарных произведений трех последовательных натуральных чисел не может равняться 3 000 000.
34. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  взята точка  $P$ , отличная от точек  $A$  и  $B$ , а на сторонах  $BC$  и  $AC$  — точки  $Q$  и  $R$  соответственно так, что четырехугольник  $PQCR$  — параллелограмм. Пусть отрезки  $AQ$  и  $PR$  пересекаются в точке  $M$ , а отрезки  $BR$  и  $PQ$  — в точке  $N$ . Докажите, что сумма площадей треугольников  $AMP$  и  $BNP$  равна площади треугольника  $CQR$ .
35. Клетки квадратной таблицы  $15 \times 15$  раскрашены в красный, синий и зеленый цвета. Докажите, что найдутся по крайней мере две строки, в которых клеток хотя бы одного цвета поровну.
36. Можно ли разрезать квадрат на несколько равных прямоугольных треугольников с острым углом  $30^\circ$ ?
37. Решите уравнение  $x^{19} + x^{95} = 2x^{19+95}$ .
38. В окружность вписан равносторонний треугольник  $ABC$ . На дуге  $AB$ , не содержащей точки  $C$ , выбрана точка  $M$ , отличная от  $A$  и  $B$ . Пусть прямые  $AC$  и  $BM$  пересекаются в точке  $K$ , а прямые  $BC$  и  $AM$  — в точке  $N$ . Докажите, что произведение длин отрезков  $AK$  и  $BN$  не зависит от выбора точки  $M$ .
39. Сумма нескольких натуральных чисел, в записи каждого из которых участвуют только цифры 3 и 0, равна  $\overbrace{55\dots55}^{1995 \text{ пятерок}}$ . Какое наименьшее число слагаемых может быть в этой сумме?
40. Дан квадрат, разбитый на клетки  $1 \times 1$ . По линиям разбиения (внутри квадрата или на его границе) проведено несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться так, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечетное число указанных контуров?

## ▼ 10 класс

41. Решите в целых числах систему уравнений  $\begin{cases} xy + z = 94, \\ x + yz = 95. \end{cases}$
42. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  биссектрисы углов  $CAD$  и  $CBD$  пересекаются на стороне  $CD$ . Докажите, что биссектрисы углов  $ACB$  и  $ADB$  пересекаются на стороне  $AB$ .
43. Микрокалькулятор «АХ-95» работает только с четверками чисел и выполняет только две операции:  
1) переводит  $(a, b, c, d)$  в  $(a + 1, b + d, c - 1, d + 1)$ ;  
2) переводит  $(a, b, c, d)$  в  $(a, b - 1, c + 2, d + 1)$ .  
Можно ли при помощи этого калькулятора из четверки  $(3, 4, 2, 1)$  получить четверку  $(6, 5, 7, 8)$ ?
44. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень общее число женихов и невест не превосходит половины от общего числа женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих молодых людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.
45. При каком наименьшем  $n$  число  $122\dots221$  делится на  $999\ 999\ 999$ ? п двоек
46. Решите уравнение  $[x] + [x^2] = [x^3]$ .
47. Внутри острого угла  $XAY$  взята точка  $D$ , а на его сторонах  $A\bar{X}$  и  $A\bar{Y}$  — точки  $B$  и  $C$  соответственно так, что  $\angle ABC = \angle XBD$  и  $\angle ACB = \angle YCD$ . Докажите, что центр окружности, описанной около  $\triangle ABC$ , лежит на отрезке  $AD$ .
48. Дан квадрат, разбитый на клетки  $1 \times 1$ . По линиям разбиения (внутри квадрата или на его границе) проведено несколько контуров, каждый из которых ограничивает некоторый прямоугольник. Может ли оказаться так, что через любую сторону любой клетки будет проходить нечетное число указанных контуров?

## ▼ 11 класс

49. Докажите, что если  $a^2 + b^2 + ab + bc + ca < 0$ , то  $a^2 + b^2 < c^2$ .
50. На клетчатой доске  $4 \times 4$  играют двое. Ходят по очереди, и каждый играющий своим ходом закрашивает одну клетку. Клетки закрашиваются один раз. Проигрывает тот, после чьего хода образуется квадрат  $2 \times 2$ , состоящий из закрашенных клеток. Кто выигрывает при правильной игре: начинаящий или его партнер?
51. В треугольнике  $ABC$  с острым углом при вершине  $A$  проведены биссектриса  $AE$  и высота  $BN$ . Известно, что  $\angle AEB = 45^\circ$ . Найдите угол  $EHC$ .

52. В некотором районе, состоящем из нескольких деревень, число женихов равно числу невест. Известно, что в каждой из деревень общее число женихов и невест не превосходит половины от общего числа женихов и невест всего района. Докажите, что всех этих молодых людей можно поженить так, что в каждой паре муж и жена будут из разных деревень.
53. Назовем натуральное число симметричным, если число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, совпадает с исходным. Найдите все симметричные числа, которые при прибавлении к ним числа 1995 остаются симметричными.
54. Каждое из чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  равно косинусу суммы двух остальных. Докажите, что  $x = y = z$ .
55. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . Точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  расположены так, что основания перпендикуляров, опущенных из них на каждую из прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , принадлежат отрезкам  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  соответственно. Докажите, что площадь треугольника  $PQR$  не превосходит площади треугольника  $ABC$ .
56. Можно ли правильный шестиугольник со стороной длины  $n$  ( $n$  — натуральное число) разрезать на фигуры вида  (фигурка составлена из четырех равносторонних треугольников со стороной 1)?

## 1995—1996

### ▼ 8 класс

57. Сколько существует четырехзначных чисел, не делящихся на 1000, у которых первая и последняя цифры четны? (К. Кохась)
58. Восстановите пример на умножение натуральных чисел (рис. 3), если известно, что сумма цифр у обоих сомножителей одинакова. (Н. Авилов)
59. Круглый торт весом 1 кг разрезан на части тремя прямолинейными разрезами. Известно, что два из этих разрезов проходят через центр торта, а третий не проходит. Докажите, что вес по крайней мере одной из получившихся частей составляет не менее  $\frac{1}{6}$  кг. (И. Рубанов)

$$\begin{array}{r}
 & * & * & * & 1 \\
 \times & & & & \\
 & & & 2 & * \\
 \hline
 & * & * & 3 & * & * \\
 + & & * & 4 & * & * \\
 \hline
 & 5 & * & * & * & *
 \end{array}$$

Рис. 3

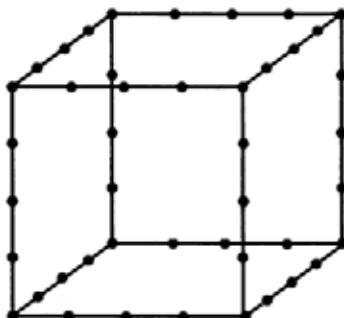


Рис. 4

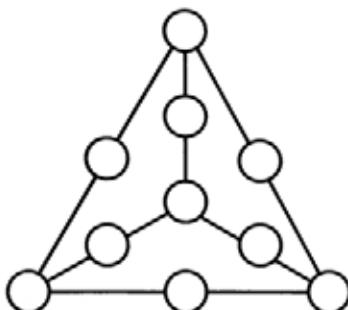


Рис. 5

60. Данна полоска клетчатой бумаги длиной в 100 клеток. Двое играющих по очереди красят клетки в черный цвет, причем первый всегда красит четыре подряд идущие клетки, а второй — три подряд идущие. Уже покрашенную клетку второй раз красить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй? (*Р. Женодаров*)
61. Каркас куба с ребром длины 4 разделен точками на единичные отрезки (рис. 4). Сколько различных прямых определяют эти точки? (*Н. Авилов*)
62. Дан правильный треугольник  $ABC$ . На продолжении стороны  $AC$  за точку  $C$  взята точка  $D$ , а на продолжении стороны  $BC$  за точку  $C$  — точка  $E$  так, что  $BD = DE$ . Докажите, что  $AD = CE$ . (*Л. Купцов*)
63. Можно ли в кружочках (рис. 5) расставить все целые числа от 0 до 9 так, чтобы сумма трех чисел по любому из шести отрезков была одной и той же? (*Жюри*)
64. На горизонтальной поверхности лежат в ряд, касаясь друг друга, 100 одинаковых бревен, сплошь вымазанных дегтем. В ложбину между двумя самыми левыми бревнами кладут такое же, но чистое бревно и без проскальзывания катят его вправо до самой правой ложбины. Какая часть боковой поверхности этого бревна останется чистой к концу пути? (*И. Рубанов*)



## 9 класс

65. Считается, что ученик  $A$  учится лучше ученика  $B$ , если в большинстве контрольных работ оценка у  $A$  выше, чем оценка у  $B$ . Приведите пример ситуации, когда ученик  $A$  учится лучше, чем  $B$ , ученик  $B$  — лучше, чем  $C$ , а ученик  $C$  — лучше, чем  $A$ . (*А. Белов*)

66. У трех братьев — Андрея, Василия и Сергея — дни рождения совпадают. Когда старшему из них, Андрею, исполнилось 12 лет, то оказалось, что сумма возрастов трех братьев делится на 12. То же случилось, когда 12 лет исполнилось Василию. Докажите, что то же самое случится, когда 12 лет исполнится Сергею. (*А. Шаповалов*)
67. Точечный прожектор освещает угол  $45^\circ$ . Какое наименьшее количество прожекторов можно поставить внутри квадратной площадки так, чтобы полностью ее осветить? (*Д. Кузнецов*)
68. Данна белая доска размером  $100 \times 100$  клеток. Двое по очереди красят ее клетки в черный цвет, причем первый всегда закрашивает квадрат  $2 \times 2$ , а второй — три клетки, образующие «уголок». Уже покрашенную клетку второй раз красить нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выигрывает при правильной игре: первый или второй? (*Р. Женодаров*)
69. На доске были написаны три числа. Когда их стерли и написали их произведение, сумму и сумму их попарных произведений, оказалось, что на доске снова написаны те же числа. Какие числа могли быть первоначально написаны на доске? (*Н. Агаханов*)
70. В треугольнике  $ABC$  проведена биссектриса  $BL$ . Через точку  $L$  к окружности, описанной около треугольника  $BLC$ , проведена касательная, пересекающая сторону  $AB$  в точке  $P$ . Докажите, что прямая  $AC$  касается окружности, описанной около треугольника  $BPL$ . (*Н. Нецветаев*)
71. На некотором острове, где живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, объявлен конкурс на должность мэра. Каждый из  $n$  претендентов на эту должность сделал заявление, а именно  $k$ -й претендент ( $1 \leq k \leq n$ ) сказал: «Не считая меня, среди претендентов лжецов на  $k$  больше, чем рыцарей». Сколько человек претендует на должность мэра? (*А. Шаповалов*)
72. Двадцать восемь контрольных пунктов секретного объекта соединены системой коридоров (рис. 6). Каждый коридор соединяет два пункта и может быть освещен или затемнен. Первоначально весь объект затемнен. На каждом контрольном пункте есть переключатель, меняющий освещенность всех подходящих к нему коридоров на противоположную. Началь-



Рис. 6

ник охраны ходит по объекту и в некоторых контрольных пунктах меняет освещенность. Какое наибольшее количество коридоров он может сделать освещенными? (Р. Женодаров)



## 10 класс

73. Решите уравнение  $19[x] - 96\{x\} = 0$ . (Д. Кузнецов)
74. Дан треугольник  $ABC$ , в котором  $AB = BC$ ,  $AB \neq AC$ . На стороне  $AB$  выбрана точка  $E$ , на продолжении стороны  $AC$  за точку  $A$  выбрана точка  $D$  так, что  $\angle BDC = \angle ECA$ . Докажите, что площади треугольников  $DEC$  и  $ABC$  равны. (С. Токарев)
75. На доске через запятую выписаны числа  $1, 2, \dots, 99$ . Двое играющих по очереди заменяют одну из имеющихся запятых на знак «+» или «×» («умножить»). После того как запятых не останется, игроки вычисляют значение полученного выражения. Если результат является нечетным числом, то выигрывает первый, а если четным — то второй. Кто выигрывает при правильной игре? (А. Шаповалов)
76. Сколько пар целых чисел  $(x; y)$  удовлетворяет системе неравенств  
$$\begin{cases} 2x \geq 3y, \\ 3x \geq 4y, \\ 5x - 7y \leq 20? \end{cases}$$
 (Н. Нецветаев)
77. Ученик Вася рвет листок с условиями задач областной олимпиады 1996 г. За одну секунду он может разорвать какой-то один из имеющихся клочков на 2 части либо разорвать на 2 части каждый из имеющихся клочков. Может ли Вася ровно через 500 с получить ровно 1996 клочков? (Жюри)
78. На некотором острове, где живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут, объявлен конкурс на должность мэра. Каждый из  $n$  претендентов на эту должность сделал заявление, а именно  $k$ -й претендент ( $1 \leq k \leq n$ ) сказал: «Не считая меня, среди претендентов лжецов на  $k$  больше, чем рыцарей». Сколько человек претендует на должность мэра? (А. Шаповалов)
79. В равнобедренную трапецию  $ABCD$  ( $AB = CD$ ) вписана окружность. Пусть  $M$  — точка касания окружности со стороной  $CD$ ,  $K$  — точка пересечения окружности с отрезком  $AM$ ,  $L$  — точка пересечения окружности с отрезком  $BM$ . Вычислите величину  $\frac{AM}{AK} + \frac{BM}{BL}$ . (А. Орлов)

80. Какое наименьшее число круглых фишек диаметром  $\sqrt{2}$  можно расставить на доске размером  $7 \times 7$  клеток (длина стороны клетки равна 1) так, чтобы внутри каждой клетки хотя бы одна точка была накрыта некоторой фишкой? (*О. Богопольский*)

## ▀ 11 класс

81. Найдите семь попарно различных натуральных чисел, сумма обратных величин которых была бы равна 1. (*Фольклор*)
82. Существует ли треугольная пирамида, каждое ребро основания которой видно из середины противолежащего бокового ребра под прямым углом? (*Н. Агаханов*)
- 83\*. Известно, что некоторое число  $x$  встречается в наборе  $\left\{a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_1 + a_2 + a_3}{3}, \dots, \frac{a_1 + \dots + a_{100}}{100}\right\}$  по крайней мере 51 раз. Докажите, что среди чисел  $a_1, \dots, a_{100}$  есть два равных. (*Р. Женодаров*)
84. Функция  $f(x)$ , определенная при всех действительных  $x$ , удовлетворяет следующему условию: уравнение  $f(x) = px + q$  имеет решение тогда и только тогда, когда имеет решение уравнение  $x^2 = px + q$ . Докажите, что  $f(x) = x^2$ . (*А. Шаповалов*)
85. Найдите все острые углы  $\alpha$ , для которых  $\sin(\sin \alpha + \alpha) = \cos(\cos \alpha - \alpha)$ . (*Н. Агаханов*)
86. Сто первых натуральных чисел в каком-то порядке записали в ряд и вычислили 98 сумм, получаемых при сложении троек подряд идущих чисел. Какое наибольшее число нечетных сумм могло при этом получиться? (*Р. Женодаров*)
87. Докажите, что одна из сторон выпуклого четырехугольника с диагоналями  $a$  и  $b$  не длиннее чем  $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$ . (*В. Дольников*)
- 88\*. На плоскости расположено множество  $A$ , состоящее из нескольких прямых. Известно, что для любого его подмножества  $B$ , состоящего из  $k^2 + 1$  ( $k \geq 3$ ) прямых, можно выбрать  $k$  точек так, что любая прямая из множества  $B$  проходит хотя бы через одну из этих точек. Докажите, что и для всего множества  $A$  можно выбрать  $k$  точек так, чтобы любая прямая из  $A$  проходила через одну из них. (*В. Дольников*)

## 8 класс

89. Расположите натуральные числа от 1 до 100 в строку так, чтобы разность между любыми двумя соседними числами была равна 2 или 3. (*Н. Агаханов*)
90. Медианой пятиугольника  $ABCDE$  назовем отрезок, соединяющий вершину с серединой противолежащей стороны ( $A$  — с серединой  $CD$ ,  $B$  — с серединой  $DE$  и т. д.). Докажите, что если 4 медианы выпуклого пятиугольника перпендикулярны сторонам, к которым они проведены, то таким же свойством обладает и пятая медиана. (*Р. Женодаров*)
91. На клетчатой бумаге построено несколько прямоугольников со сторонами, параллельными линиям сетки, и общим центром  $O$  в одном из узлов сетки. За один вопрос можно про любой узел узнать, у скольких прямоугольников он лежит внутри. Как за четыре вопроса можно узнать, сколько прямоугольников содержат только один узел  $O$ ? (*А. Шаповалов*)
- 92\*. На автобусном маршруте 11 остановок, включая первую. На первой остановке в автобус сели 10 пассажиров, и на всех последующих остановках, кроме конечной, суммарное количество вошедших и вышедших пассажиров было равно 10. Кроме того, оказалось, что каждый пассажир ехал не более 5 остановок (т. е. от остановки номер  $M$  не далее, чем до остановки номер  $M + 5$ ) и ни в какой момент движения автобус не был пустым. Какое наибольшее количество пассажиров могло одновременно оказаться в автобусе во время движения? (*Е. Малинникова*)
93. Найдите все натуральные числа, представимые в виде  $\frac{mn+1}{m+n}$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа. (*Л. Емельянов*)
94. Можно ли какие-либо десять чисел расставить в кружки данной фигуры (рис. 7) так, чтобы сумма чисел в вершинах любого черного треугольника была равна 1996, а сумма чисел в вершинах любого белого треугольника была равна 1997? (*Н. Авилов*)
95. На огороженном поле  $1 \times 1$  км были построены заборы, разделившие его на прямоугольные участ-

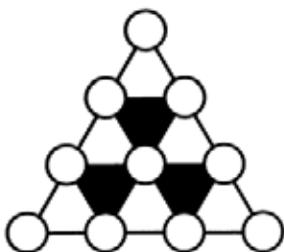


Рис. 7

ки  $5 \times 20$  м и  $6 \times 12$  м. Какова общая длина построенных заборов? (А. Шаповалов)

96. Двоем по очереди записывают натуральные числа от 1 до 25 в клетки таблицы  $5 \times 5$ , каждое число может быть записано только один раз. Если после заполнения всей таблицы сумма чисел в каком-нибудь столбце или в какой-нибудь строке равна 70, то выигрывает начинаящий, в противном случае выигрывает его соперник. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть, чтобы выиграть? (Р. Женодаров)



## 9 класс

97. Даны корни  $x_0$  и  $x_1$ ,  $x_0$  и  $x_2$ , ...,  $x_0$  и  $x_n$  квадратных трехчленов  $y = x^2 + a_1x + b_1$ ,  $y = x^2 + a_2x + b_2$ , ...,  $y = x^2 + a_nx + b_n$ . Найдите корни квадратного трехчлена  $y = x^2 + \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}x + \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n}$ . (Н. Агаханов)
98. На какое наибольшее число натуральных слагаемых можно разложить число 96 так, чтобы все слагаемые были больше 1 и попарно взаимно просты? (А. Шаповалов)
99. Назовем медианой пятиугольника  $ABCDE$  отрезок, соединяющий его вершину с серединой противолежащей стороны ( $A$  — с серединой  $CD$ ,  $B$  — с серединой  $DE$  и т. д.). Докажите, что если каждая медиана выпуклого пятиугольника делит пополам угол, из которого она проведена, и перпендикулярна стороне, к которой она проведена, то пятиугольник правильный. (Р. Женодаров)
- 100\*. На 115 карточках написаны целые числа 1, 2, ..., 115. Все карточки сложены в стопку так, что разность между числами на любых двух соседних карточках равна либо  $n$ , либо  $m$ . Оказалось, что для данных  $m$  и  $n$  существует только один способ сложить стопку с таким свойством. Какое число написано на нижней карточке стопки, если на верхней написано число 19? (Р. Женодаров)
101. Можно ли представить число  $1^2 + 2^2 + \dots + 1997^2$  в виде суммы квадратов 1996 различных натуральных чисел? (В. Сендеров)
102. В треугольнике  $ABC$   $AB > BC$ , и на стороне  $AB$  взята точка  $P$  так, что  $BP = BC$ . Биссектриса  $BM$  пересекает описанную около треугольника  $ABC$  окружность в точке  $N$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $P$ ,  $M$ ,  $N$  лежат на одной окружности. (Б. Кукушкин)

103. 38 попугаев передрались, измеряя рост удава. Каждый из них сумел выдрать одно перо из чьего-то хвоста, и у каждого попугая было выдрано одно перо. Кроме того, для любых трех попугаев можно указать четвертого, выдравшего перо у одного из них. Докажите, что для наведения порядка удав может проглотить не более 6 попугаев, а остальных рассадить поровну в две клетки так, чтобы ни один попугай не попал в одну группу со своим обидчиком. (*И. Акулич*)
- 104\*. Из клетчатого квадрата  $(n^2 + 1) \times (n^2 + 1)$  вырезали клетчатый квадрат  $(n^2 - 1) \times (n^2 - 1)$  с тем же центром. На какое наименьшее число кусков нужно разрезать (по границам клеточек) образованную каемку так, чтобы из них можно было сложить квадрат  $2n \times 2n$ ? (*Р. Женодаров, О. Крижановский*)



## 10 класс

105. Найдите все функции  $f$ , удовлетворяющие при любых действительных  $x$  и  $y$  уравнению  $f(x - y) = f(x) + f(y) - 2xy$ . (*Р. Женодаров*)
106. Найдите все тройки чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , являющихся степенями пятерки с целыми неотрицательными показателями, такие, что одно из них получается выписыванием двух других подряд. (*В. Сендеров*)
107. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$ . Пусть  $M$  и  $N$  — точки пересечения окружностей, одна из которых проходит через точки  $A$  и  $B$ , а другая — через точки  $C$  и  $D$ . Найдите геометрическое место точек  $N$ , если точка  $M$  лежит на отрезке  $OC$  и не совпадает с его концами. (*М. Сонкин*)
- 108\*. На 115 карточках написаны целые числа  $1, 2, \dots, 115$ . Все карточки сложены в стопку так, что разность между числами на любых двух соседних карточках равна либо  $n$ , либо  $m$ . Оказалось, что для данных  $m$  и  $n$  существует только один способ сложить стопку с таким свойством. Какое число написано на нижней карточке стопки, если на верхней написано число 19? (*Р. Женодаров*)
109. Найдите все тройки ненулевых чисел  $a$ ,  $b$  и  $c$ , образующих арифметическую прогрессию, и таких, что из чисел  $\frac{1}{a}$ ,  $\frac{1}{b}$  и  $\frac{1}{c}$  также можно составить арифметическую прогрессию. (*Н. Агаханов*)

110. Сечение куба плоскостью — пятиугольник. Докажите, что площадь пятиугольника меньше произведения двух самых длинных его сторон. (*И. Акулич*)
111. На клетчатой бумаге лежит квадрат с вершинами в узлах сетки. Его передвинули, но так, что две вершины снова попали в узлы. Докажите, что две другие вершины тоже попали в узлы. (*А. Шаповалов*)
112. В классе 20 учеников. Каждый дружит не менее чем с 10 другими. Докажите, что в этом классе можно выбрать две тройки учеников так, чтобы любой ученик из одной тройки дружил с любым учеником из другой тройки. (*А. Грибалко*)

## 11 класс

113. Какие стороны может иметь треугольник  $ABC$ , если из отрезков длины  $\cos A$ ,  $\cos B$  и  $\cos C$  можно составить треугольник, и этот треугольник равен  $ABC$ ? (*Н. Агаханов*)
114. Назовем высотой  $(2n + 1)$ -угольника  $A_1A_2 \dots A_{2n+1}$  прямую, проходящую через вершину, перпендикулярную противолежащей стороне (через  $A_1$  перпендикулярно  $A_{n+1}A_{n+2}$  и т. д.). Докажите, что если  $2n$  высот  $(2n + 1)$ -угольника проходят через одну точку, то и  $(2n + 1)$ -я высота проходит через ту же точку. (*Р. Женодаров*)
115. Докажите, что число  $1996^{1996} + 1$  не является степенью выше первой никакого натурального числа. (*В. Сендеров*)
116. Двоих игроков по очереди заполняют отличными от нуля числами таблицу  $(2n + 1) \times (2n + 1)$ . В конце игры (после заполнения всей таблицы) первому засчитывается число строк, сумма которых равна нулю, а второму — число столбцов с суммой 0. Выигрывает тот, у которого засчитанное число больше. Может ли кто-то из игроков обеспечить себе выигрыш? (*О. Крижановский, И. Рубанов, Р. Женодаров*)
117. Существует ли многочлен  $P(x)$ , такой, что  $P(1) = 1$ ,  $P(2) = 2$  и  $P(n)$  иррационально для любого целого  $n$ , отличного от 1 и 2? (*Н. Агаханов*)
118. Точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ ,  $D_1$  — середины ребер  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  пирамиды  $SABCD$ . Известно, что отрезки  $AC_1$ ,  $BD_1$ ,  $CA_1$  и  $DB_1$  проходят через одну точку и имеют равные длины. Докажите, что  $ABCD$  — прямоугольник. (*Н. Агаханов*)

**119.** Докажите неравенство

$$\frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+z^3+x^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leq \frac{1}{3},$$

где  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . (*M. Сонкин*)

**120\***. Каждый из узлов бесконечного клетчатого листа бумаги раскрашен в один из двух цветов. Докажите, что существует бесконечное одноцветное множество узлов, имеющее центр симметрии. (*B. Протасов*)

## 1997–1998

### 8 класс

- 121.** В полдень из пункта *A* в пункт *B* выехал «Москвич». Одновременно из *B* в *A* по той же дороге выехали «Жигули». Через час «Москвич» находился на полпути от *A* до «Жигулей». Когда он окажется на полпути от «Жигулей» до *B*? (Скорости автомобилей постоянны и отличаются менее чем вдвое.) (*C. Токарев*)
- 122.** На гранях куба написаны натуральные числа, а в каждой вершине — произведения чисел на трех гранях с этой вершиной. Найдите сумму чисел на гранях, если сумма в вершинах равна 70. (*A. Шаповалов*)
- 123.** На стороне *BC* треугольника *ABC* выбрана точка *F*. Оказалось, что отрезок *AF* пересекает медиану *BD* в точке *E* так, что  $AE = BC$ . Докажите, что  $BF = FE$ . (*M. Сонкин*)
- 124.** Даны две системы прямоугольников на плоскости I и II. Известно, что любые два прямоугольника из различных систем имеют общую точку и стороны их параллельны. Докажите, что либо все прямоугольники в одной системе имеют общую точку, либо существуют две прямые, первая из которых пересекает все прямоугольники системы I, а вторая — все прямоугольники системы II. (*B. Дольников*)
- 125.** Имеется 10 спортсменов разного роста и 10 разного веса. Верно ли, что найдутся 10 спортсменов, любые два из которых отличаются и ростом и весом? (*A. Белов*)
- 126.** Прожектор освещает развернутый угол ( $180^\circ$ ). Можно ли расположить 19 прожекторов так, чтобы никакие 3 не находились на одной прямой и каждый прожектор освещал бы только один другой прожектор? (*T. Емельянова*)
- 127.** В треугольнике *ABC* проведены биссектрисы *AA<sub>1</sub>* и *CC<sub>1</sub>*. Докажите, что если длины перпендикуляров,

опущенных из вершины  $B$  на прямые  $AA_1$  и  $CC_1$ , равны, то треугольник  $ABC$  равнобедренный. (Н. Аганов)

128. Найдутся ли какие-нибудь 4 натуральных числа, такие, чтобы среди наибольших общих делителей пар встретились 6 последовательных чисел? (А. Шаповалов)

## ▼ 9 класс

129. В полдень из пункта  $A$  в пункт  $B$  выехал «Москвич». Одновременно из  $B$  в  $A$  по той же дороге выехали «Жигули». Через час «Москвич» находился на полпути от  $A$  до «Жигулей». Когда он окажется на полпути от «Жигулей» до  $B$ ? (Скорости автомобилей постоянны и отличаются менее чем вдвое.) (С. Токарев)
130. Докажите, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника, делит его диагонали в равных отношениях. (М. Сонкин)
131. Имеет ли уравнение  $x^{1997} + 2x^{1996} + 3x^{1995} + \dots + 1997x + 1998 = 0$  целые корни? (Т. Емельянова)
- 132\*. Натуральные числа от 1 до 100 разбиты на два набора по 50 чисел. Один набор выписан вдоль верхней стороны таблицы  $50 \times 50$ , а другой — вдоль левой стороны. В клетки таблицы записаны произведения соответствующих чисел из наборов («таблица умножения»). Могут ли все эти произведения оказаться различными? (О. Подлипский)
133. Три коэффициента  $a, b, c$  и два корня  $x_1, x_2$  квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ , выписанные в некотором порядке, образуют ряд из 5 последовательных целых чисел. Найдите все такие трехчлены. (А. Шаповалов)
134. В треугольнике  $ABC$ , вписанном в окружность,  $AB < AC$ . На стороне  $AC$  отмечена точка  $D$  так, что  $AD = AB$ . Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку  $DC$  делит пополам дугу  $BC$ , не содержащую точку  $A$ . (М. Сонкин)
135. Найдите наибольшее число  $l$ , такое, что при любой раскраске единичного квадрата в 2 цвета внутри его найдется отрезок с одноцветными вершинами длиной не меньше чем  $l$ . (Л. Емельянов)
136. Девять гирек расположены по кругу. Известно, что одна из них имеет массу 1 г, а за ней последовательно по ходу часовой стрелки расположены гирьки массами 2 г, 3 г, ..., 9 г. Размеры гирек одинаковы, и других гирек нет. Как двумя взвешиваниями на чашечных весях определить гирьку массой 1 г? (С. Токарев)



## 10 класс

137. Три друга гонят самогон, каждый своим аппаратом. У Труса течет жидкость крепостью  $a$  градусов, и стандартная бутыль наполняется за  $a$  часов, у Балбеса соответственно  $b$  градусов и за  $b$  часов, у Бывалого — с градусов и за  $c$  часов. Для ускорения процесса друзья направили все шланги в одну бутыль и наполнили ее за сутки. Какова крепость смеси?  
(Примечание: крепость — это процент содержания спирта.) (А. Шаповалов)
138. Решите уравнение  $\left[ \frac{1}{\sin x} \right] + \left[ \frac{1}{\cos x} \right] = 0$ . (Н. Агаханов)
139. Окружности  $S_1$  и  $S_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Луч  $O_1A$  пересекает окружность  $S_2$  в точке  $M$ , луч  $O_2A$  пересекает окружность  $S_1$  в точке  $N$ , а прямая  $MN$  вторично пересекает эти окружности в точках  $E$  и  $F$ . Докажите, что  $AE = AF$ . (М. Сонкин)
140. Есть три поля: на одном лежит стопка из  $n$  монет, два других свободны. За один ход можно переложить монету с верха любой стопки на свободное поле или на верх любой другой стопки. За какое наименьшее число ходов удастся собрать стопку в обратном порядке на том же поле? (А. Шаповалов)
141. Три коэффициента  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и два корня  $x_1$ ,  $x_2$  квадратного трехчлена  $ax^2 + bx + c$ , выписанные в некотором порядке, образуют ряд из пяти последовательных целых чисел. Найдите все такие трехчлены. (А. Шаповалов)
142. Дан неограниченный набор одинаковых правильных пятиугольников из картона, при вершинах каждого из которых написаны по кругу натуральные числа от 1 до 5. Пятиугольники можно переворачивать и поворачивать. Их сложили в стопку вершина к вершине, и оказалось, что суммы чисел при каждой из пяти вершин стопки одинаковы. Сколько пятиугольников может быть в одной стопке? (О. Подлипский)
143. Ортогональные проекции на плоскости всех граней треугольной пирамиды отрезка, соединяющего середины его противоположных ребер, имеют равные длины. Докажите, что таким же свойством обладает и любой из двух других отрезков, соединяющих середины противоположных ребер пирамиды. (Н. Агаханов)
144. Девять гирек расположены по кругу. Известно, что одна из них имеет массу 1 г, а за ней последовательно по ходу часовой стрелки расположены гирьки массами

2 г, 3 г, ..., 9 г. Размеры гирек одинаковы, и других гирек нет. Как двумя взвешиваниями на чашечных весах определить гирьку массой 1 г? (С. Токарев)

## 11 класс

145. Данна последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$ , где  $a_n = n^2 + n + 1$  при любом  $n \geq 1$ . Докажите, что произведение любых двух соседних членов этой последовательности также является ее членом. (С. Токарев)
146. Найдите два многочлена  $P(x)$  и  $Q(x)$  с целыми коэффициентами, таких, что множество значений дробно-рациональной функции  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$  есть промежуток  $[\sqrt{2}, +\infty)$ . (В. Сендеров)
147. На окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ , отмечены точки  $A_1, B_1, C_1$  — середины дуг  $CAB, ABC$  и  $BCA$  соответственно. Докажите, что касательные к окружности в точках  $A_1$  и  $C_1$  и серединный перпендикуляр к отрезку  $BB_1$  пересекаются в одной точке. (М. Сонкин)
148. На плоскости дано некоторое конечное семейство  $P$  кругов равного радиуса. Известно, что для любых трех кругов из  $P$  найдется прямая, пересекающая их все. Докажите, что если радиусы кругов увеличить в 2 раза, то найдется прямая, пересекающая все круги. (В. Дольников)
149. Существуют ли 1998 нецелых рациональных чисел, произведение любых двух из которых — целое число? (А. Малистов, А. Белов)
150. Дан неограниченный набор одинаковых правильных пятиугольников из картона, при вершинах каждого из которых написаны по кругу натуральные числа от 1 до 5. Пятиугольники можно переворачивать и поворачивать. Их сложили в стопку вершина к вершине, и оказалось, что суммы чисел при каждой из пяти вершин стопки одинаковы. Сколько пятиугольников может быть в одной стопке? (О. Подлипский)
151. При каких  $n$  существует многочлен  $P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$  с действительными коэффициентами, такой, что при всех  $x \in \mathbf{R}$   $P_n(x) > -3$  и  $P_n(-2) = P_n(0) = P_n(2) = 0$ ? (Н. Агаханов)
- 152\*. В пространстве расположены четыре попарно скрещивающиеся прямые. Докажите, что найдется полу-плоскость, границей которой является одна из этих прямых, не пересекающаяся с остальными тремя прямыми. (Р. Карасев)



## 8 класс

153. На доске были написаны числа от 1 до 9. Часть из этих чисел стерли и написали все произведения  $a \times b$  из оставшихся на доске чисел ( $a \neq b$ ). Оказалось, что среди этих произведений нашлись числа, оканчивающиеся на все цифры от 0 до 9. Какое наибольшее количество чисел могло быть стерто с доски? (Н. Агаханов)
154. Куб  $1 \times 1 \times 1$  полностью оклеили шестью квадратами общей площадью 6. Обязательно ли все эти квадраты равны? (И. Акулич)
155. Есть 9 запечатанных коробок, в которых лежит по 1, 2, 3, ..., 9 фишек соответственно (на каждой коробке написано, сколько в ней фишек). Двое играющих по очереди берут по одной фишке из любой коробки, распечатывая, если необходимо, коробку. Проигрывает тот, кто последним распечатает коробку. Кто из игроков может всегда выигрывать независимо от игры противника? (А. Шаповалов)
156. Пусть  $O$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ . На прямой  $BC$  отметим точки  $A_1$  и  $A_2$ , на прямой  $AC$  — точки  $B_1$  и  $B_2$ , а на прямой  $AB$  — точки  $C_1$  и  $C_2$  так, что  $OA_1 = OA_2 = OA$ ,  $OB_1 = OB_2 = OB$ ,  $OC_1 = OC_2 = OC$ . Докажите, что  $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = AB + BC + AC$ . (М. Сонкин)
157. Король приказал чеканить монеты так, чтобы любую целую сумму можно было набрать не более чем десятью монетами. Сначала были выпущены монеты в наименьшую возможную сумму — 1 крона. Затем на каждом следующем шаге казначай определяет наименьшую целую сумму, которую нельзя набрать в соответствии с приказом, и выпускает монету в эту сумму. Какие монеты будут выпущены в королевстве? (А. Шаповалов)
158. Бумажный треугольник  $ABC$  перегнули по прямой, в результате чего вершина  $C$  попала на сторону  $AB$ , а непокрытая часть разбилась на два равнобедренных треугольника, у которых равные стороны сходятся в вершинах  $A$  и  $B$ . Чему равнялся угол  $C$ ? (А. Шаповалов)
159. Два игрока обходят доску  $99 \times 99$  каждый своей ладьей, двигая их по очереди за ход на одну клетку по маршрутам в форме змейки. Первый начинает из левого нижнего угла, идет вправо до упора, затем ход вверх, влево до упора, ход вниз и т. д. Второй стартует из правого нижнего угла, идет вверх до упора, затем ход влево,

вниз до упора, ход вправо и т. д. Окажутся ли ладьи в какой-нибудь момент на одной клетке, и если да, то после какого по счету хода? (А. Шаповалов)

160. Можно ли провести на координатной плоскости 10 прямых так, чтобы любые две пересекались в цепочисленной точке и никакие три не проходили через одну точку? (А. Шаповалов)

## 9 класс

161. Найдите все натуральные  $m$ , такие, что число  $m^2 + 2$  записывается одними шестерками. (В. Сендеров)
162. Через вершину  $A$  треугольника  $ABC$  и основание биссектрисы угла  $A$  проведена окружность  $S$ , пересекающая стороны  $AC$  и  $AB$  в точках  $K$  и  $L$ . Докажите, что если  $KL \parallel CB$ , то  $S$  касается  $BC$ . (Р. Каравес)
163. По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями несколько велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Может ли оказаться при некотором начальном расположении и некоторых скоростях, что, как бы долго ни ездили велосипедисты, у двух из них фляжка так и не побывает? (А. Шаповалов)
164. Существует ли такое натуральное число  $a$ , что в последовательности  $a_n = n^3 + a^3$ ,  $n \in N$ , любые два соседних члена взаимно просты? (В. Сендеров)
165. Найдите все тройки  $(a, b, c)$  ( $a \neq b$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$ ) действительных чисел, для которых параболы  $y = ax^2 + bx + c$  и  $y = bx^2 + cx + a$  имеют общую вершину. (Н. Агаханов)
166. Дан выпуклый восьмиугольник  $A_1A_2 \dots A_8$ , у которого  $\angle A_1A_4A_5 = \angle A_2A_5A_6 = \dots = \angle A_7A_2A_3 = \angle A_8A_3A_4 = 90^\circ$ . Докажите, что восьмиугольник можно вписать в окружность. (Н. Агаханов)
167. У геолога есть чашечные весы без гирь и 8 камней. Он хочет знать, верно ли, что два камня всегда тяжелее одного. Как ему гарантированно проверить это за 13 взвешиваний? (А. Шаповалов)
168. Двое играющих по очереди передвигают каждый свою фишку на шахматной доске  $100 \times 100$ , каждым ходом — на соседнее по стороне поле. Первый выигрывает, если после его хода станут перпендикулярными отрезки, соединяющие центры занятых фишками клеток с центром доски. Докажите, что если вначале фишкам стояли в противоположных углах доски, то первый может выиграть независимо от игры второго. (А. Шаповалов)



## 10 класс

169. Найдите все  $x$ , для которых выражения  $\frac{1}{\cos x}$  и  $\frac{1}{\cos 2x}$  одновременно принимают целые значения. (Н. Агаханов)
170. По круглому треку ездят с постоянными, но различными скоростями несколько велосипедистов. У одного из них есть фляжка с водой. При обгоне фляжка от одного обязательно переходит к другому (моментов, когда двое одновременно обгоняют одного, не случается). Может ли оказаться при некотором начальном расположении и некоторых скоростях, что, как бы долго ни ездили велосипедисты, у двух из них фляжка так и не побывает? (А. Шаповалов)
171. Отрезок с концами на сторонах треугольника делит его площадь пополам. Докажите, что его длина больше  $r\sqrt{2}$ , где  $r$  — радиус вписанной окружности. (А. Голованов)
172. Каково наибольшее число подряд идущих членов последовательности  $x_n = n^4 + 1998$ , НОД которых больше 1? (В. Сендеров)
173. Найдите все тройки  $(a, b, c)$  ( $a \neq b, a \neq 0, b \neq 0$ ) действительных чисел, для которых параболы  $y = ax^2 + bx + c$  и  $y = bx^2 + cx + a$  имеют общую вершину. (Н. Агаханов)
174. Диагонали параллелограмма  $ABCD$  пересекаются в точке  $O$  (рис. 8). Докажите, что точка  $O$ , а также основания перпендикуляров, опущенных из точки  $A$  на прямые  $BC$ ,  $BD$  и  $CD$ , лежат на одной окружности или на одной прямой. (П. Кожевников)
175. Два игрока играют в следующую игру: сначала на доске написаны числа  $2, 4, 6, 8, \dots, 1998$ . За один ход можно уменьшить на 1 любое из написанных чисел. При этом с доски стираются нули и числа, совпадающие с какими-то из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется ни одного числа. Кто выигрывает при правильной игре? (С. Зайцев, П. Кожевников)
176. Двое играющих по очереди передвигают каждый свою фишку на шахматной доске  $100 \times 100$ , каждым ходом — на соседнее по стороне поле. Первый выигрывает, если после его хода станут перпендикулярны-

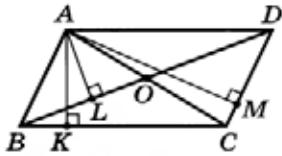


Рис. 8

ми отрезки, соединяющие центры занятых фишками клеток с центром доски. Докажите, что если вначале фишкы стояли в противоположных углах доски, то первый может выиграть независимо от игры второго. (А. Шаповалов)

## 11 класс

177. Найдите все  $x$ , для которых выражения  $\operatorname{tg} x$  и  $\operatorname{tg} 2x$  одновременно принимают целые значения. (Н. Аганов, В. Сендеров)
178. Параболы  $y = -x^2 + b_1x + c_1$  и  $y = -x^2 + b_2x + c_2$  касаются параболы  $y = ax^2 + bx + c$ ,  $a > 0$ . Докажите, что прямая, проходящая через точки касания, параллельна общей касательной к первым двум параболам. (Р. Каравес)
- 179\*. Дан остроугольный треугольник  $ABC$ . На продолжениях сторон  $AC$  за точку  $C$ ,  $CB$  за точку  $B$ ,  $BA$  за точку  $A$  взяты соответственно точки  $B_1$ ,  $A_1$ ,  $C_1$  так, что треугольник  $A_1B_1C_1$  подобен треугольнику  $ABC$ . Докажите, что ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника  $A_1B_1C_1$  совпадает с центром окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . (Р. Каравес)
180. В темной комнате  $20 \times 20$  м бегает таракан со скоростью  $0,2$  м/с. Сможет ли Таня поймать таракана, если у нее есть фонарь, освещдающий круг радиуса  $R = 2$  м, центр которого — Таня, а ее скорость  $2$  м/с? (О. Подлипский)
181. Про квадратные трехчлены  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$  с разными старшими коэффициентами известно, что их разности  $f_1 - f_2$ ,  $f_2 - f_3$  и  $f_3 - f_1$  имеют по одному корню. Докажите, что корни разностей совпадают. (Р. Каравес)
182. Два игрока играют в следующую игру. Вначале на доске написаны числа  $2, 4, 6, 8, \dots, 1998$ . За один ход можно уменьшить на  $1$  любое из написанных чисел. При этом с доски стираются нули и числа, совпадающие с какими-то из уже написанных на доске чисел. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется ни одного числа. Кто выигрывает при правильной игре? (С. Зайцев, П. Кожевников)
- 183\*. Назовем кубоподобным многогранником, имеющий шесть граней и восемь вершин, в каждой из которых сходятся по три грани, каждая грань при этом — четырехугольник.
- Докажите, что если отрезки, соединяющие точки пересечения диагоналей противоположных граней кубо-

подобного многогранника, пересекаются в одной точке, то отрезки, соединяющие противоположные вершины (главные диагонали), также пересекаются в одной точке. (О. Подлипский)

184. Можно ли построить на координатной плоскости бесконечно много прямых так, чтобы любые две пересекались в целочисленной точке и никакие три не проходили через одну точку? (А. Шаповалов)

## 1999 – 2000

### 8 класс

185. Расшифруйте числовой ребус  $\begin{cases} \text{МА} \times \text{МА} = \text{МИР}, \\ \text{АМ} \times \text{АМ} = \text{РИМ} \end{cases}$  (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). (А. Нагорный)
186. На доске написаны числа от 1 до 20. Разрешается, выбрав любые два числа, стереть их, а вместо них записать на доску их разность (из большего вычитается меньшее). При этом на доске не должны появляться равные числа. Так поступают до тех пор, пока на доске не останется одно число. Какое наименьшее число может остаться на доске? (Н. Агаханов)
187. Малыш и Карлсон разделили круглый торт двумя перпендикулярными разрезами на 4 части. Карлсон взял себе одну наименьшую часть и одну наибольшую часть, а остальные две отдал Малышу. Докажите, что Карлсону досталось не меньше половины торта. (С. Волченков)
188. На столе лежат карточки, на которых написаны по разу все делители числа 2000, причем на каждой карточке написан один из делителей. Два игрока по очереди берут себе по одной карточке. Проигрывает тот, у кого число на одной из его карточек делится на число на другой из его карточек. Кто выигрывает при правильной игре? (Е. Черепанов)
189. Можно ли расставить на гранях куба числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 так, чтобы каждое число являлось делителем суммы своих соседей? (А. Шаповалов)
190. Кольцевая дорога поделена столбами на километровые участки. Один из столбов покрашен в желтый цвет, другой — в синий, а остальные — в белый. Назовем расстоянием между столбами длину кратчай-

шёй из двух соединяющих их дуг. Найдите расстояние от синего столба до желтого, если сумма расстояний от синего столба до белых равна 2000 км. (И. Рубанов)

191. Имеется 100 правильных треугольников со стороной 1, у которых одна сторона — белая, одна — синяя, одна — красная. Разрешается прикладывать треугольники друг к другу одноцветными сторонами. Из этих треугольников составлен правильный треугольник со стороной 10. Докажите, что на границе большого треугольника одинаковое число белых, красных и синих сторон малых треугольников. (С. Волченков)
192. В треугольнике  $ABC$  ( $AB \neq BC$ ) проведена биссектриса  $BD$ . На прямой  $BD$  отметили точку  $E$ , отличную от  $D$ , такую, что  $CE = CD$ . Докажите, что прямая, содержащая среднюю линию треугольника  $ABC$ , параллельную стороне  $AB$ , проходит через середину отрезка  $DE$ . (М. Сонкин)

## 9 класс

193. Докажите, что для любого натурального  $a$  число  $a^3 - 1$  не является степенью двойки. (Н. Агаханов)
194. Докажите, что для любых положительных  $a, b, c$  верно неравенство:

$$\frac{a^2}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^2}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^2}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{3}{4}.$$

(Л. Емельянов)

195. На большем основании  $AB$  трапеции  $ABCD$  выбрана произвольная точка  $M$  и через эту точку проведены прямые, параллельные диагоналям трапеции, до пересечения со сторонами  $BC$  и  $AD$  в точках  $N$  и  $K$  соответственно. Пусть отрезок  $KN$  пересекает диагонали  $AC$  и  $BD$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что отрезки  $KP$  и  $QN$  равны. (Д. Терешин)
- 196\*. В стране 100 дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, на всех дорогах двустороннее движение), и из любых трех дорог можно выбрать две, которые не выходят из одного города. Докажите, что найдутся 40 дорог, никакие две из которых не выходят из одного города. (В. Дольников)
197. Из цифр 2, 3, ..., 9 составили два натуральных числа (каждая цифра использовалась ровно один раз). Мог-

ло ли одно из этих чисел оказаться вдвое больше другого? (Н. Агаханов)

198. Из  $A$  в  $B$  выехали одновременно «Жигули», «Москвич» и «Запорожец». «Жигули», доехав до  $B$ , повернули назад и встретили «Москвич» в 18 км, а «Запорожец» в 25 км от  $B$ . «Москвич», доехав до  $B$ , также повернул назад и встретил «Запорожец» в 8 км от  $B$ . Найдите расстояние от  $A$  до  $B$ . (Скорости автомобилей постоянны.) (С. Токарев)
199. Дан прямоугольный треугольник  $ABC$ . Окружность с центром на гипотенузе  $AB$  проходит через точку  $A$  и пересекает катет  $BC$  в точках  $M$  и  $N$ . Пусть  $K$  — точка, симметричная  $M$  относительно прямой  $AB$ . Докажите, что  $KN = MC + CN$ . (М. Сонкин)
- 200\*. В каждой клетке таблицы  $n \times n$  записано число 1 или  $-1$ . Известно, что для каждой клетки произведение всех чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону, равно 1. Докажите, что в любых двух клетках, симметричных относительно центра таблицы, записаны одинаковые числа. (С. Токарев)

## 10 класс

201. Найдите все натуральные  $a$ , для которых число  $a^3 + 1$  — степень тройки. (Н. Агаханов)
202. Андрей, Борис, Виктор, Григорий и Дмитрий по очереди (не обязательно в указанном порядке) охраняли свой дом от террористов, сменяя друг друга не при сигналах точного времени. Каждый дежурил по разу, причем Андрей дежурил вдвое дольше Бориса, Борис — вдвое дольше Виктора, а Григорий и Дмитрий каждый — столько же, сколько Виктор. Сердобольная старушка с первого этажа по сигналам точного времени выносila дежурному чашку чая. Могло ли каждому из пятерых достаться ровно по одной чашке? (И. Рубанов)
- 203\*. Диагонали вписанного четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $E$  (рис. 9). Пусть  $O_1$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , а  $O_2$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABD$ . Докажите, что прямая  $O_1O_2$  отсекает от треугольника  $AEB$  равнобедренный треугольник. (М. Сонкин)

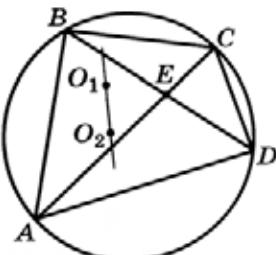


Рис. 9

- 204.** Кузнечик прыгает параллельно любой стороне некоторого правильного семиугольника на расстояние, равное 1 (всякий раз выбирается один из возможных 14 векторов, на который он может сместиться). На плоскости расположена круглая кормушка радиуса 0,01. Докажите, что кузнечик всегда может попасть в кормушку. (*А. Белов*)
- 205.** Каждый из квадратных трехчленов  $P_1(x) = x^2 + px + q$  и  $P_2(x) = x^2 + qx + p$  имеет корни. Докажите, что тогда какой-то из трехчленов  $Q_1(x) = x^2 + (p - 2)x + 1$  и  $Q_2(x) = x^2 + (q - 2)x + 1$  имеет корень. (*О. Подлипский*)
- 206.** Найдите все натуральные  $n$ , такие, что в десятичной записи числа  $n!$  используются ровно две различные цифры. (*Е. Сосыка*)
- 207.** Пусть  $A_1$  и  $A_2$  — точки пересечения окружностей  $S_1$  и  $S_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$  — точки пересечения окружностей  $S_2$  и  $S_3$  и  $O_1, O_2, O_3$  — соответственно центры окружностей  $S_1, S_2$  и  $S_3$ . Докажите, что если точки  $O_1, A_1, O_2, B_1, O_3$  лежат на одной окружности, то отрезок  $A_2B_2$  параллелен отрезку  $O_1O_3$ . (*Л. Емельянов*)
- 208.** В каждой клетке таблицы  $n \times n$  записано число 1 или  $-1$ . Известно, что для каждой клетки произведение всех чисел в клетках, имеющих с ней общую сторону, равно 1. Докажите, что в любых двух клетках, симметричных относительно центра таблицы, записаны одинаковые числа. (*С. Токарев*)



## 11 класс

- 209.** Дан многочлен  $P(t) = t^2 - 4t$ . Докажите, что при всех  $x \geq 1, y \geq 1$  выполняется неравенство  $P(x^2 + y^2) \geq P(2xy)$ . (*Н. Агаханов*)
- 210.** Назовем прямую, проходящую через середины скрещивающихся ребер тетраэдра, *хорошей* средней линией тетраэдра, если она образует равные углы с четырьмя прямыми, содержащими остальные ребра тетраэдра. Докажите, что тетраэдр правильный, если хотя бы две его средние линии хорошие. (*Н. Агаханов*)
- 211.** Двое играющих по очереди красят клетки квадрата  $8 \times 8$ . За один ход игрок красит своим цветом одну клетку. Перекрашивать клетки нельзя. Первый стремится закрасить своим цветом квадрат  $2 \times 2$ . Может ли второй помешать первому независимо от его игры? (*О. Подлипский*)

212. Найдите все натуральные числа, которые нельзя представить в виде  $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1}$ , где  $a$  и  $b$  — натуральные числа. (*Л. Емельянов*)
213. Найдите все пары простых чисел вида  $\{a^n - 1, a^n + 1\}$ , где  $a, n$  — натуральные числа,  $n > 1$ . (*В. Сендеров*)
214. Докажите, что числа от 1 до 2000 можно так расположить в ряд и указать такую арифметическую прогрессию  $b_1, \dots, b_n$ , что первый ее член  $b_1$  равен одному из этих чисел,  $b_2$  — сумме двух соседних чисел,  $b_3$  — сумме трех соседних и т. д.,  $b_n$  равняется сумме всех чисел. (*Д. Кузнецов*)
215. Каждая точка трехмерного пространства окрашена в черный или белый цвет. Верно ли, что найдется равносторонний треугольник с одноцветными вершинами и стороной, равной 1? (*Л. Емельянов*)
- 216\*. Точки  $A, B, C$  и  $D$  лежат на окружности с центром  $I$ . Серединные перпендикуляры к отрезкам  $AD$  и  $BC$  пересекают прямую  $AB$  в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $IPQ$  и  $ICD$ , касаются. (*Т. Емельянова*)

## 2000–2001



### 8 класс

217. Натуральное число назовем *палиндромом*, если оно читается одинаково слева направо и справа налево. Найдите все простые числа — палиндромы, содержащие в своей десятичной записи четное количество знаков. (*Д. Кузнецов*)
218. Даны угол в  $60^\circ$  и угольник, с помощью которого можно проводить прямую через две точки и проводить через точку прямую, перпендикулярную любой из нарисованных прямых. Разделите с помощью угольника данный угол (в  $60^\circ$ ) пополам. (*Н. Агаханов*)
219. Коля задумал 10 целых чисел (не обязательно различных), а затем вычислил все возможные суммы любых девяти чисел из этих десяти. У Коли получились числа 92, 93, ..., 100 (повторяющиеся суммы Коля назвал только один раз). Какие числа он задумал? (*Д. Терешин*)
220. Некоторая страна, в которой  $p$  городов и из каждого города в другие выходит не менее  $k$  дорог (каждая дорога соединяет ровно два города, и каждые два города

соединены не более чем одной дорогой), была разбита на  $m$  частей так, что в каждой части никакие два города не соединены дорогой. Докажите, что  $m \geq \frac{n}{n-k}$ .

(*В. Дольников*)

221. На всех клетках доски  $n \times n$  ( $n > 1$ ) расставлены фишкі трех цветов. Оказалось, что рядом с любой фишкой стоят фишкі обоих других цветов. Докажите, что какие-то фишкі одного цвета стоят рядом (две фишкі стоят рядом, если они стоят в клетках, имеющих общую сторону). (*С. Берлов*)
222. Существуют ли попарно различные не равные нулю цифры  $a, b, c$ , такие, что  $\overline{ab} : c, \overline{bc} : a, \overline{ca} : b$  ( $mn$  — двузначное число с цифрами  $m$  и  $n$ )? (*А. Белов*)
223. Точка  $O$  — центр окружности, вписанной в четырехугольник  $ABCD$ . Докажите, что если периметры треугольников  $AOB, BOC$  и  $COD$  равны, то  $ABCD$  — ромб. (*Н. Агаханов*)
224. Улитка движется по поверхности куба, переползая от вершины к вершине по ребру или по диагонали грани. Найдите протяженность самого длинного пути из одной вершины куба в противоположную (наиболее удаленную) вершину, если запрещается пересекать свой путь и проходить через одну вершину дважды. (*Л. Емельянов*)



## 9 класс

225. На доске записан трехчлен  $p(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ . Вместо трехчлена  $p(x)$  записывают трехчлен
- $$\frac{p(x+1) + p(x-1)}{2},$$
- а исходный трехчлен стирают. Докажите, что через несколько таких замен получится трехчлен, не имеющий корней. (*А. Белов*)
226. На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  взяты соответственно точки  $M$  и  $N$  так, что  $BM = MN = NC$ . Отрезки  $MM_1$  и  $NN_1$  — биссектрисы треугольника  $AMN$ . Докажите, что  $M_1N_1 \parallel BC$ . (*И. Исмагилов*)
227. Даны 10 различных чисел. Из 45 их попарных сумм 40 оказались целыми числами. Докажите, что и 5 оставшихся сумм также являются целыми. (*Р. Женодаров*)
- 228\*. В некоторой стране из каждого города выходит по крайней мере одна дорога (каждая дорога соединяет ровно два города).

Город назовем *захолустным*, если из него выходит ровно одна дорога. В стране нельзя выйти из какого-то города и, пройдя по замкнутому маршруту, вернуться в исходный.

Города страны разбиты на две части так, что никакие два города в одной части не соединены дорогой. Пусть в первой части городов не меньше, чем во второй. Докажите, что в первой части есть захолустный город. (*В. Дольников*)

229. Может ли число, составленное только из цифр 2 и 0, быть степенью выше первой натурального числа? (*Р. Женодаров*)
230. Существуют ли нечетные числа  $x, y, z$ , такие, что  $xy + 1, yz + 1, zx + 1$  — полные квадраты? (*В. Сандеров*)
231. Четырехугольник  $ABCD$  вписан в окружность  $\omega$ . Продолжения противоположных сторон этого четырехугольника пересекаются в точках  $K$  и  $N$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $AKN$ , касается окружности  $\omega$  тогда и только тогда, когда окружность, описанная около треугольника  $CKN$ , касается окружности  $\omega$ . (*Л. Емельянов*)
- 232\*. Внутри треугольника с вершинами в узлах целочисленной решетки находится ровно один узел. Какое наибольшее количество узлов может лежать на сторонах треугольника (включая вершины треугольника)? (*А. Голованов*)



## 10 класс

233. Значения квадратного трехчлена  $y = x^2 + ax + b$  в двух последовательных целых точках соответственно квадраты двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что значения трехчлена во всех целых точках — точные квадраты. (*Н. Агаханов*)
234. Для числа  $n^2$  его *размером* назовем наибольшее количество частей (часть — несколько подряд идущих цифр), на которые может быть разбита его десятичная часть так, что каждая из частей — квадрат натурального числа (возможно, начинающийся с нескольких нулей). Существует ли квадрат размера больше 2000? (*Е. Черепанов*)
235. Прямая  $l$  пересекает отрезок  $AB$  во внутренней точке  $D$ . Постройте на  $l$  все точки  $X$ , такие, что  $\angle AXD - \angle XAD = \angle BXD - \angle XBD$  (разности углов могут быть отрицательными). (*В. Сандеров*)

236. На плоскости провели 2001 прямую так, что никакие две из них не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Эти прямые разбили плоскость на части. Какое наименьшее число частей, являющихся углами, может при этом получиться? (*Р. Женодаров*)
237. На доске записаны пять чисел, одно из которых 2000. Разрешается стереть любое число и вместо него записать число  $a + b - c$ , где  $a, b$  и  $c$  — какие-то три из остальных четырех чисел. Можно ли с помощью таких операций получить пять чисел, каждое из которых равно 2000? (*И. Исмагилов*)
238. В треугольнике  $ABC$  точка  $O$  — центр описанной окружности. Через точки  $A$  и  $C$  проведена окружность, касающаяся  $AO$  и  $CO$ . Докажите, что вторые точки пересечения прямых  $BA$  и  $BC$  с этой окружностью являются концами ее диаметра. (*Т. Емельянова*)
239. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника. Докажите неравенство  $a^4 + b^4 + c^4 + abc(a + b + c) \geq 2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2)$ . (*Р. Женодаров*)
240. Найдите все натуральные числа, единственным образом представимые в виде  $\frac{x^2 + y}{xy + 1}$ , где  $x, y$  — натуральные числа. (*Л. Емельянов*)



## 11 класс

241. Синусы углов треугольника рациональны. Докажите, что их косинусы также рациональны. (*А. Голованов*)
242. Окружности  $s_1$  и  $s_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . Пусть  $M$  — произвольная точка окружности  $s_1$ ,  $MA$  пересекается с  $s_2$  в точке  $P$ , а  $MB$  пересекается с  $s_2$  в точке  $Q$ . Докажите, что если четырехугольник  $AO_1BO_2$  можно вписать в окружность, то  $AQ$  и  $BP$  пересекаются на  $s_1$ . (*Л. Емельянов*)
243. Существует ли многочлен  $P(x)$  2001-й степени, такой, что  $P(x^2 - 1)$  делится на  $P(x)$ ? (*А. Голованов, В. Сендеров*)
244. В стране 64 города. Широта и долгота каждого города измеряются целым числом градусов от 1 до 8. Два города соединены двусторонним авиарейсом тогда и только тогда, когда они либо имеют одинаковую широту, а их долгота отличается на  $1^\circ$ , либо имеют одинаковую долготу, а их широта отличается на  $1^\circ$ . Какое наибольшее число авиарейсов можно отменить, чтобы из любого города в любой другой можно было попасть, совершив не более 14 перелетов? (*Р. Женодаров*)

245. Известно, что для чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  выполняется двойное неравенство

$$\frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} \geq \frac{c^2}{a+b} + \frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} \geq \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a}.$$

Докажите, что  $a = b = c$ . (*Д. Кузнецов*)

246. Из десятичного разложения дроби  $\frac{1}{p}$  ( $p > 5$ ,  $p$  — простое) вычеркнули 2000-ю цифру. В результате получилось десятичное разложение несократимой дроби  $\frac{a}{b}$ .

Докажите, что  $b$  делится на  $p$ . (*А. Храбров*)

247. В выпуклом многоугольнике  $P_1$  содержится выпуклый многоугольник  $P_2$ . Докажите, что при любой гомотетии относительно точки  $X \in P_2$  с коэффициентом  $k = -\frac{1}{2}$  по крайней мере одна вершина  $P_2$  не выйдет за пределы  $P_1$ . (*В. Дольников*)

- 248\*. На основании  $ABC$  треугольной пирамиды  $SABC$ , у которой все плоские углы при вершине  $S$  больше  $60^\circ$ , произвольно взята точка  $O$ . Докажите, что по крайней мере один из углов  $SAO$ ,  $SBO$  и  $SCO$  меньше  $60^\circ$ . (*П. Семенов*)

## 2001 – 2002



### 8 класс

249. По кругу стоит 2001 коробка. В каждой коробке лежат черные и белые шарики, а на коробке написано, сколько в ней черных шариков и сколько — белых. Игорь хочет переложить из каждой коробки по одному шарику в следующую (по часовой стрелке) коробку так, чтобы обе надписи на каждой из коробок стали неверными. Удастся ли ему это? (*И. Рубанов*)
250. Коля перемножил два подряд идущих нечетных числа, а Вася перемножил три подряд идущих нечетных числа. Мог ли результат Коли оказаться на 2002 больше результата Васи? (*О. Подлипский, Д. Кузнецов*)
251. Фрекен Бок поставила по кругу 50 вазочек с конфетами так, что количество конфет в любых двух соседних вазочках отличается ровно на 1. Если Карлсон находит две вазочки, в которых поровну конфет, он съедает все конфеты в обеих вазочках. Докажите, что Карлсон сможет опустошить не меньше 32 вазочек. (*И. Рубанов*)

252. Докажите, что любой прямоугольник можно разрезать на не более чем 5 попарно различных равнобедренных треугольников. (Л. Емельянов)
253. Существует ли трехзначное число  $A$ , равное сумме двух чисел: суммы цифр числа  $A$  и произведения цифр числа  $A$ ? (Л. Емельянов)
254. Восстановите с помощью циркуля и линейки треугольник  $ABC$  по трем точкам  $D, E, M$ , где точки  $D$  и  $E$  — середины высот  $AH$  и  $CP$  треугольника  $ABC$ , а точка  $M$  — середина стороны  $AC$ . (Н. Агаханов)
255. По кругу расставлены числа  $1, 2, \dots, 2002$  по порядку. Разрешается менять местами любые два стоящих рядом числа, разность которых по модулю больше 2. Можно ли за несколько таких операций добиться, чтобы эти числа шли в противоположном порядке? (А. Гайфуллин)
256. Дано выражение, содержащее 999 дробей:

$$\frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{3}{4} * \dots * \frac{999}{1000}.$$

Докажите, что все звездочки в нем можно заменить знаками арифметических действий так, чтобы получилось выражение, равное нулю. (С. Токарев)



## 9 класс

257. Известно, что хотя бы один из трехчленов  $x^2 + ax + b$ ,  $x^2 + a^2x + b^2$ , ...,  $x^2 + a^n x + b^n$ , ... имеет вещественные корни. Докажите, что из этого множества трехчленов можно выбрать бесконечно много трехчленов, имеющих вещественные корни. (Н. Агаханов)
258. Число, написанное на доске, каждую минуту либо удваивается, либо из него вычитается единица. После нескольких таких операций из числа 1 было получено число 2002. Докажите, что в некоторый момент на доске было написано число, содержащее в своей записи цифру 3. (Н. Агаханов)
259. В треугольнике  $ABC$  угол  $C$  — прямой,  $CD$  — высота. Биссектрисы углов  $ABC$  и  $ACD$  пересекаются в точке  $M$ , а биссектрисы углов  $BAC$  и  $BCD$  — в точке  $N$ . Докажите, что длина отрезка  $MN$  равна радиусу вписанной в треугольник  $ABC$  окружности. (В. Чернявский)
260. В турнире по футболу, проведенном среди 20 команд из разных городов, каждая команда провела одну встречу дома и не более двух встреч на выезде. Докажите, что

могло быть так составить расписание игр, чтобы каждая команда играла не более одной игры в день и весь турнир прошел бы за три дня. (В. Дольников)

261. Даны простые числа  $p$  и  $q$  и натуральные числа  $x$  и  $y$ , причем  $x < p$  и  $y < q$ . Докажите, что если число  $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$  целое, то  $x = y$ . (А. Голованов)
262. Часы показывают время от 00.00 до 23.59. Петя написал программу, которая один раз в минуту увеличивает число, записанное в одном из окон на мониторе, на число минут, которое показывают часы. В начальный момент в окне было число 0. Через какое наименьшее время в окне могло появиться число 2001? (Н. Агаханов)
263. Пусть  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма  $ABCD$ ,  $P$  — вторая точка пересечения окружности, проходящей через точки  $A, O, B$ , с прямой  $BC$  (при этом точки расположены, как показано на рисунке 10). Докажите, что прямая  $AP$  касается окружности, проходящей через точки  $A, O, D$ . (Л. Емельянов)
264. По окружности написано 2002 единицы. Два игрока по очереди делают ходы. Каждый ход состоит в том, что стираются какие-то два соседних числа и на их место записывается их сумма. Выигрывает тот, кто получит число 4. Если останется одно число, не равное 4, игра заканчивается вничью. Кто выиграет при правильной игре: тот, кто делает первый ход, или его партнер? (Е. Бурков)

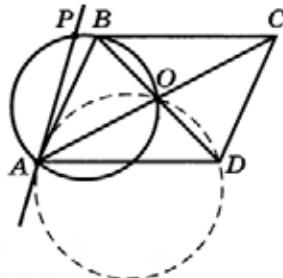


Рис. 10

## ▼ 10 класс

265. Решите неравенство  $\sin x \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{ctg} x \leq \cos x$ . (И. Рубанов)
266. Юра и Федя стоят у большой доски и играют в следующую игру. Вначале на доске написано число  $1000!$ . Игроки по очереди проделывают следующую операцию. Выбирается число вида  $n!$ , являющееся делителем числа, написанного на доске, и прибавляется к написанному на доске. Результат записывается на доску, а исходное число стирается. Выигрывает тот, после чьего хода число на доске станет равным  $2002!$  (если оно стало больше  $2002!$ , то ничья). Кто может гарантировать себе выигрыш и как, если Юра ходит первым? (И. Богданов)

267. Окружность  $\omega$  проходит через вершины  $B$ ,  $C$  и центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Второй раз  $\omega$  пересекает прямую  $AB$  в точке  $B_1$ , а прямую  $AC$  в точке  $C_1$ . Докажите, что длины отрезков  $BB_1$  и  $CC_1$  равны. (*Фольклор*)
268. В турнире по футболу, проведенном среди 20 команд из разных городов, каждая команда провела одну встречу дома и не более двух встреч на выезде. Докажите, что можно было так составить расписание игр, чтобы каждая команда играла не более одной игры в день и весь турнир прошел бы за три дня. (*В.Дольников*)
269. Даны простые числа  $p$  и  $q$  и натуральные числа  $x$  и  $y$ , причем  $x < p$  и  $y < q$ . Докажите, что если число  $\frac{p}{x} + \frac{q}{y}$  целое, то  $x = y$ . (*А. Голованов*)
270. В таблице  $6 \times 6$  расставлены натуральные числа от 1 до 36, причем каждое число встречается ровно один раз. Верно ли, что можно выбрать два таких соседних числа, стоящие в одной строке, что если взять меньшее из них в качестве коэффициента  $p$ , а большее — в качестве коэффициента  $q$  в квадратном трехчлене  $x^2 + px + q$ , то полученный трехчлен будет иметь различные действительные корни? (*О.Подлипский*)
271. Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник,  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$ ,  $S_{CD}$ ,  $S_{DA}$  — окружности, построенные на сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  соответственно как на диаметрах. Известно, что окружность  $S_{AB}$  касается окружности  $S_{CD}$ , а окружность  $S_{BC}$  касается окружности  $S_{DA}$ . Докажите, что  $ABCD$  — ромб. (*А.Глазырин*)
- 272\*. Существуют ли такие четыре многочлена, что сумма любых трех из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней? (*И.Исмагилов*)



## 11 класс

273. Решите неравенство  $\sin x \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{ctg} x \leq \cos x$ . (*И.Рубанов*)
274. На большой доске написано число  $1000!$ . Федя проделывает следующую операцию: он выбирает число вида  $n!$ , являющееся делителем числа, записанного на доске, и прибавляет выбранное число к записанному на доске. Результат записывается на доске, а исходное число стирается. Докажите, что независимо от выбираемых чисел на доске когда-нибудь появится число  $2002!$ . (*И.Богданов*)

275. Есть бусы, состоящие из  $p^n$  бусинок ( $p$  — простое число,  $n$  — натуральное,  $n > 2$ ). За ход бусы разбиваются на равные по длине куски, в каждом куске порядок следования бусинок меняется на обратный, и куски возвращаются на свои места. Любой ли порядок следования бусинок можно получить с помощью таких ходов? (С. Спиридовонов)
276. Пусть  $ABCD$  — тетраэдр,  $\omega$  — сфера, касающаяся всех его ребер. Две точки касания сферы  $\omega$  с ребрами тетраэдра  $ABCD$  соединим отрезком тогда и только тогда, когда они лежат на одной грани тетраэдра. Докажите, что сумма всех таких отрезков меньше, чем  $3(AI + BI + CI + DI)$ , где  $I$  — центр сферы  $\omega$ . (Н. Агаханов, А. Гайфуллин)
277. Коэффициенты  $a$ ,  $b$  и  $c$  квадратного уравнения  $ax^2 - bx + c = 0$  являются степенями двойки. Докажите, что если корни этого уравнения — целые числа, то эти корни совпадают. (Н. Агаханов)
278. Дан треугольник  $ABC$ . Окружность  $\omega_1$  с центром на отрезке  $AB$  проходит через точку  $A$  и пересекает вторично отрезки  $AB$  и  $AC$  в точках  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Окружность  $\omega_2$  с центром на отрезке  $BC$  проходит через точку  $C$  и пересекает вторично отрезки  $BC$  и  $AC$  в точках  $C_1$  и  $C_2$  соответственно. Известно, что окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  касаются в точке  $K$  внешним образом. Докажите, что  $\angle A_1KC_1 = \angle A_2KC_2$ . (Т. Емельянова)
279. Множество натуральных чисел разбито на 2002 бесконечные попарно непересекающиеся арифметические прогрессии. Верно ли, что у каждой из этих прогрессий разность прогрессии не меньше первого члена прогрессии? (П. Кожевников)
- 280\*. Существуют ли такие четыре многочлена, что сумма любых трех из них имеет хотя бы один корень, а сумма любых двух не имеет корней? (И. Исмагилов)

2002–2003



## 8 класс

281. У Васи есть несколько конфет не обязательно одинаковой стоимости. Известно, что конфеты можно разложить на две кучки так, что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет вдвое больше, чем в другой. Также их можно разложить на две кучки так,

- что суммарная стоимость конфет в одной кучке будет втрое больше, чем в другой. Какое наименьшее число конфет могло быть у Васи? (*О. Подлипский*)
282. Точка пересечения высот остроугольного треугольника равноудалена от середин его сторон. Докажите, что треугольник равносторонний. (*Н. Агаханов*)
283. Назовем *редкой парой* два последовательных натуральных числа, каждое из которых делится на произведение своих цифр (числа не должны содержать в своей десятичной записи нулей). Среди каких чисел больше редких пар — среди 2002-значных или среди 2003-значных? (*В. Сендеров*)
284. Для оклейки кубика  $3 \times 3 \times 3$  имеется неограниченный набор полосок ширины 1, каждая из которых состоит из целого числа клеток. Какое наименьшее число полосок необходимо взять, чтобы оклеить кубик в один слой (оклеивать разрешается так, чтобы каждая клетка полоски покрывала на поверхности кубика какую-то клетку целиком)? (*Л. Емельянов*)
285. На острове Буяне живут племена рыцарей, лжецов и реалистов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а реалисты лгут и говорят правду через раз, причем неизвестно, с правдивого или ложного ответа начинают реалисты.
- Однажды репортер спросил у двух жителей А и Б этого острова, из каких они племен. Они ответили следующее:
- А: «Б — рыцарь. Извините, Б — реалист».
- Б: «А — лжец. Извините, А — ...».
- К сожалению, последнее слово, сказанное Б, репортер не рассыпал. Что это было за слово? (*И. Рубанов*)
286. Сумма положительных чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  равна 11. Докажите неравенство  $[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geq 243$  ( $[a]$  — целая часть числа  $a$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ ). (*А. Храбров*)
287. Докажите, что любой параллелограмм можно разрезать ровно на 9 равнобедренных треугольников. (*Л. Емельянов*)
288. На окружности расположены 56 точек, делящих ее на равные части. Двое играют в следующую игру. Игрок может своим ходом стереть любой набор точек, которые делят окружность на равные части (при этом одну или 56 точек стирать нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (*И. Рубанов, Д. Крамаренко*)



## 9 класс

289. Можно ли раскрасить клетки таблицы  $2003 \times 2003$  в три цвета так, чтобы у любой клетки первого цвета было по крайней мере два соседа второго цвета, у каждой клетки второго цвета было по крайней мере два соседа третьего цвета, у каждой клетки третьего цвета было по крайней мере два соседа первого цвета? (Соседями называются две клетки, имеющие общую сторону.) (*Н. Агаханов*)
290. Буратино время от времени сажает на поле чудес монеты. Из посаженной монеты из земли немедленно начинает расти дерево с постоянной скоростью 1 м/ч. В полночь суммарная высота посаженных Буратино деревьев равнялась 10 м, в 5 ч утра — 16 м, а в 10 ч утра — 29 м. Докажите, что среди деревьев Буратино найдутся два таких, которые отличаются по высоте не более чем на 3 м. (*И. Рубанов*)
291. На высоте  $AH$  остроугольного треугольника  $ABC$  как на диаметре построена окружность  $\omega$ . Пусть  $B_1$  и  $C_1$  — вторые (кроме  $A$ ) точки пересечения  $\omega$  со сторонами  $AB$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что касательные к  $\omega$ , проведенные в  $B_1$  и  $C_1$ , высекают на стороне  $BC$  отрезок, равный половине этой стороны. (*Т. Емельянова*)
292. Докажите, что существует бесконечно много не делящихся на 3 точных квадратов, представимых в виде суммы пяти различных степеней тройки. (*А. Гарбер*)
293. На доске написано уравнение  $x^2 + 2x \cdot * + 3 \cdot (* + *) = 0$ . Докажите, что любую тройку попарно различных целых чисел можно так расставить в уравнении вместо  $*$ , что полученное уравнение будет иметь по крайней мере один корень. (*Н. Агаханов*)
294. За круглым столом 35 гостей уселись пить чай. Им выдали 10 литровых и 25 пол-литровых кружек. Каждому принесли пол-литровый чайник с чаем. Гость может вылить содержимое чайника себе или одному из своих соседей. Гости согласны пить только из полной кружки. Какое наибольшее число гостей может напиться чая? (*Р. Женодаров*)
295. Пусть  $P$  — произвольная точка внутри треугольника  $ABC$ . Выберем какую-либо вершину и отразим ее симметрично относительно  $P$ , а затем полученную точку отразим симметрично относительно середины стороны, противолежащей выбранной вершине. Обозначим полученную точку  $Q$ . Докажите, что  $Q$  не зависит от выбора вершины треугольника  $ABC$ . (*Л. Емельянов*)

296. На окружности расставлены  $2n$  ( $2n > 2$ ) точек, делящих ее на равные части. Двое играют в следующую игру. Игрок может своим ходом стереть любой набор точек, которые делят окружность на равные части (при этом одну или  $2n$  точек стирать нельзя). Побеждает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре? (И. Рубанов, Д. Крамаренко)

## 10 класс

297. Может ли тангенс острого угла быть в целое число раз больше как синуса, так и косинуса этого же угла? (Н. Агаханов)
298. На высоте  $AH$  остроугольного треугольника  $ABC$  взята точка  $D$ . Точки  $M$  и  $N$  симметричны точке  $D$  относительно сторон  $AB$  и  $AC$  соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $ABM$  и  $ACN$ , пересекаются второй раз в точке, симметричной точке  $D$  относительно стороны  $BC$ . (Т. Емельянова)
299. Существуют ли такие натуральные числа  $x$ ,  $y$  и  $z$ , где  $x$  — нечетное число, что выполняется равенство  $x^{10} + y^{10} = z^{11}$ ? (В. Сендеров)
300. Для оклейки кубика  $n \times n \times n$  имеется неограниченный набор полосок ширины 1, каждая из которых состоит из целого числа клеток. Какое наименьшее число полосок необходимо взять, чтобы оклеить кубик в один слой (оклеивать разрешается так, чтобы каждая клетка полоски покрывала на поверхности кубика какую-то клетку целиком)? (Л. Емельянов)
301. На доске написано уравнение  $x^2 + 2x \cdot * + 3 \cdot (* + *) = 0$ . Докажите, что любую тройку попарно различных целых чисел можно так расставить в уравнении вместо  $*$ , что полученное уравнение будет иметь по крайней мере один корень. (Н. Агаханов)
302. К Дню Российского флага продавец украшает витрину 12 горизонтальными полосами ткани трех цветов. При этом он выполняет два условия:  
1) одноцветные полосы не должны висеть рядом;  
2) каждая синяя полоса обязательно должна висеть между белой и красной.  
Сколькими способами он может это сделать? (С. Волченков)

303. В пространстве даны 4 попарно не пересекающиеся прямые. Известно, что любая плоскость, не параллельная ни одной из этих прямых, пересекает их в четырех точках, являющихся вершинами параллелограмма. Докажите, что данные прямые параллельны. (*С. Спирidonов*)
304. На столе лежат картинками вниз 8 игральных карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту или, например, на все восемь) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Как при помощи пяти вопросов наверняка узнать число бубновых карт, лежащих на столе? (*С. Токарев*)



## 11 класс

305. В треугольнике сумма косинусов двух углов равна синусу третьего угла. Докажите, что треугольник — прямоугольный. (*Н. Агаханов*)
306. Биссектрисы  $AL$ ,  $BM$  и  $CN$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $O$ . Какой из отрезков:  $LO$ ,  $MO$  или  $NO$  наибольший, если  $\angle A > \angle B > \angle C$ ? (*В. Сендеров*)
307. Пусть  $x, y, z$  — неотрицательные числа и выполняется равенство  $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$ . Докажите неравенство  $x + y + z \leq \frac{3}{2}$ . (*В. Дольников*)
308. В лагерь приехали  $n$  ( $n \geq 9$ ) школьников. Известно, что любую группу из 6 школьников можно расселить по двум трехместным комнатам так, что в каждой комнате все школьники знакомы друг с другом. Какое наименьшее число пар знакомых могло быть среди школьников? (*Д. Крамаренко*)
309. Сумма положительных чисел  $x$ ,  $y$  и  $z$  равна 11. Докажите неравенство  $x^{\lfloor x \rfloor} + y^{\lfloor y \rfloor} + z^{\lfloor z \rfloor} > 81$  ( $[a]$  — целая часть числа  $a$ , т. е. наибольшее целое число, не превосходящее  $a$ ). (*А. Храбров*)
310. На доске написаны числа от 1 до  $n$  ( $n \geq 3$ ). Разрешается стереть любые два числа одной четности и вместо них записать на доску их полусумму. Эта операция проделывается до тех пор, пока на доске не останется одно число. Докажите, что в конце на доске могло остаться любое число от 2 до  $n - 1$ . (*Н. Агаханов*)
311. Пусть  $A_1, B_1, C_1, D_1$  — соответственно середины ребер  $SA, SB, SC, SD$  четырехугольной пирамиды  $SABCD$ . Известно, что пространственные четырехугольники

$ABC_1D_1$ ,  $A_1BCD_1$ ,  $A_1B_1CD$ ,  $AB_1C_1D$  являются плоскими и имеют равные площади. Докажите, что  $ABCD$  — ромб. (Н. Агаханов)

312. На столе лежат картинками вниз 8 игральных карт. Вы можете указать на любую группу карт (в частности, на одну карту или, например, на все восемь) и спросить, сколько карт бубновой масти в этой группе. В качестве ответа вам сообщат число, отличающееся от истинного значения на 1. Как при помощи пяти вопросов наверняка узнать число бубновых карт, лежащих на столе? (С. Токарев)

## 2003–2004



### 8 класс

313. Даны действительные числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Докажите, что одно из чисел  $x^2 + 2xy + z^2$ ,  $y^2 + 2yz + x^2$ ,  $z^2 + 2zx + y^2$  неотрицательно. (Жюри)
314. Дан клетчатый прямоугольник  $1 \times 1000$ . Двое играют в следующую игру. Ходят по очереди. За один ход играющий может покрасить клетки какого-то прямоугольника  $1 \times 1$ ,  $1 \times 3$  или  $1 \times 5$  клеток (два раза красить одну и ту же клетку нельзя). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника? (О. Подлipsкий)
315. Пусть  $AA_1$  и  $CC_1$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ . Из точки  $A_1$  проведена прямая под углом  $C$  к стороне  $BC$ , не параллельная  $AC$ , а из точки  $C_1$  проведена прямая под углом  $A$  к стороне  $AB$ , не параллельная  $AC$ . Докажите, что эти прямые пересекаются на стороне  $AC$ . (Л. Емельянов)
316. Существуют ли такие натуральные числа  $x$  и  $y$ , что  $x^2 - y^3 = 2003^{2004}$ ? (В. Сендеров)
317. На перекрестке дорог встретились четыре путника: жители города лжецов (которые всегда лгут) и города рыцарей (которые всегда говорят правду) (при этом не все были жителями одного города). Первый сказал: «Кроме меня, здесь ровно один житель моего города». Второй добавил: «А из моего города я один». Третий подтвердил слова второго: «Ты прав». А четвертый промолчал. Из какого города четвертый? (О. Дмитриев, Д. Кузнецов)

318. О натуральных числах  $a$  и  $b$  известно, что  $an + 1$  делится на  $bn + 1$  при любом натуральном  $n$ . Докажите, что  $a = b$ . (А. Голованов)
319. Клетчатый прямоугольник разрезали по линиям сетки на шестиклеточные «корытца» и нечетное число клеточек. Какое наименьшее число отдельных клеточек могло при этом оказаться? (Шестиклеточное «корытце» выглядит так: . Его можно поворачивать.) (Л. Емельянов)
320. Докажите, что любой треугольник можно разрезать на 3 многоугольника, из которых складывается прямогольный треугольник (переворачивать части нельзя). (Л. Емельянов)



## 9 класс

321. Двое по очереди ставят точки в клетки таблицы  $7 \times 7$ . За один ход ставится ровно одна точка. В одну клетку может быть поставлено несколько точек. Проигрывает тот, после чьего хода в клетках какой-то строки или какого-то столбца суммарно будут стоять 5 точек. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника? (О. Подлипский)
322. Назовем натуральное число *тройным*, если его десятичная запись состоит из трех подряд идущих одинаковых групп цифр (например, 200420042004). После приписывания к некоторому тройному числу справа даты (по две цифры, означающие последовательно число, месяц и год) получилось новое тройное число. Найдите все такие даты в XXI веке. (О. Дмитриев)
323. Пусть  $A_1$  и  $C_1$  — проекции вершин  $A$  и  $C$  треугольника  $ABC$  на биссектрису внешнего угла при вершине  $B$  соответственно. Докажите, что отрезки  $AC_1$  и  $CA_1$  пересекаются на биссектрисе угла  $ABC$  треугольника  $ABC$ . (Л. Емельянов)
324. В футбольном тотализаторе принимаются ставки на исходы трех матчей очередного тура. (Каждый матч может завершиться любым из трех исходов: победой хозяев поля, победой гостей либо вничью.) Составьте наименьшее число вариантов прогноза так, чтобы среди них наверняка имелся вариант, в котором исходы всех матчей указаны неверно. (С. Токарев)
325. Найдите все квадратные трехчлены  $P(x)$  с целыми коэффициентами, удовлетворяющие при всех  $x$  неравенствам  $x^2 + x + 1 \leq P(x) \leq 2x^2 + 2x + 2$ . (А. Голованов)

326. Клетчатый прямоугольник разрезали по линиям сетки на шестицветочные «корытца» и нечетное число клеточек. Какое наименьшее число отдельных клеточек могло при этом оказаться? (Шестицветочное «корытце» выглядит так: . Его можно поворачивать.) (*Л. Емельянов*)
327. О натуральных числах  $a, p, q$  известно, что  $ap + 1$  делится на  $q$ , а  $aq + 1$  делится на  $p$ . Докажите, что  $a > \frac{pq}{2(p+q)}$ . (*А. Голованов*)
328. Произвольную точку  $P$  плоскости отразили симметрично относительно прямой, содержащей сторону  $BC$  треугольника  $ABC$ , и полученную точку отразили симметрично относительно середины стороны  $BC$ . Обозначим через  $A'$  полученную точку. Аналогично, отражая точку  $P$  симметрично относительно сторон  $CA$  и  $AB$ , а затем их середин, построим точки  $B'$  и  $C'$ . Докажите, что треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  подобны. (*Л. Емельянов*)



## 10 класс

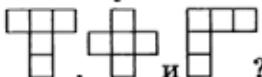
329. На острове Невезения отменили понедельники. Известно, что в 2003 г. ровно 8 четвергов на острове пришлось на наши четверги. Сколько таких совпадений будет в 2005 г.? (*С. Токарев*)
330. Пусть  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  — три квадратных трехчлена с положительными старшими коэффициентами. Известно, что каждый из них имеет хотя бы один общий корень с суммой двух других. Докажите, что  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  имеют общий корень. (*Жюри*)
331. Какую наименьшую длину может иметь расположенная в пространстве замкнутая пятизвенная ломаная, все звенья которой различны по длине, а концы звеньев расположены в точках с целочисленными координатами? (*Н. Агаханов*)
332. В остроугольном треугольнике  $ABC$  точка  $M$  — середина стороны  $BC$ , точки  $D$  и  $E$  — проекции точки  $M$  на стороны  $AB$  и  $AC$  соответственно. Окружности, описанные около треугольников  $ABE$  и  $ACD$ , пересекаются в точке  $K$ , отличной от  $A$ . Докажите, что  $AK \perp BC$ . (*Л. Емельянов, П. Кожевников*)
333. Докажите неравенство  $a^n + b^n > (a + b)^n$ , где  $n$  — рациональное,  $a, b$  — действительные числа, такие, что  $a \cdot b < 0$ ,  $a + b > 0$ ,  $n > 1$ . (*В. Сендеров*)

334. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  диагональ  $AC$  делит диагональ  $BD$  пополам. Докажите, что произведение расстояний от точки внутри четырехугольника до его сторон будет наибольшим, если эта точка — середина диагонали  $AC$ . (С. Спиридовов)
335. В компании из 2004 человек некоторые знакомы между собой. Известно, что два человека *дружат*, если они знакомы и у них есть общий знакомый. Назовем человека *необщительным*, если у него нет друзей. Назовем человека *странным*, если он имеет в этой компании 1003 знакомых, но при этом необщительный. Какое максимальное число странных людей может быть в этой компании? (Е. Куликов)
336. Наибольшие делители трех последовательных натуральных нечетных чисел, отличные от них самих, образуют (в том же порядке) возрастающую арифметическую прогрессию. Найдите все такие числа. (И. Богданов, А. Голованов)



## 11 класс

337. Множество  $S$  состоит из чисел  $1, 1+b, 1+b+b^2, 1+b+b^2+b^3, \dots$ , где  $b$  — некоторое натуральное число. Докажите, что если два числа из  $S$  являются членами возрастающей арифметической прогрессии, то найдется еще одно число из  $S$ , также являющееся членом этой прогрессии. (Н. Агаханов)
338. На сторонах  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$  выбрали точки  $M$  и  $N$  так, что четырехугольник  $AMNC$  вписанный и радиусы окружностей, описанных около четырехугольника  $AMNC$  и треугольника  $MBN$ , равны. Докажите, что ортоцентр (точка пересечения высот) треугольника  $MBN$  совпадает с центром окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . (Н. Агаханов)
339. Сумма действительных чисел  $x, y$  и  $z$  равна 3, а сумма их попарных произведений равна  $a$ . Докажите неравенство  $(x-1)^2 \leq 4\left(1 - \frac{a}{3}\right)$ . (А. Храбров)
340. От квадратной доски  $1001 \times 1001$  отрезали четыре угловых квадрата  $2 \times 2$ . Можно ли оставшуюся часть



доски разбить на фигурки вида (Все фигурки состоят из пяти клеточек  $1 \times 1$ , их можно поворачивать.) (Б. Трушин)

341. Пусть  $ax^2 + 2bx + c$ ,  $cx^2 + 2ax + b$ ,  $bx^2 + 2cx + a$  — квадратные трехчлены с положительными коэффициентами, причем любые два из них имеют общий корень. Докажите, что  $a = b = c$ . (О. Подлипский)
342. В круге площади 1001 два игрока по очереди проводят диаметры. Проигрывает тот, после хода которого площадь какого-то из получившихся секторов меньше 1. Кто из игроков может обеспечить себе победу независимо от игры соперника? (О. Подлипский)
- 343\*. Найдите геометрическое место точек  $P$ , лежащих внутри куба  $ABCDA'B'C'D'$ , для которых в каждую из шести пирамид  $PABCD$ ,  $PABB'A'$ ,  $PBCC'B'$ ,  $PCDD'C'$ ,  $PDAA'D'$ ,  $PA'B'C'D'$  можно вписать сферу. (О. Подлипский)
- 344\*. Существуют ли такие действительные  $x$ , что числа  $\operatorname{ctg} x$  и  $\operatorname{ctg} 2004x$  оба целые? (И. Богданов, В. Сендеров)

## 2004–2005

### 8 класс

345. На доске выписываются числа по следующему правилу: в первой строке число 1, во второй строке два числа 2 и 3, в третьей строке три числа 3, 4 и 5 и т. д. (в  $n$ -й строке стоит  $n$  последовательных натуральных чисел, начиная с  $n$ ). Сколько раз на доске будет выписано число 2005? (Р. Женодаров)
346. В наборе из пяти попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых трех гирь больше суммарного веса двух оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора. (О. Подлипский)
347. Дан выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , в котором  $\angle A = 90^\circ$ , а вершина  $C$  удалена от прямых  $AB$  и  $AD$  на расстояния, равные длинам отрезков  $AB$  и  $AD$  соответственно. Докажите, что диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. (С. Токарев)
348. В клетчатом квадрате  $5 \times 5$  центральная клетка (вместе с ее границей) закрашена. Два игрока по очереди закрашивают еще не закрашенные клетки. Клетки закрашиваются вместе с границей. Игрок проигрывает, если после его хода на любом луче с началом в центральной клетке есть хотя бы одна закрашенная точка, помимо начала луча. Кто из игроков может выиграть независимо от игры соперника? (К. Малевич, И. Рубанов)

349. В школе все учащиеся сидят за партами по двое, причем у 60% мальчиков сосед по парте тоже мальчик, а у 20% девочек сосед по парте тоже девочка. Сколько процентов учащихся этой школы составляют девочки? (*С. Токарев*)
350. Найдите наименьшую возможную сумму 10 различных натуральных чисел, таких, что произведение любых 5 из них четно, а сумма всех 10 чисел нечетна. (*О. Подлипский*)
351. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CA$  треугольника  $ABC$  отметили точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  соответственно так, что  $2AC_1 = C_1B$ ,  $2BA_1 = A_1C$ ,  $2CB_1 = B_1A$ . После этого исходный треугольник стерли, оставив точки  $A_1$ ,  $B_1$ ,  $C_1$ . Постройте исходный треугольник. (*Л. Емельянов*)
352. Боря соединил лампочку с каждым из десяти выключателей. Олег перерезал пять проводов так, что теперь ровно пять выключателей могут включить лампочку. Олег указал Боре на один из выключателей и спросил, может ли Боря узнать, перерезан ли провод, идущий от него к лампочке. При этом за одну попытку Олег разрешает включить одновременно любые три выключателя (лампочка загорится, если хотя бы один из них соединен с ней). После этого Олег одновременно возвращает выключатели в первоначальное положение. Верно ли, что Боре всегда хватит девяти таких попыток, чтобы ответить на вопрос Олега? (*О. Подлипский, Б. Трушин*)



## 9 класс

353. В наборе из пяти попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых трех гирь больше суммарного веса двух оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора. (*О. Подлипский*)
354. Найдите наименьшее натуральное число, большее 100, такое, что при вписывании между любыми двумя его цифрами любой ненулевой цифры (скажем,  $n$ ) получится число, делящееся на  $n$ . (*В. Сендеров*)
355. Робот загадал натуральное число от 1 до 2005. По нашей просьбе он может проделывать следующие операции:
- 1) увеличить число в памяти на 1;
  - 2) уменьшить число в памяти на 1;
  - 3) сказать, является ли число в памяти точным квадратом.
- Докажите, что не более чем за 300 операций мы можем узнать, какое число загадал робот. (*А. Кришеник*)

- 356.** Пусть  $P$  — ближайшая к вершине  $B$  точка пересечения биссектрисы угла  $B$  со вписанной окружностью треугольника  $ABC$ . Касательная к этой окружности, проведенная через  $P$ , пересекает стороны  $BC$  и  $BA$  в точках  $C_1$  и  $A_1$  соответственно. Докажите, что расстояние от точки  $A_1$  до биссектрисы угла  $A$  равно расстоянию от точки  $C_1$  до биссектрисы угла  $C$ . (*Л. Емельянов*)
- 357.** По кругу записаны 5 чисел. Известно, что любое число не меньше суммы двух соседних с ним чисел и не больше суммы двух несоседних с ним чисел. Какие числа могли быть записаны? (*Д. Пермяков*)
- 358.** Через точку, лежащую внутри треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  ( $a < b < c$ ), провели три прямые, параллельные сторонам треугольника. Эти прямые образуют в пересечении с внутренностью треугольника отрезки, длины которых равны  $l$ ,  $m$ ,  $n$ . Докажите, что  $l + m + n \leq b + c$ . (*Л. Емельянов*)
- 359.** Можно ли выбрать 100 последовательных четных чисел и разбить их на пары  $(a_1, b_1)$ ,  $(a_2, b_2)$ , ...,  $(a_{50}, b_{50})$  так, чтобы каждое из уравнений  $x^2 + a_1x + b_1 = 0$ ,  $x^2 + a_2x + b_2 = 0$ , ...,  $x^2 + a_{50}x + b_{50} = 0$  имело целые корни? (*Н. Агаханов*)
- 360.**Правильный шестиугольник со стороной  $p$  разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольнички со стороной 1. Этот шестиугольник замостили плитками в виде ромбиков, каждая из которых покрывает два треугольничка. Докажите, что плиток, расположенных каждым из трех способов: вида  $A$ , вида  $B$  и вида  $C$  (рис. 11), в этом замощении встретится поровну. (*Е. Куликов*)

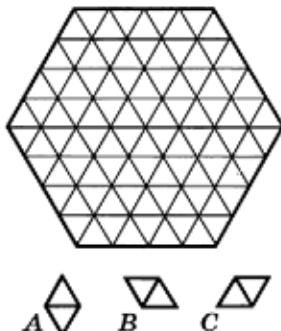


Рис. 11



## 10 класс

- 361.** В наборе из одиннадцати попарно различных гирь каждая весит натуральное число граммов. Известно, что суммарный вес любых семи гирь больше суммарного веса четырех оставшихся. Найдите наименьший возможный суммарный вес всех гирь набора. (*О. Подлипский, И. Богданов*)

362. Докажите, что если число  $\underbrace{11\dots11}_{n \text{ единиц}} 2 \underbrace{11\dots11}_{n \text{ единиц}}$  делится на 11, то оно также делится и на 121. (В. Сендеров)
363. Пусть  $B_0$  — середина стороны  $AC$  треугольника  $ABC$ . Проведем из середины отрезка  $AB_0$  перпендикуляр к стороне  $BC$ , а из середины отрезка  $B_0C$  перпендикуляр к стороне  $AB$ . Обозначим точку пересечения этих перпендикуляров через  $B'$ . Аналогично построим точки  $C'$  и  $A'$ . Докажите, что треугольники  $A'B'C'$  и  $ABC$  подобны. (Л. Емельянов)
364. Какое наибольшее число клеток клетчатого квадрата  $(2n - 1) \times (2n - 1)$  можно закрасить так, чтобы никакие три закрашенные клетки не образовывали уголок вида ? (О. Дмитриев)
365. В вершинах правильного 2005-угольника записаны числа. Известно, что для любой вершины записанное в ней число не больше суммы чисел, записанных в двух соседних с ней вершинах, и не меньше суммы чисел, записанных в двух наиболее удаленных от нее вершинах. Какие числа могли быть записаны? (Д. Пермяков)
366. Из вершины  $B$  остроугольного треугольника  $ABC$  проведены перпендикуляры к сторонам  $AB$  и  $BC$  до пересечения с прямой  $AC$  в точках  $P$  и  $Q$  соответственно. Докажите, что окружности, описанные около треугольников  $ABC$  и  $PBQ$ , касаются. (Т. Емельянова)
367. Существуют ли такие три многочлена  $f_1, f_2, f_3$ , что у каждого из них и у суммы  $f_1 + f_2 + f_3$  имеется хотя бы по одному корню, а у трех попарных сумм  $f_1 + f_2, f_2 + f_3, f_3 + f_1$  корней нет? (И. Рубанов, О. Дмитриев)
368. На плоскости расположено бесконечное множество  $L$  прямых, никакие две из которых не параллельны. Известно, что, как бы ни расположить на плоскости квадрат со стороной 1, он будет пересекаться хотя бы с одной прямой множества  $L$ . Докажите, что найдется квадрат со стороной 0,8, пересекающийся не менее чем с тремя прямыми множества  $L$ . (С. Волченков)



## 11 класс

369. Докажите, что если число  $\underbrace{11\dots11}_{n \text{ единиц}} 2 \underbrace{11\dots11}_{n \text{ единиц}}$  делится на 11, то оно также делится и на 121. (В. Сендеров)

370. Известно, что  $\sin x + \cos 2x$  и  $\cos x + \sin 2x$  — ненулевые рациональные числа. Докажите, что  $\sin x$  и  $\cos x$  рациональны. (*Н. Агаханов*)
371. Докажите, что всякий выпуклый  $n$ -угольник ( $n \geq 4$ ) с вершинами в точках с целыми координатами содержит параллелограмм с вершинами в точках с целыми координатами. (*В. Дольников*)
372. Пятиграник  $ABC A_1 B_1 C_1$  имеет две непараллельные треугольные грани  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$  и три грани — выпуклые четырехугольники  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $CAA_1C_1$ . Докажите, что плоскость, проведенная через точки пересечения диагоналей четырехугольных граней, содержит прямую пересечения плоскостей  $ABC$  и  $A_1 B_1 C_1$ . (*Л. Емельянов*)
373. В вершинах правильного 2005-угольника записаны числа. Известно, что для любой вершины записанное в ней число не больше суммы чисел, записанных в двух соседних с ней вершинах, и не меньше суммы чисел, записанных в двух наиболее удаленных от нее вершинах. Какие числа могли быть записаны? (*Д. Пермяков*)
374. Пусть  $P$  — произвольная точка внутри остроугольного треугольника  $ABC$  с описанной окружностью  $\Omega$ . Прямые  $AP$ ,  $BP$  и  $CP$  вторично пересекаются с  $\Omega$  в точках  $A_1$ ,  $B_1$  и  $C_1$  соответственно. Обозначим через  $A_2$ ,  $B_2$  и  $C_2$  проекции точки  $P$  на прямые  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. Докажите, что треугольники  $A_1 B_1 C_1$  и  $A_2 B_2 C_2$  подобны. (*Л. Емельянов*)
375. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  — действительные числа, удовлетворяющие системе уравнений  $\begin{cases} a+b+c=2, \\ a^2+b^2+c^2=2. \end{cases}$  Докажите, что среди этих чисел найдутся два, отличающиеся не менее чем на 1. (*М. Мурашкин*)
- 376\*. На доске написано уравнение
- $$(x^2 + *x + *) \cdot (x^2 + *x + *) \cdot \dots \cdot (x^2 + *x + *) = (x^2 + *x + *) \cdot (x^2 + *x + *) \cdot \dots \cdot (x^2 + *x + *),$$
- где в левой и правой частях по 10 квадратных трехчленов. Два игрока по очереди заменяют коэффициенты  $*$  на ненулевые действительные числа. Первый игрок выигрывает, если после последнего хода второго игрока получившееся уравнение имеет действительный корень, в противном случае выигрывает второй игрок. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? (*Н. Агаханов*)

## ▼ 8 класс

377. В государстве каждый житель либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Все жители знакомы друг с другом. Президент однажды сделал два утверждения — «Я знаком с четным числом рыцарей» и «Я знаком с нечетным числом лжецов». Докажите, что любой другой житель может сделать такие же утверждения. (Президент входит в число жителей.) (*И. Богданов*)
378. В произведении ДО · РЕ · МИ · СИ одинаковые буквы обозначают одинаковые цифры, а разные буквы — разные цифры. Каким наибольшим количеством нулей может заканчиваться это произведение? (*И. Рубанов*)
379. Назовем диагональ пятиугольника *хорошой*, если какие-то другие диагонали делят ее на 3 равные части. Какое наибольшее число *хороших* диагоналей может быть у выпуклого пятиугольника? (*И. Рубанов*)
380. В приборе имеется  $n \geq 4$  контактов и  $m \geq 4$  проводов, причем каждый провод соединяет ровно два контакта. Известно, что для любых четырех проводов найдутся такие два контакта, что любой из этих проводов подсоединен хотя бы к одному из них. Докажите, что найдутся такие три контакта, что любой провод в приборе подсоединен хотя бы к одному из них. (*В. Дольников*)
381. В написанном на доске выражении  $\frac{AC}{B+C}$  Петя и Коля заменяют буквы тремя различными натуральными числами: вначале Петя заменяет букву *A*, затем Коля — букву *B*, затем опять Петя — букву *C*. Докажите, что Петя может писать числа так, чтобы значение записанного на доске выражения оказалось целым. (*И. Рубанов, В. Сендеров*)
382. Клетки прямоугольника  $7 \times 8$  покрашены в три цвета, причем в любом квадратике  $2 \times 2$  есть клетки всех трех цветов. Какое наибольшее количество клеток может быть покрашено в первый цвет? (*О. Подлипский*)
383. Каждый день Малыш и Карлсон едят пирожные. В первый день они съели по одному пирожному. Затем Малыш каждый день съедает ровно одно пирожное, а Карлсон — ровно столько, сколько они съели вместе за все предыдущие дни. Могло ли число пирожных, съеденных однажды Карлсоном, оканчиваться на 101? (*Н. Агаханов*)

384. На разных сторонах угла с вершиной  $S$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  ( $SP \neq SQ$ ). Через середину  $M$  отрезка  $PQ$  проведена прямая, перпендикулярная биссектрисе угла. Эта прямая пересекается с прямой  $SP$  в точке  $T$ . Докажите, что перпендикуляр к  $SP$ , восставленный в точке  $T$ , и перпендикуляр к  $PQ$ , восставленный в точке  $M$ , пересекаются на биссектрисе угла. (Л. Емельянов)



## 9 класс

385. Клетки доски  $8 \times 8$  раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.) (Н. Агаханов)
386. Найдите все натуральные  $n$ , удовлетворяющие равенству  $n! = \overline{1...n}$  (в правой части последовательно выписаны друг за другом десятичные записи всех натуральных чисел от 1 до  $n$ ; в левой части  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ ). (В. Сендеров)
387. Из точки  $A$ , расположенной вне окружности  $\omega$ , проведены две касательные  $AB$  и  $AC$  к этой окружности. Точка  $D$  лежит на  $\omega$  и диаметрально противоположна  $C$ . Перпендикуляр, опущенный из точки  $B$  на прямую  $CD$ , пересекает ее в точке  $H$ . Докажите, что прямая  $AD$  делит отрезок  $BH$  пополам. (В. Астахов)
388. На острове живут 2006 человек, каждый — либо рыцарь, либо лжец. Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Некоторые из жителей знакомы (если  $A$  знаком с  $B$ , то и  $B$  знаком с  $A$ ). Каждый житель острова, кроме президента, сделал два утверждения — «Я знаю четное число рыцарей» и «Я знаю нечетное число лжецов». Докажите, что президент может сделать такие же утверждения. (Президент входит в число жителей острова.) (И. Богданов)
389. Каждый день Малыш и Карлсон едят пирожные. В первый день они съели по одному пирожному. Затем Малыш каждый день съедает ровно одно пирожное, а Карлсон — ровно столько, сколько они съели вместе за все предыдущие дни. Могло ли число пирожных, съеденных однажды Карлсоном, оканчиваться на 101? (Н. Агаханов)

390. На доске написаны многочлены  $x + 1$  и  $x^2 + 1$ . Разрешается дописывать на доску многочлен  $f$ , равный сумме, разности или произведению любых двух различных из написанных многочленов, если многочлен  $f$  не был выписан на доске ранее. Можно ли выписать на доску многочлен  $x^{2006} + 1$ ? (Н. Агаханов)
391. В выпуклом четырехугольнике  $ABCD$  описанная окружность треугольника  $ABC$  пересекает стороны  $CD$  и  $DA$  в точках  $P$  и  $Q$ , а описанная окружность треугольника  $CDA$  пересекает стороны  $AB$  и  $BC$  в точках  $R$  и  $S$  соответственно. Прямые  $BP$  и  $BQ$  пересекают отрезок  $RS$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что точки  $M, N, P, Q$  лежат на одной окружности. (С. Берлов)
392. Есть 15 монет, среди которых четное (не известное нам) число фальшивых. Все настоящие монеты весят одинаково, все фальшивые тоже весят одинаково, но они легче настоящих. Можно ли за 3 взвешивания на чашечных весах найти хотя бы одну настоящую монету? (С. Токарев)



## 10 класс

393. Клетки доски  $8 \times 8$  раскрашены в шахматном порядке. Одним ходом разрешается перекрасить любую клетку в цвет одной из соседних с ней клеток. Можно ли с помощью таких перекрашиваний изменить цвет всех клеток на противоположный? (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.) (Н. Агаханов)
394. Числа от 1 до 100 выписали в строку в некотором порядке. Докажите, что найдутся два рядом стоящих числа, сумма которых больше 50, но меньше 150. (С. Берлов)
395. Пусть  $a$  и  $b$  — различные натуральные числа, большие 1 000 000, и такие, что  $(a + b)^3$  делится на  $ab$ . Докажите, что  $|a - b| > 10 000$ . (И. Богданов, В. Сендеров)
396. Продолжения сторон  $AB$  и  $CD$  выпуклого четырехугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ , а продолжения сторон  $BC$  и  $AD$  — в точке  $Q$ . Обозначим через  $M$  и  $N$  середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ . Докажите, что если  $\angle APM = \angle CPN$ , то  $\angle BQN = \angle DQM$ . (Л. Емельянов)
397. Уравнение  $2x^3 + ax^2 + bx + c = 0$  с целыми коэффициентами имеет три различных корня. Оказалось, что первый корень является синусом, второй — косинусом, а третий — тангенсом одного угла. Найдите все такие уравнения. (Н. Агаханов, И. Богданов)

398. На плоскости провели 8 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться? (И. Рубанов)
399. Данна трапеция  $ABCD$  с основаниями  $AD$  и  $BC$ . Окружность  $\omega_1$  касается основания  $BC$  в точке  $M$  и продолжений сторон  $AB$  и  $CD$  за точки  $B$  и  $C$ ; окружность  $\omega_2$  касается основания  $AD$  в точке  $N$  и продолжений сторон  $AB$  и  $CD$  за точки  $A$  и  $D$ . Докажите, что отрезок  $MN$  проходит через точку пересечения диагоналей трапеции. (Л. Емельянов)
400. В стране есть несколько городов, соединенных дорогами. Каждая дорога соединяет только два города, и на ней введено одностороннее движение; при этом пара городов соединена не более чем одной дорогой. Выехав из любого города, нельзя в него вернуться. Известно, что из города  $A$  в город  $B$  можно проехать ровно 2006 способами. Найдите минимальное возможное число городов в стране. (И. Богданов)

## 11 класс

401. График линейной функции касается графика квадратичной функции  $y = f(x)$ , а график квадрата этой линейной функции получается из графика функции  $y = f(x)$  сдвигом вниз на величину  $p$ . Докажите, что для всех таких  $f(x)$  число  $p$  одинаково. (Н. Агаханов)
402. Числа от 1 до 100 выписали в строку в некотором порядке. Докажите, что найдутся два рядом стоящих числа, сумма которых больше 50, но меньше 150. (С. Берлов)
403. Положительные числа  $x$  и  $y$  таковы, что для некоторого натурального  $n$  справедливо равенство

$$x + x^2 + \dots + x^n + y + \dots + y^n = 2n.$$

Докажите, что тогда выполняется неравенство

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq 2.$$

(В. Астахов, А. Гаврилюк)

404. Описанная окружность четырехугольника  $ABCD$  отражается симметрично относительно сторон  $AB$  и  $AD$ . Построенные окружности вторично пересекаются в точке  $A'$ , отличной от  $A$ . Аналогично строятся точки  $B'$ ,  $C'$  и  $D'$ . Докажите, что четырехугольники  $ABCD$  и  $C'D'A'B'$  равны. (Л. Емельянов)

405. Числа  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\operatorname{tg} x$  являются членами некоторой бесконечной в обе стороны геометрической прогрессии ( $\dots, b_{-2}, b_{-1}, b_0, b_1, b_2, \dots$ ). Докажите, что  $\operatorname{ctg} x$  также входит в эту прогрессию. (Н. Агаханов)
406. Основания трех высот треугольной пирамиды являются точками пересечения медиан граней, к которым они проведены. Докажите, что все ребра пирамиды равны. (Н. Агаханов)
- 407\*. На плоскости проведено 12 прямых, никакие две из которых не параллельны. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников со сторонами, лежащими на этих прямых, могло образоваться? (И. Рубанов)
- 408\*. Имеется куча из  $N$  ( $N > 1$ ) камней. Двое играют в игру. За один ход можно либо разделить любую имеющуюся кучу на две произвольным образом (если в куче более одного камня), либо забрать один камень из любой кучи. Побеждает тот, кто заберет последний камень. Кто из соперников сможет победить независимо от игры соперника? (Д. Храмцов)

## 2006–2007

### ▼ 8 класс

409. Найдите наименьшее четырехзначное число, такое, что произведение его цифр, увеличенных каждая на 1, равно 21. (И. Рубанов)
410. Докажите, что если точка, которая делит одну из сторон треугольника в отношении 1 : 3, равноудалена от середин двух других сторон, то треугольник прямоугольный. (Н. Агаханов)
411. При каком наименьшем  $n$  на шахматную доску можно поставить  $n$  ладей и  $n$  слонов так, чтобы любая ладья била хотя бы двух слонов, а любой слон бил хотя бы две ладьи? (М. Мурашкин)
412. На координатной плоскости проведено 20 прямых — графиков линейных функций  $y = k_1x + b_1$ ,  $y = k_2x + b_2$ , ...,  $y = k_{20}x + b_{20}$ , где каждый из коэффициентов  $k_1, k_2, \dots, k_{20}, b_1, b_2, \dots, b_{20}$  равен одному из чисел 1, 2, ..., 20. Известно, что любые две прямые пересекаются в точке, не лежащей на оси ординат, но никакие три не проходят через одну точку. Отмечены точки пересечения всех пар прямых. Докажите, что модуль произведения абсцисс всех отмеченных точек равен 1. (И. Рубанов)

413. Сколько решений имеет числовой ребус

$$\overline{ABA} \cdot \overline{AA} = \overline{AB} \cdot \overline{AAA} - A,$$

где  $A$  и  $B$  — различные цифры,  $A \neq 0$ ? (М. Мурашкин)

414. Имеется 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивые — они весят одинаково и легче, чем настоящие (настоящие монеты также весят одинаково). Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 16 настоящих монет? (О. Дмитриев)
415. Пусть  $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты остроугольного треугольника  $ABC$ ,  $H$  — точка их пересечения. Через точку, симметричную середине отрезка  $BH$  относительно прямой  $BC$ , провели прямую, перпендикулярную стороне  $AC$ . Докажите, что она пересекает прямую  $BC$  в точке  $A_1$ . (Л. Емельянов)
416. По кругу расставлены  $n$  чисел ( $n > 2007$ ), не все из которых равны. Известно, что сумма любых 13 стоящих подряд чисел не превосходит 13, а сумма любых 21 стоящих подряд чисел не превосходит 21. Докажите, что сумма всех чисел строго меньше  $n$ . (В. Дольников)



## 9 класс

417. На столе лежат семь карточек. За один ход разрешается перевернуть любые пять карточек. Какое наименьшее число ходов необходимо совершить, чтобы перевернуть все карточки? (Л. Емельянов)
418. Корни квадратного уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$  в 2007 раз больше корней квадратного уравнения  $cx^2 + dx + a = 0$ . Докажите, что  $b^2 = d^2$ . (Н. Агаханов)
419. На стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  взята точка  $B_1$ . Пусть  $I$  — центр вписанной окружности треугольника. Окружность, описанная около треугольника  $AB_1I$ , вторично пересекает сторону  $AB$  в точке  $C_1$ . Окружность, описанная около треугольника  $CB_1I$ , вторично пересекает сторону  $BC$  в точке  $A_1$ . Докажите, что центр описанной окружности треугольника  $A_1B_1C_1$  не зависит от положения точки  $B_1$  на стороне  $AC$ . (Т. Емельянова)
420. В стране 20 городов. Авиакомпания хочет организовать двусторонние рейсы между ними так, чтобы из любого города можно было добраться в любой другой не более чем за  $k$  пересадок. При этом количество авиалиний из любого города не должно превышать четырех. При каком наименьшем  $k$  это возможно? (П. Мартынов)

421. В наборе из пяти палочек ни из каких трех палочек нельзя составить треугольник. Могло ли так оказаться, что, разломав одну из палочек на две, мы получим шесть палочек, из которых можно составить два равнобедренных треугольника? (*С. Волченков*)
422. Имеется 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивые — они весят одинаково и легче, чем настоящие (настоящие монеты также весят одинаково). Как с помощью трех взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 16 настоящих монет? (*О. Дмитриев*)
423. Пусть каждое из натуральных чисел  $n$ ,  $n + 1$ ,  $n + 2$  делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число  $n$  делится на куб некоторого своего простого делителя. (*В. Сендеров*)
424. Около треугольника  $ABC$  описана окружность. Пусть  $A_0$  и  $C_0$  — соответственно середины ее дуг  $BC$  и  $AB$ , не содержащих вершин  $A$  и  $C$ . Оказалось, что отрезок  $A_0C_0$  касается окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Найдите угол  $B$ . (*В. Филимонов*)



## 10 класс

425. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, ..., ровно семь — на 2? (*М. Мурашкін*)
426. Даны числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Известно, что для любого  $x$  верно неравенство  $ax^2 + bx + c \geq bx^2 + cx + a \geq cx^2 + ax + b$ . Докажите, что  $a = b = c$ . (*И. Богданов*)
427. Дан треугольник  $ABC$ . Через точку  $X$ , лежащую внутри него, проводятся отрезок  $c_X$ , параллельный  $AB$ , с концами на сторонах  $AC$  и  $BC$ , и отрезок  $b_X$ , параллельный  $AC$ , с концами на сторонах  $AB$  и  $CB$ . Докажите, что все точки  $X$ , для которых длины отрезков  $b_X$  и  $c_X$  равны, лежат на одной прямой. (*Л. Емельянов*)
428. На доске записано число  $\underbrace{111\dots11}_{99\text{ единиц}}$ . Петя и Вася игра-

ют в следующую игру, делая ходы по очереди. Начинает Петя. За ход игрок либо записывает ноль вместо одной из единиц, кроме первой и последней, либо стирает один из нулей. Проигрывает тот, после чьего хода на доске в первый раз появится число, делящееся на 11. Кто выигрывает при правильной игре? (*М. Мурашкін*)

429. В строку выписываются друг за другом без пробелов все натуральные числа в порядке возрастания: 1234567891011.... Какая из последовательностей цифр встретится в строке раньше: последовательность ровно из 2006 подряд идущих шестерок (слева и справа от которой стоят не шестерки) или последовательность ровно из 2007 семерок (слева и справа от которой стоят не семерки)? (*M. Мурашкін*)
430. Пусть  $AB$  и  $CD$  — две перпендикулярные хорды окружности с центром  $O$ , пересекающиеся в точке  $E$ ; пусть также  $N$  и  $T$  — середины отрезков  $AC$  и  $BD$  соответственно. Докажите, что четырехугольник  $ENOT$  — параллелограмм. (*В. Філимонов*)
431. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, ..., 10. Разрешается выписать число  $a^2$ , если на доске уже имеется число  $a$ , или выписать наименьшее общее кратное чисел  $a$  и  $b$ , если числа  $a$  и  $b$  уже записаны. Можно ли с помощью таких операций получить число 1 000 000? (*A. Голованов*)
432. В стране некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что нет трех городов, попарно соединенных дорогами. Кроме того, для любых  $n$  дорог найдется город, из которого выходят хотя бы две из них. Докажите, что города можно так разбить на  $n$  округов, чтобы любая дорога соединяла города из различных округов. (*B. Астахов*)



## 11 класс

433. Существуют ли восемь натуральных чисел, среди которых ровно одно делится на 8, ровно два делятся на 7, ровно три — на 6, ..., ровно семь — на 2? (*M. Мурашкін*)
434. Даны числа  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Известно, что для любого  $x$  выполнено неравенство
- $$ax^2 + bx + c \geq bx^2 + cx + a \geq cx^2 + ax + b.$$
- Докажите, что  $a = b = c$ . (*І. Богданов*)
435. Боковое ребро четырехугольной пирамиды назовем *хорошим*, если медианы двух содержащих его граней, проведенные в середину этого ребра, равны. Докажите, что если в пирамиде три боковые ребра хорошие, то четвертое боковое ребро также является хорошим. (*H. Агаханов*)
- 436\*. В стране  $n$  городов, некоторые пары из которых соединены непересекающимися дорогами. Известно, что из любого города можно добраться по дорогам до

любого другого, причем единственным способом (если не проезжать по одной дороге более одного раза). Докажите, что министр может объявить не более чем  $\frac{n}{51}$

городов закрытыми (и запретить въезд в них и выезд из них) так, чтобы после этого для любой пары городов  $X$ ,  $Y$  выполнялось одно из двух условий: либо из  $X$  нельзя добраться до  $Y$ , либо из  $X$  можно добраться до  $Y$ , проехав не более чем 49 дорогам. (В. Дольников)

437. Докажите, что при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  выполнено неравенство  $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq 2$ . (Н. Агаханов)
438. Пусть  $AB$  и  $CD$  — две перпендикулярные хорды окружности с центром  $O$ , пересекающиеся в точке  $E$ ; пусть также  $N$  и  $T$  — середины отрезков  $AC$  и  $BD$  соответственно. Докажите, что четырехугольник  $ENOT$  — параллелограмм. (В. Филимонов)
439. На клетчатой полоске  $1 \times p$  двое играют в следующую игру. Каждым своим ходом первый игрок закрашивает одну незакрашенную клетку, а второй — две рядом стоящие незакрашенные. Если игрок не может сделать хода — он выиграл. Кто выиграет при правильной игре? (И. Богданов, М. Исаев)
- 440\*. Найдите все четверки целых чисел  $(x, y, z, t)$ , таких, что их сумма равна 0, а число  $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$  является квадратом целого числа. (В. Сендеров)

## 2007–2008

### ▼ 8 класс

441. Даны шестизначные числа  $A$  и  $B$ . Число  $A$  состоит из четных цифр, число  $B$  — из нечетных, а в числе  $C = A + B$  четные и нечетные цифры чередуются. Какое наибольшее значение может принимать  $C$ ? (М. Мурашкин)
442. В треугольнике  $ABC$  проведены высоты  $AA_1$  и  $CC_1$ . Точка, симметричная середине стороны  $AC$  относительно прямой  $BC$ , обозначена через  $A_2$ , а точка, симметричная той же середине относительно прямой  $AB$ , — через  $C_2$ . Докажите, что отрезки  $A_1A_2$  и  $C_1C_2$  параллельны. (Л. Емельянов)
443. Существуют ли попарно различные действительные числа  $a, b, c$ , такие, что  $a(b - c) = b(c - a) = c(a - b)$ ? (В. Сендеров)

- 444.** Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы каждая не занятая ладьей клетка находилась под боем хотя бы трех из них? (Ладья бьет клетку, если клетка находится с ней в одной горизонтали или вертикали и между ними нет занятых клеток.) (*М. Мурашкин*)
- 445.** Числа  $a, b, c$  и  $d$  таковы, что
- $$(a - b)(b - c)(c - d)(d - a) < 0.$$
- Число  $b$  — наибольшее из  $a, b, c$  и  $d$ . Определите, какое из чисел  $a, b, c$  и  $d$  — третье по величине. (*И. Рубанов*)
- 446.** Лестница насчитывает 2008 ступенек, на каждой из них написано одно из чисел  $-2, -1, 1$  или  $2$ . Число на ступеньке указывает, на сколько ступенек следует с нее шагнуть (вверх, если число положительное, или вниз, если число отрицательное). Известно, что с какой бы ступеньки ни начинался путь, он не выйдет за пределы лестницы и обязательно пройдет через верхнюю ступеньку. Может ли сумма всех чисел на ступеньках быть отрицательной? (*М. Мурашкин*)
- 447.** На сторонах треугольника  $ABC$  отмечены три точки:  $L$  на  $BC$ ,  $M$  на  $CA$ ,  $N$  на  $AB$ . Через точку  $L$  проведены две прямые:  $l_c \parallel AB$  и  $l_b \parallel AC$ . Аналогично через точку  $M$  проведены прямые  $m_a \parallel BC$  и  $m_c \parallel AB$ , а через точку  $N$  — прямые  $n_b \parallel AC$  и  $n_a \parallel BC$ . Докажите, что если прямые  $m_c, n_a$  и  $l_b$  пересекаются в одной точке, то прямые  $m_c, n_a$  и  $l_b$  образуют треугольник, равный  $ABC$ . (*Л. Емельянов*)
- 448.** На окружности отмечены  $2n \geq 6$  точек, делящих ее на равные дуги. Двою играют в следующую игру. Ходят по очереди. Ход состоит в том, чтобы обвести кружочками пару диаметрально противоположных точек и еще одну точку. Дважды обводить одну и ту же точку нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать очередного хода. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию? (Дайте ответ в зависимости от  $n$ ). (*И. Рубанов*)



## 9 класс

- 449.** 99 последовательных натуральных чисел разбили произвольным образом на 33 группы по 3 числа, в каждой группе подсчитали произведение чисел, и у каждого из 33 полученных произведений подсчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы цифр быть равными? (*Н. Агаханов*)

450. Ненулевые числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  таковы, что  

$$a^2(b+c-a) = b^2(c+a-b) = c^2(a+b-c).$$
 Докажите, что  $a = b = c$ . (В. Сендеров)
451. Трапеция  $ABCD$  с основаниями  $BC$  и  $AD$  описана около окружности. Известно, что  $\angle BCD = 2\angle BAD$ . Найдите отношение  $\frac{AB}{BC}$ . (М. Мурашкін)
452. Какое наименьшее количество ладей можно поставить на шахматной доске так, чтобы каждая не занятая ладьей клетка находилась под боем хотя бы трех из них? (Ладья бьет клетку, если клетка находится с ней в одной горизонтали или вертикали и между ними нет занятых клеток.) (М. Мурашкін)
453. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно у  $\frac{1}{12}$  из них в номере билета есть цифра 7? (М. Мурашкін)
454. Лестница насчитывает 2008 ступенек, на каждой из них написано одно из чисел  $-2$ ,  $-1$ ,  $1$  или  $2$ . Число на ступеньке указывает, на сколько ступенек следует с нее шагнуть (вверх, если число положительное, или вниз, если число отрицательное). Известно, что с какой бы ступеньки ни начинался путь, он не выйдет за пределы лестницы и обязательно пройдет через верхнюю ступеньку. Может ли сумма всех чисел на ступеньках быть отрицательной? (М. Мурашкін)
455. На сторонах треугольника  $ABC$  отмечены шесть точек:  $C_1$  и  $C_2$  на  $AB$ ,  $A_1$  и  $A_2$  на  $BC$ ,  $B_1$  и  $B_2$  на  $CA$ . Известно, что  $A_1B_2 \parallel AB$ ,  $B_1C_2 \parallel BC$  и  $C_1A_2 \parallel AC$ . Докажите, что треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  равновесники. (Л. Емельянов)
456. Каждое натуральное число от 1 до  $n$  домножили на некоторую степень двойки с неотрицательным целым показателем, после чего все числа сложили. Полученная сумма также оказалась степенью двойки. При каких  $n$  такое возможно? (М. Мурашкін, А. Кришеник)



## 10 класс

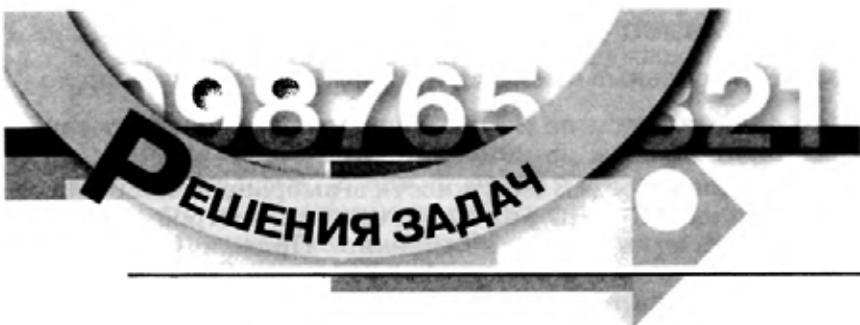
457. 72 последовательных натуральных числа разбили произвольным образом на 18 групп по 4 числа, в каждой группе подсчитали произведение чисел, и у каж-

дого из 18 полученных произведений подсчитали сумму цифр. Могут ли все полученные суммы цифр быть равными? (Н. Агаханов)

458. На плоскости расставлены 200 точек, никакие три из них не лежат на одной прямой. Каждая точка помечена числом 1, 2 или 3, после этого проведены все отрезки, соединяющие пары точек, помеченных различными числами. Каждый отрезок помечен числом (1, 2 или 3), отличным от чисел в его концах. В результате оказалось, что каждое из трех чисел написано на плоскости ровно по  $n$  раз. Найдите  $n$ . (П. Кожевников)
459. На диаметре  $AB$  окружности  $\omega$  выбрана точка  $C$ . На отрезках  $AC$  и  $BC$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Прямая  $l$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $A$  и  $D$ , окружность  $\omega_1$  — в точках  $A$  и  $E$ , а окружность  $\omega_2$  — в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $MD = NE$ . (П. Кожевников)
- 460\*. У трехчлена  $x^2 - ax + b$  коэффициенты  $a$  и  $b$  — натуральные числа, а десятичная запись одного из корней начинается с 2,008.... Найдите наименьшее возможное значение  $a$ . (И. Богданов)
461. Каждый из пассажиров автобуса получил билет с шестизначным номером, причем все номера билетов — последовательные числа. Какое наибольшее количество пассажиров могло ехать в автобусе, если ровно  $\frac{1}{12}$  из них в номере билета есть цифра 7? (М. Мурашкин)
462. Натуральное число  $n$  обладает следующим свойством: для любых натуральных  $a$  и  $b$  число  $(a + b)^n - a^n - b^n$  делится на  $n$ . Докажите, что  $a^n - a$  делится на  $n$  для любого натурального  $a$ . (В. Сендеров)
463. Пусть  $P$  — произвольная точка на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$ . На сторонах  $AB$  и  $CB$  взяты точки  $M$  и  $N$  соответственно так, что  $AM = AP$  и  $CN = CP$ . Перпендикуляры, проведенные в точках  $M$  и  $N$  к сторонам  $AB$  и  $BC$  соответственно, пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что  $\angle QIB = 90^\circ$ , где  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . (Т. Емельянова)
464. Может ли ладья обойти все клетки доски  $10 \times 10$ , побывав на каждой клетке ровно по разу, чередуя ходы длиной в одну и в две клетки? (Считается, что, делая ход длиной в две клетки, ладья не проходит по промежуточной клетке.) (А. Грибалко)

## ▼ 11 класс

465. Натуральные числа  $n$  и  $k$  ( $n > k$ ) таковы, что число  $\frac{n!}{k!}$  оканчивается на 2008. Докажите, что число  $n$  также оканчивается на 2008. (Н. Агаханов)
466. На диаметре  $AB$  окружности  $\omega$  выбрана точка  $C$ . На отрезках  $AC$  и  $BC$  как на диаметрах построены окружности  $\omega_1$  и  $\omega_2$  соответственно. Прямая  $l$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $A$  и  $D$ , окружность  $\omega_1$  в точках  $A$  и  $E$ , а окружность  $\omega_2$  в точках  $M$  и  $N$ . Докажите, что  $MD = NE$ . (П. Кожевников)
467. На плоскости даны  $n$  векторов, длина каждого не превосходит 1. Докажите, что можно выбрать  $\alpha$  и повернуть все векторы на угол  $\alpha$  (некоторые по часовой стрелке, а некоторые против) так, чтобы длина суммы векторов нового набора не превосходила 1. (Д. Терешин)
- 468\*. Пусть  $m$  — количество решений уравнения  $\sin x = ax + b$ , а  $n$  — количество решений уравнения  $x = a \cos x + b$  ( $a$  и  $b$  — положительные действительные числа, причем  $a \neq 1$ ). Какие значения может принимать выражение  $mn - m - n$ ? (И. Богданов)
469. Назовем тройку положительных чисел  $(a, b, c)$  удобной, если система неравенств  $ax^2 < bx + c$ ,  $bx^2 < cx + a$ ,  $cx^2 < ax + b$  имеет ровно два целых решения. Докажите, что тройка  $(a, b, c)$  удобна тогда и только тогда, когда  $a, b, c$  — длины сторон некоторого треугольника. (Н. Агаханов)
470. Найдите все такие пары натуральных чисел  $n, k$ , что  $n > 1$ ,  $k$  — нечетно и  $(n-1)!+1=n^k$ . (В. Сендеров)
- 471\*. Дан параллелепипед  $ABCDA_1B_1C_1D_1$ . Сфера  $S$  с центром на диагонали  $AC_1$  пересекает ребра  $AB$ ,  $AD$ ,  $AA_1$  в точках  $K$ ,  $L$ ,  $M$  соответственно, а ребра  $C_1D_1$ ,  $C_1B_1$ ,  $C_1C$  в точках  $K_1$ ,  $L_1$ ,  $M_1$  соответственно. Оказалось, что плоскости  $KLM$  и  $K_1L_1M_1$  параллельны, но треугольники  $KLM$  и  $K_1L_1M_1$  не равны. Докажите, что диагональ  $AC_1$  образует равные углы с ребрами  $AB$ ,  $AD$  и  $AA_1$ . (П. Кожевников)
472. Шахматную доску разбили на двухклеточные прямоугольники. Каждый из них требуется закрасить каким-нибудь цветом так, чтобы любые две клетки доски, отстоящие на ход коня, были раскрашены в разные цвета. Какого наименьшего числа цветов зарядом хватит для этого? (Ход коня состоит в перемещении на две клетки по горизонтали и одну по вертикали или же на две клетки по вертикали и одну по горизонтали.) (А. Грибалко)



**1993–1994**

## ▼ 9 класс

### 1. Ответ. 1994.

Пусть  $n = pq$ , где  $p$  и  $q$  — различные простые числа. По условию  $p + q + 1 = 1000$ , следовательно,  $p + q = 999$ . Поэтому одно из чисел  $p$ ,  $q$  четно. Пусть, например, четно  $p$ . Тогда  $p = 2$ , а  $q = 997$ , т. е.  
 $n = 2 \cdot 997 = 1994$ .

### 2. Ответ. $60^\circ$ .

Пусть  $\angle MAC = \angle BAN = \alpha$ , а  $\angle NAM = \angle ANM = \beta$  (рис. 12). По условию  $\angle A = \angle C$ , но  $\angle A = 2\alpha + \beta$ , а  $\angle C = 180^\circ - \alpha - 2\beta$  (из  $\triangle ACN$ ). Следовательно,

$$\angle CAN = \alpha + \beta = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ.$$

3. Пусть ни одно из уравнений не имеет корней. Тогда  $b^2 < ac$ ,  $c^2 < ab$  и  $a^2 < bc$ . Левые части в этих неравенствах неотрицательны, поэтому правые части положительны. Перемножив неравенства, получим противоречие:  $a^2b^2c^2 < a^2b^2c^2$ .

### 4. Ответ. 8.

Рассмотрим тройку квадратов, имеющих общую вершину, являющуюся вершиной кубика. Среди них не может быть двух квадратов одного цвета. Вся поверхность кубика разбита на восемь таких троек, следовательно, более восьми квадратов одного цвета получить нельзя. На рисунке 13 приведена развертка кубика, имеющего восемь квадратов черного цвета (все остальные квадраты можно покрасить в разные цвета, чтобы не нарушать условия задачи).

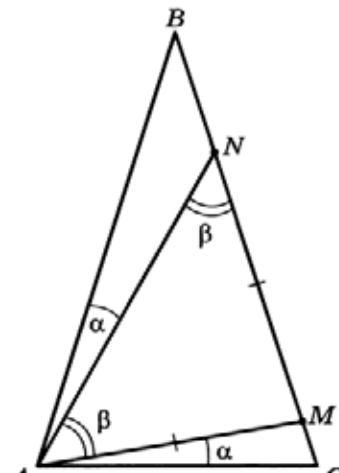


Рис. 12

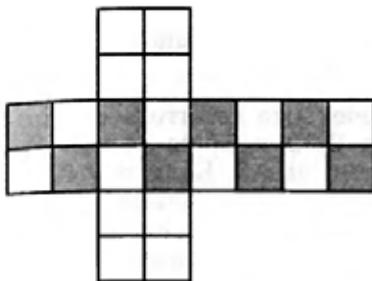


Рис. 13

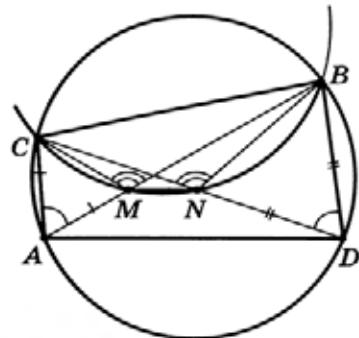


Рис. 14

**5. Ответ. Нельзя.**

Занумеруем горизонтали последовательно снизу вверх числами от нуля до девяти. Сумма номеров горизонталей, занимаемых шашками, не меняет свою четность после каждого хода. В начальной позиции она была нечетна ( $\frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ ), а в конечной равна нулю. Поэтому получить из начальной позиции конечную невозможно.

**6. Ответ. 0 и 4.**

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — корни данного уравнения. По теореме Виета  $x_1 + x_2 = -a$ ,  $x_1 \cdot x_2 = a$ , следовательно,  $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = 1$ . Числа  $x_1 + 1$  и  $x_2 + 1$  должны быть целыми, поэтому либо  $x_1 + 1 = 1$  и  $x_2 + 1 = 1$ , либо  $x_1 + 1 = -1$  и  $x_2 + 1 = -1$ . В первом случае  $x_1 = x_2 = 0$  и  $a = 0$ , а во втором —  $x_1 = x_2 = -2$  и  $a = 4$ .

**7.**  $\angle CAM = \angle BDN$  как вписанные, опирающиеся на одну дугу (рис. 14). Из равнобедренности треугольников  $CAM$  и  $BDN$  вытекает, что  $\angle CMB = \angle CNB$ . Следовательно, четырехугольник  $CMBN$  можно вписать в окружность. Еще два раза применяя теорему о вписанном угле, получаем, что  $\angle BMN = \angle BCN = \angle BAD$ , поэтому  $MN \parallel AD$ .

**8.** Проводя указанную операцию с томом 1, а затем со всеми томами, которые оказались левее его, библиотекарь поставит на место том 1. Затем, проводя эту операцию с томом 10 и потом с томами, оказавшимися правее его, библиотекарь поставит на место том 10. Далее аналогичная процедура проводится с томами 2 и 9, без участия томов 1 и 10. После этого на своих местах окажутся тома 1, 2, 9 и 10. Аналогичным образом можно поставить на свои места и оставшиеся тома: сначала 3 и 8, затем 4 и 7 и, наконец, том 5.

## ▼ 10 класс

### 9. Ответ. 30 и 30 030.

Пусть  $P_k$  — произведение первых  $k$  простых чисел и пусть

$$P_n - P_m = 30\,000. \quad (1)$$

Так как  $P_n$  делится на  $P_m$ , а простыми делителями числа 30 000 являются только числа 2, 3 и 5, то  $m \leq 3$ . Из условия следует, что  $P_n > 30\,000$ , т. е.  $n > 3$ . Если  $m < 3$ , то  $P_n - P_m$  не может делиться на 5. Следовательно,  $m = 3$  и  $P_m = 30$ . Сокращая обе части равенства (1) на 30, получаем, что  $p_4 \cdot p_5 \cdot \dots \cdot p_n - 1 = 1000$ , откуда находим единственное решение  $p_4 \cdot p_5 \cdot p_6 = 7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ .

### 10. Ответ. 19.

Рассматриваемые в условии суммы могут принимать значения от 0 до 19, всего 20 возможных значений. Докажем, что все эти 20 значений не могли быть получены. Предположим противное, тогда в таблице есть либо столбец, состоящий из одних нулей, либо нулевая строка. Первое невозможно, так как в этом случае сумма чисел в любой строке и в любом столбце не больше 18. Во втором случае сумма чисел в любом столбце не больше 9, поэтому в строках должны получаться суммы от 10 до 19, что невозможно, так как одна из строк нулевая.

Пример таблицы с 19 различными суммами приведен на рисунке 15.

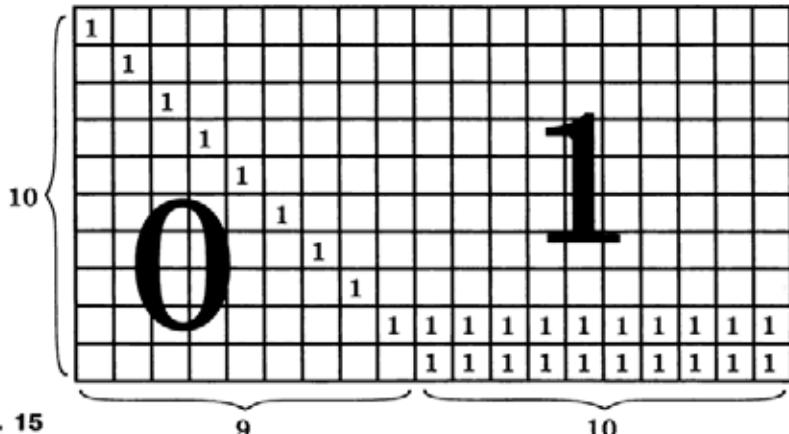


Рис. 15

11. Поскольку  $\angle BAC < \angle ABC$ , на стороне  $AB$  найдется точка  $M$ , такая, что  $BC = MC$  (рис. 16, а).

Тогда  $\angle BMC = \angle MBC = 75^\circ$ ,  $\angle BCM = 30^\circ$ ,  $\angle MCA = 45^\circ$ . Аналогично, поскольку  $\angle MAC < \angle MCA$ , на стороне  $AC$  найдется точка  $N$ , такая, что  $MC = MN$ , и, значит,  $\angle MNC = 45^\circ$ .

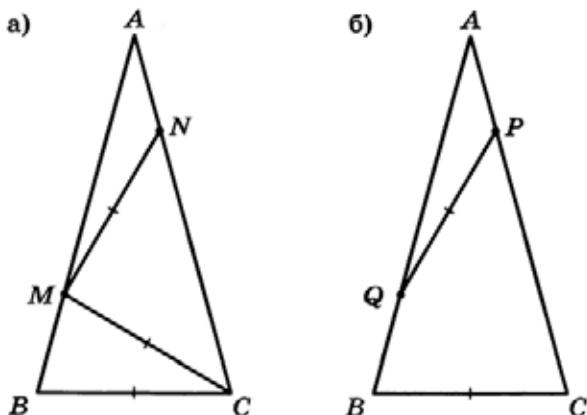


Рис. 16

Таким образом, треугольники  $APQ$  (рис. 16, б) и  $ANM$  равны по стороне и двум углам ( $PQ = BC = MN$ ,  $\angle APQ = \angle ANM = 135^\circ$ , угол  $A$  общий). Отсюда  $AM = AQ$ , т. е. точки  $M$  и  $Q$  совпадают, и, следовательно,  $CQ = MC = BC$ .

12. **Ответ.**  $a = 2$ .

Записав данное в условии неравенство в виде

$$x^4 + 2(x - 1)^2 + (a - 2) \geq 0,$$

видим, что  $a = 2$  подходит. При  $a < 2$  для  $x = \frac{1}{2}$  требуемое неравенство не выполняется, поэтому такие  $a$  не годятся.

13.  $a^3(b+1) + b^3(a+1) - (a^2(b+b^2) + b^2(a+a^2)) = (a-b)^2 \times (ab+a+b) \geq 0$ , так как  $(a-b)^2 \geq 0$  и  $ab+a+b \geq 0$ .

14. **Ответ.** Не может.

Докажем, что натуральное число  $x$  имеет нечетное число делителей тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом. Действительно, делители числа  $x$  разбиваются на пары  $\left(n; \frac{x}{n}\right)$ ,  $n \leq \frac{x}{n}$ . Если  $x$  является точным

квадратом, то ровно в одной паре  $\left(k; \frac{x}{k}\right)$  делители совпадают, значит, число делителей нечетно. Обратно, если число делителей нечетно, то в одной из пар  $n = \frac{x}{n}$ , т. е.  $x = n^2$ .

Таким образом,  $a$  и  $b$  — точные квадраты, а  $ab$  не является точным квадратом. Противоречие.

15. Пусть точка  $M$  лежит между  $S$  и  $N$ . Достаточно доказать, что  $\angle MKO + \angle ONM = 180^\circ$ , т. е.  $\angle ONS = \angle MKS$ . Отрезок  $BK$  — высота прямоугольного треугольника  $SBO$ , поэтому  $SK \cdot SO = SB^2$ . Но по свойству касательной и се-

кушней  $SB^2 = SM \cdot SN$ , следовательно,  $\frac{SK}{SN} = \frac{SM}{SO}$ . Отсюда получаем, что треугольники  $SKM$  и  $SNO$  с общим углом  $NSK$  подобны и, значит,  $\angle SNO = \angle SKM$  (рис. 17).

**16.** Заметим, что всего в чемпионате было разыграно  $18 \cdot 17 \cdot 2 = 612$  очков. Значит, московские команды набрали вместе 306 очков. Московская команда, набравшая наибольшее количество очков, набрала не менее 54 очков (иначе московские команды набрали бы вместе не более  $53 + 52 + 51 + 50 + 49 + 48 = 303$  очков). Поэтому если среди московских команд нет призеров, то призеры набрали не менее  $57 + 56 + 55 = 168$  очков. Кроме того, немосковские команды, не ставшие призерами, разыграли между собой  $9 \cdot 8 \cdot 2 = 144$  очка. Значит, немосковские команды набрали в сумме не менее 312 очков, т. е. больше, чем московские. Противоречие. Следовательно, среди московских команд есть призер.

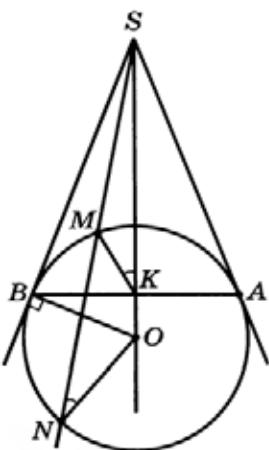


Рис. 17

## 11 класс

**17. Ответ.** Неверно.

Например, пусть в коробке лежат 5 карандашей: 3 длинных всех цветов, а также 2 красных — короткий и средний. Тогда среди любых трех попарно различных по размеру карандашей два карандаша будут красными.

**18. Утверждение задачи следует из тождества**

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} - \frac{b}{a} - \frac{c}{b} - \frac{a}{c} = \frac{(a-b)(b-c)(c-a)}{abc}.$$

**19.** Пусть  $O_i$  — центр окружности  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ . Покажем, что точка  $B_1$  лежит на  $O_1A_2$  (рис. 18). Из равенства треугольников  $B_1O_1O_2$  и  $A_1O_1O_2$  ( $O_1B_1 = O_1A_1$ ,  $O_2B_1 = O_2A_1$ ) следует, что  $\angle B_1O_1O_2 = \angle A_1O_1O_2$ . С другой стороны,  $\angle A_2O_1O_2 = \angle A_1O_1O_2$  как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги  $O_2A_1$  и  $O_2A_2$ . Итак,  $\angle B_1O_1O_2 = \angle A_2O_1O_2$ , следовательно,  $B_1$  лежит на  $O_1A_2$ .

Аналогично  $B_4$  лежит на  $O_1A_3$ ,  $B_2$  — на  $O_2A_3$ ,  $B_1$  — на  $O_2A_4$ . Найдем угол  $B_4B_1B_2$ . Имеем

$$\begin{aligned} \angle B_4B_1B_2 &= 2\pi - \angle B_4B_1O_1 - \angle O_1B_1O_2 - \angle O_2B_1B_2 = \\ &= 2\pi - 0,5(\pi - \angle B_1O_1B_4) - \angle O_1A_1O_2 - 0,5(\pi - \angle B_1O_2B_2) = \\ &= \pi + 0,5(\angle B_1O_1B_4 + \angle B_1O_2B_2) - \angle O_1A_1O_2. \end{aligned}$$

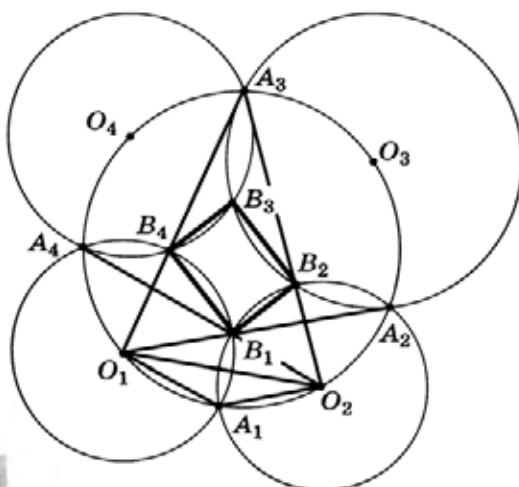


Рис. 18

Но  $\angle B_1O_1B_4 + \angle B_1O_2B_2 = \angle A_3O_1O_2 - \angle B_1O_1O_2 + \angle A_3O_2O_1 - \angle B_1O_2O_1 = \pi - \angle O_1A_3O_2 - (\pi - \angle O_1B_1O_2) = \angle O_1A_1O_2 - (\pi - \angle O_1A_1O_2) = 2\angle O_1A_1O_2 - \pi$ .

Отсюда  $\angle B_4B_1B_2 = \pi + 0,5(2\angle O_1A_1O_2 - \pi) - \angle O_1A_1O_2 = 0,5\pi$ . Аналогично доказывается, что и другие углы четырехугольника  $B_1B_2B_3B_4$  прямые.

20. Середина отрезка, соединяющего вершины этих парабол, является центром симметрии фигуры, состоящей из двух данных парабол. Поэтому рассматриваемый четырехугольник центрально симметричен и, следовательно, является параллелограммом.

21. Из условия следует, что в каждой строке и в каждом столбце стоит ровно по одной ладье. Если в каком-либо квадрате  $n \times n$  ладьи отсутствуют, то в оставшихся строках стоит ровно  $n - 1$  ладья и в оставшихся столбцах также ровно  $n - 1$  ладья. Следовательно, общее число ладей не превосходит  $2n - 2$ , что противоречит условию.

22. Через точку  $D$  проведем прямую, параллельную  $CE$ , до пересечения с прямой  $AB$  в точке  $N$ . Отрезок  $BF$  продолжим до пересечения с  $DN$  в точке  $P$  (рис. 19). Очевидно,  $EN = CD = 2BE$ . Но  $\frac{BK}{KP} = \frac{BE}{EN} = \frac{1}{2}$ , откуда  $KP = 2BK$ .

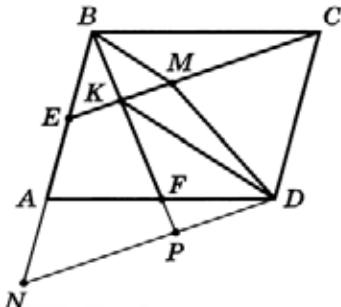


Рис. 19

Из подобия  $\triangle BKC$  и  $\triangle FPD$  получаем  $FP = \frac{1}{2}BK$ , откуда  $KF = \frac{3}{2}BK$  и  $\frac{KF}{KP} = \frac{3}{4}$ . Из подобия  $\triangle KDP$  и  $\triangle BMK$  получаем  $\frac{KD}{BM} = 2$ . Обозначим площадь  $\triangle BKM$  через  $S$ . Тогда  $S_{KPD} = 4S$ , а  $S_{KFD} = \frac{KF}{KP} \cdot S_{KPD} = 3S$ .

Но из условия  $BM \parallel KD$  следует, что высоты в треугольниках  $KMD$  и  $BKM$ , проведенные из вершин  $M$  и  $K$  соответственно, равны. Значит,  $\frac{S_{KMD}}{S_{BKM}} = \frac{KD}{BM} = 2$ , т. е.  $S_{KMD} = 2S$ ,

откуда  $S_{KBMD} = S_{BKM} + S_{KMD} = 3S$ . Итак,  $S_{KFD} = S_{KBMD}$ , что и требовалось доказать.

### 23. Ответ. Для четных $n$ .

Пусть имеется какое-либо разбиение чисел на группы. Тогда сумма чисел в каждой группе должна делиться на 4.

Действительно, если  $a = \frac{b+c+d}{3}$ , то  $a+b+c+d=4a$ . Следовательно, сумма всех чисел  $1+2+\dots+4n = \frac{4n(4n+1)}{2} =$

$= 2n(4n+1)$  также делится на 4. Это возможно только при четных  $n$ . Для любого  $n = 2k$  такое разбиение возможно, как показывает следующий пример. Положим  $A_i = \{8i+1, 8i+3, 8i+8, 8i+4\}$ ,  $8i+4$  есть среднее арифметическое остальных чисел,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ .  $B_i = \{8i+6, 8i+7, 8i+2, 8i+5\}$ ,  $8i+5$  есть среднее арифметическое остальных чисел,  $i = 0, 1, \dots, k-1$ . Тогда  $A_0, \dots, A_{k-1}, B_0, \dots, B_{k-1}$  есть искомое разбиение.

24. Разобьем эти 8 малых параллелепипедов на 4 пары параллелепипедов, содержащих противоположные вершины исходного параллелепипеда. Достаточно доказать, что в каждой паре хотя бы у одного параллелепипеда объем не превышает  $\frac{1}{8}$  объема исходного параллелепипеда. Пусть  $a, b, c$  и  $x, y, z$  — длины ребер параллелепипедов, содержащих противоположные вершины исходного. Тогда  $a+x, b+y, c+z$  — длины ребер исходного параллелепипеда.

Из неравенства о среднем арифметическом и среднем геометрическом следует, что

$$(a+x)(b+y)(c+z) \geq 2\sqrt{ax} \cdot 2\sqrt{by} \cdot 2\sqrt{cz} = 8\sqrt{abc}\sqrt{xyz}.$$

Или  $V^2 \geq 64V_1V_2$ , где  $V, V_1, V_2$  — соответственно объем большого параллелепипеда и объемы двух малых параллелепипедов. Значит, если  $V_1 > \frac{1}{8}V$ , то  $V_2 < \frac{1}{8}V$ .

## ▼ 8 класс

25. Ответ. Не существуют.

Действительно,

$$\overline{ab} \cdot \overline{cd} \leq \overline{ab} \cdot 99 < \overline{ab} \cdot 100 < \overline{ab00} + \overline{cd} = \overline{abcd}.$$

26. Ответ. 23.

Так как хотя бы один двоичник в классе есть, то меньше всего учеников будет в классе, где двоичник только один. Поскольку двоичников не более 4,5% от общего числа учеников, то всего в классе не менее  $1 : 0,045 = 22\frac{2}{9}$  человека, т. е. не менее 23 человек. Класс из 23 учеников, среди которых ровно один двоичник, удовлетворяет условию задачи.

27. Пусть  $ABC$  — данный треугольник,  $AB = AC$ ,  $\angle CAB = 20^\circ$ .

Отложим на стороне  $AB$  отрезок  $BE$ , равный отрезку  $BC$  (рис. 20). Тогда  $\angle CEB = \angle ECB = 50^\circ$ ,  $\angle ACE = 30^\circ$ , а так как в треугольнике против большего угла лежит большая сторона, то  $AE > CE$  и  $CE > CB$ . Следовательно,  $AB = AE + BE > 2CB$ .

28. Ответ. Нельзя.

Легко проверить, что при каждом ходе не меняется (остается инвариантной) сумма  $S = (a + b + c) - (A + B + C)$  (рис. 21). Для совокупности чисел на рисунке 2,  $a$  эта сумма равна

$$S_1 = (1 + 5 + 3) - (6 + 2 + 4) = -3,$$

а для совокупности чисел на рисунке 2,  $b$  сумма равна

$$S_2 = (6 + 4 + 2) - (5 + 1 + 3) = 3.$$

Так как  $S_1 \neq S_2$ , то ответ на вопрос задачи отрицательный.

29. Ответ. Выигрывает партнер начинаяющего.

Для того чтобы победить, он должен каждым своим ходом закрашивать клетки, симметричные клеткам, закрашенным предыдущим ходом начинаяющим (относительно центра доски).

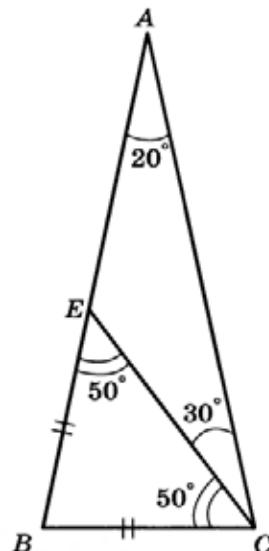


Рис. 20

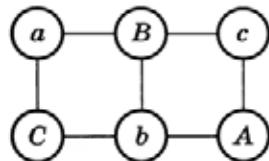


Рис. 21

**30.** Раскроем скобки и перенесем все слагаемые в левую часть. Получим, что исходное неравенство равносильно неравенству  $2x^4 + 2y^4 - x^3y - xy^3 - 2x^2y^2 \geq 0$ . Обозначим выражение, стоящее в левой части этого неравенства, через  $A$  и преобразуем его. Получим

$$\begin{aligned} A &= (x^4 + y^4 - 2x^2y^2) + (x^4 - x^3y) + (y^4 - xy^3) = \\ &= (x^2 - y^2)^2 + x^3(x - y) + y^3(y - x) = \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (x^3 - y^3)(x - y) = \\ &= (x^2 - y^2)^2 + (x - y)^2(x^2 + xy + y^2). \end{aligned}$$

Так как

$$(x^2 - y^2)^2 \geq 0, \quad (x - y)^2 \geq 0$$

и  $x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x + y)^2 + \frac{1}{2}y^2 \geq 0$ , то  $A \geq 0$ .

**31. Ответ.** 7 и 777.

Рассмотрим симметричное число  $\overline{x...x}$ , удовлетворяющее условию задачи. Это число имеет не более трех разрядов, так как иначе первая цифра суммы  $\overline{x...x} + 1995$  либо  $x$ , либо  $x + 1$ , либо  $x + 2$ , либо  $x - 8$ , либо  $x - 7$  и, следовательно, не может равняться последней цифре этой суммы, равной либо  $x + 5$ , либо  $x - 5$ .

Перебором убеждаемся, что среди однозначных чисел подходит только число 7.

Если число двузначное или трехзначное, то первая цифра суммы этого числа и числа 1995 равна 2, следовательно,  $x = 7$ . Число 77 в сумме с 1995 дает несимметричное число 2072, а  $\overline{7y7} + 1995 = \overline{27y2}$ , следовательно,  $y = 7$ .

**32.** Расположим данные треугольники так, чтобы отрезки  $AB$  и  $A_1B_1$  совпадали, а сами треугольники лежали в одной полуплоскости относительно прямой  $AB$  (рис. 22).

Предположим, что  $\triangle ABC \neq \triangle A_1B_1C_1$ . Тогда их вершины  $C$  и  $C_1$  различны. Если  $C_1 \notin CD$ , то  $CD \parallel C_1D_1$ , так как  $\angle ADC = \angle AD_1C_1$ . Следовательно,  $\angle DCB = \angle D_1E_1B$  и  $\angle AC_1D_1 = \angle AED$ . Обозначим эти углы через  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно. Так как  $CD$  и  $C_1D_1$  — биссектрисы углов  $C$  и  $C_1$ , то  $\angle ACD = \alpha$ , а  $\angle BC_1D_1 = \beta$ . Применяя к  $\triangle AEC$  и  $\triangle BE_1C_1$  теорему о внешнем угле треугольника, получаем  $\beta > \alpha$  и  $\alpha > \beta$ . Эти неравенства противоречат друг другу, следовательно, прямые  $CD$  и  $C_1D_1$  совпадают. Так как  $CD = C_1D_1$ , то точки  $C$  и  $C_1$  также совпадают. Следовательно,  $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ , что и требовалось доказать.

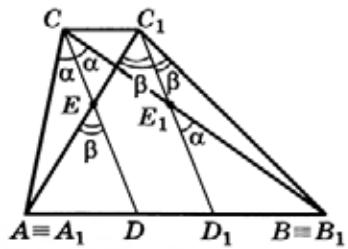


Рис. 22

## 9 класс

33. Сумма попарных произведений трех последовательных натуральных чисел  $n - 1$ ,  $n$  и  $n + 1$  имеет вид  $n(n - 1) + n(n + 1) + (n - 1)(n + 1) = 3n^2 - 1$ , т. е. не делится на 3.

34. Пусть  $AP : PB = x : y$  (рис. 23).

Тогда по теореме о пропорциональных отрезках  $AR : RC = x : y$ ,  $BQ : CQ = y : x$ ,  $AM : MQ = x : y$ ,  $BN : NR = y : x$ . Следовательно,  $S_{AMP} : S_{ABQ} = (AP \cdot AM) : (AB \cdot AQ) = (AP : AB)(AM : AQ) = x^2 : (x + y)^2$ .

Аналогично  $S_{BNP} : S_{ABR} = y^2 : (x + y)^2$ .

Заметив, что  $S_{ABQ} : S_{ABC} = y : (x + y)$  и  $S_{ABR} : S_{ABC} = x : (x + y)$ , получаем  $S_{AMP} : S_{ABC} = x^2y : (x + y)^3$

и  $S_{BNP} : S_{ABC} = xy^2 : (x + y)^3$ . Следо-

вательно,  $(S_{AMP} + S_{BNP}) : S_{ABC} = (x^2y + xy^2) : (x + y)^3 = xy : (x + y)^2 = (CQ : CB)(CR : CA) = S_{CQR} : S_{ABC}$ , откуда и вытекает доказываемое равенство.

35. Допустим противное. Тогда в любых двух строках разное количество клеток красного цвета, и всего их в таблице не менее  $0 + 1 + 2 + \dots + 13 + 14 = 105$ . Аналогично для синих и зеленых клеток. Тогда всего в таблице должно быть не менее  $3 \cdot 105 = 315$  клеток, в то время как всего в ней  $15 \cdot 15 = 225$  клеток. Значит, найдутся по крайней мере две строки с одинаковым количеством клеток какого-то цвета.

36. Ответ. Нет.

Допустим противное. Пусть меньший катет треугольника равен 1, тогда больший катет равен  $R = \sqrt{3}$ , гипотенуза равна 2, а площадь треугольника  $S = \frac{R}{2}$ . На стороне квадрата  $a$  укладывается целое число катетов и гипотенуз, поэтому  $a = mR + n$ , где  $m$  и  $n$  — целые. Тогда площадь квадрата  $a^2 = 3m^2 + n^2 + 2mnR$ . С другой стороны, площадь квадрата равна  $k \frac{R}{2}$ , где  $k$  — число треугольников. Имеем

$3m^2 + n^2 + 2mnR = k \frac{R}{2}$ , или  $6m^2 + 2n^2 = R(k - 4mn)$ . Так как  $6m^2 + 2n^2 > 0$ , то  $4mn - k \neq 0$ . Значит,  $R = \sqrt{3} = \frac{6m^2 + 2n^2}{k - 4mn}$ , но  $\frac{6m^2 + 2n^2}{k - 4mn}$  — рациональное число. Получили противоречие.

37. Ответ.  $x = 0$ ,  $x = 1$ .

Обозначим  $x^{19} = y$ . Тогда уравнение принимает вид  $y + y^5 = 2y^6$ , откуда либо  $y = 0$ , либо  $1 + y^4 = 2y^5$ . Очевидно,  $y = 1$  является решением этого уравнения. Других реше-

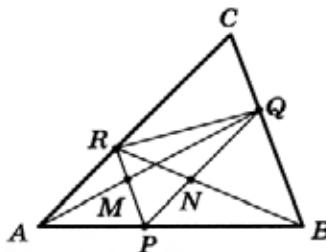


Рис. 23

ний нет, так как если  $y > 1$ , то  $1 + y^4 < y^5 + y^5 = 2y^5$ , а если  $y < 1$ , то  $1 + y^4 > y^5 + y^5 = 2y^5$ . Отсюда следует, что либо  $x = 0$ , либо  $x = 1$ .

38. Четырехугольник  $ACBM$  вписан в окружность, следовательно,  $\angle AMK = 180^\circ - \angle AMB = \angle ACB = 60^\circ$  (рис. 24).

По свойству внешнего угла треугольника  $\angle MAC = \angle CKB + \angle AMK$ . С другой стороны,  $\angle MAC = \angle MAB + \angle BAC$ . Но  $\angle BAC = \angle AMK = 60^\circ$ , следовательно,  $\angle CKB = \angle MAB$ . Кроме того,  $\angle KAB = \angle ABN = 120^\circ$ . Поэтому  $\triangle ABK \sim \triangle BNA$ , и, значит,  $AK : AB = AB : BN$ , т. е.  $AK \cdot BN = AB^2 = \text{const}$ .

39. Ответ. 8.

Если данное число  $N = \overbrace{55\dots5}^{1995}$  есть сумма чисел  $a_1, a_2,$

$\dots, a_n$ , в записи которых участвуют только цифры 3 и 0, то число  $M = \frac{N}{3} = \underbrace{185185\dots185}_{1995}$  является суммой чисел

$b_1 = \frac{a_1}{3}, \dots, b_n = \frac{a_n}{3}$ , в записи которых участвуют только цифры 1 и 0. Число  $M$  содержит цифру 8, поэтому  $n \geq 8$ . Очевидно, число  $M$  можно представить в виде суммы восьми чисел, составленных из единиц и нулей, взяв одно число, составленное из 1995 единиц, 4 числа вида  $\underbrace{11011\dots011}_{1994}$  и 3 числа вида  $\underbrace{10010\dots010}_{1994}$ .

40. Ответ. Нет.

Допустим, что такое возможно. Отметим точки  $A, B, C$  и  $D$ , как показано на рисунке 25.

Ясно, что любой контур либо содержит ровно два из отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $BD$ , либо не содержит их вообще. Обозначим  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$  и  $S_{BD}$  количества контуров, проходящих через  $AB$ ,  $BC$  и  $BD$  соответственно.

Рассмотрим их сумму ( $S$ ). Если контур содержит два из указанных отрезков, то он учитывается в сумме дважды, в противном случае контур вообще не учитывается. Следовательно,  $S$  четно. С другой стороны, согласно предположению,  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$  и  $S_{BD}$  — нечетные числа, т. е.  $S$  нечетно. Получили противоречие.

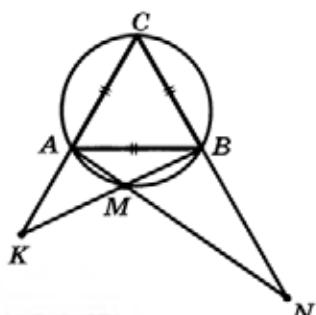


Рис. 24

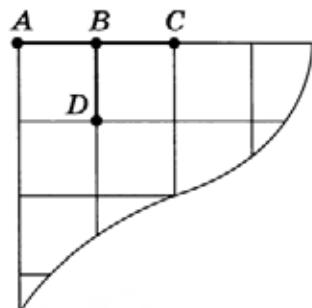


Рис. 25

## ▼ 10 класс

41. Ответ.  $x = 95$ ,  $y = 0$ ,  $z = 94$  или  $x = 31$ ,  $y = 2$ ,  $z = 32$ . Вычтя из второго уравнения первое, получим

$$(x - z)(1 - y) = 1.$$

Так как  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — целые числа, то возможны два случая:

1)  $x - z = 1$ ,  $1 - y = 1$ , т. е.  $y = 0$ . Подставив в систему, получим  $z = 94$ ,  $x = 95$ .

2)  $x - z = -1$ ,  $1 - y = -1$ , т. е.  $z = x + 1$ ,  $y = 2$ . Подставим  $y$  и  $z$  в первое уравнение:  $2x + x + 1 = 94$ ,  $x = 31$ . Отсюда  $z = 32$ .

42. Пусть  $M$  — точка пересечения биссектрис углов  $CAD$  и  $CBD$  (рис. 26).

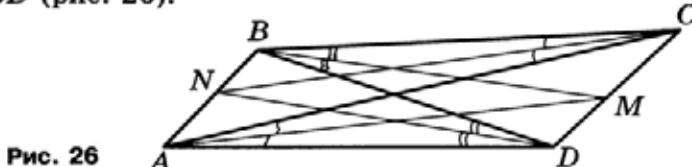


Рис. 26

По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника  $CM : MD = AC : AD = BC : BD$ , откуда  $AC : BC = AD : BD$ . Согласно этой же теореме, и биссектриса угла  $ACB$ , и биссектриса угла  $ADB$  пересекают  $AB$  в точке  $N$ , для которой  $AN : NB = AC : BC = AD : BD$ .

43. Ответ. Нельзя.

Допустим, что требуемый результат удалось получить. Заметим, что обе операции увеличивают число  $d$  на единицу. Следовательно, чтобы получить из единицы число 8, нужно произвести ровно 7 операций. С другой стороны, только первая операция изменяет число  $a$ , поэтому, чтобы из 3 получить число 6, необходимо проделать трижды первую операцию и четырежды вторую. При применении второй операции четыре раза число  $b$  уменьшается на 4. Поскольку после применения любой операции  $d$  увеличивается на 1, то, применив первую операцию три раза, мы увеличим  $b$  по меньшей мере на  $1 + 2 + 3 = 6$ , т. е. конечное значение  $b$  превосходит начальное по меньшей мере на  $6 - 4 = 2$ , что противоречит условию.

44. Пусть  $N$  — общее число женихов и невест в районе и  $N_i$  — общее число женихов и невест в  $i$ -й деревне. Тогда для всех  $i$ :  $N_i \leq \frac{1}{2}N$ , т. е.  $\frac{1}{2}N - N_i \geq 0$ . Если в некоторой деревне проживает ровно половина общего числа женихов и невест района (т. е. для некоторого  $i$   $N_i = \frac{1}{2}N$ ), то, по-

скольку общее число женихов района равно общему числу невест районе, для каждого жениха данной деревни найдется невеста из другой деревни, а каждую невесту данной деревни можно выдать замуж в другую деревню. Значит, сыграют  $\frac{1}{2}N$  свадеб, т. е. все женихи и невесты поженятся.

Пусть для всех деревень  $\frac{1}{2}N - N_i > 0$ . Выберем произвольно жениха и невесту из разных деревень, поженим их и отправим в свадебное путешествие за пределы района. Тогда для двух деревень, из которых была выбрана эта пара, разность  $\frac{1}{2}N - N_i$  не изменится, а для остальных деревень она уменьшится на единицу. Если для всех деревень указанная разность осталась положительной, то отправим в свадебное путешествие еще одну пару, выбранную аналогичным образом. И так до тех пор, пока хотя бы для одной из деревень разность  $\frac{1}{2}N - N_i$  не станет равной нулю. А этот случай рассмотрен выше.

**45. Ответ.**  $n = 80$ .

Пусть  $A = \underbrace{1\dots 21}_{n} \dots 21$  и  $B = \underbrace{9\dots 9}_{9}$ . Поскольку  $A = \underbrace{1\dots 10}_{n+1} + \underbrace{1\dots 1}_{n+1} = 11 \cdot \underbrace{1\dots 1}_{n+1}$ ,  $B = 9 \cdot \underbrace{1\dots 1}_{9}$ , а число  $b = \underbrace{1\dots 1}_{9}$  не делится на 11, то, для того чтобы  $A$  делилось на  $B$ , необходимо и достаточно, чтобы число  $a = \underbrace{1\dots 1}_{n+1}$  делилось на  $B = 9b$ , т. е. что-

бы  $a$  делилось на  $b$  и  $c = a : b$  делилось на 9. Сумма цифр числа  $a$  равна  $n+1$ , поэтому  $n+1 = 9k$ , и, следовательно,

$$c = \underbrace{1\dots 1}_{9} \dots \underbrace{1\dots 1}_{9} : \underbrace{1\dots 1}_{9} = \underbrace{10\dots 01\dots 10\dots 01}_{k \text{ единиц}}.$$

Сумма цифр числа  $c$  равна  $k$ , поэтому  $c$  делится на 9, если  $k = 9m$ ,  $k \geq 9$ , т. е.  $n = 9k - 1 \geq 80$ . При этом, как мы показали, если  $n = 80$ , то число  $A$  делится на число  $B$ .

**46. Ответ.**  $-1 < x < 1$ ,  $\sqrt[3]{2} \leq x < \sqrt{2}$ ,  $\sqrt[3]{3} \leq x < \sqrt[3]{4}$ .

Если  $-1 < x < 0$ , то  $-1 < x^3 < 0$ ,  $0 < x^2 < 1$ , и, следовательно,  $[x] = [x^3] = -1$ ,  $[x^2] = 0$ . Если  $0 \leq x < 1$ , то  $[x] = [x^2] = [x^3] = 0$ . Если  $|x| \geq 1$ , то  $[x^2] \geq 1$ . Тогда  $[x^3] > [x]$ , и, значит,  $x^3 > x$ . Отсюда  $x > 1$  ( $|x| \geq 1$ ), но тогда  $[x^3] = [x \cdot x^2] \geq [[x] \cdot [x^2]] = [x] \cdot [x^2]$ . Теперь из уравнения следует, что  $[x] + [x^2] \geq [x] \cdot [x^2]$  или  $([x^2] - 1)([x] - 1) \leq 1$ . Таким образом,  $[x^2] \leq 2$ ,

т. е.  $[x^2] = 1$  или  $[x^2] = 2$ . Если  $[x^2] = 1$ , то  $1 \leq x < \sqrt{2}$ . Тогда  $[x] = 1$ ,  $[x^3] = [x] + [x^2] = 2$ ,  $\sqrt[3]{2} \leq x < \sqrt[3]{3}$ , т. е.  $\sqrt[3]{2} \leq x < \sqrt{2}$ . Если  $[x^2] = 2$ , то  $\sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}$ . Тогда  $[x] = 1$ ,  $[x^3] = 3$ ,  $\sqrt[3]{3} \leq x < \sqrt[3]{4}$ .

47. Из условия задачи следует, что  $BA$  и  $CA$  — биссектрисы внешних углов  $B$  и  $C$  треугольника  $BCD$ , поэтому  $DA$  — биссектриса внутреннего угла  $D$  этого треугольника (рис. 27).

Пусть перпендикуляр к прямой  $AX$ , восставленный в точке  $B$ , пересекает отрезок  $AD$  в точке  $J$ . Тогда  $BJ$  — биссектриса внутреннего угла  $B$  треугольника  $BCD$ , так как  $\angle JBC = 90^\circ - \angle ABC$ , а  $\angle JBD = 90^\circ - \angle XBD$ , но  $\angle ABC = \angle XBD$ .

Следовательно,  $J$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $BCD$ , откуда вытекает, что  $CJ \perp AY$ , так как  $CJ$  — биссектриса угла  $C$ , а  $\angle ACB = \angle YCD$ . Четырехугольник  $ABJC$  можно вписать в окружность ( $\angle ABJ = \angle ACJ = 90^\circ$ ), причем ее центр является серединой гипотенузы  $AJ$  прямоугольных треугольников  $ABJ$  и  $ACJ$ . Доказываемое утверждение теперь следует из того, что эта окружность является описанной и для треугольника  $ABC$ .

48. См. решение задачи 40.

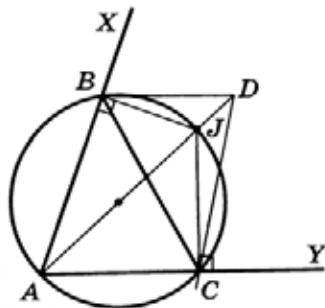


Рис. 27

## 11 класс

49. Домножим обе части неравенства на 2 и преобразуем его следующим образом:

$$\begin{aligned} 2a^2 + 2b^2 + 2(ab + bc + ca) &< 0, \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) + a^2 + b^2 - c^2 &< 0, \\ (a + b + c)^2 + a^2 + b^2 - c^2 < 0, \quad a^2 + b^2 - c^2 &< -(a + b + c)^2 \leq 0. \end{aligned}$$

Отсюда  $a^2 + b^2 - c^2 < 0$ , или  $a^2 + b^2 < c^2$ .

50. Ответ. Выигрывает партнер начинающего.

Разобьем клетки на пары так, как показано на рисунке 28 (клеткам, входящим в одну пару, соответствует одна и та же буква). Партнер начинающего выиграет, если будет каждым ходом закрашивать клетку с той же буквой, которую имеет клетка, закрашенная перед этим начинающим.

$a$	$b$	$c$	$d$
$e$	$f$	$g$	$h$
$a$	$b$	$c$	$d$
$e$	$f$	$g$	$h$

Рис. 28

**51. Ответ.**  $45^\circ$ .

Пусть  $B'$  — точка, симметричная точке  $B$  относительно биссектрисы  $AE$ . Тогда  $B'$  лежит на стороне  $AC$  между точками  $C$  и  $H$ , а  $\angle BEB' = 2\angle AEB = 90^\circ$  (рис. 29). В четырехугольнике  $BEB'H$   $\angle BEB' + \angle BHB' = 180^\circ$ , следовательно, около него можно описать окружность. Поэтому  $\angle BHE = \angle EHB'$  (как вписанные, опирающиеся на равные дуги  $BE$  и  $B'E$ ), значит, каждый из них равен  $45^\circ$ . Итак,  $\angle EHC = 45^\circ$ .

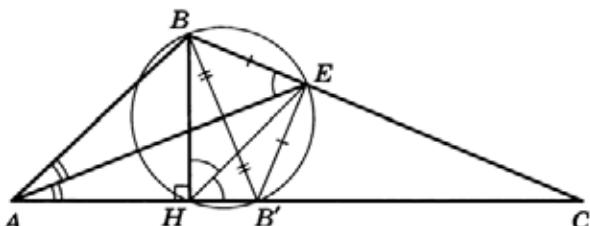


Рис. 29

**52. См. решение задачи 44.**

**53. См. решение задачи 31.**

**54.** Из равенств  $x = \cos(y+z)$  и  $y = \cos(x+z)$  по формуле разности косинусов имеем  $x - y = 2 \sin \frac{x+y+2z}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$ .

Предположим, что  $x \neq y$ , тогда  $|x - y| = 2 \left| \sin \frac{x+y+2z}{2} \right| \times \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| \leqslant 2 \left| \sin \frac{x-y}{2} \right| < |x - y|$  (мы воспользовались тем, что  $|\sin \alpha| < |\alpha|$  при  $\alpha \neq 0$ ). Полученное противоречие показывает, что  $x = y$ . Аналогично доказывается, что  $y = z$ .

**55.** Если основания перпендикуляров, опущенных из некоторой точки на прямые  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$ , лежат на отрезках  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  соответственно, то эта точка расположена одновременно внутри трех полос, ограниченных прямыми  $l_1$  и  $l_2$ ,  $m_1$  и  $m_2$ ,  $n_1$  и  $n_2$  (рис. 30). Так как треугольник  $ABC$  остроугольный, то пересечением полос является выпуклый шестиугольник  $AC_1BA_1CB_1$ .

Рассмотрим четырехугольник  $ABA_1C$ . Поскольку  $\angle ABA_1 + \angle ACA_1 = 180^\circ$ , то точки  $A$ ,  $B$ ,  $A_1$  и  $C$  лежат на одной окружности, причем  $AA_1$  — ее диаметр. Повторяя аналогичные рассуждения для четырехугольников  $AC_1BC$  и  $ABC_1$ , получаем, что шестиугольник  $AC_1BA_1CB_1$  вписан в окружность, описанную около треугольника  $ABC$ , а треугольник  $A_1B_1C_1$  симметричен треугольнику  $ABC$  относительно центра  $O$ . Отсюда  $S_{ABC} = S_{A_1B_1C_1}$ .

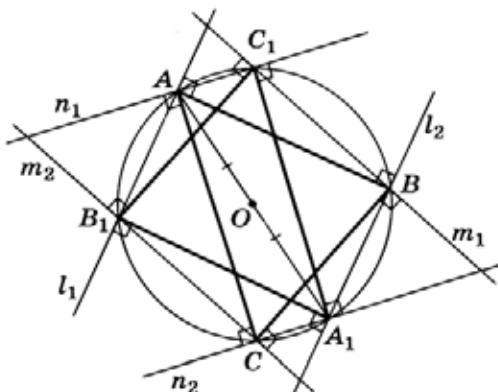
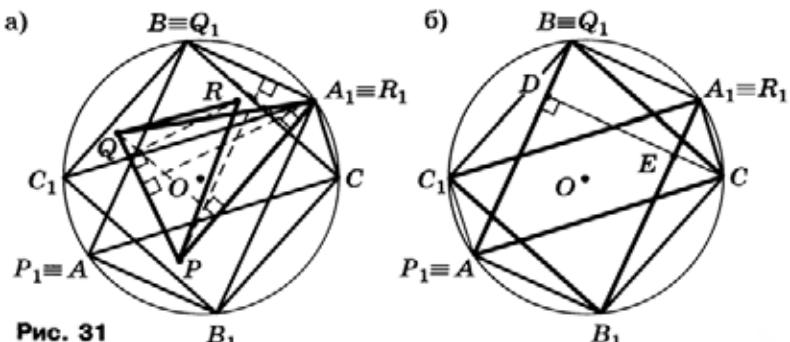


Рис. 30

Рассмотрим теперь треугольник  $PQR$ . Он принадлежит шестиугольнику. Допустим, что хотя бы одна из вершин треугольника  $PQR$  (например,  $R$ ) не является одновременно вершиной шестиугольника  $AC_1BA_1CB_1$ . Среди вершин шестиугольника найдется по крайней мере одна, расположенная дальше от прямой  $PQ$ , чем точка  $R$ . Обозначим эту вершину  $R_1$ . Тогда  $S_{PQR_1} > S_{PQR}$ . Аналогичным образом последовательно заменим (если это требуется) в треугольнике  $PQR_1$  вершины  $Q$  и  $P$  на вершины шестиугольника (рис. 31, а).

Получили новый треугольник  $P_1Q_1R_1$ , площадь которого не меньше площади треугольника  $PQR$ . Треугольник  $P_1Q_1R_1$  может либо совпадать с одним из треугольников  $ABC$  или  $A_1B_1C_1$  (тогда  $S_{P_1Q_1R_1} = S_{ABC}$ ), либо иметь одну общую сторону с одним из этих треугольников. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что  $\triangle P_1Q_1R_1 = \triangle ABA_1$  (рис. 31, б) или  $\triangle P_1Q_1R_1 = \triangle ABC_1$ . Высота  $CD$  треугольника  $ABC$  больше отрезка  $A_1B$  ( $CD = CE + ED = CE + A_1B$ ), отсюда  $S_{ABC} > S_{ABA_1} = S_{P_1Q_1R_1} \geq S_{PQR}$ . Во вто-



а)



б)

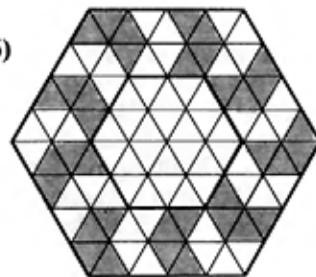


Рис. 32

ром случае аналогично из  $CD > CE$  получаем  $S_{ABC} > S_{A_1B_1C} = S_{ABC_1} = S_{P_1Q_1R_1} \geq S_{PQR}$ . Утверждение доказано.

**56. Ответ.** Можно, если  $n$  четно, и нельзя, если  $n$  нечетно.

Площадь  $S$  шестиугольника со стороной  $n$  равна  $6 \cdot \frac{1}{2} \times n \cdot n \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} \sqrt{3}n^2$ , а площадь  $s$  фигурки равна  $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \times 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ . Так как  $\frac{S}{s} = \frac{3}{2}n^2$  — целое число, то при нечетном  $n$  разрезать шестиугольник требуемым образом невозможно. При любом четном  $n$  следует, начиная, например, с центрального шестиугольника со стороной 2 (рис. 32, а), последовательно разрезать каждую из окаймляющих полосок шириной в 2 треугольника (рис. 32, б).

## 1995–1996



### 8 класс

**57. Ответ.** 1996.

Первая цифра числа может быть любой из четырех (2, 4, 6 или 8), вторая и третья — любой из десяти, а четвертая, если отказаться от условия «не делящихся на 1000», — любой из пяти (0, 2, 4, 6 или 8). Следовательно, четырехзначных чисел, в записи которых первая и последняя цифры четны, всего имеется  $4 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 2000$ , а так как среди них четыре числа (2000, 4000, 6000 и 8000) делятся на 1000, то чисел, удовлетворяющих условию задачи, будет  $2000 - 4 = 1996$ .

**58. Ответ.**

×	2	2	3	1	
			2	6	
	1	3	3	8	6
	+	4	4	6	2
		5	8	0	0
					6

Перепишем пример в следующем виде:

$$\begin{array}{r}
 \times \quad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad 1 \\
 \hline
 + \quad x_5 \quad x_6 \quad 3 \quad x_7 \quad x_8 \\
 \hline
 5 \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}
 \end{array}$$

Очевидно, что  $x_4 = x_8 = x_{15}$  и  $x_{11} = 2$ . Кроме того, ясно, что  $x_1 = 1$  или  $x_1 = 2$ , так как иначе  $2x_1 > 5$ , что противоречит условию. Обозначим  $A = \overline{x_1 x_2 x_3 1}$  и  $B = \overline{2x_4}$ .

а) Пусть  $x_1 = 1$  ( $A = \overline{1x_2 x_3 1}$ ). Тогда  $x_5 = 1$ ,  $x_9 = 3$  и  $3402 \leq 2A \leq 3492$ . Отсюда  $1701 \leq \overline{1x_2 x_3 1} \leq 1746$ . Проверив три возможных варианта ( $A = 1701, B = 27$ ;  $A = 1711, B = 28$ ;  $A = 1721, B = 29$ ), убеждаемся, что ни один из них не подходит.

б) Пусть  $x_1 = 2$ . Тогда  $x_9 = 4$ ,  $x_5 = 1$  и  $x_2 = 2$ . При этом  $x_6 \leq 5$ , так как иначе  $x_6 + 4 > 9$ , что противоречит условию. Но тогда  $5 \leq x_4 \leq 7$ . Проверяя три возможных случая ( $A = 2221, B = 25$ ;  $A = 2231, B = 26$ ;  $A = 2241, B = 27$ ), во втором получаем необходимое соотношение.

59. Первые два разреза разбивают торт на 2 пары симметричных частей —  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $D$  (рис. 33, а). Третий разрез оставит нетронутой одну из этих частей, а три другие может поделить. Если после третьего разреза получится 5 или 6 частей, то, естественно, вес одной из них будет не менее  $\frac{1}{6}$  кг (так как общий вес всех частей равен 1 кг).

Рассмотрим случай, когда после третьего разреза торт оказался поделенным на 7 частей (рис. 33, б).

Общий вес 6 кусков:  $A_1, A_2, B = B_1 \cup B_2, C_1, C_2$  и  $D$  — равен 1 кг. Следовательно, так как вес  $B$  и  $D$  одинаков, то хотя бы один из кусков:  $A_1, A_2, C_1, C_2$  или  $D$  — весит не менее  $\frac{1}{6}$  кг. А это как раз те части, которые получились после третьего разреза.

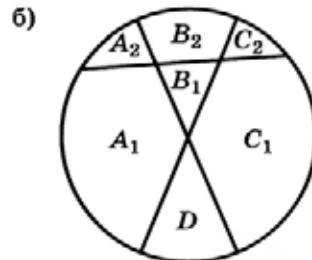
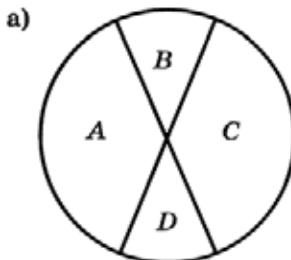


Рис. 33



или



Рис. 34

**60. Ответ.** При правильной игре выигрывает второй.

Своим первым ходом второй игрок закрашивает три клетки, отступив на три клетки от одного из краев полосы (рис. 34) и объявив три незакрашенные крайние клетки «заповедником».

В дальнейшем второй игрок может делать любые возможные ходы, не вторгаясь в «заповедник». Если таких ходов у него больше не осталось, то он закрашивает клетки «заповедника». Разумеется, у первого игрока в такой ситуации ответного хода нет.

**61. Ответ.** 838 прямых.

Временно исключим из рассмотрения 12 прямых, проходящих через ребра куба. Тогда:

а) через каждую из вершин куба (а их 8) проходит  $9 \cdot 3 + 4 = 31$  прямая (рис. 35, а);

а)

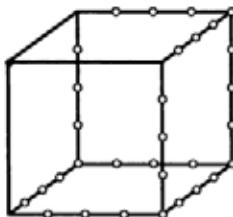
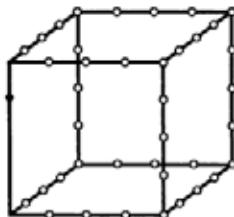


Рис. 35

б)



б) через каждую «невершинную» точку (а их  $12 \cdot 3 = 36$ ) проходит  $11 \cdot 3 + 6 = 39$  прямых (рис. 35, б).

Так как каждая из упомянутых прямых была учтена дважды, то общее число прямых равно

$$\frac{1}{2}(8 \cdot 31 + 36 \cdot 39) + 12 = 838.$$

**62.** На отрезке  $CE$  отметим точку  $F$ , такую, что  $FE = BC$  (рис. 36). Треугольники  $BDC$  и  $EDF$  равны по первому признаку равенства треугольников. Отсюда  $CD = DF$ . Далее, поскольку

$$\angle DFC = \angle DCF = \angle ACB = 60^\circ,$$

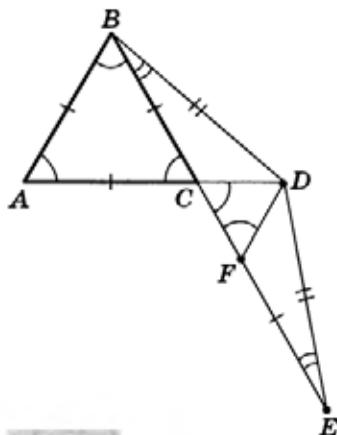


Рис. 36

треугольник  $CDF$  равносторонний. Поэтому  $CF = CD$  и  $AD = AC + CD = BC + CF = FE + CF = CE$ .

Что и требовалось доказать.

**63. Ответ.** Нельзя.

Допустим, что это возможно. Пусть сумма чисел, стоящих в концах отрезков, равна  $A$ , сумма чисел, расположенных в серединах отрезков, равна  $B$ , а сумма трех чисел вдоль каждого отрезка равна  $S$ . Ясно, что  $A + B = 0 + 1 + \dots + 9 = 45$ . Каждая концевая точка принадлежит ровно трем отрезкам, а все середины различны. Поэтому, сложив вместе суммы вдоль всех шести отрезков, получим  $3A + B = 6S$ . Отсюда  $2A = 6S - (A + B) = 6S - 45$ . Но это невозможно, так как  $2A$  — четное число, а  $6S - 45$  — нечетное. Полученное противоречие доказывает, что требуемая расстановка невозможна.

**64. Ответ.** Половина поверхности.

Рассмотрим вместо бревен их поперечные срезы (рис. 37, а).

Пусть  $O$  — центр катящегося бревна в исходном положении,  $O'$  — его центр в тот момент, когда бревно лежит в следующую ложбину,  $O_1, O_2, O_3$  — центры первых трех неподвижных бревен. При перекатывании подвижного бревна из первой ложбины во вторую на нем испачкается вдегте дуга  $\widehat{BA}' = AB$  (так как качение происходит без проскальзывания), где  $A$  и  $B$  — точки касания бревна с центром  $O_2$  с бревнами с центрами  $O$  и  $O'$  соответственно. Так как все бревна одинаковые и равносторонние треугольники  $O_1OO_2, OO'O_2, O_2O'O_3, \dots$  равны, то  $\angle OO_2O' = 60^\circ$ . Поэтому  $\widehat{BA}' = \widehat{AB} = 60^\circ$ . Следующая испачканная дуга на подвижном бревне начнется с точки  $C$ , отстоящей от точки  $B$  на  $60^\circ$  (так как  $\angle BO'C = \angle O_2O'O_3 = 60^\circ$ ), и т. д.

Таким образом, испачканные дуги меры  $60^\circ$  чередуются с чистыми дугами той же меры (рис. 37, б).

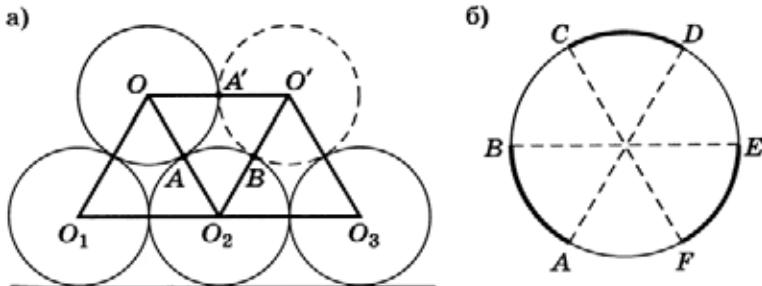


Рис. 37

65. В трех контрольных работах оценки могли, например, распределиться следующим образом:

	$K_1$	$K_2$	$K_3$
$A$	5	4	3
$B$	4	3	5
$C$	3	5	4

66. Пусть в день двенадцатилетия Андрея Василию исполняется  $x$  лет. Тогда Сергею в этот же день исполняется  $12 - x$  лет. Составим следующую таблицу:

	$A$	$B$	$C$
день 12-летия Андрея	12	$x$	$12 - x$
день 12-летия Василия	$24 - x$	12	$24 - 2x$
день 12-летия Сергея	$12 + x$	$2x$	12

Числа второй строки получаются из чисел первой добавлением к ним слагаемого  $12 - x$ , а числа третьей строки — добавлением к числам первой слагаемого  $x$ . Когда Василию будет 12 лет, то Андрею и Сергею в сумме будет  $48 - 3x$  лет, а следовательно,  $3x$  делится на 12. Но в день двенадцатилетия Сергея Андрею и Василию в сумме исполнится  $12 + 3x$ . Это число также делится на 12.

67. Ответ. 4 прожектора.

Проведем две параллельные прямые, пересекающиеся со сторонами квадрата (рис. 38, а).

На отрезках  $AB$  и  $CD$  как на диаметрах построим две окружности. Возьмем на окружности с диаметром  $AB$  точку  $L$ , лежащую внутри квадрата и расположенную с отрез-

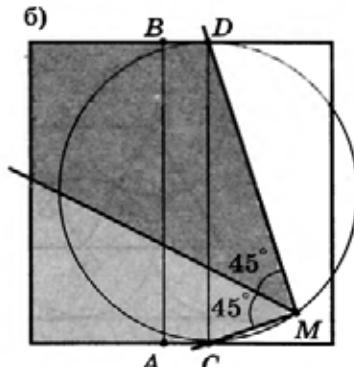
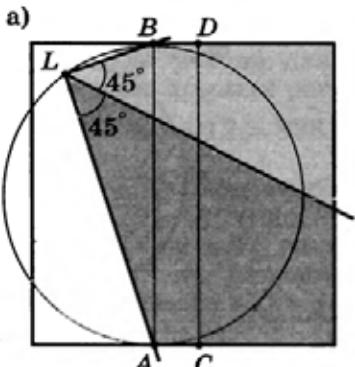


Рис. 38

ком  $CD$  по разные стороны от прямой  $AB$ . Поставив в эту точку 2 прожектора и повернув их соответствующим образом, мы осветим ту часть квадрата, что попадает в угол  $ALB$ . Аналогично, поставив 2 других прожектора в точку  $M$  на второй окружности, мы осветим и оставшуюся часть квадрата (рис. 38, б).

**Замечание.** Если считать, что два прожектора в одну точку ставить нельзя, то их можно расположить, например, на биссектрисе угла  $ALB$  (рис. 39, а). При такой расстановке два прожектора вместе освещают даже большую площадь.

Меньшим количеством прожекторов обойтись нельзя. В этом случае по крайней мере один из них должен освещать вершины двух углов квадрата, а значит, и одну из сторон целиком. Следовательно, прожектор располагается на окружности, описанной около квадрата, или вне ее, что противоречит условию задачи (рис. 39, б).

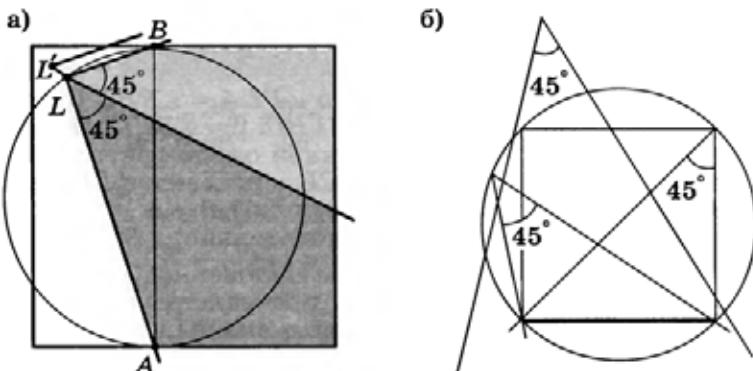


Рис. 39

### 68. Ответ. Второй.

В одном из углов доски второй играющий своим первым ходом закрашивает три клетки в прямоугольнике  $2 \times 3$  (рис. 40), а три оставшиеся клетки из этого прямоугольника объявляет «заповедником». В дальнейшем второй делает любые возможные ходы, не затрагивающие клетки «заповедника». Если такой ход становится невозможным, то закрашиваются клетки «заповедника». Легко понять, что ответного хода у первого играющего нет.

### 69. Ответ. $-1, -1$ и $1$ или $0, 0$ и $x$ , где $x$ — любое действительное число.

Обозначим первоначально написанные на доске числа через  $a, b, c$ .

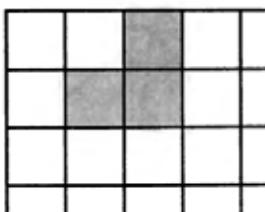


Рис. 40

По условию наборы  $\{a, b, c\}$  и  $\{abc, a + b + c, ab + bc + ac\}$  совпадают. Без ограничения общности можно считать, что  $a = abc$ , т. е. либо  $a = 0$ , либо  $a \neq 0$  и  $bc = 1$ . В первом случае совпадают наборы  $\{b, c\}$  и  $\{b + c, bc\}$ . Вновь без ограничения общности можно считать, что  $b = b + c$ , т. е.  $c = 0$ . Следовательно, в рассматриваемом случае первоначальный набор чисел имеет вид  $\{0, b, 0\}$ . Ясно, что при любом  $b \in \mathbb{R}$  указанное множество удовлетворяет условию задачи.

Во втором случае совпадают наборы  $\left\{a, \frac{1}{c}, c\right\}$  и  $\left\{a, a + \frac{1}{c} + c, \frac{a}{c} + 1 + ac\right\}$ . Поэтому должны совпадать наборы  $\left\{\frac{1}{c}, c\right\}$  и  $\left\{a + \frac{1}{c} + c, \frac{a}{c} + 1 + ac\right\}$ . Следовательно, либо  $\frac{1}{c} = a + \frac{1}{c} + c$ ,  $c = \frac{a}{c} + 1 + ac$ , либо  $\frac{1}{c} = \frac{a}{c} + 1 + ac$ ,  $c = a + \frac{1}{c} + c$ . В обоих случаях получаем, что  $a = 1$ ,  $c = -1$ , и, значит,  $b = \frac{1}{c} = -1$ .

**70.** Достаточно доказать, что  $\angle PLA = \angle PBL$  (рис. 41).

Обозначим  $\alpha = \angle ABL = \angle LBC$ ,  $\beta = \angle BCL$ . Поскольку  $PL$  касается окружности, описанной около треугольника  $BLC$ , заключаем, что  $\angle PLB = \angle BCL = \beta$ . Угол  $ALB$  — внешний для треугольника  $BLC$ , поэтому  $\angle ALB = \alpha + \beta$ . С другой стороны,  $\angle ALB = \angle PLA + \beta$ , следовательно,  $\angle PLA = \alpha = \angle PBL$ .

**71.** Ответ. Один, два или три человека.

Легко понять, что среди претендентов не более одного рыцаря. Если все претенденты лжецы, то  $n = 1$ , так как в противном случае предпоследний лжец говорит правду. Если среди претендентов есть рыцарь, то он является  $(n - 1)$ -м претендентом. Докажем, что  $n \leq 3$ . Предположим, что  $n > 3$ . Тогда  $(n - 3)$ -й претендент — лжец. С дру-

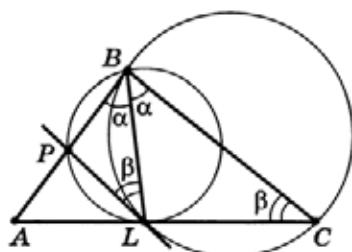


Рис. 41

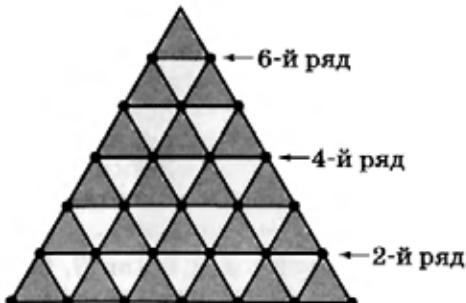


Рис. 42

той стороны, кроме него, имеется  $n - 2$  лжецов и один рыцарь, так что  $(n - 3)$ -й претендент сказал правду. Получили противоречие. Остается заметить, что случаи  $n = 2$  и  $n = 3$  реализуются: рыцарь, лжец ( $n = 2$ ) и лжец, рыцарь, лжец ( $n = 3$ ).

### 72. Ответ. 42.

Заметим, что в любом треугольнике, образованном тремя коридорами, может быть освещено 0 или 2 коридора, если первоначально все образующие треугольник коридоры были затемнены. Разобьем весь объект на 21 треугольник, образованный коридорами (на рисунке 42 эти треугольники закрашены).

Поскольку в каждом таком треугольнике не более двух освещенных коридоров, всего на объекте имеется не более 42 освещенных коридоров. Если переключить по одному разу все переключатели во втором, четвертом и шестом горизонтальных рядах (см. рис. 42), то будут освещены ровно 42 коридора.

## ▼ 10 класс

73. Ответ.  $\left\{0, 1 \frac{19}{96}, 2 \frac{38}{96}, 3 \frac{57}{96}, 4 \frac{76}{96}, 5 \frac{95}{96}\right\}$ .

Запишем уравнение в виде  $19[x] = 96[x]$ . Так как  $[x] \in [0; 1)$ , то для решений уравнения имеем  $19[x] \in [0; 96)$ .

Отсюда  $[x] \in \left[0; \frac{96}{19}\right)$ , т. е.  $[x]$  может равняться 0, 1, 2, 3, 4 и 5,

а  $\{x\}$  соответственно будет равняться  $0, \frac{19}{96}, \frac{38}{96}, \frac{57}{96}, \frac{76}{96}, \frac{95}{96}$ .

74. Треугольники  $AEC$  и  $BDC$  подобны, так как  $\angle ECA = \angle BDC$  и  $\angle EAC = \angle DCB$  (рис. 43).

Пусть  $h_1$  и  $h_2$  — длины перпендикуляров, опущенных из точек  $E$  и  $B$  на прямую  $AC$ . Тогда в силу подобия имеем  $\frac{h_1}{AC} = \frac{h_2}{DC}$ .

Отсюда  $\frac{1}{2}h_1 \cdot DC = \frac{1}{2}h_2 \cdot AC$ , т. е.

$$S_{DEC} = S_{ABC}.$$

75. Ответ. Выигрывает второй игрок.

Для достижения успеха второй игрок может пользоваться симметричной стратегией: если первый ставит какой-то знак между числами  $k$  и  $k + 1$ , то второй ставит такой же знак между числами  $99 - k$  и  $100 - k$ . Выражение, кото-

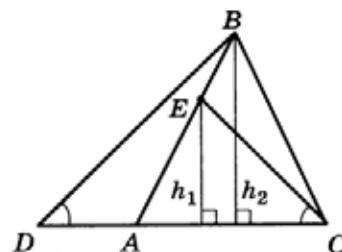


Рис. 43

рое получится в конце игры, будет содержать несколько слагаемых-произведений, причем слагаемое, содержащее число 50, будет четно, остальные слагаемые естественным образом разбиваются на пары «симметричных» слагаемых одинаковой четности. Таким образом, выражение, полученное в конце игры, окажется четным.

**76. Ответ.** 231 пара.

Сделаем замену переменных:  $\begin{cases} u = 2x - 3y, \\ v = 3x - 4y, \end{cases}$  или, что то же самое,  $\begin{cases} x = 3v - 4u, \\ y = 2v - 3u. \end{cases}$

Как видим, паре целых чисел  $(x; y)$  соответствует пара целых чисел  $(u; v)$ , и наоборот. В новых координатах система неравенств примет вид:

$$\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0, \\ u + v \leq 20. \end{cases}$$

Достаточно найти количество пар целых чисел  $(u; v)$ , удовлетворяющих этой системе.

Заметим, что в плоскости  $(u, v)$  система задает треугольник  $ABC$  (рис. 44).

На гипотенузе  $AC$  этого треугольника лежит 21 точка с целыми координатами, а треугольник  $ABC$  и равный ему треугольник  $ACD$  вместе составляют квадрат  $ABCD$  со стороной 20, который содержит 441 точку с целочисленными координатами. Удаляя из этого квадрата диагональ  $AC$ , мы видим, что «половина» квадрата содержит 210 целочисленных точек. Таким образом, в треугольнике  $ABC$  содержится 231 целочисленная точка: 21 на прямой  $AC$  и 210 ниже этой прямой.

**77. Ответ.** Может.

Первые 498 раз Вася рвет на две части один из клочков, а последние 2 раза рвет пополам все клочки.

**78. См. решение задачи 71.**

**79. Ответ.** 10.

Пусть  $N$  — середина стороны  $AD$ ,  $a = AN$ ,  $x = AK$ ,  $y = AM$ ,  $\alpha = \angle ADM$  (рис. 45).

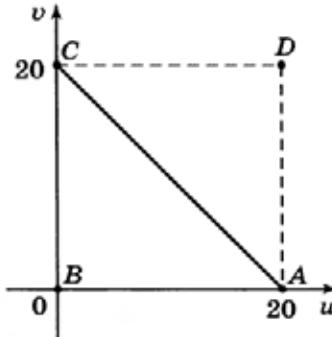


Рис. 44

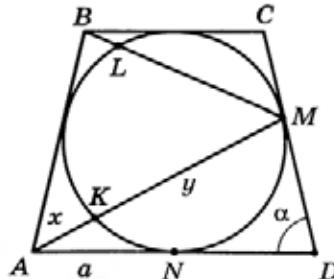


Рис. 45

Тогда  $ND = DM = a$ , и по теореме косинусов  $y^2 = 4a^2 + a^2 - 4a^2 \cos \alpha = a^2(5 - 4 \cos \alpha)$ . С другой стороны, по теореме о сектантах и касательной имеем:  $xy = a^2$ . Поэтому  $\frac{AM}{AK} = \frac{y}{x} = \frac{y^2}{xy} = \frac{5 - 4 \cos \alpha}{a^2}$ . Аналогично для треугольника  $BCM$  получаем  $\frac{BM}{BL} = 5 + 4 \cos \alpha$ . Следовательно,  $\frac{AM}{AK} + \frac{BM}{BL} = 10$ .

**80. Ответ.** 9 фишек.

Очевидно, что одну фишку можно поставить так, что она накроет точки внутри каждой клетки фигуры, показанной на рисунке 46. Поэтому, как показано на рисунке 47, а, достаточно девяти фишек.

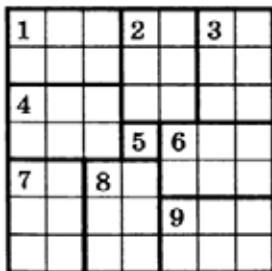
Меньшим количеством фишек обойтись нельзя. Рассмотрим 9 клеток, отмеченных на рисунке 47, б.

Эти клетки удалены друг от друга на расстояние не менее 2, поэтому одна фишка не может задевать две клетки одновременно. Следовательно, фишек должно быть не меньше, чем отмеченных клеток.



Рис. 46

а)



б)

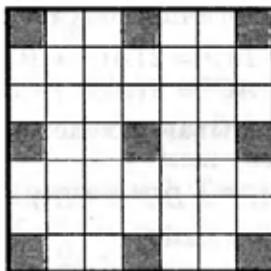


Рис. 47



## 11 класс

**81. Ответ.** 2, 3, 12, 18, 72, 108, 216 или 2, 4, 8, 16, 32, 48, 96.

Заметим, что  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = 1$ . Затем заменим  $\frac{1}{6}$  на  $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ , ту же процедуру проведем с  $\frac{1}{36}$ . Получим набор:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6^2} \cdot \frac{1}{6}$ . Другой ответ

можно получить, заменив в равенстве  $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$  последнее слагаемое на  $\frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{6}$ .

## 82. Ответ. Нет.

**Первое решение.** Пусть  $SABC$  — пирамида, такая, что  $\angle AB_1C = \angle BA_1C = \angle AC_1B = 90^\circ$ ,

где  $A_1, B_1, C_1$  — середины ребер  $SA, SB$  и  $SC$  (рис. 48).

Пусть  $B_2$  и  $C_2$  — середины ребер  $AC$  и  $AB$ . Тогда  $B_1B_2$  — медиана прямоугольного треугольника  $AB_1C$ , проведенная к гипотенузе  $AC$ , поэтому  $B_1B_2 = \frac{1}{2} AC$ . Аналогично  $C_1C_2 = \frac{1}{2} AB$ .

Но четырехугольник  $C_2B_1C_1B_2$  — параллелограмм, так как  $B_1C_2$  и  $C_1B_2$  — средние линии треугольников  $ABS$  и  $ACS$  с общим основанием. Поэтому по свойству параллелограмма  $B_1B_2^2 + C_1C_2^2 = 2(B_1C_1^2 + B_1C_2^2)$ , т. е.

$$\frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{4} AB^2 = 2 \left( \frac{1}{4} BC^2 + \frac{1}{4} AS^2 \right)$$

или

$$AC^2 + AB^2 = 2(BC^2 + AS^2). \quad (1)$$

Аналогично получаем

$$AB^2 + BC^2 = 2(AC^2 + BS^2), \quad (2)$$

$$BC^2 + AC^2 = 2(AB^2 + CS^2). \quad (3)$$

Складывая равенства (1), (2) и (3), получаем

$$2(AS^2 + BS^2 + CS^2) = 0,$$

что невозможно.

**Второе решение.** Пусть  $\vec{SA} = \vec{a}$ ,  $\vec{SB} = \vec{b}$ ,  $\vec{SC} = \vec{c}$ , тогда  $\vec{AC}_1 = -\vec{a} + \frac{\vec{c}}{2}$ ,  $\vec{BC}_1 = -\vec{b} + \frac{\vec{c}}{2}$  и из условия следует  $\vec{AC}_1 \cdot \vec{BC}_1 = 0$ , т. е.  $\vec{a} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \frac{1}{4}\vec{c} \cdot \vec{c} = 0$ . Выписав еще два аналогичных равенства и сложив их, получаем  $\frac{1}{4}(\vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} + \vec{c} \cdot \vec{c}) = 0$ . Противоречие, значит, хотя бы один из трех углов не является прямым.

**83. Первое решение.** Обозначим через  $b_k$  среднее арифметическое чисел  $a_1, a_2, \dots, a_k$ . Пусть  $x$  — это число, которое входит в набор  $A = \{b_1, b_2, \dots, b_{100}\}$  51 раз. Докажем, что среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  найдутся два числа, равные  $x$ . Покажем

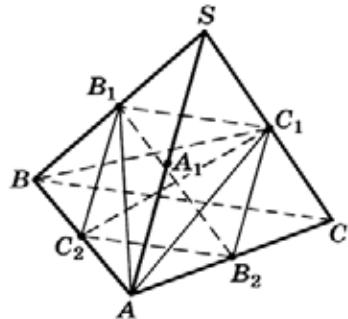


Рис. 48

вначале, что если  $b_k = b_{k+1} = x$ , то  $a_{k+1} = x$ . Действительно, из равенства  $b_k = \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} = x$  следует, что  $a_1 + \dots + a_k = kx$ , поэтому  $b_{k+1} = \frac{a_1 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} = \frac{kx + a_{k+1}}{k+1}$ , и если  $b_{k+1} = x$ , то  $a_{k+1} = (k+1)x - kx = x$ .

Предположим теперь, что среди чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  не найдется двух, равных  $x$ , и рассмотрим два случая:

1)  $a_1 = x$ , тогда  $a_m \neq x$  при  $m \geq 2$ . Из того что  $a_2 \neq x$ , следует  $b_2 \neq x$ , поэтому в наборе  $A' = \{b_3, \dots, b_{100}\}$  50 раз встречается число  $x$ . Всего в наборе  $A'$  98 чисел, поэтому какие-то из 50 чисел, равных  $x$ , окажутся соседними:  $b_k = b_{k+1} = x$ . Но тогда  $a_{k+1} = x$  — противоречие;

2)  $a_1 \neq x$ , тогда в наборе  $A'' = \{b_2, \dots, b_{100}\}$  51 раз встречается число  $x$ . Если в наборе  $A''$  нет двух пар соседних чисел, равных  $x$ , то чисел, отличных от  $x$ , должно быть не менее 49. Противоречие, так как в этом случае набор  $A''$  должен содержать по крайней мере  $51 + 49 = 100$  чисел.

Итак, наше предположение неверно, и поэтому найдутся числа  $a_m$  и  $a_n$ , равные  $x$ .

**Второе решение.** Рассмотрим набор чисел

$$C = \left\{ c_1, \frac{c_1 + c_2}{2}, \dots, \frac{c_1 + \dots + c_{100}}{100} \right\},$$

где  $c_k = a_k - x$ . В этом наборе каждое число меньше соответствующего числа набора  $A = \left\{ a_1, \frac{a_1 + a_2}{2}, \dots, \frac{a_1 + \dots + a_{100}}{100} \right\}$

на  $x$ , поэтому в наборе  $C$  51 раз встречается 0. Таким образом, среди сумм  $c_1, c_1 + c_2, c_1 + c_2 + c_3, \dots, c_1 + \dots + c_{100}$  51 сумма равна нулю:  $c_1 + \dots + c_l = 0, c_1 + \dots + c_l + c_{l+1} + \dots + c_m = 0, c_1 + \dots + c_m + c_{m+1} + \dots + c_n = 0, \dots, c_1 + \dots + c_s = 0$ . Но тогда  $c_1 + \dots + c_l = 0, c_{l+1} + \dots + c_m = 0, c_{m+1} + \dots + c_n = 0, \dots, c_{r+1} + \dots + c_s = 0$ . Покажем, что из полученных 51 нулевых сумм по крайней мере две включают в себя только по одному слагаемому. Действительно, если не так, то в 50 суммах не менее чем по два слагаемых, для чего необходимо по крайней мере  $1 + 2 \cdot 50 = 101$  число. Противоречие. Итак, мы показали, что какие-то два числа  $c_m$  и  $c_n$  равны нулю. Но тогда  $a_m = a_n = x$ .

**84.** Разрешимость уравнения  $f(x) = px + q$  означает, что прямая  $y = px + q$  пересекается с графиком функции  $y = f(x)$ .

Предположим, что для некоторого  $x_0$   $f(x_0) < x_0^2$ . Тогда точка  $(x_0; f(x_0))$  лежит ниже параболы  $y = x^2$  и через точку

$(x_0; f(x_0))$  можно провести прямую, не пересекающуюся с параболой. Поэтому уравнение  $f(x) = px + q$  имеет корень  $x_0$ , а уравнение  $x^2 = px + q$  корней не имеет.

Следовательно,  $f(x) \geq x^2$  для всех  $x$ . Покажем, что неравенство  $f(x_0) > x_0^2$  тоже невозможно. Проведем касательную  $y = px + q$  к параболе в точке  $(x_0; x_0^2)$  (ее уравнение  $y = 2x_0x - x_0^2$ ). Тогда уравнение  $x^2 = px + q$  имеет единственный корень  $x_0$ . С другой стороны, при всех  $x \neq x_0$  имеем  $x^2 > px + q$ .

Следовательно,  $f(x) \geq x^2 > px + q$  при  $x \neq x_0$  и  $f(x_0) > x_0^2 = px_0 + q$ , т. е.  $f(x) > px + q$  для всех  $x$  и уравнение  $f(x) = px + q$  решений не имеет. Противоречие.

Итак,  $f(x) = x^2$ .

85. Ответ.  $\frac{\pi}{4}$ .

Из тождества  $\sin(\sin \alpha + \alpha) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \sin \alpha - \alpha\right)$  следует, что данное равенство выполняется в двух случаях:

$$1) 2\pi n + \frac{\pi}{2} - \sin \alpha - \alpha = \cos \alpha - \alpha, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) 2\pi n + \frac{\pi}{2} - \sin \alpha - \alpha = \alpha - \cos \alpha, n \in \mathbb{Z}.$$

В первом случае получаем равенство  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$ . Но это равенство невозможно, так как

$$|\sin \alpha + \cos \alpha| = \sqrt{2} \left| \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \right| \leq \sqrt{2} < \frac{\pi}{2} \leq \left| \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right|.$$

Во втором случае получаем

$$2\alpha + \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n. \quad (1)$$

Рассмотрим функцию  $f(x) = 2x + \sin x - \cos x$  на промежутке  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ . Легко проверить, что на этом промежутке она строго монотонно возрастает. Следовательно, имеем неравенства  $-1 = f(0) \leq f(x) \leq f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 1$ , и, значит, в равенстве (1)  $n = 0$  и из монотонности  $f(x)$  следует, что уравнение (1) при  $n = 0$  имеет ровно одно решение.

Легко проверить, что этим решением является  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

86. Ответ. 97.

Покажем вначале, что все суммы не могут быть нечетны. Действительно, пусть все суммы нечетны. Это возможно, только если числа идут в следующем порядке:

- 1) инин...;
- 2) ичичиччи...;
- 3) чиччинч...;
- 4) ччинчинч....

В первом случае получаем, что все числа от 1 до 100 должны быть нечетны, а в остальных — что четных чисел больше, чем нечетных. Противоречие.

Покажем теперь, как расставить числа, чтобы получить 97 нечетных сумм:  $\overbrace{\text{нчнчнчнч...нчнн...н}}^{75 \text{ чисел}}$ . Четной окажется только 75-я сумма.  $\overbrace{\text{нчнчнчнч...нчнн...н}}^{25 \text{ чисел}}$

**87. Первое решение.** Пусть  $AC = b \geq a = BD$ . Не уменьшая общности, будем считать, что  $\angle AOB \leq \frac{\pi}{2}$  (рис. 49).

Если  $OA \leq \frac{b}{2}$  и  $OB \leq \frac{a}{2}$  или  $OC \leq \frac{b}{2}$  и  $OD \leq \frac{a}{2}$ , то  $AB \leq \sqrt{OA^2 + OB^2} \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$  или  $CD \leq \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ , и все доказано. Поэтому предположим, что  $OB < \frac{a}{2}$ , а  $OA > \frac{b}{2}$ . Тогда угол  $B\bar{A}\bar{O}$  острый, так как в треугольнике  $ABO$  против угла  $B\bar{A}\bar{O}$  лежит меньшая сторона:  $OB < \frac{a}{2} \leq \frac{b}{2} < OA$ . Следовательно, основание высоты  $BH$  будет лежать на стороне  $AO$ . Но тогда или  $AH \leq \frac{b}{2}$ , или  $HC \leq \frac{b}{2}$ . Пусть для определенности это  $AH$ . Тогда имеем  $AB = \sqrt{AH^2 + BH^2} \leq \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ , так как  $BH \leq BO \leq \frac{a}{2}$ . Утверждение доказано.

**Второе решение.** Предположим, что все стороны четырехугольника  $ABCD$  имеют длину больше  $p = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}}$ . Тогда точки  $B$  и  $D$  лежат вне окружностей радиуса  $R = p$  с центрами в точках  $A$  и  $C$ ,  $AC = a$  (рис. 50).

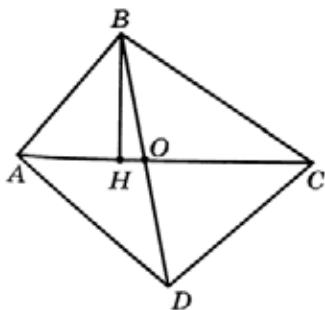


Рис. 49

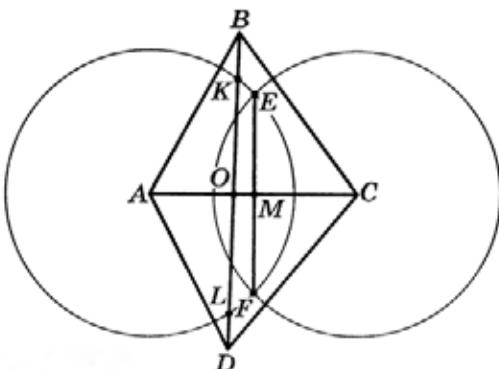


Рис. 50

Пусть  $E$  и  $F$  — точки пересечения окружностей,  $M$  — точка пересечения  $AC$  и  $EF$ , тогда

$$EF = 2EM = 2\sqrt{p^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = b.$$

Пусть для определенности точка  $O$  пересечения диагоналей  $AC$  и  $BD$  лежит на отрезке  $AM$ , а первая окружность высекает на  $BD$  хорду  $KL$ . Тогда расстояние от  $A$  до  $EF$  не превосходит  $AO \leq AM$ , поэтому  $BD > KL \geq EF$ . Мы пришли к противоречию, так как  $BD = b = EF$ , поэтому хотя бы одна сторона четырехугольника не больше  $p$ .

**Замечание.** Для невыпуклого четырехугольника утверждение неверно (рис. 51).

**88.** Будем говорить, что: а) прямые множества  $X$  прикрепляются к плоскости  $k$  кнопками, если существуют  $k$  точек на плоскости, таких, что каждая прямая множества  $X$  проходит хотя бы через одну из этих точек; б) выполняется утверждение  $S(n, k)$ , если из того, что любые  $n$  прямых множества  $X$  прикрепляются к плоскости  $k$  кнопками, следует, что и все прямые множества  $X$  прикрепляются  $k$  кнопками. Тогда утверждение задачи — это  $S(n, k)$ , где  $n = k^2 + 1$ ,  $k \geq 3$ . Доказательство проведем индукцией по  $k$ :  $S(3, 1) \Rightarrow S(6, 2) \Rightarrow S(10, 3) \Rightarrow S(17, 4) \Rightarrow \dots \Rightarrow S(k^2 + 1, k)$ .

База индукции очевидна, так как  $S(3, 1)$  — это утверждение, что если любые три прямые некоторого множества проходят через одну точку, то и все прямые множества проходят через одну точку.

Индукционный шаг. Пусть выполнено  $S((k-1)^2 + 1, k-1)$ ,  $k \geq 4$ , и  $A$  — множество прямых, любые  $k^2 + 1$  прямые которого прикрепляются  $k$  кнопками. Рассмотрим  $k^2 + 1$  прямые из  $A$  и  $k$  кнопок, которые их прикрепляют. Тогда одна из них — кнопка  $P$  — прикрепляет по крайней мере  $k+1$  прямую. Обозначим через  $M$  множество всех прямых из  $A$ , прикрепленных кнопкой  $P$ , и через  $A'$  — множество прямых из  $A$ , не входящих в  $M$ . Покажем, что для  $A'$  выполняется условие: любые  $(k-1)^2 + 1$  прямые из  $A'$  прикрепляются  $k-1$  кнопкой. В самом деле, добавим к любым  $(k-1)^2 + 1$  прямым из  $A'$   $(k+1)$  прямую множества  $M$  и, если необходимо, другие прямые множества  $A$  так, чтобы получить  $k^2 + 1$  прямую. Тогда по условию эти  $k^2 + 1$  прямые можно прикрепить  $k$  кнопками. Пусть  $N$  — множество

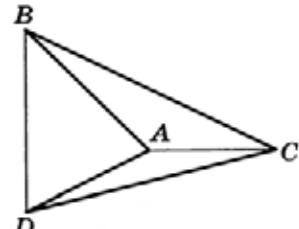


Рис. 51

этих кнопок. Покажем, что  $P \in N$ . Действительно, через  $P$  проходит не менее  $k + 1$  прямых множества  $M$ , поэтому если  $P \notin N$ , то, для того чтобы их прикрепить, потребуется по крайней мере  $k + 1$  кнопка, а мы предположили, что достаточно  $k$  кнопок. Итак,  $P \in N$ .

Значит, остальными (кроме  $P$ )  $k - 1$  кнопками прикрепляются все прямые из  $A'$ , не проходящие через  $P$ , т. е. и исходные  $(k - 1)^2 + 1$  прямые из  $A'$ . По предположению индукции  $S((k - 1)^2 + 1, k - 1)$  — верно, поэтому все прямые из  $A'$  прикрепляются  $k - 1$  кнопками. Но тогда все прямые из  $A$  прикрепляются этими  $k - 1$  кнопками и кнопкой  $P$ , т. е.  $k$  кнопками. Утверждение доказано.

## 1996 – 1997

### 8 класс

89. Например, так: 1, 3, 5, 2, 4, 6, 8, 10, 7, 9, 11, ..., 96, 98, 100, 97, 99 (в каждой пятерке порядок расположения чисел  $5k + 1, 5k + 3, 5k + 5, 5k + 2, 5k + 4$ ).

90. Условие: медиана пятиугольника перпендикулярна противолежащей стороне — равносильно тому, что диагонали, проведенные из этой вершины, равны.

Поэтому если медианы, проведенные из вершин  $A, B, C$  и  $D$ , перпендикулярны противолежащим сторонам (рис. 52), то выполняются равенства  $AC = AD, BE = BD, CA = CE, DB = DA$ . Отсюда  $CE = BE$ , т. е. медиана, проведенная из вершины  $E$ , также перпендикулярна противолежащей стороне.

91. Ответ. Нужно задать вопросы про узлы  $A, B, C$  и  $O$  (рис. 53).

Если  $n(P)$  — число прямоугольников, содержащих точку  $P$ , то искомое число  $x$  равно

$$n(O) + n(B) - n(A) - n(C).$$

Ясно, что все прямоугольники, содержащие узлы, отличные от  $O$ , включают в себя хотя бы один из узлов  $A$  или  $C$ .

Сумма  $n(A) + n(C)$  включает в себя все такие прямоугольники, но при этом те прямоугольники, которые содержат оба узла  $A$  и  $C$ , подсчитаны дважды. Заметим, что прямоуголь-

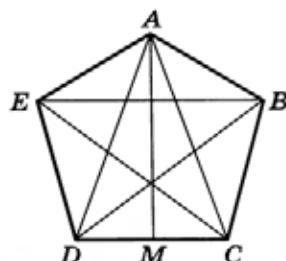


Рис. 52

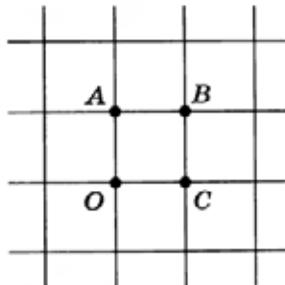


Рис. 53

ники, содержащие одновременно  $A$  и  $C$ , — это прямоугольники, содержащие узел  $B$ . Поэтому  $n(A) + n(C) - n(B)$  — число прямоугольников, содержащих узлы, отличные от  $O$ , и, значит, искомое число есть

$$n(O) - (n(A) + n(C) - n(B)).$$

**92. Ответ.** 48 пассажиров.

Пусть  $X(M)$  — число пассажиров в автобусе во время движения после остановки №  $M$ . Во-первых,  $X(M) \leq 50$ , так как вместе могут ехать только пассажиры, севшие в автобус не более чем пятью остановками ранее. Во-вторых,  $X(M)$  четно, так как число  $n - (10 - n) = 2n - 10$  — изменение числа пассажиров в автобусе на остановке — четно. Поэтому, если мы покажем, что  $X(M) < 50$ , то мы получим, что  $X(M) \leq 48$ . Но равенство  $X(M) = 50$  возможно только в том случае, когда на каждой из пяти предыдущих остановок садились по 10 пассажиров. Это означает, что  $M = 5$ , так как в противном случае  $X(M - 4) = 0$ , что противоречит условию. Но тогда на шестой остановке должны были выйти все 10 пассажиров, севших на первой, и т. д., на десятой остановке — последние десять пассажиров, и, следовательно, до конечной остановки автобус ехал бы пустым. Итак,  $X(M) \leq 48$ . В таблице приведен пример посадки пассажиров, когда  $X(5) = 48$ .

№ остановки	Вошли	Вышли	$X(M)$
1	$A_1, \dots, A_{10}$	0	10
2	$B_1, \dots, B_{10}$	0	20
3	$C_1, \dots, C_{10}$	0	30
4	$D_1, \dots, D_{10}$	0	40
5	$E_1, \dots, E_9$	$A_{10}$	48
6	$F_1$	$A_1, \dots, A_9$	40
7	0	$B_1, \dots, B_{10}$	30
8	0	$C_1, \dots, C_{10}$	20
9	0	$D_1, \dots, D_{10}$	10
10	$G_1$	$E_1, \dots, E_9$	2

**93. Ответ.** Любое натуральное число.

**Первое решение.** Достаточно заметить, что если  $m = 2k - 1$ ,  $n = 2k + 1$ , то  $\frac{mn + 1}{m + n} = \frac{4k^2 - 1 + 1}{4k} = k$ .

**Второе решение.** Найдем решение уравнения  $\frac{mn + 1}{m + n} = k$ :  $mn + 1 = km + kn$ ,  $m = \frac{kn - 1}{n - k}$ . Теперь если  $n = k + 1$ , то  $m$  — целое число,  $m = k^2 + k - 1$ .

**94. Ответ.** Нельзя.

Предположим, что мы расставили искомым образом 10 чисел. Пусть сумма семи чисел, расположенных в вершинах центрального шестиугольника и в его центре, равна  $S$ , а его центральное число —  $x$ . Тогда сумма всех чисел в вершинах трех черных треугольников равна  $S + 2x$ , и по условию это число равно  $3 \cdot 1996$ . В то же время сумма чисел в вершинах трех белых треугольников, входящих в шестиугольник, также равна  $S + 2x$ , но по условию это число равно  $3 \cdot 1997$ . Противоречие.

**95. Ответ.** 248 000 м.

Заметим, что периметр любого участка вдвое меньше его площади. Площадь всех участков равна 1 000 000 м<sup>2</sup>, поэтому сумма периметров участков — 500 000 м. Но любой забор, кроме внешнего, имеющего длину 4000 м, является границей двух участков, поэтому в этом числе он подсчитан дважды. Значит, было построено  $\frac{500\ 000 - 4000}{2} = 248\ 000$  м заборов.

**96. Ответ.** Выигрывает начинающий.

Начинающий первым ходом ставит в угол число 24. Потом он разбивает все клетки на пары (рис. 54), а числа на 11 «хороших» пар с суммой 23 (1 + 22, 2 + 21, ..., 11 + 12) и одну «плохую» пару 23, 25. В дальнейшей игре первый ставит в оставшуюся клетку из пары, в которую пошел второй, число, парное числу, которое написал второй. «Плохая» пара одна, значит, ее нет либо в строке, либо в столбце, содержащем 24, а 24 в сумме с двумя «хорошими» парами дает 70.

24		

Рис. 54

**▼ 9 класс****97. Ответ.**  $x_0$  и  $\tilde{x}$ , где  $\tilde{x} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ .

По условию  $x_0^2 + a_1x_0 + b_1 = \dots = x_0^2 + a_nx_0 + b_n = 0$ . Складывая эти равенства, получаем  $nx_0^2 + (a_1 + \dots + a_n)x_0 + (b_1 + \dots + b_n) = 0$ , т. е.  $x_0$  — корень рассматриваемого трехчлена  $y = f(x)$ . Поэтому дискриминант трехчлена неотрицателен, и трехчлен имеет второй корень  $x$ . По теореме Виета  $x_0 + x_1 = -a_1, \dots, x_0 + x_n = -a_n$  и  $x_0 + \tilde{x} = -\frac{1}{n}(a_1 + \dots + a_n)$ . Умножая последнее уравнение на  $n$  и вычитая из него первые  $n$  уравнений, получаем  $n\tilde{x} - (x_1 + \dots + x_n) = 0$ .

**98. Ответ.** На 7.

Приведем пример разбиения 96 на 7 слагаемых:  $96 = 2 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 + 41$ . Если слагаемых больше,

то среди них не менее 8 нечетных (если 7, то сумма нечетна). Заменим каждое из них на наименьший простой сомножитель. При этом сумма не увеличится и все слагаемые будут различны. Но сумма 8 наименьших нечетных простых чисел равна 98.

**99.** По условию медиана  $AM$  треугольника  $CAD$  является его высотой, поэтому  $AC = AD$  и  $\angle DAM = \angle CAM$  (рис. 55). Кроме того,  $\angle EAM = \angle BAM$ , поэтому  $\angle CAE = \angle DAB$ . Рассматривая аналогично другие вершины пятиугольника, получаем  $BE = BD$ ,  $CA = CE$ ,  $DB = DA$ ,  $EC = EB$ , откуда следует равенство длин всех диагоналей пятиугольника.

Таким образом,  $\triangle ADB = \triangle ACE$  как равнобедренные треугольники с равными боковыми сторонами и равными углами при основании ( $\angle CAE = \angle DAB$ ). Поэтому  $AB = AE$ . Аналогично получаем равенство всех сторон пятиугольника, а рассмотрением треугольников  $EAB$ ,  $ABC$ , ...,  $DAE$  — равенство углов пятиугольника.

**100. Ответ.** 97.

Пусть на карточках стопки написаны числа  $a_1, a_2, \dots, a_{115}$  (сверху вниз). Составим стопку  $116 - a_{115}, 116 - a_{114}, \dots, 116 - a_1$ . Разность между числами на соседних карточках этой стопки также равна  $t$  или  $n$ :

$$(116 - a_k) - (116 - a_{k-1}) = a_{k-1} - a_k.$$

Но раз стопку можно сложить единственным способом, то составленная нами стопка получается из исходной переворотом. Поэтому

$$a_{115} = 116 - a_1 = 116 - 19 = 97.$$

**101. Ответ.** Можно.

Достаточно, например, заменить два слагаемых  $1200^2$  и  $1600^2$  на их сумму  $2000^2$ .

**102.** Из условия следует равенство треугольников  $MBC$  и  $MBP$  (рис. 56), откуда  $\angle MPA = 180^\circ - \angle MCB = 180^\circ - \angle MNA$ , т. е.  $\angle MPA + \angle MNA = 180^\circ$ . Значит, четырехугольник  $MNAP$  — вписанный.

**103.** Пусть попугай  $\Pi_1$  выдрал перо у  $\Pi_2$ , тот — у  $\Pi_3$  и т. д. Такая цепочка, в которую войдут, возможно, не все попугаи, замкнется. Аналогично составим цепочку из части

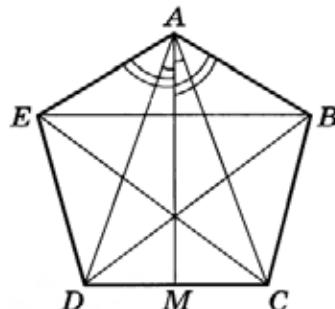


Рис. 55

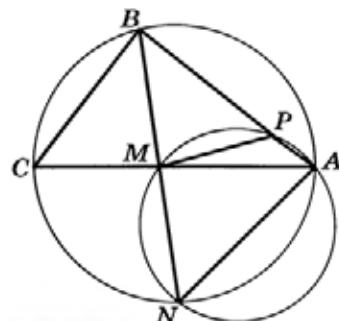


Рис. 56

оставшихся попугаев — и так до конца. Из условия задачи следует, что каждая цепочка состоит не менее чем из четырех попугаев, иначе нашлись бы трое, вырвавшие перья друг у друга. Поэтому цепочка из нечетного числа попугаев содержит не менее 5 попугаев, и таких цепочек не более  $\frac{38}{5}$ , т. е. не более 7. Число 38 четно, поэтому количество цепочек с нечетным числом попугаев — четно, т. е. их не более 6. Теперь можно указать, как поступить удаву. Он должен рассаживать попугаев из цепочек поочередно в разные клетки:  $\Pi_1, \Pi_3, \dots$  — в одну клетку,  $\Pi_2, \Pi_4, \dots$  — в другую, а по одному оставшемуся попугаю из каждой цепочки с нечетным числом попугаев проглотить.

**104. Ответ.** При  $n = 1$  — 1 кусок, при  $n > 1$  —  $2n$  кусков.

При  $n = 1$ , очевидно, резать ничего не надо, т. е. 1 кусок. При  $n > 1$  имеем  $n^2 + 1 > 2n$ , поэтому каждый кусок «обязан» быть фигуркой, показанной на рисунке 57, а ( $1 \leq k \leq 2n$ ,  $1 \leq l \leq 2n$ ).

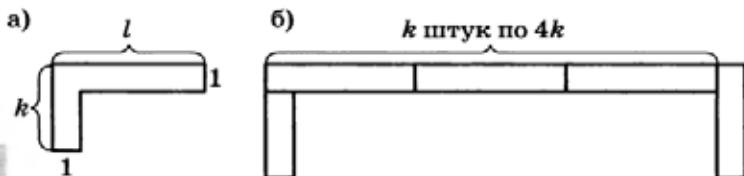


Рис. 57

Докажем, что при  $n > 1$  для замощения квадрата  $2n \times 2n$  необходимо не менее  $2n$  таких фигурок. Если каждый столбец квадрата  $2n \times 2n$  имеет не менее двух общих клеток с какой-нибудь из фигурок, то фигурок не менее  $2n$  (поскольку два разных столбца не могут иметь по две общие

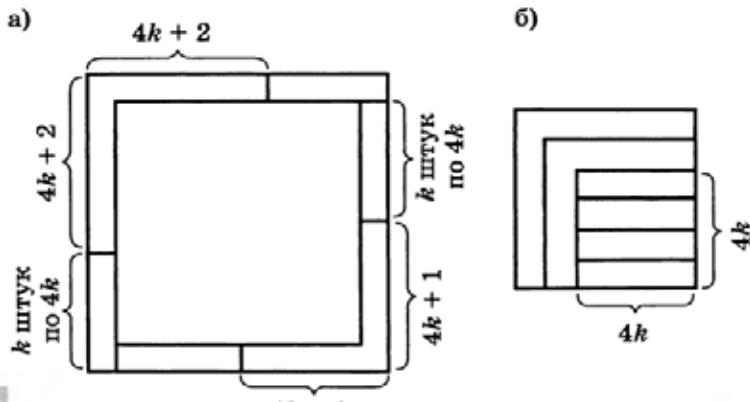


Рис. 58

клетки с одной фигуркой). Если же некоторый столбец имеет с каждой фигуркой не более одной общей клетки, то он пересекает  $2n$  различных фигурок. (Мы использовали очевидный факт, что стороны фигурок параллельны соответствующим сторонам квадрата.)

Приведем алгоритм разбиения на  $2n$  фигурок. Если  $n = 2k$ , то  $n^2 + 1 = 4k^2 + 1$ , и каемка разбивается на  $4k$  прямоугольников  $1 \times 4k$  (рис. 57, б). Если  $n = 2k + 1$ , то  $n^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ , и каемка разбивается на фигурки так, как показано на рисунке 58, а, из которых затем складываем квадрат (рис. 58, б).

## 10 класс

105. Ответ.  $f(x) = x^2$ .

Положим в уравнении  $x = y$ , тогда  $f(0) = f(x) + f(x) - 2x^2$ , т. е.  $f(x) = x^2 + \frac{a}{2}$ , где  $a = f(0)$ . Теперь, взяв  $x = y = 0$ , получаем  $a = 2a$ , т. е.  $a = 0$ . Осталось проверить, что функция  $f(x) = x^2$  удовлетворяет данному уравнению.

106. Ответ.  $125 = \overline{\overline{5^0}} \overline{\overline{5^2}}$ .

По условию  $5^x \cdot 10^n + 5^y = 5^z$ , т. е.  $5^{x+n} \cdot 2^n + 5^y = 5^z$ , где  $z > y$ ,  $z > x + n$ . Если  $x + n < y$ , то  $2^n + 5^{y-x-n} = 5^{z-x-n}$ , что невозможно, поэтому  $x + n \geq y$ . Тогда  $5^{x+n-y} \cdot 2^n + 1 = 5^{z-y}$ , откуда  $x + n = y$  и  $2^n + 1 = 5^t$ ,  $t = z - y \in N$ . Если  $t = 2m$ , то  $(5^m - 1)(5^m + 1) = 2^n$ , следовательно, два последовательных четных числа  $5^m - 1$  и  $5^m + 1$  — степени двойки. Отсюда  $5^m - 1 = 2$ ,  $5^m + 1 = 4$ , т. е.  $m$  — нецелое. Если  $t = 2m + 1$ , то  $2^n = (4 + 1)^{2m+1} - 1 = 4 \cdot (5^{2m} + 5^{2m-1} + 5^{2m-2} + \dots + 5 + 1) = 4(2k + 1)$ . Это возможно только при  $n = 2$ ,  $m = 0$ . Тогда  $t = 1$ ,  $y = 2$ , т. е.  $z = 3$ ,  $x = 0$ .

107. Ответ. Отрезок  $OT$  без его концов, где точка  $T$  лежит на луче  $OD$  и  $\angle CTO = \angle ACD$ .

Пусть  $S_1$  — окружность, проходящая через точки  $A$  и  $B$ , и  $S_1$  пересекает  $BD$  в точке  $K$ . Тогда по свойству вписанных углов  $\angle MKB = \angle MAB = \angle ACD$ , поэтому точки  $M$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $K$  лежат на одной окружности. Так, если  $K$  лежит на отрезке  $OD$ , то  $\angle MKD + \angle MCD = 180^\circ$ , если  $K$  — вне отрезка (точка  $K_1$  на рисунке 59), то  $\angle M_1K_1D = \angle M_1CD$ .

Таким образом,  $K = N$ , так как  $K \in S_1$ , и  $K \in S_2$ ,  $S_2$  — окружность, проходящая через точки  $C$ ,  $D$  и  $M$ . Итак, мы показали, что точка  $N$  должна лежать на отрезке  $OT$ . Покажем теперь, что любая точка этого отрезка, кроме точек  $O$  и  $T$ , входит в искомое ГМТ. Действительно, пусть  $N \in [OT]$ , тогда, выбрав точку  $M \in [OC]$  так, чтобы  $\angle MNB = \angle ACD$ , получаем, что  $N \in S_1$  и  $N \in S_2$ .

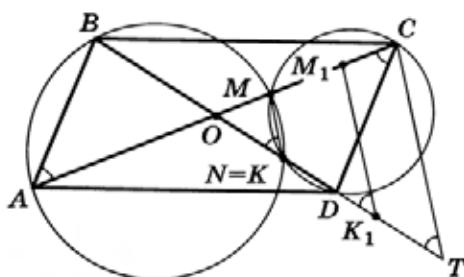


Рис. 59

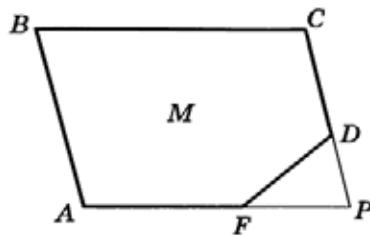


Рис. 60

108. См. решение задачи 100.

109. Ответ.  $(\alpha, \alpha, \alpha)$ ,  $(-4\alpha, -\alpha, 2\alpha)$ , где  $\alpha \neq 0$ .

По условию  $2b = a + c$  и выполняется одно из равенств:  $2 \frac{1}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}$ ,  $2 \frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$  или  $2 \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ . В первом случае, решая систему  $2b = a + c$ ,  $2ac = bc + ab$ , получаем  $a = b = c$ . Во втором случае получаем  $a = b = c$  или  $a = 4b$ ,  $c = -2b$ . Третий случай аналогичен второму.

110. Куб имеет 3 пары параллельных граней, поэтому если сечение куба — пятиугольник  $M$ , то  $M$  имеет две пары параллельных сторон (на рисунке 60  $AF \parallel BC$  и  $CD \parallel AB$ ). Таким образом, пятиугольник  $M$  может быть получен из некоторого параллелограмма ( $ABCP$  на рисунке 60) отрезанием треугольника ( $\triangle PDF$ ) прямой, пересекающей две его соседние стороны. Отсюда  $S_M < S_{ABCP} \leq AB \cdot BC$ , а произведение длин двух сторон пятиугольника не больше произведения длин двух самых длинных его сторон.

111. Назовем вершины нового квадрата по часовой стрелке:  $A, B, C, D$ . Рассмотрим два случая.

**Первый случай.** В узлы попали две соседние вершины. Без ограничения общности можно считать, что это точки  $A$  и  $B$ . Тогда вектор  $\overrightarrow{AB}$  целый, пусть он имеет координаты  $(m; n)$ . Следовательно, вектор  $\overrightarrow{BC}$  равен  $(n; -m)$ , значит, он тоже целый. Отсюда точка  $C$  целая. Аналогично для точки  $D$ .

**Второй случай.** Пусть в целые точки попали две несоседние вершины, тогда можно считать, что это точки  $A$  и  $C$ . Введем систему координат: центр в точке  $A$ , оси параллельны линиям сетки. Пусть точка  $C$  имеет координаты  $(m; n)$ . Тогда точка  $D$  имеет координаты  $\left(\frac{m+n}{2}; \frac{n-m}{2}\right)$ . Заметим,

что числа  $m+n$  и  $n-m$  либо оба четные, либо оба нечетные (поскольку  $m$  и  $n$  целые). Если числа  $m+n$  и  $n-m$  оба чет-

ные, то точка  $D$  целая, тогда см. случай 1. Если числа оба нечетные, то  $(m+n)^2 + (n-m)^2$  имеет остаток 2 при делении на 4, значит, квадрат длины стороны  $AD$ , равный  $\frac{(m+n)^2}{4} + \frac{(n-m)^2}{4}$ , нецелое число, что невозможно.

**112.** Пронумеруем всех учеников в этом классе натуральными числами от 1 до 20 и обозначим через  $F(i, j, k)$  число общих друзей у  $i$ -го,  $j$ -го и  $k$ -го учеников, а сумму всех таких чисел  $F$  через  $S$ . Тогда, чтобы доказать утверждение задачи, достаточно показать, что для некоторых  $i, j$  и  $k$   $F(i, j, k) \geq 3$ .

Всего чисел  $F$  будет  $C_{20}^3 = \frac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$ . Так как у каждого ученика не менее 10 друзей в классе, то при подсчете числа  $S$  каждого ученика мы учитываем не менее  $C_{10}^3 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = 120$  раз, поэтому  $S \geq 120 \cdot 20 = 2400$ .

Таким образом, сумма 1140 целых чисел не меньше 2400, поэтому одно из чисел  $F$  не меньше 3, что и требовалось доказать.

## ▼ 11 класс

**113.** Ответ.  $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ .

Из условия следует, что косинусы углов положительны, поэтому треугольник остроугольный. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон,  $A, B, C$  — противолежащие углы. Без ограничения общности  $a \leq b \leq c$ , тогда  $A \leq B \leq C$  и  $\cos A \geq \cos B \geq \cos C$ , и из условия следует, что  $a = \cos C, c = \cos A, a : c = \cos C : \cos A$ . По теореме синусов получаем, что  $\sin A \cdot \cos A = \sin C \cdot \cos C, \sin 2A = \sin 2C$ , откуда  $2A = 2C$ , или  $2A + 2C = \pi$ . Последнее невозможно, так как в этом случае  $B = \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos B = 0$ .

Итак,  $A = C$ , а так как  $A \leq B \leq C$ , то  $A = B = C$ , т. е.  $\triangle ABC$  — равносторонний.

**114.** Пусть  $P$  — точка пересечения высот  $A_1B_1, \dots, A_{2n}B_{2n}$  многоугольника (рис. 61). Пусть

$$\overrightarrow{PA_1} = \vec{a}_1, \dots, \overrightarrow{PA_{2n+1}} = \vec{a}_{2n+1}.$$

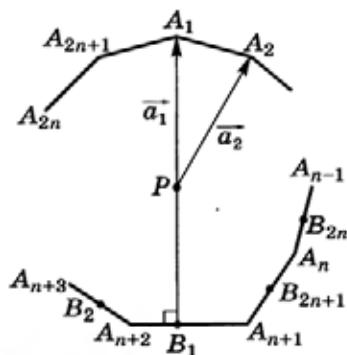


Рис. 61

Тогда  $\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}} = \vec{a}_{n+2} - \vec{a}_{n+1}$ , ..., и по условию  $(\vec{a}_1, \vec{a}_{n+2} - \vec{a}_{n+1}) = 0$ ,  $(\vec{a}_2, \vec{a}_{n+3} - \vec{a}_{n+2}) = 0$ , ...,  $(\vec{a}_{2n}, \vec{a}_n - \vec{a}_{n-1}) = 0$ , т. е.  $(\vec{a}_1, \vec{a}_{n+2}) = (\vec{a}_1, \vec{a}_{n+1})$ ,  $(\vec{a}_2, \vec{a}_{n+3}) = (\vec{a}_2, \vec{a}_{n+2})$ , ...,  $(\vec{a}_{2n}, \vec{a}_n) = (\vec{a}_{2n}, \vec{a}_{n-1})$ . Отсюда  $(\vec{a}_{2n+1}, \vec{a}_n) = (\vec{a}_n, \vec{a}_{2n}) = (\vec{a}_{2n}, \vec{a}_{n-1}) = (\vec{a}_{n-1}, \vec{a}_{2n-1}) = \dots = (\vec{a}_1, \vec{a}_{n+1}) = (\vec{a}_{n+1}, \vec{a}_{2n+1})$ , т. е.  $(\vec{a}_{2n+1}, \vec{a}_n) = (\vec{a}_{2n+1}, \vec{a}_{n+1})$ , или  $(\vec{a}_{2n+1}, \vec{a}_{n+1} - \vec{a}_n) = 0$ , откуда и следует, что  $A_{2n+1}P \perp A_nA_{n+1}$ , т. е.  $(2n+1)$ -я высота проходит через точку  $P$ .

**115.** Заметим, что в случае  $n^x + 1 = y^z$  (здесь  $n, x, y, z \in N$ ) числа  $x$  и  $z$  взаимно просты:  $(x, z) = 1$ .

Пусть  $1996^{1996} + 1 = y^z$ , тогда  $(z, 1996) = 1$ . Далее,  $y - 1 = 2^a \cdot 499^b$ . Значит,  $(1 + 2^a \cdot 499^b)^z = 1 + 1996^{1996} = A$ . Таким образом,  $A - 1 = B \cdot 2^{2 \cdot 1996}$ , где  $(B, 2) = 1$ .

Поскольку  $a \neq 0$ , получим  $a = 2 \cdot 1996$ . Если  $b \neq 0$ , то аналогично  $b = 1996$ . Следовательно,  $z = 1$ . Пусть  $b = 0$ , тогда  $(1 + 4^{1996})^z = 1 + 1996^{1996}$ , откуда  $z + c \cdot 4^{1996} = 499^{1996}$ . Значит,  $z \equiv (500 - 1)^{1996} \pmod{8}$ ,  $z \equiv 1 \pmod{8}$ . Отсюда  $z \geq 9$ . Получили  $(1 + 4^{1996})^z \geq (1 + 4^{1996})^9 > 1 + 4^{9 \cdot 1996} > 1 + 1996^{1996}$ . Противоречие.

**Замечание.** Фактически мы доказали следующее: если  $n^n + 1 = m^k$ , то  $k = 1$ .

**116. Ответ.** Не может.

Обозначим через  $V$  выигрыш первого игрока (т. е. на сколько его засчитанное число больше, чем у второго). Сначала докажем, что первый может добиться того, чтобы  $V$  было неотрицательным. Для этого ему достаточно научиться получать симметричную таблицу (тогда  $V$  будет равно 0). Первый может придерживаться следующей стратегии: 1-й ход — 1997 в центр таблицы, а дальше ходить таким же числом, как и второй, в симметричную относительно главной диагонали клетку, если второй пошел не на главную диагональ, и в симметричную относительно центра клетку, если второй пошел на главную диагональ.

Теперь докажем, что второй может добиться того, чтобы  $V$  было неположительным. Для этого ему будет достаточно проследить, чтобы ни в одной из строк полученной в результате игры таблицы сумма чисел не равнялась нулю, и при этом совершенно не заботиться о столбцах.

Если первый игрок записывает в  $i$ -ю строку число  $a$ , то второй записывает в ту же строку число  $-a$ . Если же первый заканчивает заполнение числами строки, то второй выбирает любую строку и заполняет клетку в ней. При таком алгоритме во всех строках, кроме одной, будет нечетное число незаполненных клеток и сумма чисел в этих строках будет оставаться равной нулю. Последнее записанное в строку число сделает сумму ненулевой.

**117. Ответ.** Существует.

Искомым является, например, многочлен

$$P(x) = \sqrt{2}(x-1)(x-2) + x,$$

так как сумма иррационального числа  $\sqrt{2}(n-1)(n-2)$  ( $n \neq 1, 2$ ) и целого числа  $n$  иррациональна.

**118.** Отрезки  $A_1B_1, \dots, D_1A_1$  — средние линии треугольников  $ASB, \dots, DSA$ , поэтому  $A_1B_1 \parallel AB, \dots, D_1A_1 \parallel DA$  и точки  $A_1, B_1, C_1, D_1$  лежат в плоскости, параллельной  $(ABC)$  (рис. 62). Пусть  $P$  — точка пересечения отрезков  $AC_1, \dots, DB_1$ . Точки  $A_1, B_1, C, D$  лежат в одной плоскости и  $(A_1B_1C_1) \parallel (BCD)$ , поэтому  $A_1B_1 \parallel CD$ . Отсюда следует, что  $CD \parallel AB$ . Аналогично  $AD \parallel BC$ , и, значит,  $ABCD$  — параллелограмм.

Из подобия треугольников  $A_1PB_1$  и  $CPD, \dots, D_1PA_1$  и  $BPC$  следует  $A_1P : PC = \dots = D_1P : PB$ . Но по условию  $CA_1 = \dots = BD_1$ , поэтому  $PA = PB = PC = PD$ . Отсюда следует, что если  $O$  — проекция точки  $P$  на  $(ABC)$ , то  $OA = OB = OC = OD$ . Итак, около параллелограмма  $ABCD$  можно описать окружность, значит, он — прямоугольник.

**Замечания.** 1. Гомотетии с центрами  $S$  и  $P$  и коэффициентами соответственно 0,5 и -0,5 переводят  $ABCD$  в  $A_1B_1C_1D_1$  и  $O$  в  $O_1$  — центр прямоугольника  $A_1B_1C_1D_1$ , поэтому  $O_1O \perp (ABC)$  и высота пирамиды проходит через  $O$ .

2. Пирамида  $SABCD$  не обязана быть правильной: для любой пирамиды с прямоугольником в основании и высотой, проходящей через его центр, указанные в условии отрезки равны и проходят через одну точку.

**119.** Из того что  $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ , следует:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{7+y^3+z^3} + \frac{y}{7+z^3+x^3} + \frac{z}{7+x^3+y^3} \leq \\ & \leq \frac{x}{6+x^3+y^3+z^3} + \frac{y}{6+x^3+y^3+z^3} + \frac{z}{6+x^3+y^3+z^3} = \frac{x+y+z}{6+x^3+y^3+z^3}, \end{aligned}$$

и нам достаточно доказать, что  $3(x+y+z) \leq 6+x^3+y^3+z^3$ . Последнее следует из того, что при  $0 \leq t \leq 1$  выполняется  $t^3 - 3t + 2 \geq 0$ , так как  $t^3 - 3t + 2 = (t-1)^2(t+2)$ .

**120.** Утверждение задачи равносильно тому, что некоторая симметрия переводит бесконечно много узлов в такие же по цвету. Предположим противное: любая симметрия у всех,

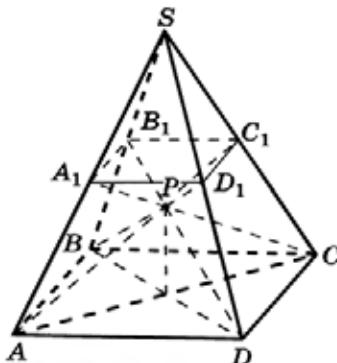


Рис. 62

кроме конечного числа, точек, которые мы назовем исключительными, меняет цвет.

Рассмотрим симметрии  $S_1$  и  $S_2$  с центрами  $O_1$  и  $O_2$  и две прямые  $l_1$ ,  $l_2$ , такие, что  $l_1 \parallel l_2 \parallel O_1O_2$ ,  $S_1(l_1) = S_2(l_1) = l_2$  и все исключительные точки симметрий  $S_1$  и  $S_2$  лежат между  $l_1$  и  $l_2$  (рис. 63). Тогда композиция симметрий  $S_1S_2$  переводит все точки вне полосы с границами  $l_1$  и  $l_2$  в точки такого же цвета и является параллельным переносом. Поэтому для любой точки  $X$  вне полосы точки  $\bar{Y}$ , такие, что  $\bar{XY} = 2k\overrightarrow{O_1O_2}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , образуют бесконечное центрально симметричное относительно точки  $X$  одноцветное множество.

**1997 – 1998**

## 8 класс

**121. Ответ.** В 2 ч дня.

Пусть скорости «Москвича» и «Жигулей» равны  $u$  и  $v$  соответственно. Из условия задачи следует, что если бы скорость «Москвича» равнялась  $2u$ , то его встреча с «Жигулями» (идущими со скоростью  $v$ ) произошла бы через час после начала движения. Отсюда следует, что если бы скорость «Жигулей» равнялась  $\frac{v}{2}$ , то их встреча с «Москвичом» (идущим со скоростью  $u$ ) произошла бы через два часа после начала движения. Значит, именно в этот момент времени (2 ч дня) при данных ( $u$  и  $v$ ) скоростях «Москвич» будет находиться на полпути от «Жигулей» до  $B$ .

**122. Ответ.** 14.

Если сложить пары чисел на противоположных гранях и эти три суммы перемножить, получится сумма в вершинах. 70 раскладывается в произведение единственным способом:  $2 \cdot 5 \cdot 7$ , откуда искомая сумма равна  $2 + 5 + 7 = 14$ .

**123.** Продолжим медиану  $BD$  до точки  $G$  так, что  $DG = BD$ .  $ABCG$  — параллелограмм (рис. 64). Из равенства  $AE = BC = AG$  следует, что  $\triangle AEG$  — равнобедренный, т. е.  $\angle AEG = \angle AGE$ . Но тогда  $\angle EBF = \angle BEF$  и  $BF = FE$ .

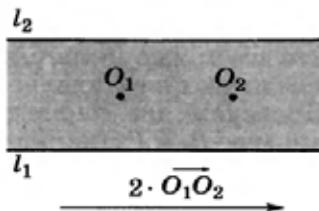


Рис. 63

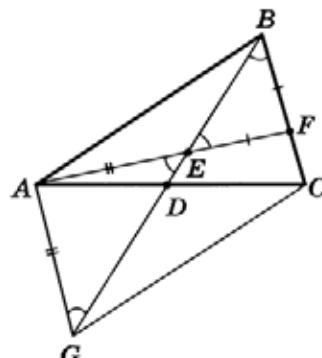


Рис. 64

**124.** Из условия задачи следует, что все прямоугольники обеих систем имеют параллельные стороны. Проведем две перпендикулярные прямые  $P_1$  и  $P_2$ , параллельные разным сторонам прямоугольника из системы. Спроектируем все прямоугольники обеих систем на прямую  $P_1$  (рис. 65).

Возможны два случая.

1. Проекции прямоугольников системы I имеют общую точку  $A$ , и проекции прямоугольников системы II имеют общую точку  $B$ . Тогда прямая, параллельная  $P_2$  и проходящая через точку  $A$ , пересекает все прямоугольники системы I, а такая же прямая, проходящая через точку  $B$ , пересекает все прямоугольники системы II. В этом случае все доказано.

2. Есть две проекции прямоугольников  $[C, D]$  и  $[E, F]$ , например из системы II, не имеющие общей точки. Тогда по условию задачи любая проекция прямоугольника из системы I должна содержать точки  $D$  и  $E$ . Следовательно, как и выше, все прямоугольники системы I можно пересечь прямой  $Q_2$ , параллельной  $P_2$ .

Рассмотрим теперь проекции на прямую  $P_2$ . Если выполняется первый случай, то все доказано. Поэтому будем считать, что либо есть проекции из системы I, не имеющие общей точки, либо такие же проекции из системы II.

В первом случае, как и выше, есть прямая  $Q_1$ , параллельная  $P_1$  и пересекающая все прямоугольники системы II. Таким образом, получим две перпендикулярные прямые  $Q_1$  и  $Q_2$ , причем  $Q_1$  пересекает все прямоугольники системы II, а  $Q_2$  — все прямоугольники системы I.

Во втором случае есть прямая  $Q_1$ , параллельная  $P_1$  и пересекающая все прямоугольники системы I.

Точка  $P$  пересечения прямых  $Q_2$  и  $Q_1$  будет общей для всех прямоугольников системы I. Все доказано.

**125. Ответ.** Не всегда. Даже трех спортсменов может не найтись.

Действительно, пусть 10 спортсменов с разным ростом имеют один вес, а 10 спортсменов с разным весом — один рост. Тогда среди любых трех спортсменов двое попадут в одну группу (с разным весом или разным ростом), а следовательно, будут иметь одинаковый рост или вес.

**126. Ответ.** Можно.

Например, расположить прожекторы в вершинах выпуклого 19-угольника и сориентировать плоскость каждого прожектора, как показано на рисунке 66.

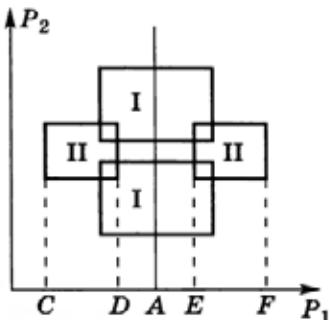


Рис. 65



Рис. 66

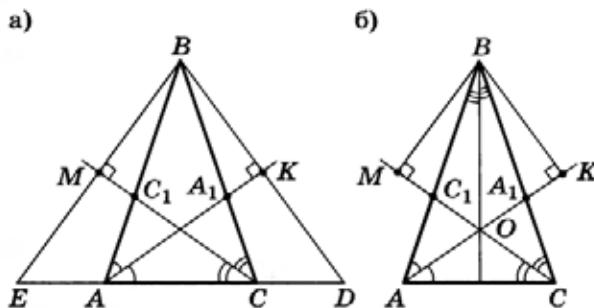


Рис. 67

**127. Первое решение.** Продолжим перпендикуляры  $BM$  и  $BK$  до пересечения с прямой  $AC$  (рис. 67, а). Треугольники  $BCE$  и  $BAD$  равнобедренные (биссектрисы  $CM$  и  $AK$  являются высотами), отсюда  $BC = CE$ ,  $BA = AD$  и  $BE = 2BM = 2BK = BD$ . Из последнего равенства  $\angle E = \angle D$ . Итак,  $\triangle BCE \sim \triangle BAD$ . Отсюда следует требуемое равенство  $AB = BC$ .

**Второе решение.** Пусть  $O$  — точка пересечения биссектрис треугольника  $ABC$  (рис. 67, б). Из равенства прямоугольных треугольников  $OBM$  и  $OBK$  с общей гипотенузой следует, что  $\angle BOC_1 = \angle BOA_1$ . Отсюда с учетом равенств  $\angle C_1OA = \angle A_1OC$  и  $\angle ABO = \angle CBO$  следует, что  $\angle BAO = \angle BCO$ , т. е.  $\angle BAC = \angle BCA$ .

**128. Ответ.** Нет.

Среди 6 последовательных чисел ровно два кратны 3. Рассмотрим пары чисел с НОД, кратным 3. В эти пары входят по крайней мере 3 числа. Соответственно есть по крайней мере 3 пары с НОД кратным 3. Противоречие.

## ▼ 9 класс

**129.** См. решение задачи 121.

**130.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$ . Опустим перпендикуляры из всех вершин на прямую  $MN$ .  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$ ,  $h_4$  — длины этих перпендикуляров (рис. 68).

Тогда  $h_1 = h_2$ ,  $h_3 = h_4$ , и  $\frac{AE}{EC} = \frac{h_1}{h_3} = \frac{h_2}{h_4} = \frac{BF}{FD}$ .

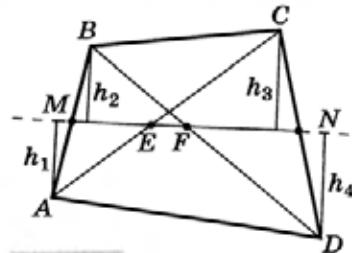


Рис. 68

**131. Ответ. Нет.**

Если есть целый корень  $x_0$ , то  $x_0 < 0$ . Обозначим  $k = -x_0$ :

$$\begin{aligned} -k^{1997} + 2k^{1996} - 3k^{1995} + \dots - 1997k + 1998 &= 0, \\ 2k^{1996} + 4k^{1994} + \dots + 1998 &= k^{1997} + 3k^{1995} + \dots + 1997k. \end{aligned}$$

Если  $k = 1$ , то  $2k^{1996} > k^{1997}$ ,  $4k^{1994} > 3k^{1995}$ , ...,  $1998 > 1997k$ ; если  $k \geq 2$ , то  $k^{1997} \geq 2k^{1996}$ ,  $3k^{1995} > 4k^{1994}$ , ...,  $1997k > 1998$ . Значит, целых корней нет.

**132. Ответ. Нет.**

Предположим, что все произведения оказались различными. Назовем числа, выписанные вдоль верхней стороны, «строкой», а числа, выписанные вдоль левой стороны, — «столбцом». Предположим, что и в «строке», и в «столбце» есть числа, отличающиеся в два раза, т. е. в «строке» стоят числа  $a$  и  $2a$ , а в «столбце» —  $b$  и  $2b$ . Но тогда произведения  $a(2b)$  и  $(2a)b$  равны, и наше предположение неверно. Теперь предположим, что ни в «строке», ни в «столбце» нет чисел, отличающихся в два раза. Пусть 1 стоит в «строке», тогда 2 стоит в «столбце» 4 — в «строке», а 8 — в «столбце». Но тогда произведения  $1 \cdot 8$  и  $2 \cdot 4$  равны, и это предположение также неверно. Пусть числа, отличающиеся в два раза, стоят в «строке», тогда если число  $a \leq 50$  стоит в «столбце», то число  $2a$  — в «строке», если же число  $2b$  стоит в «столбце», то число  $b$  — в «строке». В «столбце» обязательно найдутся либо два четных числа, либо два числа, не превышающие 50. Действительно, если бы таких чисел не нашлось, то в «столбце» было бы не более 27 чисел, а их ровно 50. Если в «столбце» есть два четных числа  $2a$  и  $2b$ , то числа  $a$  и  $b$  стоят в «строке», но тогда произведения  $(2a)b$  и  $(2b)a$  равны, т. е. этот случай невозможен.

Если же в «столбце» есть два числа  $a$  и  $b$ , не превышающие 50, то числа  $2a$  и  $2b$  стоят в «строке», но тогда произведения  $(a)2b$  и  $(b)2a$  равны, т. е. этот случай также невозможен.

Таким образом, мы показали, что наше предположение о том, что в таблице все числа могут оказаться различными, неверно.

**133. Ответ.  $2x^2 - 2$ ,  $-2x^2 + 2$ .**

По теореме Виета  $c = ax_1x_2$ ,  $b = -a(x_1 + x_2)$ . Предположим, что среди чисел нет 0 и  $m$  — наименьший из модулей этих чисел. Тогда  $|c| = |ax_1x_2| \geq 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ . Отсюда  $m \geq 2$ , но  $|c| > m^3$ , значит, разность между  $c$  и наименьшим по модулю числом больше 4. Противоречие показывает, что среди чисел есть 0. Если есть корень, равный нулю, то  $c = 0$ , а у нас все числа разные;  $a$  не нуль, иначе корней не два. Значит,  $b = 0$ . Сумма корней равна 0, а разность — не больше 4. Поэтому возможны два случая: 1) корни — 1 и  $-1$ ; 2) кор-

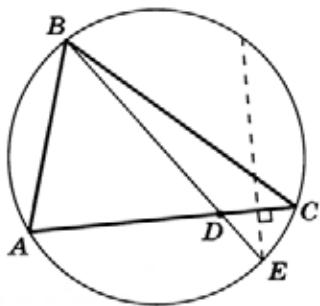


Рис. 69

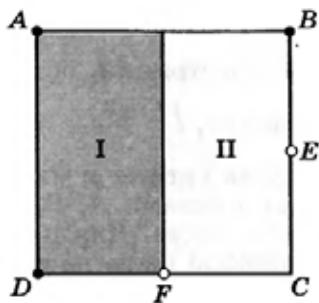


Рис. 70

ни — 2 и −2. В первом случае  $a = -c$  и эти числа соседние с −1 или 1, откуда  $a = \pm 2$ ,  $c = \mp 2$ . Во втором случае  $c = -4a$  и разница между  $a$  и  $c$  больше 4, что противоречит условию.

**134.** Продолжим сторону  $BD$  до пересечения с описанной окружностью в точке  $E$  (рис. 69). Очевидно, что  $\triangle DEC$  подобен  $\triangle DAB$ . Тогда  $DE = EC$ , а следовательно, серединный перпендикуляр к отрезку  $DC$  является и биссектрисой угла  $BEC$ , т. е. делит пополам дугу  $BC$ .

**135. Ответ.**  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Покажем сначала, что при любой раскраске в два цвета квадрата  $ABCD$  найдутся две одноцветные точки квадрата на расстоянии, не меньшем  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ . Для этого возьмем вершины  $A$ ,  $B$ ,  $D$  и середины  $E$  и  $F$  сторон  $BC$  и  $DC$  соответственно (рис. 70). Предположим противное. Тогда если  $A$  окрашена в цвет I, то  $E$  и  $F$  должны быть окрашены в цвет II, а  $B$  и  $D$  в цвет I. Но  $|BD| = \sqrt{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$  — противоречие. Значит,  $l \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Покажем теперь, как окрасить квадрат в два цвета, чтобы не было одноцветных точек на расстоянии, не меньшем  $l$ , где  $l > \frac{\sqrt{5}}{2}$ . Проведем прямую через  $F$  параллельно  $AD$ , квадрат разобьется на два равных прямоугольника с диагональю  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ . Все точки первого прямоугольника окрасим одной краской, а все точки второго, за исключением точек общей стороны, окрасим другой краской. Расстояние между любыми двумя точками в прямоугольнике не пре-

вышает длины диагонали, и поэтому нет одноцветных точек на расстоянии, большем  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

Значит,  $l \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$ .

136. Пусть гирьки и их массы обозначены по ходу часовой стрелки буквами  $A, B, C, D, E, F, G, H$  и  $I$ , начиная с некоторого места. Для первого взвешивания гирьки на чашках должны быть подобраны так, чтобы любому (из трех возможных) результату взвешивания соответствовали ровно три (из девяти возможных) положения гирьки массой 1 г. Это достигается, если на левую чашку положить гирьки  $A$  и  $C$ , а на правую —  $F$  и  $G$ .

Неравенство  $A + C > F + G$  будет означать, что искомой гирькой является  $D, E$  или  $F$ . Вторым взвешиванием можно сравнить  $C + F$  с  $D + E$ . Если при этом  $C + F > D + E$ , то  $D = 1$ , если  $C + F = D + E$ , то  $E = 1$ , а если  $C + F < D + E$ , то  $F = 1$ .

Случай, когда первое взвешивание дает неравенство  $A + C < F + G$ , разбирается аналогично.

В случае же равенства  $A + C = F + G$  искомой гирькой является  $B, C$  или  $G$ , и вторым взвешиванием мы сравним  $B + G$  с  $C + F$ . Если при этом  $B + G > C + F$ , то  $C = 1$ , если  $B + G = C + F$ , то  $B = 1$ , если  $B + G < C + F$ , то  $G = 1$ .

## 10 класс

137. Ответ.  $72^\circ$ .

Каждый аппарат производит  $\frac{1}{100}$  бутыли чистого спирта в час, поэтому за 24 ч три аппарата дадут  $\frac{72}{100}$  бутыли чистого спирта, т. е. смесь крепостью  $72^\circ$ .

138. Ответ.  $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k \leq x < \pi - \arcsin \frac{1}{3} + 2\pi k; 2\pi k - \arccos \frac{1}{3} < x \leq -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ .

В первой и третьей четвертях решений нет. Пусть  $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ , тогда  $\left[\frac{1}{\sin x}\right] = n, \left[\frac{1}{\cos x}\right] = -n, n \geq 0$ , т. е.

$$\frac{1}{\sin x} = n + \alpha, \quad \frac{1}{\cos x} = -n + \beta,$$

где  $0 \leq \alpha < 1, 0 \leq \beta < 1$ .

Отсюда

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 = \frac{1}{(n + \alpha)^2} + \frac{1}{(-n + \beta)^2}.$$

Это равенство невозможно при  $n = 0, 1$ , так как тогда  $\frac{1}{(-n+\beta)^2} \geq 1$ ,  $\frac{1}{(n+\alpha)^2} > 0$ , и при  $n \geq 3$ :  $\frac{1}{(n+\alpha)^2} \leq \frac{1}{9}$ ,  $\frac{1}{(-n+\beta)^2} \leq \frac{1}{4}$ .

Итак,  $n = 2$ , откуда  $2 \leq \frac{1}{\sin x} < 3$ ,  $-2 \leq \frac{1}{\cos x} < -1$  или  $\frac{1}{3} < \sin x \leq \frac{1}{2}$ ,  $-1 < \cos x \leq -\frac{1}{2}$ , т. е.  $\pi - \arcsin \frac{1}{3} > x \geq \frac{5\pi}{6}$ ,  $\pi > x \geq \frac{2\pi}{3}$ . Аналогично, если  $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ , то  $\left[\frac{1}{\cos x}\right] = 2$ ,  $\left[\frac{1}{\sin x}\right] = -2$ ,  $\frac{1}{3} < \cos x \leq \frac{1}{2}$ ,  $-1 < \sin x \leq -\frac{1}{2}$ , т. е.  $-\arccos \frac{1}{3} < x \leq -\frac{\pi}{3}$ ,  $-\frac{\pi}{2} < x \leq -\frac{\pi}{6}$ .

**139.** Из равенств  $NO_1 = O_1A$ ,  $MO_2 = O_2A$  и  $\angle O_1AN = \angle O_2AM$  следует, что  $\angle O_1NO_2 = \angle O_2MO_1$ , поэтому  $O_1NMO_2$  — вписанный четырехугольник (рис. 71).

Отсюда  $\angle ANE = \angle O_2O_1A = \frac{1}{2}BO_1A$ ,

т. е.  $EA = AB$ , так как угол  $ANE$  — вписанный, угол  $BO_1A$  — центральный. Аналогично  $AF = AB$ .

**140. Ответ.**  $3n - 2$ .

Покажем, как выполнить задание за  $3n - 2$  хода. Обозначим поля  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , причем стопка лежит на  $A$ . Верхнюю монету перекладываем на  $B$ , остальные — на  $C$ ; монету с  $B$  — на  $A$ ; с  $C$  все, кроме нижней, — на  $B$ , нижнюю — на  $A$ ; с  $B$  все монеты — на  $A$ . Итого:

$$1 + (n - 1) + 1 + (n - 2) + 1 + (n - 2) = 3n - 2 \text{ хода.}$$

Покажем, что меньшим числом ходов обойтись нельзя. Заметим, что нельзя поменять местами две монеты в стопке, если есть всего два поля. Ясно, что никакая монета не может все время оставаться на  $A$ , поэтому сделает не менее двух ходов. Предположим, удалось справиться менее чем за  $3n - 2$  ходов. Тогда найдутся три монеты, сделавшие ровно по два хода. По крайней мере две из них побывали на одном и том же поле  $B$  или  $C$ . Выбросим все остальные монеты и повторим в том же порядке ходы этих двух монет. Но, имея всего два поля, порядок в стопке даже для двух монет изменить невозможно. Противоречие.

**141. См. решение задачи 133.**

**142. Ответ.** Любое натуральное число, кроме 1 и 3.

Если положить в стопку два пятиугольника: один правильно, а другой перевернуть и при этом совместить циф-

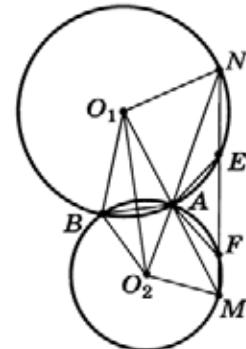


Рис. 71

ры 1—5, 2—4, 3—3, 4—2 и 5—1, то мы получим стопку из двух пятиугольников, удовлетворяющую условию. Назовем такую стопку «двойкой».

Если положить в стопку пять пятиугольников, повернутых друг относительно друга так, чтобы совместились цифры 1—2—3—4—5, 2—3—4—5—1 и т. д., то мы получим стопку из пяти пятиугольников, удовлетворяющую условию. Назовем такую стопку «пятеркой».

Любое четное число  $2k$  можно получить, положив в стопку  $k$  «двоек». Любое нечетное число  $2k + 1$  ( $k > 1$ ) можно получить, положив в стопку «пятерку» и  $k - 2$  «двойки».

Таким образом, мы показали, что можем получить стопку из любого натурального числа (кроме 1 и 3) пятиугольников, удовлетворяющую условию.

Стопка из одного пятиугольника, очевидно, не удовлетворяет условию.

В стопке из трех пятиугольников суммы чисел при двух соседних вершинах не могут быть равными, так как разность чисел у соседних вершин пятиугольника равна либо 1, либо 4, но равенство  $0 = \pm a \pm b \pm c$ , где  $a, b, c$  равны 1 или 4, невозможно. Значит, стопка не может состоять и из трех пятиугольников.

**143.** Пусть  $KM$  — отрезок, соединяющий середины ребер  $BD$  и  $AC$  тетраэдра  $ABCD$ , удовлетворяющий условию задачи, т. е.  $MK_1 = MK_2 = KM_2 = KM_1$ , где  $K_1$  и  $K_2$  — проекции точки  $K$  на плоскости  $ABC$  и  $ADC$ ,  $M_1$  и  $M_2$  — проекции точки  $M$  на плоскости  $ABD$  и  $CBD$  (рис. 72). Тогда прямоугольные треугольники  $KK_1M$ ,  $KK_2M$ ,  $MM_1K$ ,  $MM_2K$  с общей гипотенузой  $MK$  равны, следовательно,  $KK_1 =$

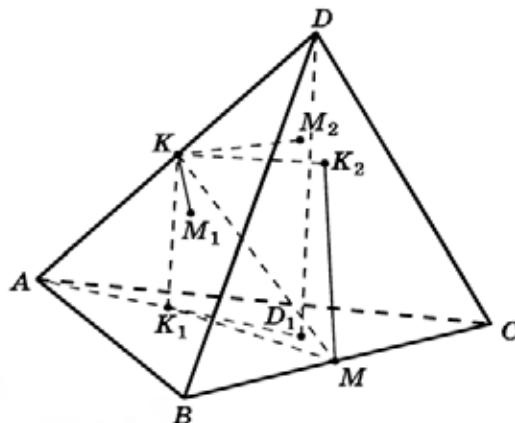


Рис. 72

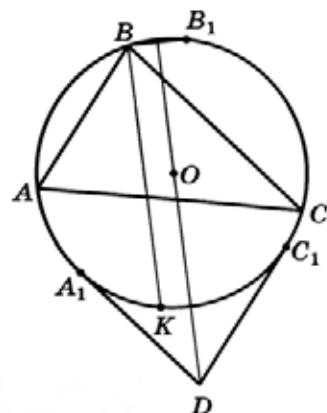


Рис. 73

$= KK_2 = MM_1 = MM_2$ . Но эти отрезки — половины высот тетраэдра, проведенных соответственно из вершин  $D, B, C$  и  $A$ . Значит, высоты тетраэдра равны. Отсюда следует равенство прямоугольных треугольников  $LL_1N, \dots, NN_2L$  ( $LL_1 = \dots = NN_2 = \frac{1}{2}H$ , где  $L$  и  $N$  — середины противоположных ребер тетраэдра,  $L_1, L_2, N_1, N_2$  — их проекции на грани,  $H$  — высота тетраэдра). Значит,  $NL_1 = \dots = LN_2$ , что и требовалось доказать.

144. См. решение задачи 136.

## 11 класс

145. Утверждение задачи вытекает из цепочки равенств

$$\begin{aligned} a_{k-1}a_k &= ((k-1)^2 + (k-1) + 1)(k^2 + k + 1) = \\ &= (k^2 - k + 1)(k^2 + k + 1) = k^4 + k^2 + 1 = a_{k^2}. \end{aligned}$$

146. Функция  $g(t) = \frac{1}{2}\left(t + \frac{2}{t}\right)$  принимает при  $t \geq 1$  значения от  $\sqrt{2}$  до  $+\infty$ . Поэтому искомой будет, например, функция

$$f(x) = g(x^2 + 1) = \frac{1}{2}\left(x^2 + 1 + \frac{2}{x^2 + 1}\right) = \frac{x^4 + 2x^2 + 3}{2x^2 + 2}.$$

147. Пусть  $K$  — точка, в которой биссектриса угла  $ABC$  пересекает описанную окружность, тогда  $K$  — середина дуги  $AC$ , не содержащей точку  $B$  (рис. 73). Отсюда следует, что  $KB_1$  — диаметр окружности, так как  $B_1$  — середина дуги  $ABC$ . Тогда  $\angle KBB_1 = 90^\circ$ . Серединным перпендикуляром к хорде  $BB_1$  является диаметр  $d$ , такой, что  $d \perp BB_1$ , т. е.  $d \parallel BK$ . Таким образом, условие задачи равносильно тому, что  $DO \parallel BK$ , где  $D$  — точка пересечения данных касательных,  $O$  — центр окружности. Но  $\angle ABC$  и  $\angle C_1DA_1$  — углы с соответственно параллельными сторонами ( $A_1$  — середина дуги  $BAC \Rightarrow A_1D \parallel BC$ , аналогично  $C_1D \parallel AB$ ) и  $DO$  — биссектриса угла  $C_1DA_1$ , следовательно,  $DO \parallel BK$ .

148. Можно считать, что все круги имеют радиус 1. Условие задачи означает, что для любого треугольника, образованного центрами кругов, одна из высот не превосходит 2. Действительно, расстояния от центров кругов до прямой не больше 1. Поэтому если  $O_1P_1, O_2P_2, O_3P_3$  — перпендикуляры, опущенные на  $l$  из центров трех кругов (рис. 74, а),  $O_1, O_2$  лежат по одну сторону от  $l$  и  $K$  — точка пересечения  $O_3P_3$  с  $O_1O_2$ , то  $P_3K \leq \max\{O_1P_1, O_2P_2\}$ , т. е.  $P_3K \leq 1$ . Но тогда если  $O_3P$  — высота треугольника  $O_1O_2O_3$ , то  $O_3P \leq O_3K \leq O_3P_3 + P_2K \leq 2$  (неравенство  $O_3K < O_3P_3 + P_2K$

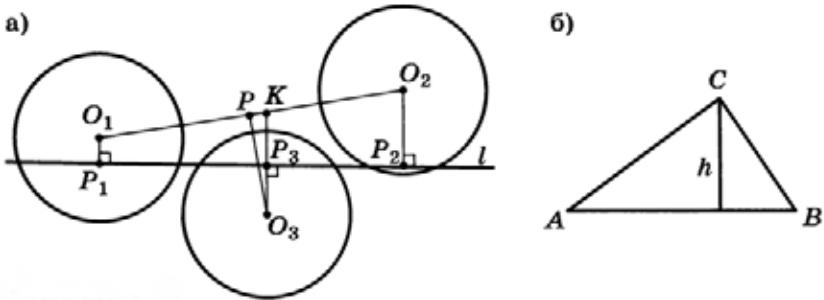


Рис. 74

имеет место в том случае, когда все точки  $O_1, O_2, O_3$  лежат по одну сторону от  $l$ ). Возьмем теперь два центра  $A$  и  $B$  кругов семейства на максимально большом расстоянии. Тогда какой бы третий центр  $C$  ни взять, в треугольнике  $ABC$  минимальная высота  $h$  — это высота, опущенная на сторону  $AB$  (рис. 74, б).

По условию задачи  $h \leq 2$ , и поэтому круг с центром в точке  $C$  и радиуса 2 пересекает прямую  $AB$ . Значит, все круги радиуса 2 будут пересекать прямую  $AB$ .

**149. Ответ.** Существуют.

Например,

$$x_1 = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{1998}}{p_1^2}, \quad x_2 = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{1998}}{p_2^2}, \quad \dots, \\ x_k = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{1998}}{p_k^2}, \quad \dots, \quad x_{1998} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{1998}}{p_{1998}^2},$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_{1998}$  — различные простые числа. Все они не являются целыми, так как числитель не делится на знаменатель, а произведение любых двух чисел  $x_i \cdot x_j$  — это произведение  $p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot \dots \cdot p_{1998}^2$  без  $p_i^2 \cdot p_j^2$ , т. е. целое число.

**150. См. решение задачи 142.**

**151. Ответ.**  $n$  четно,  $n \geq 6$ .

Из условия следует, что  $n > 2$ . Число  $n$  четно, так как при нечетных  $n$   $P_n(x) \rightarrow -\infty$  при  $x \rightarrow -\infty$ . Далее, при четных  $n$  ( $n \geq 6$ ) такой многочлен существует:

$$P_n(x) = x^{n-4}(x+2)^2(x-2)^2.$$

Покажем, что при  $n = 4$  такого многочлена нет. Пусть такой многочлен  $P_4(x)$  существует. Тогда он делится нацело на  $x$ ,  $x+2$  и  $x-2$ , значит, имеет вид  $P_4(x) = x(x+2) \times (x-2)(x-a)$ . Но тогда при  $a \leq 0$   $P_4(1) = -3(1-a) \leq -3$ , а при  $a > 0$   $P_4(-1) = -3(1+a) < -3$ .

**152.** Обозначим прямые  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$  и  $l_4$ . Если все они параллельны некоторой плоскости  $\alpha$ , то достаточно взять плоскость  $\alpha' \parallel \alpha$  так, что  $l_1 \in \alpha'$ , и в качестве полуплоскости одну из полуплоскостей, на которые  $l_1$  делит  $\alpha'$ . Иначе найдутся три прямые — без ограничения общности  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$ , — которые не параллельны одной плоскости. Пусть  $\alpha_{12}$  — плоскость, параллельная  $l_1$  и  $l_2$  и такая, что  $l_1$  и  $l_2$  лежат по разные стороны от  $\alpha_{12}$ . Аналогично определим  $\alpha_{23}$  и  $\alpha_{31}$ . Обозначим  $X_1$  двугранный угол, который ограничен  $\alpha_{12}$  и  $\alpha_{13}$  и содержит  $l_1$ . Аналогично определим  $X_2$  и  $X_3$ . Заметим, что  $X_1$  и  $X_2$  не пересекаются, так как они лежат по разные стороны от  $\alpha_{12}$  (они содержат  $l_1$  и  $l_2$ , лежащие по разные стороны от  $\alpha_{12}$ ). Аналогично не пересекаются любые два угла из  $X_1$ ,  $X_2$  и  $X_3$ .

Рассмотрим угол  $X_1$ . Так как  $l_2$  и  $l_3$  не пересекают его, а  $l_1$  в нем содержится, то любая полуплоскость с краем  $l_1$ , лежащая в этом угле, не пересекает  $l_2$  и  $l_3$ . Что же касается  $l_4$ , то она может помешать проведению полуплоскости через  $l_1$  в угле  $X_1$ , только если она пересекает  $X_1$  по отрезку (если по лучу, то достаточно взять одну из полуплоскостей, параллельных  $l_4$ , а если не пересекает, то не мешает). Итак, аналогично, рассуждая от противного,  $l_4$  пересекает  $X_2$  и  $X_3$  по отрезкам, но это значит, что три плоскости  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{23}$  и  $\alpha_{31}$  высекают на прямой  $l_4$  три отрезка, однако это не так — три точки пересечения разделят прямую на два луча и два отрезка. Противоречие. Значит, полуплоскость через какую-то из прямых  $l_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$  провести можно.

## 1998–1999

### ▼ 8 класс

**153. Ответ.** 3.

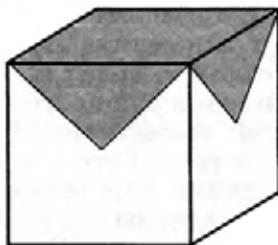
На доске должно оставаться число 5. Цифры 1 и 9 могли быть получены только в произведениях  $3 \cdot 7$  и  $1 \cdot 9$ , значит, все нечетные числа были оставлены. Еще необходимо одно четное число, значит, на доске было оставлено не менее шести чисел. Легко убедиться в том, что попарные произведения шести чисел 1, 2, 3, 5, 7, 9 оканчиваются на все цифры от 0 до 9.

**154. Ответ.** Не обязательно.

Приведем соответствующий пример.

Квадратом площади 2 можно оклеить, как это показано на рисунке 75, а, верхнюю грань куба и четверть каждой из смежных с ней граней. (Вершины квадрата распола-

а)



б)

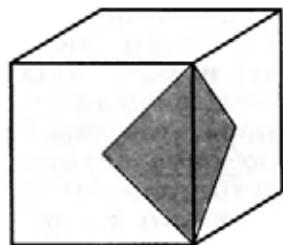


Рис. 75

гаются в центрах этих четырех боковых граней.) Точно так же квадратом площади 2 можно оклеить нижнюю грань и четверть каждой из боковых.

Каждую из четырех оставшихся областей можно оклеить квадратом площади  $\frac{1}{2}$  так, как показано на рисунке 75, б.

**155. Ответ.** Выигрывает второй.

Первыми четырьмя ходами или быстрее, если первый ему поможет, он должен распечатать 4 коробки с четным числом фишек. Поскольку нечетных коробок больше, то по крайней мере одна коробка с нечетным числом фишек останется нераспечатанной. Следовательно, последней будет распечатана именно такая коробка. Но в остальных коробках в сумме — четное число фишек, поэтому они могут кончиться только после хода второго, т. е. последнюю коробку будет вынужден распечатать первый.

**156.** Пусть  $M$ ,  $N$  и  $K$  — точки касания вписанной окружности со сторонами  $AC$ ,  $BC$  и  $AB$  ( $OM \perp AC$ ,  $ON \perp BC$ ) (рис. 76). Из равенства треугольников  $OMB_1$  и  $ONB$  (по катету и гипотенузе) следует, что  $B_1M = BN$ . Тогда  $B_1B_2 = 2B_1M = NB + BK$ . Аналогично доказывается, что  $A_1A_2 = AK + AM$  и  $C_1C_2 = CM + CN$ , откуда и получаем требуемое.

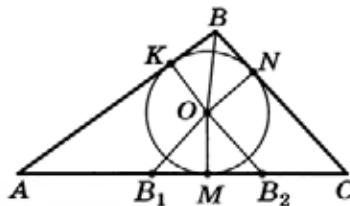


Рис. 76

**157. Ответ.** Монеты в 1, 11, 21, 31, 41, ...,  $10n + 1$  крон.

В самом деле, если взять 2, 3, 4, ..., 10 таких монет, то получится сумма, оканчивающаяся на цифру 2, 3, 4, ..., 0 соответственно, т. е. большую монету не более чем десятью так разменять невозможно. С другой стороны, любую сумму  $S$  можно набрать не более чем десятью монетами, взяв самую большую монету, не превосходящую  $S$ , и добавив не более 9 однокроновых монет.

**158. Ответ.**  $60^\circ$ .

Пусть прямая, по которой перегибали треугольник, пересекает стороны  $AC$  и  $BC$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно, а вершина  $C$  попала в точку  $C'$  на стороне  $AB$  (рис. 77). Тогда  $\angle MC'N = \angle C$ . В равнобедренном треугольнике  $MAC'$   $\angle MC'A = \frac{180^\circ - \angle A}{2}$ . Аналогично,  $\angle NC'B = \frac{180^\circ - \angle B}{2}$ . Рассмотрев развернутый угол с вершиной  $C'$ , получаем

$$\frac{180^\circ - \angle A}{2} + \angle C + \frac{180^\circ - \angle B}{2} = 180^\circ,$$

откуда  $2\angle C - \angle A - \angle B = 0^\circ$ . Прибавив к этому равенству  $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$ , получим  $3\angle C = 180^\circ$ , откуда  $\angle C = 60^\circ$ .

**159. Ответ.** Да, после 4900 ходов.

После хода первого ладьи находятся на клетках разного цвета, поэтому достаточно проверить, что будет после хода второго. Но после хода второго положение его ладьи получается поворотом на  $90^\circ$  положения ладьи первого, поэтому совпасть они могут только в центре, т. е. после того, как оба сделают по  $\frac{99^2 - 1}{2} = 4900$  ходов.

**160. Ответ.** Можно.

Например, можно взять все прямые вида  $y = a_i x + a_i^2$  с различными целыми  $a_i$ . Прямые  $y = ax + a^2$  и  $y = bx + b^2$  пересекаются в точке с абсциссой  $x = \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$ . Это число целое, поэтому ордината тоже целая. Теперь достаточно выбрать такие значения  $a_i$ , чтобы все суммы  $a_i + a_j$  были различны. Достаточно взять, например,  $a_i = 10^i$ .

## ▼ 9 класс

**161. Ответ.**  $m = 2$ ,  $m = 8$ .

Числа, записываемые одной и двумя цифрами 6, представимы в указанном виде:  $2^2 + 2 = 6$ ,  $8^2 + 2 = 66$ . Если же число  $m^2 + 2$  содержит не менее трех цифр 6, то  $m^2$  оканчивается на 664, т. е. является числом, делящимся на 8. Отсюда следует, что  $m$  делится на 4, значит,  $m^2$  делится на 16. Но числа 664 и  $**...*6664$  на 16 не делятся. Противоречие.

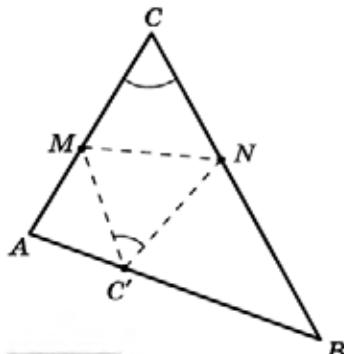


Рис. 77

**162.** Пусть  $AM$  — биссектриса треугольника  $ABC$  (рис. 78). Тогда  $\angle MKL = \angle MAB$  как углы, опирающиеся на одну дугу. Но по условию  $KL \parallel BC$ . Поэтому  $\angle KMC = \angle MKL = \angle MAL = \angle MAK = \angle KMC'$ , где  $C'M$  — касательная к окружности в точке  $M$ . Отсюда следует совпадение прямых  $CB$  и  $C'M$ , т. е.  $BC$  — касательная к окружности.

**163. Ответ.** Не может.

Рассмотрим двух произвольных велосипедистов А и Б. Пусть А ездит быстрее Б. Рассмотрим подвижную дугу, идущую от А до Б в направлении движения. В момент обгона положим ее равной всему кругу (и фляжка находится на ней), а далее ее длина будет сокращаться, пока не станет равной 0 в момент следующего обгона. В какой-то момент фляжка вышла за пределы дуги, значит, она прошла через один из концов и тем самым побывала у А или Б.

**164. Ответ.** Не существует.

Рассмотрим произвольную последовательность  $a_n$  вида  $a_n = n^3 + a^3$ . Пусть  $d$  — простой делитель числа  $(a+1)^3 - a^3$ . Рассмотрим члены последовательности с номерами  $n = kd - a - 1$  и  $n + 1 = kd - a$ , где натуральное число  $k$  выбирается так, что  $kd > a + 1$ . Имеем  $a_n = (kd - a - 1)^3 + a^3 = d \cdot m - (a+1)^3 + a^3 = dm - ((a+1)^3 - a^3)$  — делится на  $d$  и  $a_{n+1} = (kd - a)^3 + a^3 = d \cdot s$  — делится на  $d$ .

**165. Ответ.**  $a = d$ ,  $b = -2d$ ,  $c = 4d$ ,  $d \neq 0$ .

Заметим вначале, что обе параболы проходят через точку  $N(1; a+b+c)$ . Пусть точка  $A(x_0; y_0)$  — общая вершина парабол, тогда замена  $x' = x - x_0$ ,  $y' = y - y_0$  сдвигает вершины парабол в точку  $O'$  — начало координат, т. е. мы получаем параболы  $y' = ax'^2$  и  $y' = bx'^2$ , проходящие через общую точку  $N'(1 - x_0; a + b + c - y_0)$ .

В силу условия  $a \neq b$  эти параболы имеют одну общую точку  $O'$ , т. е.  $N' = O'$ , и, значит, точка  $N$  является вершиной исходных парабол.

Отсюда  $-\frac{b}{2a} = -\frac{c}{2b} = 1$  и  $c - \frac{b^2}{4a} = a - \frac{c^2}{4b}$ , т. е.  $b = -2a$ ,  $c = 4a$ .

**166.** Из условия следует, что точки  $A_4$  и  $A_8$  лежат на окружности, построенной на  $A_1A_5$  как на диаметре (рис. 79). Отсюда следует, что  $A_1A_5 \geq A_4A_8$ , причем равенство достигается только в том случае, когда  $A_4A_8$  также является

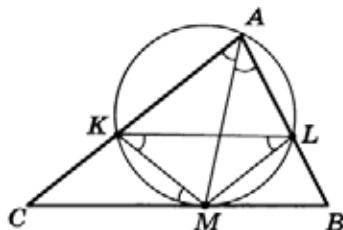


Рис. 78

диаметром этой окружности. Далее, аналогично  $A_4A_8 \geq A_3A_7 \geq \dots \geq A_2A_6 \geq A_1A_5$ . Итак, все неравенства являются равенствами и эти отрезки — равные диаметры с общей серединой, что и требовалось доказать.

167. Достаточно выявить два самых легких камня и один самый тяжелый и сравнить их.

Разобьем камни на 4 пары и сравним в парах: легкие положим в одну кучку, тяжелые — в другую. Разобьем 4 легких камня на 2 пары и сравним. Наконец, сравним более легкие камни в этих парах. За 7 взвешиваний нашли самый легкий камень Л. Кроме того, самый легкий из оставшихся — это один из трех, сравнивавшихся с Л. Выявим его за два взвешивания. Самый тяжелый — один из 4 камней тяжелой кучки. Выявим его за 3 взвешивания. Итого  $7 + 2 + 3 = 12$  взвешиваний, плюс одно сравнение двух легких с тяжелым.

168. Если доску повернуть вокруг центра на  $90^\circ$  по часовой стрелке, то фишка второго попадет на некоторую другую клетку; назовем эту клетку *тенью*. После каждого хода второго тень тоже передвигается на соседнюю клетку. Ясно, что, если первый наступит на тень, он выиграет. Докажем, что он может это сделать всегда, если своим ходом первый ходит на поле того же цвета, что и тень (а это, очевидно, выполняется).

Пусть для определенности фишка первого стояла вначале в левом нижнем углу, а фишка второго — в правом верхнем. Проведем прямую через их центры и будем рассматривать только диагонали, параллельные этой прямой. Тень вначале находится в правом нижнем углу. Пусть первый ходит вправо до тех пор, пока его фишка не окажется на одной диагонали с тенью. При этом тень окажется выше и правее фишки первого. Далее пусть первый ходит всегда на ту же диагональ, что и тень, выбирая, когда можно, из двух клеток ту, которая ближе к тени. При этом если тень пошла вверх или вправо, то после ответного хода первого расстояние не сократится, в противном случае расстояние сократится. Поскольку доска ограничена, все время вправо и вверх убегать нельзя, расстояние между фишкой первого и тенью рано или поздно начнет сокращаться и в конце сократится до нуля, что и требовалось.

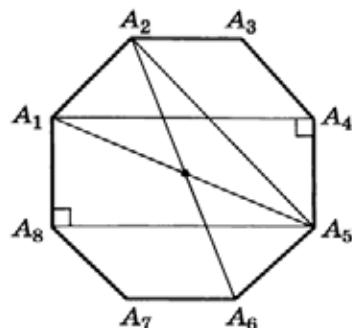


Рис. 79

169. Ответ.  $x = 2\pi k$ ,  $x = \pi + 2\pi k$ ,  $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ .

Пусть  $\frac{1}{\cos x} = n$ ,  $\frac{1}{\cos 2x} = m$ , тогда  $\cos x = \frac{1}{n}$ ,  $\cos 2x = \frac{1}{m}$ , и, значит,  $\frac{2}{n^2} - 1 = \frac{1}{m}$ . Это уравнение имеет целые решения  $n = \pm 1$ ,  $m = 1$ ;  $n = \pm 2$ ,  $m = -2$ . Если же  $|n| \geq 3$ , то  $\frac{1}{m} = \frac{2}{n^2} - 1 \leq \frac{2}{9} - 1 < -\frac{1}{2}$ , откуда  $-2 < m < 0$ , т. е.  $m = -1$ , что невозможно, так как  $\frac{2}{n^2} \neq 0$ .

170. См. решение задачи 163.

171. Пусть  $KM$  — отрезок, делящий площадь треугольника  $ABC$  пополам,  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $AK = x$ ,  $AM = y$ ,  $KM = l$  (рис. 80, а). Тогда  $xy = \frac{1}{2}bc$ , так как  $S_{AKM} = \frac{1}{2}S_{ABC}$  и  $l^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A$ . Из неравенства  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  следует  $l^2 \geq 2xy(1 - \cos A) = 2bc \sin^2 \frac{A}{2}$ , поэтому для доказательства утверждения задачи достаточно показать, что  $bc \sin^2 \frac{A}{2} > r^2$ .

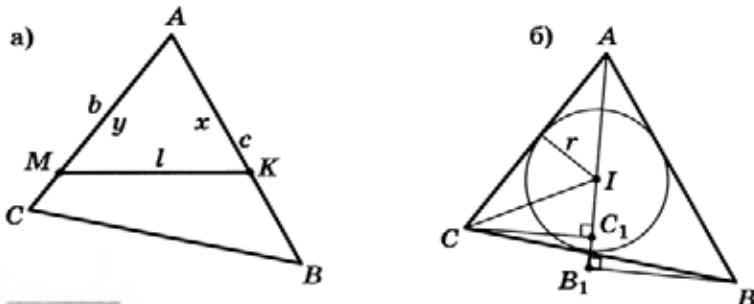


Рис. 80

Пусть  $I$  — центр вписанной окружности,  $C_1$  и  $B_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $C$  и  $B$  на прямую  $AI$  (рис. 80, б). Тогда  $\angle CIB_1 = \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C < \frac{\pi}{2}$ , откуда следует, что точка  $C_1$  лежит на  $AI$  дальше, чем  $I$ , поэтому  $r < CC_1 = b \sin \frac{A}{2}$ . Аналогично  $r < BB_1 = c \sin \frac{A}{2}$ . Перемножая эти неравенства, получаем требуемое.

172. Ответ. 2.

Заметим вначале, что числа  $x_3 = 81 + 1998$  и  $x_4 = 256 + 1998$  делятся на 7.

Покажем, что в последовательности не может быть трех подряд идущих членов  $x_{n-1}$ ,  $x_n$ ,  $x_{n+1}$ , у которых НОД =  $d > 1$ . Пусть это не так, т. е.  $x_{n-1} = ad$ ,  $x_n = bd$ ,  $x_{n+1} = cd$ , где  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  — натуральные числа. Тогда  $x_n - x_{n-1} = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1 = d(b-a)$ ,  $x_{n+1} - x_n = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1 = d(c-b)$ , значит,  $d(c+a-2b) = 12n^2 + 2$  и  $d(c-a) = 8n^3 + 8n$ . Среди чисел  $x_{n-1}$ ,  $x_n$ ,  $x_{n+1}$  по крайней мере одно нечетно, следовательно,  $d$  нечетно, поэтому  $6n^2 + 1 = dm$ ,  $n^3 + n = dl$ . Первое равенство означает, что числа  $d$  и  $n$  взаимно просты, поэтому  $n^2 + 1 = ds$ . Отсюда  $5n^2 = d(m-s)$ , и, значит, 5 делится на  $d$ , т. е.  $d = 5$ . Но из равенства  $n^4 + 1998 = n^4 - 1 + 1999 = (n^2 + 1)(n^2 - 1) + 1999$  следует, что  $x_n$  дает остаток 3 при делении на 5, если  $n$  делится на 5, и остаток 4, если  $n$  не делится на 5. Противоречие. Значит,  $\text{НОД}(x_{n-1}, x_n, x_{n+1}) = 1$ .

**173.** См. решение задачи 165.

**174.** Пусть  $K$ ,  $L$ ,  $M$  — основания перпендикуляров (рис. 81). Требуется доказать, что  $\angle KLO + \angle KMO = 180^\circ$ , т. е. что  $\angle KMO = \angle KLB$ . Обозначим их за  $\alpha$ ,  $\beta$ . Но по условию точки  $K$  и  $L$  лежат на окружности, построенной на  $AB$  как на диаметре, поэтому  $\beta = \angle KAB$ . Аналогично  $K$  и  $M$  лежат на окружности с диаметром  $AC$  и центром  $O$ , поэтому  $\angle KOM = \pi - 2\alpha \Rightarrow \angle KAM = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle MAD = \alpha$ . Для завершения доказательства осталось заметить, что  $\angle KAB = 90^\circ - \angle ABC$  и  $\angle MAD = 90^\circ - \angle ADC$ . Другие случаи расположения точек  $K$ ,  $L$  и  $M$  рассматриваются аналогично.

**175. Ответ.** Выигрывает первый игрок.

Выигрышная стратегия для первого игрока такова: каждый раз выбирать для своего хода наименьшее из написанных на доске нечетных чисел, а если таковых нет — произвольное (четное) число.

Если первый игрок следует своей стратегии, то после первого его хода образуется одно нечетное число, после хода второго игрока — 0 или 2 нечетных. Следовательно, после хода первого вновь будет ровно одно нечетное число.

При этом не может появиться пара  $(2k-1, 2k)$ , так как она может возникнуть только из пары  $(2k-1, 2k+1)$ , а первый игрок выбирает для хода меньшее из двух написанных нечетных чисел. Значит, после хода второго игрока вновь будет 0 или 2 нечетных числа (ровно одно могло

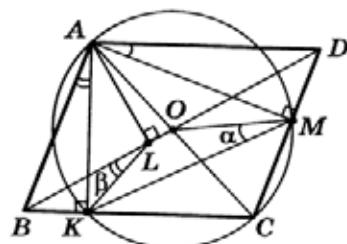


Рис. 81

бы появиться, если бы перед каждым ходом была пара  $(2k-1, 2k)$  и т. д. Значит, после каждого хода первого игрока число нечетных чисел равно 1 и он не проигрывает.

176. См. решение задачи 168.

## 11 класс

177. Ответ.  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

Пусть  $\operatorname{tg} x = n$ ,  $\operatorname{tg} 2x = m$ , тогда  $\frac{2n}{1-n^2} = m$ , и, значит,  $-mn = \frac{2n^2}{n^2-1} = 2 + \frac{2}{n^2-1}$ . Отсюда следует, что число  $A = \frac{2}{n^2-1}$  целое.

При  $n = 0$   $A = -2$  — целое, при  $|n| = 1$   $A$  не существует, при  $|n| \geq 2$   $0 < A < 1$ , т. е.  $A$  — нецелое.

178. Первое решение. Пусть  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  — данные параболы,  $KL$  — общая касательная к  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ ,  $\Pi_3$  касается  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  в точках  $A$  и  $B$  (рис. 82, а).

Пусть  $l$  — касательная к  $\Pi_3$ , параллельная  $KL$ ,  $C$  — точка касания. Тогда гомотетия  $H_1$  с центром в точке  $A$  и коэффициентом  $k = -a$  переводит  $\Pi_1$  в  $\Pi_3$ , при этом касательная  $KL$  к  $\Pi_1$  переходит в параллельную касательную к  $\Pi_3$ , т. е. в  $l$ . Следовательно, гомотетия  $H_1$  переводит  $K$  в  $C$ . Аналогично гомотетия  $H_2$  с центром в точке  $B$  и коэффициентом  $k = -a$  переводит  $L$  в  $C$ . Итак,  $CA : AK = CB : BL = a$ , и, значит,  $AB \parallel KL$ .

Второе решение. Вычтем из всех трех квадратных трехчленов функцию  $f(x) = a_3x + b_3$ , где  $y = a_3x + b_3$  — уравнение прямой  $AB$ . Тогда получим новые параболы  $\Pi'_1$ ,  $\Pi'_2$ ,  $\Pi'_3$  (рис. 82, б). При этом  $\Pi'_1$  и  $\Pi'_2$  по-прежнему будут касаться параболы  $\Pi'_3$ , так как у этих пар парабол по-прежнему будет ровно по одной общей точке  $A'$  и  $B'$ .

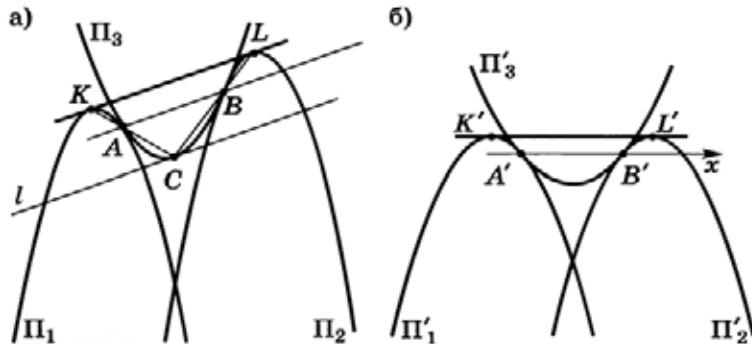


Рис. 82

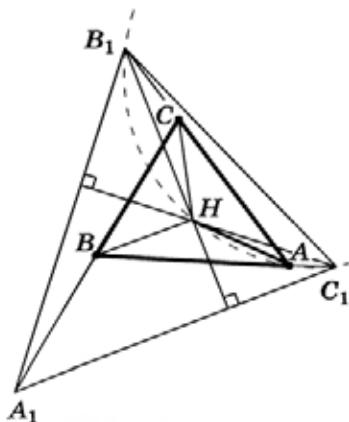


Рис. 83

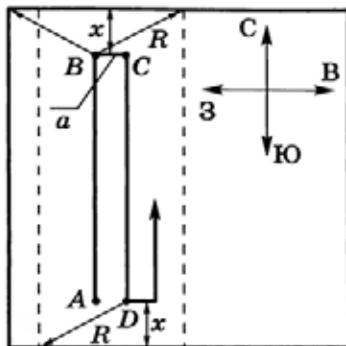


Рис. 84

Точки  $A'$  и  $B'$  лежат на оси  $Ox$ , поэтому рисунок симметричен относительно серединного перпендикуляра к отрезку  $A'B'$ . Из этого следует, что  $K'L' \parallel A'B'$ , и, значит,  $KL \parallel AB$ .

**179.** Пусть  $H$  — ортоцентр треугольника  $A_1B_1C_1$ . Тогда  $B_1H \perp A_1C_1$ ,  $C_1H \perp A_1B_1$ , поэтому  $\angle B_1HC_1 = \pi - \angle B_1A_1C_1$  (рис. 83). Но по условию  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ , поэтому  $\angle B_1HC_1 = \angle B_1AC_1$ , и, следовательно, точки  $B_1$ ,  $H$ ,  $A$  и  $C_1$  лежат на одной окружности. Отсюда следует, что  $\angle CAH = \angle B_1C_1H$ . Аналогично  $\angle ABH = \angle C_1A_1H$ ,  $\angle BCH = \angle A_1B_1H$ . Таким образом,  $\angle ACH = \angle ACB - \angle BCH = \angle A_1C_1B_1 - \angle A_1B_1H = \angle B_1C_1H = \angle CAH$ . Итак,  $\angle ACH = \angle CAH$ , следовательно,  $HA = HC$ . Аналогично  $HA = HB$ , т. е.  $HA = HB = HC$ . Утверждение доказано.

**180. Ответ.** Сможет.

Если Таня увидит таракана, то она, очевидно, его поймает.

Пусть стены комнаты для определенности идут с севера на юг и с запада на восток. Будем загонять таракана на восток, не давая ему прорваться на запад, следующим способом (рис. 84).

Пусть Таня пойдет сначала с юга на север (из  $A$  в  $B$ ) и, не доходя до стены  $x$  м, повернет на восток и пройдет  $a$  м ( $BC$ ), после чего повернет на юг и опять подойдет к южной стене на расстояние  $x$  м. Итак, из  $A$  в  $D$  Таня пройдет  $(20 - 2x) \cdot 2 + a$  м, затратив на это  $(20 - 2x) + \frac{a}{2}$  с. При этом нам необходимо, чтобы за это время таракан не успел пре-

одолеть освещаемую полосу шириной  $2\sqrt{R^2 - x^2} - a$ . Значит, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$(20 - 2x) + \frac{a}{2} < \frac{2\sqrt{R^2 - x^2} - a}{0,2}. \quad (1)$$

Рассмотрим вместо неравенства (1) неравенство

$$20 - 2x < 10\sqrt{R^2 - x^2}. \quad (2)$$

Если мы найдем какое-нибудь решение  $x_1$  неравенства (2), то мы, очевидно, сможем подобрать такое  $a$ , что  $x_1$  будет решением (1).

Решим неравенство (2):

$$10 - x < 5\sqrt{4 - x^2}; \quad 100 + x^2 - 20x < 100 - 25x^2;$$

$$26x^2 - 20x < 0; \quad x\left(x - \frac{10}{13}\right) < 0.$$

Любое  $x_1$  из промежутка  $\left(0; \frac{10}{13}\right)$  (например, можно

взять  $x_1 = \frac{1}{2}$  м,  $a = 0,05$  м) удовлетворяет условию. Таким образом, Таня может загнать таракана на восток, не дав ему убежать на запад.

**181.** Так как старшие коэффициенты трехчленов различны, то разности — невырожденные квадратные трехчлены, а так как они имеют по одному корню, то они являются квадратами линейных функций с точностью до знака:

$$f_1 - f_2 = \varepsilon_1 l_1^2, \quad f_2 - f_3 = \varepsilon_2 l_2^2, \quad f_3 - f_1 = \varepsilon_3 l_3^2, \quad \text{где } \varepsilon_i = \pm 1.$$

Какие-то два из  $\varepsilon_i$ , идущие подряд или по циклу, равны между собой. Пусть, например, это первый и второй и пусть они равны 1 (остальные случаи совершенно аналогичны). Тогда имеем

$$\varepsilon_3 l_3^2 = f_3 - f_1 = -(f_1 - f_2) - (f_2 - f_3) = -l_1^2 - l_2^2,$$

но последнее выражение отрицательно, если корни у  $l_1$  и  $l_2$  различны, и тогда  $f_3 - f_1$  не будет иметь корней вовсе. Значит,  $l_1$  и  $l_2$  имеют общий корень, и из предыдущей формулы следует, что это также корень  $l_3$ . Что и требовалось доказать.

**182.** См. решение задачи 175.

**183.** Пусть  $A$  и  $C_1$ ,  $B$  и  $D_1$ ,  $C$  и  $A_1$ ,  $D$  и  $B_1$  — противоположные вершины данного многогранника,  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  — соответственно точки пересечения диагоналей граней  $AA_1B_1B$ ,  $B_1C_1D_1A_1$ ,  $C_1D_1DC$ ,  $ABCD$  (рис. 85). Отрезки  $O_1O_3$  и  $O_2O_4$  пересекаются, поэтому они лежат в одной плоскости,

значит, прямые  $O_1O_2$  и  $O_3O_4$  также лежат в одной плоскости. Но эти прямые лежат в плоскостях  $O_1A_1O_2$  и  $O_3D_1O_4$ , пересекающихся по прямой  $BC_1$ , поэтому либо прямые  $O_1O_2$ ,  $O_3O_4$  и  $BC_1$  параллельны между собой, либо проходят через одну точку. Рассмотрев плоскости  $O_1B_1O_2$  и  $O_3CO_4$ , то же самое мы можем утверждать про тройку прямых  $O_1O_2$ ,  $O_3O_4$  и  $AD_1$ . Итак, либо прямые  $BC_1$  и  $AD_1$  проходят через одну точку — точку пересечения прямых  $O_1O_2$  и  $O_3O_4$ , либо они параллельны этим прямым. И в том и в другом случае прямые  $BC_1$  и  $AD_1$  лежат в одной плоскости, значит, прямые  $AC_1$  и  $BD_1$  пересекаются.

Аналогично доказывается, что пересекается любая пара диагоналей. Но все диагонали, очевидно, не лежат в одной плоскости, поэтому они пересекаются в одной точке.

**184.** См. решение задачи 160.

## 1999–2000

### 8 класс

**185. Ответ.**  $13 \cdot 13 = 169$ ,  $31 \cdot 31 = 961$ .

Из первого уравнения следует, что  $M = 1$ , а из второго, что  $A \leq 3$ . Значит,  $A$  равно 2 или 3. Но  $12 \cdot 12 = 144$ ,  $I = P$  — противоречие.  $A = 3$  дает ответ.

**186. Ответ.** 2.

Операция  $a, b \rightarrow b - a$  сохраняет четность суммы чисел, записанных на доске. Вначале она была четна, поэтому в конце может остаться число, не меньшее 2. Покажем, как получить 2:  $1, 2 \rightarrow 1$ ;  $18, 20 \rightarrow 2$ ;  $1, 2 \rightarrow 1$ ;  $17, 19 \rightarrow 2$ ; ...;  $6, 8 \rightarrow 2$ ;  $1, 2 \rightarrow 1$ ;  $5, 7 \rightarrow 2$  (остались числа 1, 2, 3, 4);  $1, 2 \rightarrow 1$ ;  $1, 3 \rightarrow 2$ ;  $2, 4 \rightarrow 2$ .

**187.** Проведем еще 2 разреза, центрально симметричных уже сделанным (рис. 86).

Куски 1, 2, 6 и 9 достались Малышу, а симметричные им 7, 8, 4 и 3 — Карлсону, которому досталась еще и серединка 5.

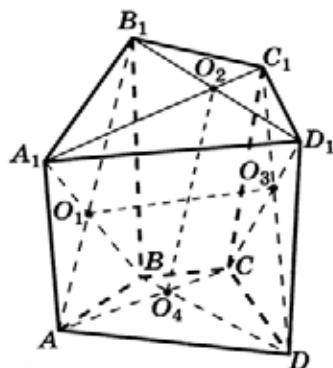


Рис. 85

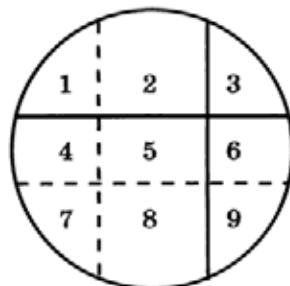


Рис. 86

**188. Ответ.** Выигрывает второй.

Укажем стратегию, следуя которой, второй игрок гарантировует свой выигрыш.

Карточки с числами  $a$  и  $b$  назовем дополняющими друг друга, если  $ab = 2000$ . Ясно, что для каждой карточки имеется ровно одна ее дополняющая, а второй игрок в ответ на ход первого всегда сможет брать карточку, дополняющую карточку, взятую первым. Покажем, что второй тогда не может проиграть.

В самом деле, допустим, что у второго игрока оказались карточки с числами  $c$  и  $d$ , где  $c$  делится на  $d$ . Но тогда еще до этого у первого игрока были карточки с числами  $\frac{2000}{c}$  и  $\frac{2000}{d}$ , второе из которых делится на первое, так как

$$\frac{2000}{d} : \frac{2000}{c} = \frac{c}{d}.$$

Остается заметить, что игра не может закончиться вничью. Действительно, первый игрок обязательно возьмет карточку с числом 1 или с числом 2000, которая при наличии любой другой карточки приведет к проигрышу.

**189. Ответ. Нет.**

$S = 21$  — сумма всех чисел от 1 до 6. Если  $a$  и  $b$  стоят на противоположных гранях, то  $S - a - b$  должно делиться как на  $a$ , так и на  $b$ . Если  $a = 6$ , то  $15 - b$  делится на 6, т. е. против  $b$  стоит 3. Если  $a = 5$ , то  $16 - b$  делится на 5, значит,  $b = 1$  (6 уже занято).

Наконец, если  $a = 4$ , то  $17 - b$  делится на 4, что невозможно, так как числа 1 и 5 уже заняты.

**190. Ответ. 25 км.**

Посчитаем сумму расстояний от синего столба до всех остальных. Если всего на дороге  $2n + 1$  столб, то сумма расстояний от синего столба до остальных равна  $2(1 + 2 + \dots + n) = n(n + 1)$  км (рис. 87, а), а если на дороге  $2n$  столбов, то эта сумма равна  $2(1 + \dots + (n - 1)) + n = n(n - 1) + n = n^2$  км (рис. 87, б).

Назовем числа вида  $n^2$  и  $n(n - 1)$  отмеченными.

Сумма расстояний от синего столба до белых не меньше предыдущего отмеченного числа, так как из суммы исключается расстояние между синим и желтым столбами. В самом деле, пусть от синего столба до желтого  $k$  км. Если на дороге  $2n + 1$  столб, то  $1 \leq k \leq n$ , и  $n(n + 1) - k \geq n(n + 1) - n = n^2$ , а если на дороге  $2n$  столбов, то  $1 \leq k \leq n$ , и  $n^2 - k \geq n^2 - n = n(n - 1)$ . Значит, зная сумму расстояний от синего столба до белых, можно узнать количество столбов — оно соответствует самому маленькому из отмеченных чисел, большему нашей суммы.

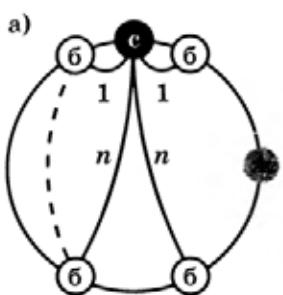


Рис. 87

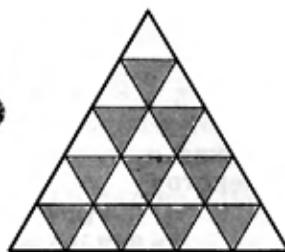
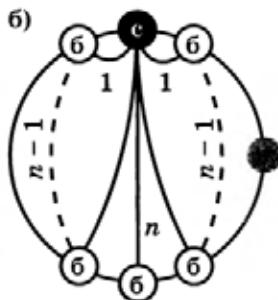


Рис. 88

Если сумма равна 2000, то это число  $2025 = 45^2$ , ибо  $44 \cdot 45 = 1980 < 2000$ . Значит, расстояние от синего столба до желтого равно  $2025 - 2000 = 25$  км.

**191.** Представим, что большой треугольник лежит на плоскости основанием вниз. Рассмотрим все малые треугольники, которые лежат вершинами вниз. На рисунке 88 они закрашены (рисунок приведен для 25 треугольников). Все их стороны лежат внутри большого треугольника и граничат со сторонами треугольников, лежащих основанием вниз. Отсюда следует, что внутри большого треугольника синих, красных и белых сторон малых треугольников одинаковое количество (равное удвоенному их числу у закрашенных треугольников). Значит, на границе их тоже одинаковое число.

**192.** Пусть  $M$  — середина  $BC$ ,  $N$  — середина  $AC$ , а прямые  $MN$  и  $BD$  пересекаются в точке  $K$  (рис. 89). Тогда

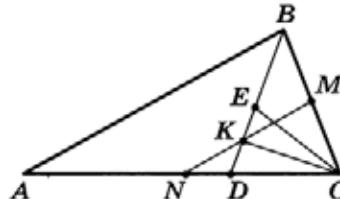


Рис. 89

$$\angle MKB = \angle KBA = \angle KBM,$$

и, следовательно, треугольник  $BMK$  равнобедренный. Теперь из равенств  $BM = MK = MC$  легко получить, что угол  $BKC$  прямой. Итак, в равнобедренном треугольнике  $ECD$  отрезок  $CK$  является высотой, а значит, и медианой.

## ▼ 9 класс

**193.** Пусть  $a^3 - 1 = 2^k$ , тогда из  $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$  следует, что сомножитель  $a^2 + a + 1$  — степень двойки. Но это число нечетно при любом натуральном  $a$  и не равно 1. Противоречие.

194. Приведем левую часть к общему знаменателю

$$\begin{aligned} & \frac{a^2(b+c) + b^2(c+a) + c^2(a+b)}{(a+b)(b+c)(a+c)} = \\ & = \frac{a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c}{2abc + a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c}. \end{aligned}$$

Так как  $a, b, c > 0$ , исходное неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned} & 4(a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c) \geqslant \\ & \geqslant 3(2abc + a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c), \\ & a^2b + b^2a + b^2c + c^2b + c^2a + a^2c - 6abc \geqslant 0, \\ & (a^2b + c^2b - 2abc) + (b^2a + c^2a - 2abc) + (b^2c + a^2c - 2abc) \geqslant 0, \\ & b(a-c)^2 + a(b-c)^2 + c(b-a)^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Что верно, так как все слагаемые неотрицательны.

195. Пусть диагонали трапеции пересекаются в точке  $O$ , а отрезки  $AC$  и  $KM$  — в точке  $R$  (рис. 90). По теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{KP}{PN} = \frac{KR}{RM} = \frac{DO}{OB}.$$

Аналогично  $\frac{QN}{QK} = \frac{CO}{OA}$ . Из

подобия треугольников  $AOB$  и  $COD$  получаем, что  $\frac{DO}{OB} = \frac{CO}{OA}$ ,

следовательно,  $\frac{KP}{PN} = \frac{QN}{QK}$ , т. е.  $\frac{KP}{PQ + QN} = \frac{QN}{KP + PQ}$ . Из последнего равенства вытекает, что  $KP = QN$ .

**Замечание.**  $\triangle KRP = \triangle QSN$ .

196. Заметим прежде всего, что из одного города выходит не более двух дорог. Выделим из одного города и будем идти, зачеркивая пройденные дороги. Тогда либо мы вернемся в исходную точку, и образуется цикл (рис. 91, а), либо мы не вернемся, и образуется путь (рис. 91, б).

Из условия следует, что любой цикл нечетной длины должен содержать не менее 5 дорог. Пусть в стране  $m$  пу-

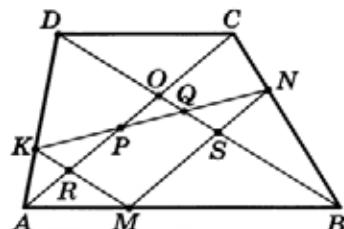


Рис. 90

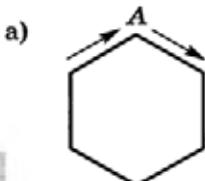


Рис. 91

тей и циклов четной длины, содержащих  $k_1, \dots, k_m$  дорог соответственно, и  $n$  циклов нечетной длины, содержащих  $l_1, \dots, l_n$  дорог соответственно. Тогда в любом пути и четном цикле с  $k_i$  дорогами можно выбрать не менее  $\frac{k_i}{2}$  дорог, никакие две из которых не выходят из одного города, а в любом нечетном цикле с  $l_i$  дорогами можно выбрать  $\frac{l_i - 1}{2}$  дорог, никакие две из которых не выходят из одного города. Таким образом, в стране найдется по крайней мере

$$S = \frac{k_1}{2} + \dots + \frac{k_m}{2} + \frac{l_1 - 1}{2} + \dots + \frac{l_n - 1}{2} = \\ = \frac{k_1 + \dots + k_m + l_1 + \dots + l_n}{2} - \frac{n}{2}$$

дорог, никакие две из которых не выходят из одного города. Тогда из равенства  $k_1 + \dots + k_m + l_1 + \dots + l_n = 100$  следует, что  $S = 50 - \frac{n}{2} \geq 40$ , так как все  $n$  циклов имеют длину не менее 5, и, значит,  $5n \leq 100$ .

**197. Ответ.** Нет.

Пусть  $a$  и  $b = 2a$  — полученные числа,  $S(a)$  и  $S(b)$  — суммы их цифр. Тогда  $a + b = 3a$  делится на 3, и, значит, сумма  $S = S(a) + S(b)$  делится на 3, что неверно, так как  $S = 44$ .

**198. Ответ.** 60 км.

Пусть  $x$  — искомое расстояние (в километрах),  $v_1$ ,  $v_2$  и  $v_3$  — скорости (в км/ч) «Жигулей», «Москвича» и «Запорожца» соответственно. Тогда из условий задачи получаем равенства

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{x + 18}{x - 18}, \quad \frac{v_2}{v_3} = \frac{x + 8}{x - 8} \quad \text{и} \quad \frac{v_3}{v_1} = \frac{x - 25}{x + 25},$$

перемножив которые, получим уравнение

$$\frac{(x + 18)(x + 8)(x - 25)}{(x - 18)(x - 8)(x + 25)} = 1.$$

После преобразований придет к уравнению  $x^2 = 3600$ , которое имеет ровно один положительный корень:

$$x = \sqrt{3600} = 60.$$

**199.** Пусть данная окружность  $\omega$  пересекает гипотенузу  $AB$  в точке  $D$ , а катет  $AC$  в точке  $E$  (рис. 92). Заметим, что точка  $K$  лежит на окружности ( $AD$  — диаметр), причем дуги  $KD$  и  $DM$  равны. Срав-

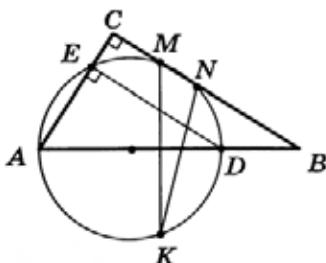


Рис. 92

ним хорды  $KN$  и  $DE$ . Угол  $DEA$ , очевидно, прямой, поэтому  $DE$  и  $MN$  параллельны. Но тогда равны дуги  $DM$  и  $NE$ ,  $KD$  и  $NE$ , и, значит, равны дуги  $KDN$  и  $DNE$ . Отсюда равны и хорды  $KN$  и  $DE$ . Осталось показать теперь, что  $DE = MC + NC$ , но это сразу следует из того, что трапеция  $DNME$  — равнобедренная.

**200.** Заметим, что если заданы все числа первой строки, то все остальные числа таблицы определяются однозначно. (По первой строке заполняем вторую, затем третью и т. д., в каждую последующую строку вписываем числа так, чтобы числа в клетках предыдущей строки удовлетворяли условию задачи.) Укажем два способа заполнения таблицы. При этом из первого способа будет следовать симметричность таблицы относительно ее диагонали, идущей из левого нижнего угла в правый верхний, а из второго способа — симметричность относительно диагонали, идущей из левого верхнего угла в правый нижний.

**Первый способ.** Вторую строку заполняем слева направо, вписав в нее  $n - 1$  число, в третью —  $n - 2$  числа, в четвертую —  $n - 3$  и т. д., в самую нижнюю строку (в левый нижний угол таблицы) вписываем одно число. Затем в каждую из оставшихся пустыми клеток записываем число, равное числу в клетке, симметричной относительно диагонали, идущей из левого нижнего угла таблицы в правый верхний. При этом построенная таблица в силу ее симметрии удовлетворяет условию задачи.

**Второй способ.** Он аналогичен первому, но строки заполняются справа налево (во вторую строку вписываем  $n - 1$  число и т. д., в самую нижнюю — одно число в правый нижний угол таблицы). Последующее вписывание чисел в пустые клетки производим так, чтобы таблица оказалась симметричной относительно диагонали.

А так как таблица с заданной первой строкой существует только одна, то она совпадает с построенными, т. е. является симметричной относительно каждой из своих больших диагоналей. Из симметричности относительно диагоналей следует симметричность таблицы относительно своего центра.



## 10 класс

**201. Ответ.**  $a = 2$ .

**Первое решение.** Пусть  $a^3 + 1 = 3^k$ , тогда из разложения  $a^3 + 1 = (a + 1)(a^2 - a + 1)$  следует, что  $a + 1 = 3^m$ ,  $a^2 - a + 1 = 3^n$ , где  $m$  и  $n$  — целые неотрицательные числа. Следовательно, во-первых,  $a$  не делится на 3 (если  $m = 0$ , то  $a = 0$ ), во-вторых,  $3a = (a + 1)^2 - (a^2 - a + 1) = 3^{2m} - 3^n$ ,  $a = 3^{2m-1} - 3^{n-1}$ ,

что возможно только если  $n - 1 = 0$  (иначе  $a$  делится на 3). Отсюда  $a^2 - a + 1 = 3$ , т. е.  $a = 2$ . Очевидно,  $a = 2$  — подходит.

**Второе решение.** Из того что  $a^3 + 1$  делится на 3, следует, что  $a = 3p - 1$ ,  $p$  — натуральное число. Тогда  $a^3 + 1 = 27p^3 - 27p^2 + 9p = 9p(3p^2 - 3p + 1)$ . Выражение в скобках не делится на 3, поэтому оно может быть только нулевой степенью тройки, откуда  $p = 1$ , т. е.  $a = 2$ .

**202. Ответ.** Не могло.

Пусть каждый выпил по одной чашке чая. Тогда Андрей дежурил меньше двух часов, Борис — меньше часа, а Виктор, Григорий и Дмитрий меньше чем по полчаса. Поскольку Виктор, Григорий и Дмитрий дежурили меньше чем по полчаса, никакие двое из них не дежурили подряд. Значит, они дежурили первым, третьим и пятым, а Андрей и Борис — вторым и четвертым. Но тогда получается, что Борис и те двое, кто дежурил перед ним и после него, вместе отдежурили меньше двух часов и поэтому не могли вместе выпить три чашки чая. Противоречие.

**203.** Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому  $\angle O_1BA = \angle O_1BC = \beta$ ,  $\angle O_1AB = \angle O_1AC = \phi$ ;  $\angle O_2BA = \angle O_2BD = \alpha$ ,  $\angle O_2AB = \angle O_2AD = \gamma$  (рис. 93). Поэтому  $\angle BO_1A = \pi - (\beta + \phi)$ ,  $\angle BO_2A = \pi - (\alpha + \gamma)$ , т. е.  $\angle BO_1A = \angle BO_2A$ , так как  $\beta + \phi = \alpha + \gamma \Leftrightarrow 2\beta - 2\alpha = 2\gamma - 2\phi \Leftrightarrow \angle CBD = \angle CAD$  (вписанные, опирающиеся на дугу  $CD$ ). Значит, точки  $B$ ,  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $A$  лежат на одной окружности. Но тогда  $\angle MO_1B = \pi - \angle O_2O_1B = \angle O_2AB = \gamma$ , т. е.  $\angle EMN = \angle MBO_1 + \angle MO_1B = 2\alpha - \beta + \gamma$ . Аналогично  $\angle ENM = \angle NAO_1 + \angle NO_1A = \phi + \angle O_2BA = \phi + \alpha$ , откуда следует  $\angle EMN = \angle ENM$ , так как  $2\alpha - \beta + \gamma = \phi + \alpha$ . Значит,  $\triangle MEN$  — равнобедренный.

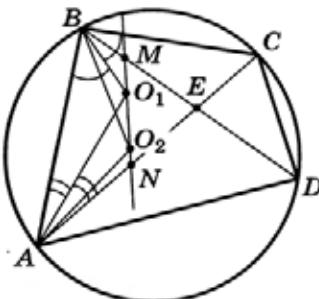


Рис. 93

**204.** Вначале покажем, что если существует семиугольник сколь угодно малых размеров, по вершинам которого может пройти кузнецкий, то задача решена.

В самом деле, возьмем такой семиугольник, что параллелограмм, построенный на двух сторонах этого семиугольника, помещается в круг диаметра 0,01. Замостим плоскость равными ему параллелограммами. Получим решетку, одна из вершин которой находится внутри кормушки.

Осталось показать существование такого семиугольника. Пусть  $M$  — указанный в условии правильный семиугольник  $A_1 \dots A_7$ , а  $\vec{r}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$ ,  $\vec{r}_2 = \overrightarrow{A_2A_3}$ , ...,  $\vec{r}_7 = \overrightarrow{A_7A_1}$ .

Если отложить эти векторы от точки  $O$ , где находится кузнецик, то получится новый правильный семиугольник  $M'$ . Заметим, что сторона  $M'$  меньше стороны  $M$  в  $\frac{1}{k}$  раз, где

$k = 2 \sin \frac{\pi}{7} < 2 \sin \frac{\pi}{6} = 1$ . Пройдя через точку  $O$ , кузнецик может сместиться параллельно любой стороне  $M'$  на расстояние  $k$ . Повторяя эту конструкцию  $n$  раз, мы получаем сдвиги вдоль стороны правильного  $k$ -угольника  $M^{(n)}$  на расстояние  $k^n$ .

Число  $k^n$  при больших  $n$  становится сколь угодно малым.

**205.** Предположим, что  $Q_1(x)$  и  $Q_2(x)$  не имеют корней. Тогда их дискриминанты отрицательны:  $(p-2)^2 - 4 = p^2 - 4p < 0$  и  $(q-2)^2 - 4 = q^2 - 4q < 0$ . Сложив эти неравенства, мы получаем  $p^2 + q^2 - 4p - 4q < 0$ . Так как  $P_1$  и  $P_2$  имеют корни, их дискриминанты неотрицательны:  $p^2 - 4q \geq 0$  и  $q^2 - 4p \geq 0$ . Сложив эти неравенства, мы получаем  $p^2 + q^2 - 4p - 4q \geq 0$  — противоречие.

**206. Ответ.**  $n = 4$ .

Ясно, что число  $4! = 24$  подходит. Пусть  $n \geq 5$ . Тогда удовлетворяющее условию число  $n!$  имеет вид

$$n! = \overbrace{a \dots a}^n 0 \dots 0 \overbrace{a \dots a}^n 0 \dots 0,$$

т. е.  $n! = a \times 1 \dots 10 \dots 01 \dots 1 \dots 10 \dots 0$ .

Значит, в разложении  $n!$  на простые множители ( $n! = 2^b \cdot 3^c \cdot 5^d \cdot \dots$ ) имеет место неравенство  $b \leq d+3$  (равенство  $b = d+3$  выполняется при  $a = 8 = 2^3$ ). Но  $5! = 120$  не удовлетворяет условию, а для всех  $n \geq 6$  выполнено неравенство  $b - d \geq 4$ . Значит, других решений нет.

**207.** Пусть  $\omega$  — окружность, проходящая через точки  $O_1$ ,  $A_1$ ,  $O_2$ ,  $B_1$ ,  $O_3$ , а  $A_3$  и  $B_3$  — вторые точки пересечения окружности  $\omega$  с окружностями  $S_1$  и  $S_3$ . Докажем, что точки  $O_2$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  лежат на одной прямой (рис. 94, а).

Действительно,  $\angle A_1 O_2 O_1 = \angle O_1 O_2 A_3$ , как вписанные углы, опирающиеся на равные дуги  $A_1 O_1$  и  $O_1 A_3$ ,  $\angle A_1 O_2 O_1 = \angle O_1 O_2 A_2$ , значит  $\angle O_1 O_2 A_2 = \angle O_1 O_2 A_3$ . Аналогично точки  $O_2$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  лежат на одной прямой.

Пусть  $O_2 P \perp A_2 B_2$  (рис. 94, б), тогда из равенства  $O_2 A_2 = O_2 B_2$  (радиусы  $S_2$ ) следует, что  $\angle A_2 O_2 P = \angle P O_2 B_2$  и  $\angle A_3 O_2 P = \angle P O_2 B_3$ , т. е.  $P$  — середина дуги  $A_3 P B_3$ . Отсюда следует, что сумма дуг  $O_2 B_1 O_3$  и  $O_1 A_3 P$  равна  $180^\circ$ :

$$\begin{aligned} \widehat{O_2 B_1 O_3} + \widehat{O_1 A_3 P} &= \widehat{O_2 B_1} + \widehat{B_1 O_3} + \widehat{O_1 A_3} + \widehat{A_3 P} = \\ &= \frac{1}{2} \widehat{A_1 B_1} + \frac{1}{2} \widehat{B_1 B_3} + \frac{1}{2} \widehat{A_1 A_3} + \frac{1}{2} \widehat{A_3 B_3} = \frac{1}{2} \cdot 360^\circ = 180^\circ, \end{aligned}$$

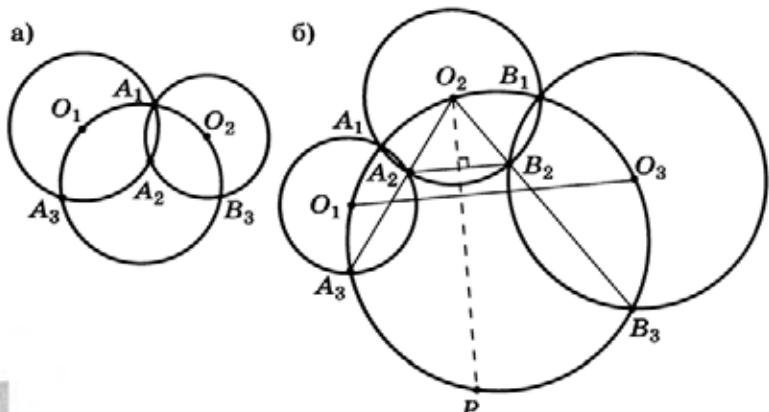


Рис. 94

т. е. угол между прямыми  $O_1O_3$  и  $O_2P$  прямой. Значит,  $O_1O_3 \parallel A_2B_2$ .

208. См. решение задачи 200.

## ▼ 11 класс

209. **Первое решение.**  $P(x^2 + y^2) - P(2xy) = (x^2 + y^2)^2 - 4(x^2 + y^2) - 4x^2y^2 + 8xy = (x^2 - y^2)^2 - 4(x - y)^2 = (x - y)^2((x + y)^2 - 4) \geq 0$ , так как  $x + y \geq 2$ .

**Второе решение.** Рассмотрим многочлен  $Q(t) = t^2 - 4t + 4 = (t - 2)^2$ . Заметим, что  $Q(t)$  монотонно возрастает при  $t \geq 2$  и  $P(a) \geq P(b) \Leftrightarrow Q(a) \geq Q(b)$ . Теперь утверждение задачи следует из того, что  $x^2 + y^2 \geq 2xy \geq 2$  при  $x \geq 1$ ,  $y \geq 1$ .

210. Пусть  $EF$  — хорошая средняя линия (рис. 95),  $K, M$  — середины ребер  $AB$  и  $BC$ . Тогда  $KF \parallel AD$ ,  $KE \parallel BC$ ,  $FM \parallel CD$ ,  $EM \parallel AB$ , поэтому  $\angle KFE$ ,  $\angle KEF$ ,  $\angle MFE$ ,  $\angle MEF$  — заданные равные углы. Но тогда  $EKF$  и  $EMF$  — равнобедренные треугольники с равными углами при основании и общим основанием  $EF$ . Значит, они равны и  $KE = KF = EM = MF$ . Но  $KE = \frac{1}{2}BC$ , ...,  $MF = \frac{1}{2}CD$ , следовательно,  $BC = AD = AB = CD$ .

Аналогично для другой хорошей средней линии равны все ребра, не пересекаемые ею. Значит, все ребра тетраэдра равны и он правильный.

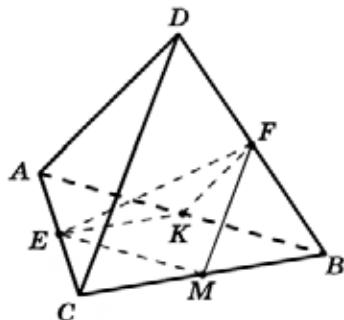


Рис. 95

**211. Ответ.** Да.

Разобьем доску так, как показано на рисунке 96.

Опишем стратегию второго игрока. Если первый покрасил клетку какого-либо прямоугольника  $2 \times 1$ , то второму следует покрасить оставшуюся клетку этого прямоугольника.

Если первый покрасил клетку, не входящую в какой-нибудь прямоугольник, то второму следует покрасить клетку, которая также не входит ни в какой прямоугольник (это всегда можно сделать, так как таких клеток четное количество). Так как в любой квадрат  $2 \times 2$  входит ровно один прямоугольник, первый никогда не сможет закрасить квадрат  $2 \times 2$ .

**212. Ответ.** Нельзя представить в указанном виде число 1 и числа, на 2 большие степеней двойки.

Пусть  $\frac{a}{b} + \frac{a+1}{b+1} = N$ . Рассмотрим число

$$N - 2 = \frac{a}{b} - 1 + \frac{a+1}{b+1} - 1 = \frac{a-b}{b} + \frac{a-b}{b+1},$$

$$N - 2 = (a-b) \left( \frac{1}{b} + \frac{1}{b+1} \right).$$

Так как  $b$  и  $b+1$  — взаимно простые числа, а  $N-2$  — целое число, то  $a-b = k \cdot b \cdot (b+1)$ .

Следовательно,  $N-2 = k((b+1)+b)$ ,  $N-2 = k(2b+1)$ . Если  $k=0$ , то  $N=2$ . Если же  $k \neq 0$ , то из условия  $b \neq 0$  следует, что число  $N-2$  должно иметь нечетный делитель, отличный от 1. Таким образом,  $N-2 \neq -1$ ,  $N-2 \neq 2^p$ ,  $p \geq 0$ .

Завершает доказательство проверка того, что любое число  $N \geq 2$ ,  $N \neq 2+2^p$ , представимо в указанном виде: если  $2b+1$  — нечетный делитель числа  $N-2$ , то подходит пара  $\{a, b\}$ , где  $a = b+k \cdot b \cdot (b+1)$ ,  $k = (N-2):(2b+1)$ .

**213. Ответ.** {3, 5}.

Так как  $a^n - 1$  делится на  $a - 1$  и  $a^n - 1$  — простое число, то  $a = 2$ . Далее, при нечетном  $n$  число  $2^n + 1$  делится на 3, следовательно,  $n = 2k$ . Но тогда  $a^n - 1 = (2^k + 1)(2^k - 1)$ . Значит,  $2^k - 1 = 1$ ,  $k = 1$ ,  $n = 2$ .

**214. Найдем вначале искомую прогрессию.** Член  $b_{2000}$  равен сумме всех чисел  $a_n$ , которая равна  $2000 \cdot \frac{2001}{2} = 2001 \cdot 1000$ .

С другой стороны,  $b_{2000} = b_1 + 1999d$ , где  $d$  — разность

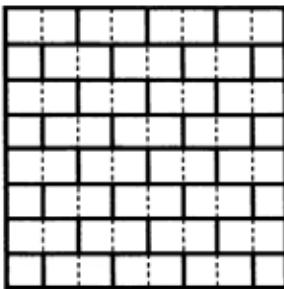


Рис. 96

прогрессии. Откуда  $2\ 001\ 000 = b_1 + 1999d$ , следовательно,  $b_1 - d + 2000d = 2\ 001\ 000$ ; при этом  $b_1 - d \leq 2000$ , а тогда  $b_1 - d = 1000 + 2000 \cdot k$ , и, значит,  $b_1 - d = 1000$ . Отсюда  $d = 1000$ ,  $b_1 = 2000$ .

Теперь соответствующий пример легко подбирается. Искомая расстановка такова:

$$1000, 2000, 999, 1001, 998, 1002, \dots, 1, 1999.$$

Здесь член  $b_{2k-1} = 2k \cdot 1000$  реализуется как сумма  $2000 + (999 + 1001) + \dots + ((1000 - (k-1)) + (1000 + (k-1)))$ , а член  $b_{2k} = (2k+1) \cdot 1000$  реализуется как сумма

$$\begin{aligned} & 1000 + 2000 + (999 + 1001) + \dots + \\ & + ((1000 - (k-1)) + (1000 + (k-1))). \end{aligned}$$

**215. Ответ.** Да.

Докажем, что такой треугольник найдется. Предположим противное и рассмотрим правильный тетраэдр со стороной 1.

Нетрудно увидеть, что его вершины должны быть окрашены так, как показано на рисунке 97, а (иначе искомый треугольник существует).

Рассмотрим тетраэдр, симметричный указанному относительно плоскости, проходящей через одну из его граней.

Вершины  $S$  и  $S'$ , симметричные относительно плоскости  $ABC$ , должны быть окрашены одинаково (рис. 97, б). Это означает, что точки, находящиеся на расстоянии  $SS'$ , равном удвоенной высоте правильного тетраэдра со стороной 1, окрашены одинаково.

Рассмотрим сферу с центром в точке  $S$  и радиуса  $SS'$ . Из сказанного выше следует, что все точки сферы имеют один цвет, а так как радиус сферы больше 1, на ней находится равносторонний треугольник со стороной 1. Полученное противоречие завершает доказательство.

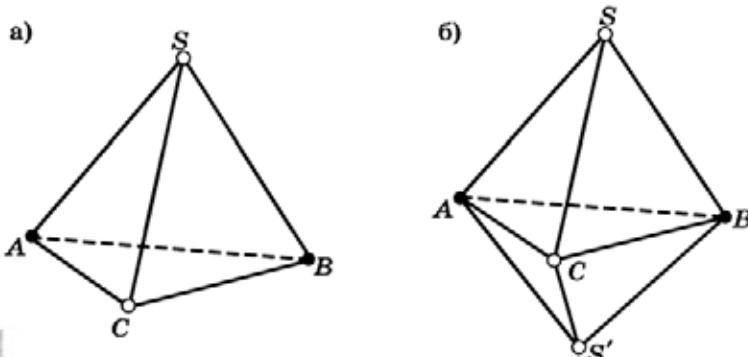


Рис. 97

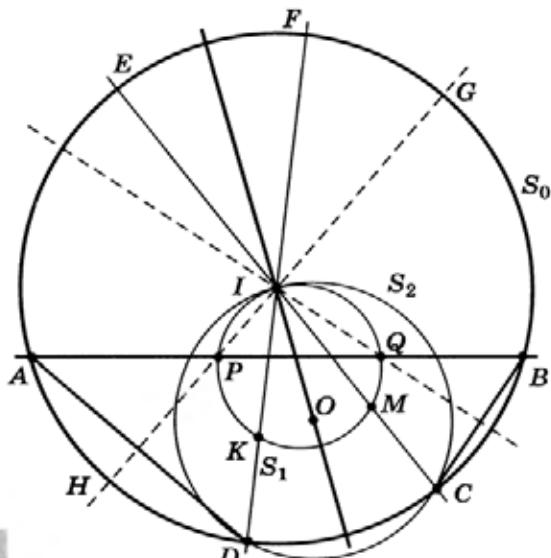


Рис. 98

**216.** На рисунке 98  $S_0$  — заданная окружность.

Докажем, что центр окружности, описанной около треугольника  $IPQ$  (окружность  $S_1$ ), лежит на прямой  $IO$ , где  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $IDC$  (окружность  $S_2$ ), т. е. на биссектрисе угла  $DIC$ .

Пусть  $M$  и  $K$  — точки пересечения окружности  $S_1$  с лучами  $IC$  и  $ID$ . Дуги  $MQ$  и  $CB$  имеют одинаковые угловые меры, так как  $\angle MIQ$  — вписанный для окружности  $S_1$  и центральный для окружности  $S_0$ .

Дуги  $QI$  и  $BF$  также имеют одинаковые угловые меры, так как угол  $IPQ$  равен  $\frac{1}{2}(BG + AH) = \frac{1}{2}(BG + HD) = \frac{1}{2}BF$ .

Следовательно, угловые меры дуг  $MQI$  и  $CBF$  совпадают. Аналогичный результат получим для дуг  $KPI$  и  $DAE$ . Следовательно,  $\overarc{MI} = \overarc{KI}$ . Таким образом, прямая  $IO$  делит  $S_1$  пополам, следовательно, окружности  $S_1$  и  $S_2$  касаются.

**2000–2001**

## ▼ 8 класс

**217. Ответ. 11.**

У палиндрома с четным количеством знаков закочечредующаяся сумма цифр равна 0, следовательно, такой палиндром делится на 11 (согласно признаку делимости на 11). Получаем, что единственным простым числом среди таких палиндромов является число 11.

**218.** Биссектриса данного угла с вершиной  $A$  является высотой  $AO$  в равностороннем треугольнике  $ABC$  (рис. 99). Построим такой треугольник. Восстановим из произвольной точки  $D$  на стороне  $AP$  данного угла перпендикуляр до пересечения со стороной  $AT$  угла в точке  $B$ . Проведем луч  $BR \parallel AP$  ( $BR \perp BD$ ) и луч  $DN \parallel AB$  ( $DM \perp AB$ ,  $DN \perp DM$ ). Пусть  $K$  — точка пересечения  $BR$  и  $DN$ , тогда  $ABKD$  — параллелограмм, т. е.

$BK = AD = \frac{1}{2} AB$ . Пусть  $KC \perp AP$ , тогда  $DBKC$  — прямоугольник и  $DC = BK$ . Значит,  $AC = 2BK = AB$  и  $\triangle ABC$  — искомый.

**219. Ответ.** 7, 8, 8, 9, ..., 15.

Пусть Коля задумал числа  $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_{10}$ , а  $S$  — их сумма. Числа, которые Коля назвал, содержатся среди  $S - n_1, S - n_2, \dots, S - n_{10}$ , с суммой  $10S - (n_1 + \dots + n_{10}) = 9S$ . Коля назвал только девять чисел, значит, среди  $S - n_1, \dots, S - n_{10}$  есть два одинаковых числа  $x$ . Поэтому

$$x + 92 + \dots + 100 = 9S, \text{ т. е. } x = 9S - 9 \cdot 96.$$

Итак,  $x$  делится на 9, следовательно,  $x = 99$ . Откуда  $S = 107$ . Следовательно, Коля задумал числа  $107 - 92, 107 - 93, \dots, 107 - 99, 107 - 99, 107 - 100$ , т. е. числа 7, 8, 8, 9, ..., 15.

**220.** В самом деле, рассмотрим такое разбиение на  $m$  частей. Тогда в одной из частей не менее  $\frac{n}{m}$  городов. Но по условию в этой части каждый город может быть соединен только с городами других частей, поэтому из него выходит не более  $n - \frac{n}{m}$  дорог. Значит,  $k \leq n - \frac{n}{m}$ , т. е.  $m \geq \frac{n}{n-k}$ .

**221.** Предположим, что вопреки утверждению задачи существует удовлетворяющая условию расстановка фишек на доске, при которой у любой фишке есть два соседа двух других цветов. Рассмотрим левую нижнюю клетку доски. В двух соседних с ней клетках должны располагаться фишкы обоих других цветов.

Без ограничения общности можно считать, что в клетке 1 — белая фишкка, в клетке 2 — красная, а в клетке 3 — синяя (рис. 100). Тогда в клетке 4 может находиться только белая фишкка

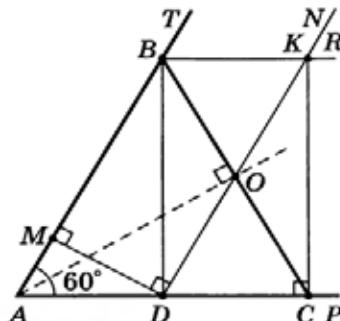


Рис. 99

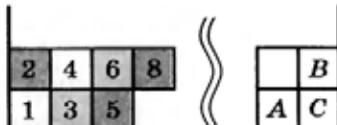


Рис. 100

(в соседних с ней клетках 2 и 3 уже есть синяя и красная фишкы). Но тогда в клетке 5 — красная фишка (фишка красного цвета должна стоять рядом с синей фишкой из клетки 3). Тогда сразу получаем, что в клетке 6 — синяя фишка и т. д. Мы получили однозначное восстановление расположения фишек на доске по фишкам из клеток 1, 2 и 3. Заметим, что при этом в парах клеток 1 и 4, 3 и 6, 5 и 8, ..., A и B стоят фишкы одного цвета. Значит, рядом с фишкой из клетки C нет фишк одноименного цвета. Противоречие.

**222. Ответ.** Не существуют.

Прежде всего если одна из цифр  $a, b, c$  нечетна, то нечетны все (нечетное число не может делиться на четное). Поэтому если одна из цифр  $a, b, c$  четна, то четны все. В этом случае тройка цифр  $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$  также удовлетворяет условиям задачи.

Поэтому если есть пример тройки цифр, удовлетворяющих условиям задачи, то есть пример из нечетных цифр.

Далее, если одна из цифр  $a, b, c$  равна 5, то остальные цифры тоже делятся на 5. Тогда все цифры равны 5. Но это невозможно, поскольку все цифры попарно различны. Итак, цифры  $a, b, c$  могут быть 1, 3, 7, 9. Значит, хотя бы одна из них делится на 3. Но тогда сумма остальных цифр делится на 3. А сумма двух из указанных цифр делится на 3, только если это цифры 3 и 9. Поэтому все цифры совпадают с 3 и 9, что противоречит тому, что они различны.

**223.** Докажем, что  $AB = BC = CD$ . Пусть это не так и, например,  $AB < BC$  (рис. 101). Отложим на  $BC$  отрезок  $BA_1 = BA$ . Центр окружности, вписанной в угол, лежит на его биссектрисе, поэтому  $\angle A_1BO = \angle ABO$ . Отсюда следует, что  $\triangle A_1BO \sim \triangle ABO$ , и, значит, периметры треугольников  $A_1BO$  и  $CBO$  равны. Но тогда  $A_1O = A_1C + CO$ , следовательно,  $A_1 = C$  и  $BA = BC$ .

Аналогично  $BC = CD$ . Утверждение задачи теперь следует из того, что если четырехугольник описан около окружности, то суммы длин его противоположных сторон равны.

**224. Ответ.**  $3 + 4\sqrt{2}$ .

Так как у куба 8 вершин, то путь содержит не более 7 отрезков. Пусть из них  $a$  отрезков длины 1 и  $b$  — длины  $\sqrt{2}$ . Тогда весь путь имеет длину  $a + b\sqrt{2}$ . Раскрасим вершины куба в два цвета (рис. 102, а). Так как начало и конец пути имеют разные цвета, то в маршруте должно происходить нечетное число перемен цвета. Заметим, что движение

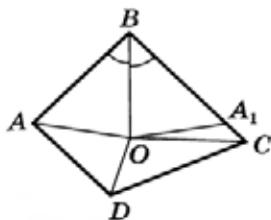


Рис. 101

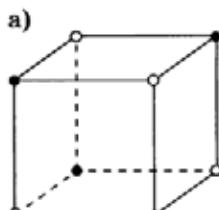
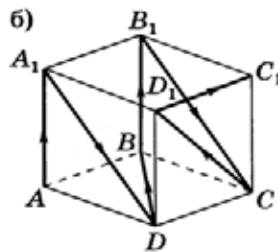


Рис. 102



по ребру меняет цвет вершины, а по диагонали — нет. Значит,  $a$  — нечетное число. Докажем, что  $a \neq 1$ .

Представим себе путь длины  $1 + 6\sqrt{2}$ . Так как в нем 6 диагоналей, то путь начинается или кончается тремя подряд идущими диагоналями. Нетрудно понять, что 4 диагонали идти подряд не могут (возникнет самопересечение пути), значит, путь должен состоять из трех диагоналей, ребра и еще трех диагоналей. Провести из двух вершин по три диагонали без самопересечений можно единственным образом (с точностью до симметрии), но эти пути не соединяются ребром. Приведем пример пути длины  $3 + 4\sqrt{2}$  (рис. 102, б):  $A \rightarrow A_1 \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow B_1 \rightarrow C \rightarrow D_1 \rightarrow C_1$ .

## 9 класс

225.  $\frac{p(x+1) + p(x-1)}{2} = ax^2 + bx + c + a$ . Поэтому после  $n$  стираний возникнет трехчлен  $ax^2 + bx + c + na$ . Его дискrimинант  $D = b^2 - 4ac - 4na^2$  при  $n > \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

будет отрицательным, и трехчлен не будет иметь корней.

226. **Первое решение.** Угол  $MNA$  — внешний для равнобедренного треугольника  $MNC$  (рис. 103), поэтому  $\angle MNA = \angle NMC + \angle NCM = 2\angle NCM$ .

Так как  $NN_1$  — биссектриса, то  $\angle ANN_1 = \frac{1}{2}\angle MNA = \angle NCM$ . Получим, что  $\triangle ANN_1$  подобен  $\triangle ACM$  по двум углам ( $\angle A$  — общий). Следовательно,

$$\frac{AN_1}{AN} = \frac{AM}{AC}. \quad (1)$$

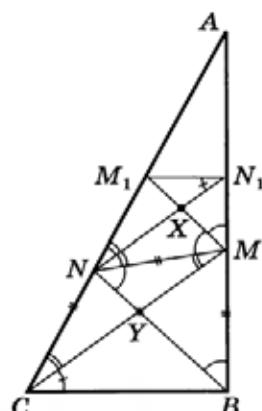


Рис. 103

Проводя аналогичные рассуждения, из подобия треугольников  $AMM_1$  и  $ABN$  получим

$$\frac{AM_1}{AN} = \frac{AM}{AB}. \quad (2)$$

Поделив равенство (1) на (2), получим  $\frac{AN_1}{AM_1} = \frac{AB}{AC}$ , и так как угол  $A$  — общий для треугольников  $AN_1M_1$  и  $ABC$ , то они подобны.

Значит,  $\angle AN_1M_1 = \angle ABC$ . Следовательно,  $M_1N_1 \parallel CB$ , что и требовалось доказать.

**Второе решение.** Пусть  $BM = MN = NC = a$ ,  $AM = b$ ,  $AN_1 = b_1$ ,  $AN = c$ ,  $AM_1 = c_1$ . Тогда по свойству биссектрисы треугольника  $AN_1 : N_1M = AN : NM$ , т. е.  $b_1 : (b - b_1) = c : a$ , откуда  $b_1 = \frac{bc}{a+c}$ . Аналогично  $c_1 = \frac{bc}{a+b}$ . Значит,  $AN_1 : AM_1 = b_1 : c_1 = (a+b) : (a+c) = AB : AC$ .

**227.** Всякое число  $x$  можно единственным образом представить в виде суммы целой и дробной частей:

$$x = [x] + \{x\}, \text{ где } 0 \leq \{x\} < 1 \text{ и } [x] \in \mathbb{Z}.$$

Число  $x$  является целым только тогда, когда его дробная часть равна нулю ( $\{x\} = 0$ ). Сумма двух чисел  $x$  и  $y$  является целым числом только тогда, когда сумма их дробных частей равна нулю или единице, так как

$$x + y = [x] + \{x\} + [y] + \{y\} = [x] + [y] + \{x\} + \{y\},$$

где  $0 \leq \{x\} + \{y\} < 2$ , и поскольку число  $x + y$  целое, то  $\{x\} + \{y\} = 0$  или  $\{x\} + \{y\} = 1$ . Если все числа  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ ) имеют одинаковую дробную часть  $\{a_i\} = \alpha$  ( $i = 1, \dots, 10$ ), то  $\alpha + \alpha = 2\alpha = 0$  или  $2\alpha = 1$ . И тогда все попарные суммы этих чисел являются целыми.

Докажем, что случай, когда имеется два числа с различными дробными частями, невозможен. Пусть это не так, т. е. имеются два числа с разными дробными частями. Можно считать, что это  $a_1$  и  $a_2$ , где  $0 < \{a_1\} < \{a_2\} < 1$ .

Покажем, что из двух сумм  $a_1 + a_i$  и  $a_2 + a_i$  ( $i = 3, \dots, 10$ ) по крайней мере одна нецелая. Действительно, если числа  $a_1 + a_i$  и  $a_2 + a_i$  целые, то и их разность тоже целое число. Однако  $(a_2 + a_i) - (a_1 + a_i) = [a_2] - [a_1] + \{a_2\} - \{a_1\}$  — нецелое число, так как  $0 < \{a_2\} - \{a_1\} < 1$ .

Таким образом, в этом случае мы можем указать не менее восьми нецелых сумм. А их не более пяти. Противоречие. Значит, дробные части всех чисел одинаковы. Следовательно, все попарные суммы — целые числа.

**228.** Докажем, что в стране есть захолустный город.

Действительно, возьмем путь в стране, содержащий наибольшее число городов и проходящий через города по одному разу. Тогда очевидно, что начало и конец этого пути — захолустные города.

Доказательство утверждения задачи проведем индукцией по числу  $n$  городов в стране. Если  $n = 2$ , то все очевидно. Пусть утверждение доказано для  $n \leq m - 1$ . Докажем для  $n = m$ . Возьмем захолустный город. Если он из первой части, то все доказано. Пусть он из второй части. Удалим этот город. Возможны два случая.

1. Он соединен с незахолустным городом в получившейся стране. Тогда в получившейся стране во второй части городов меньше, чем в первой. По предположению индукции есть захолустный город из первой части. Он и будет захолустным городом в первоначальной стране.

2. Он соединен с захолустным городом  $A$  в получившейся стране. Рассмотрим город  $A$ . Он соединен только с городами из второй части. Удалим его. Всего мы убрали по одному городу из каждой части, следовательно, выполняется условие индукции для получившейся страны, но тогда найдется захолустный город в первой части. Но он захолустный и в первоначальной стране. Итак, индукционный переход доказан.

**229. Ответ.** Не может.

Пусть  $\overbrace{2 \dots 2}^l 0 \dots 0$  —  $k$ -я степень натурального числа  $2 \dots \overbrace{2}^l 0 \dots 0 = n^k$  (в записи числа последние  $l$  цифр — нули,

а между двойками могут встречаться нули). Откуда  $1 \dots 0 \dots 1 \cdot \overbrace{2}^{l+1} \cdot 5^l = (2^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \dots)^k = 2^{k\alpha_1} \cdot 5^{k\alpha_2} \dots$ , где  $\alpha_1, \alpha_2$  — целые числа. Из единственности разложения числа на простые множители имеем

$$l + 1 = k\alpha_1, \quad l = k\alpha_2,$$

откуда  $1 = (l + 1) - l = k\alpha_1 - k\alpha_2 = k(\alpha_1 - \alpha_2)$ .

Отсюда следует, что  $k = 1$ .

**230. Ответ.** Не существуют.

Пусть такие числа существуют. Тогда  $xy + 1 = u^2$ ,  $yz + 1 = v^2$ ,  $zx + 1 = w^2$ , где  $u, v, w$  — четные числа, т. е.  $u = 2a$ ,  $v = 2b$ ,  $w = 2c$ . Таким образом,  $xy = 4a^2 - 1$ ,  $yz = 4b^2 - 1$ ,  $zx = 4c^2 - 1$ . Перемножив эти равенства, получим  $(xyz)^2 = 4A - 1$ , где  $A$  — некоторое натуральное число. Мы пришли к противоречию, так как квадрат нечетного числа при делении на 4 дает в остатке 1.

**Замечание.** Существует бесконечно много таких троек  $(x, y, z)$  четных натуральных чисел, что  $xy + 1, yz + 1, zx + 1$  — полные квадраты. Пример:  $(2, 4, 12)$ .

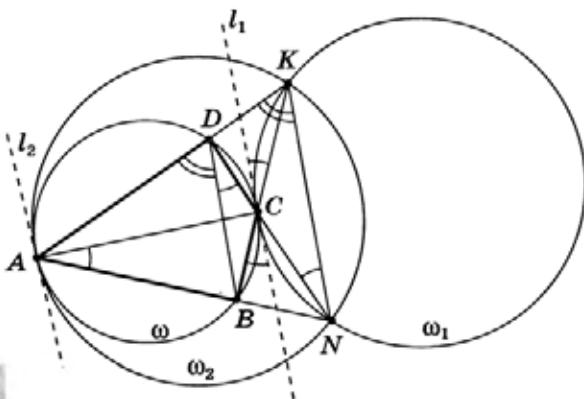


Рис. 104

**231. Первое решение.** Обозначим через  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  соответственно окружности, описанные около треугольников  $CKN$  и  $AKN$  (рис. 104). Докажем, что если  $\omega_1$  касается  $\omega$ , то  $\omega_2$  касается  $\omega$ . Пусть  $l_1$  — касательная к  $\omega_1$  и  $\omega$  в точке  $C$ , а  $l_2$  — касательная к  $\omega$  в точке  $A$ . Будем через  $\angle STL_i$  обозначать угол между прямыми  $ST$  и  $l_i$ . Тогда  $\angle KNC = \angle KCl_1 = \angle BCl_1 = \angle CDB \Rightarrow BD \parallel KN \Rightarrow \angle NKA = \angle BDA = \angle BAL_2 = \angle NAL_2 \Rightarrow l_2$  касается  $\omega_2$ .

Обратное аналогично.

**Второе решение.** Пусть  $r$ ,  $r_1$  и  $r_2$  — соответственно радиусы окружностей  $\omega$ ,  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Пусть окружность  $\omega_2$  касается окружности  $\omega$  в точке  $A$ . Тогда гомотетия  $H_1$  с центром в точке  $A$  и коэффициентом  $k = \frac{r_2}{r}$  переводит  $\omega$  в  $\omega_2$ , следовательно,  $H_1(D) = K$ ,  $H_1(B) = N$ , откуда  $KN \parallel DB$  и  $KN = kDB$ . Но тогда гомотетия  $H_2$  с центром  $C$  и коэффициентом  $k' = -k$  переводит  $\triangle CDB$  в  $\triangle CNK$ , и, следовательно,  $H_2$  переводит окружность, описанную около треугольника  $CDB$ , в окружность, описанную около треугольника  $CNK$ , т. е.  $H_2(\omega) = \omega_1$ . А это означает, что окружности  $\omega$  и  $\omega_1$  касаются, так как центр гомотетии лежит на одной из них.

Обратное аналогично.

**232. Ответ.** 9 (считая вершины).  
Например, это треугольник с вершинами  $(0, 0)$ ,  $(3, 0)$ ,  $(-3, 3)$  (рис. 105).

Докажем, что большего числа узлов на сторонах треугольника быть не может. Узлы решетки, лежащие на сторонах, разбивают стороны на одинаковые отрезки. Рассмотрим два случая.

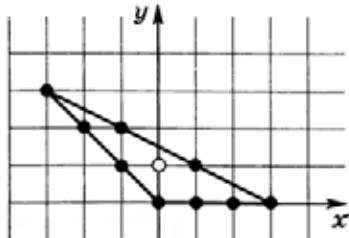


Рис. 105

1) На какой-нибудь стороне лежат по крайней мере три точки, а на другой — по крайней мере две. Тогда внутри треугольника лежит не меньше трех узлов. Действительно, на стороне  $AB$  лежат узлы  $C_1, C_2, C_3$ , отличные от  $A$  и  $B$ , такие, что  $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$ , а на стороне  $AC$  — узлы  $B_1, B_2, B_3$ , такие, что  $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3$ , при этом, возможно,  $B_3 = C$ . Тогда середина отрезка  $B_2C_2$  и точки, делящие  $B_3C_3$  на три равные части, также узлы решетки.

2) На одной стороне (например,  $AB$ ) лежит по крайней мере 5 узлов, а на оставшихся — не более чем по одному. Соединим узел  $O$ , лежащий внутри треугольника, со всеми узлами на сторонах треугольника. Тогда треугольник разобьется на маленькие треугольнички с вершинами в узлах, не содержащие узлов ни внутри, ни на границе. Легко видеть, что площадь каждого такого треугольничка равна  $\frac{1}{2}$ .

Тогда получается, что площадь треугольника  $OAB$  больше суммарной площади треугольников  $OAC$  и  $OBC$ . Отношение этих площадей равно отношению длины части луча  $CO$ , лежащей внутри треугольника  $OAB$ , к отрезку  $OC$ . Значит, образ точки  $C$  при симметрии относительно точки  $O$  лежит внутри треугольника  $OAB$ , но, с другой стороны, это узел — противоречие.

В остальных случаях больше девяти узлов на сторонах треугольника оказаться не может.

## ▼ 10 класс

233. По условию  $f(n) = n^2 + an + b = m^2$ ,  $f(n+1) = (n+1)^2 + a(n+1) + b = (m+1)^2$ , откуда  $f(n+1) - f(n) = 2n + 1 + a = 2m + 1$ , т. е.  $2n + a = 2m$ . Следовательно, для любого целого  $k$  выполняется равенство  $f(n+k) = (n+k)^2 + a(n+k) + b = (n^2 + an + b) + 2nk + k^2 + ak = m^2 + k(2n + a) + k^2 = m^2 + k \cdot 2m + k^2 = (m+k)^2$ . Утверждение доказано.

234. Ответ. Существует.

Рассмотрим число

$$(10^k - 3)^2 = 10^{2k} - 6 \cdot 10^k + 9 = \underbrace{999\dots999}_{k-1 \text{ девятка}} 400\dots009.$$

Взяв  $k = 2000$ , мы получим требуемое число.

235. Первое решение. Пусть  $l \perp AB$ . Если  $AD = DB$ , то в качестве  $X$  можно взять любую точку  $l$ , отличную от  $D$ . Если же  $AD \neq DB$ , то искомых точек  $X$  не существует.

Далее  $l$  и  $AB$  не перпендикулярны.

Пусть  $\varphi = \angle ADX < \frac{\pi}{2}$ . Тогда, сложив равенства  $\angle AXD + \angle XAD + \varphi = \pi$  и  $\varphi = \angle BXD + \angle XBD$ , получаем

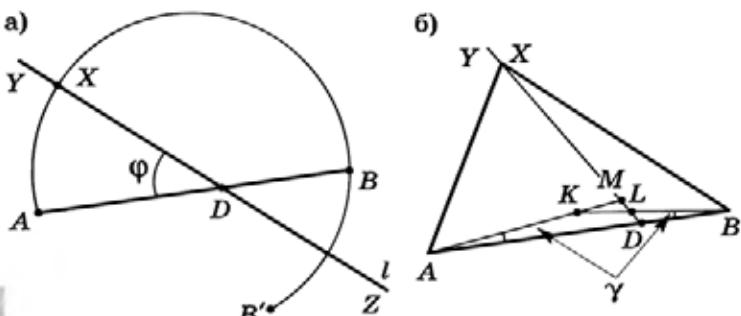


Рис. 106

$(\angle AXD - \angle BXD) + (\angle XAD - \angle XBD) = \pi - 2\phi$ . С другой стороны, по условию  $\angle AXD - \angle BXD = \angle XAD - \angle XBD$ . Значит, равенство задачи эквивалентно следующему:

$$\angle AXD - \angle BXD = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

Пусть точка  $B'$  симметрична  $B$  относительно  $l$ . Тогда  $\angle BXD = \angle DXB'$  и  $\angle AXB' = \frac{\pi}{2} - \phi$ . Отсюда вытекает такое построение. Будем искать точку  $X$  в верхней полуплоскости (рис. 106, а). Для этого рассмотрим полуплоскость с границей  $AB'$ , содержащую отрезок  $AD$ . Построим в этой полуплоскости дугу, из которой отрезок  $AB'$  виден под углом  $\frac{\pi}{2} - \phi$ , и возьмем пересечение этой дуги с лучом  $DY$ .

Далее заметим, что  $\angle ADB' = \pi - 2\phi > \frac{\pi}{2} - \phi$ . Следовательно, на луче  $DY$  найдется, и притом ровно одна, точка  $X$ , такая, что  $\angle AXB' = \frac{\pi}{2} - \phi$ .

Аналогично находится удовлетворяющая условию точка  $X'$  на луче  $DZ$ . Значит, задача имеет два решения.

**Второе решение.** Обозначим  $\gamma = \angle XAD - \angle AXD = \angle XBD - \angle BXD$ .

Рассмотрим случай  $\gamma > 0$  (случай  $\gamma < 0$  аналогичен, а случай  $\gamma = 0$  очевиден). Отложим  $\angle MAD = \angle LBD = \gamma$  (рис. 106, б) и докажем, что точки  $M$  и  $L$  совпадают. Предположим противное: пусть для определенности  $XL > XM$ . Обозначим через  $K$  точку пересечения  $AM$  и  $BL$ . Так как  $\angle MAX = \angle XAD - \gamma = \angle AXD$ , то  $XM = AM$ . Аналогично  $BL = XL$ . Тогда  $XM = AM > AK = BK > BL = XL > XM$ . Противоречие.

Получим  $K = L = M = O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABX$ . Точка  $O$  — пересечение серединного перпендикуляра к отрезку  $AB$  с лучом  $DY$ ,  $XO = OA$ .

Аналогично строится точка  $X'$ .

**Замечание.** Построим на  $l$  такую точку  $C$ , что  $l$  — биссектриса угла  $C$  треугольника  $ABC$  ( $C$  — точка пересечения прямых  $l$  и  $BA'$ , где  $A'$  симметрична  $A$  относительно  $l$ ). Искомыми точками будут центр вписанной окружности треугольника  $ABC$  и центр его вневписанной окружности, касающейся  $AB$ .

**236. Ответ. 3.**

Рассмотрим выпуклую оболочку всех точек пересечения этих прямых (выпуклый многоугольник наименьшей площади, содержащий все эти точки). Она является многоугольником, а многоугольник имеет не менее трех вершин. Каждая вершина этой оболочки — точка пересечения каких-то двух из проведенных прямых. Лучи этих прямых, выходящие из этой вершины во внешнюю часть выпуклой оболочки, образуют угол (рис. 107).

Значит, среди частей, на которые эти прямые разбивают плоскость, не менее трех углов.

Приведем пример 2001 прямых, для которых частей, являющихся углами, ровно три. Две прямые — оси координат, а уравнения 1999 остальных прямых таковы:  $\frac{x}{i} + \frac{y}{2000 - i} = 1$  ( $i = 1, 2, \dots, 1999$ ).

Любые две прямые, не являющиеся осями, не могут образовать угла, поскольку каждый из четырех лучей, образовавшихся при пересечении этих прямых, пересекает одну из осей (рис. 108, а).

Три угла дают: угол 1 — оси, угол 2 — прямая  $\frac{x}{1999} + \frac{y}{1} = 1$  и ось абсцисс, угол 3 — прямая  $\frac{x}{1} + \frac{y}{1999} = 1$  и ось ординат (рис. 108, б).

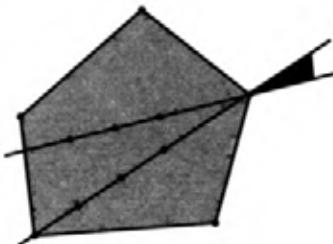


Рис. 107

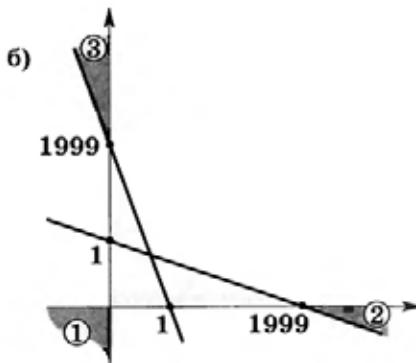
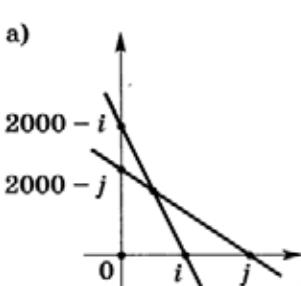


Рис. 108

**237. Ответ.** Можно.

Пусть на доске написаны числа  $(a, b, c, d, 2000)$ . На месте чисел  $a$  и  $b$  напишем число  $x = c + d - 2000$ .

В новом наборе  $(x, x, c, d, 2000)$  заменим числа  $c$  и  $d$  на число  $2000 + x - x = 2000$ . Вместо чисел  $x$  в следующем наборе  $(x, x, 2000, 2000, 2000)$  запишем число  $2000 + 2000 - 2000 = 2000$ . В результате получили искомый набор  $(2000, 2000, 2000, 2000, 2000)$ .

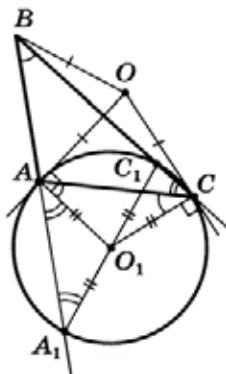


Рис. 109

**238.** Пусть  $O_1$  — центр построенной окружности  $\omega$  (рис. 109) (для других случаев рассмотрения аналогичны). Из равнобедренного треугольника  $AOC$  получаем  $\angle OAC = \frac{1}{2}(\pi - \angle AOC) = \frac{\pi}{2} - \angle ABC = \frac{\pi}{2} - \angle B$  (так как  $\angle ABC$  — вписанный,  $\angle AOC$  — центральный). Но  $AO$  — касательная к  $\omega$ , поэтому  $\angle O_1AO = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle CAO_1 = \angle B \Rightarrow \angle O_1AA_1 = \pi - \angle BAC - \angle CAO_1 = \pi - \angle A - \angle B$ . Таким образом,  $\angle AA_1O_1 = \angle O_1AA_1 = \angle C$ . Далее,  $\angle O_1C_1C = \angle O_1CC_1 = \angle O_1CA + \angle ACB = \angle B + \angle C$ . Поэтому  $\angle A_1O_1C_1 = \angle A_1O_1A + \angle AO_1C - \angle C_1O_1C = \pi - 2\angle C + \pi - 2\angle B - (\pi - 2(\angle B + \angle C)) = \pi$ , значит,  $A_1C_1$  — диаметр окружности  $\omega$ .

**239.** Возведя неравенство треугольника  $a + b > c > 0$  в квадрат и умножив его на  $(a - b)^2$ , получим

$$(a + b)^2(a - b)^2 \geq c^2(a - b)^2 \text{ или} \\ a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq a^2c^2 - 2abc^2 + b^2c^2.$$

Аналогично

$$b^4 - 2b^2c^2 + c^4 \geq b^2a^2 - 2bca^2 + c^2a^2 \text{ и} \\ a^4 - 2a^2c^2 + c^4 \geq a^2b^2 - 2acb^2 + c^2b^2.$$

Сложив полученные неравенства и разделив на 2, получим требуемое.

**Замечание.** Как известно, для сторон треугольника верно неравенство  $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leq abc$ . Умножив это неравенство на  $a + b + c$  и раскрыв скобки, также получим требуемое неравенство, поскольку

$$-(a + b + c)(a + b - c)(a + c - b)(a - b - c) = \\ = -((a + b)^2 - c^2)((a - b)^2 - c^2) = \\ = -((a - b)^2(a + b)^2 - (a + b)^2c^2 - (a - b)^2c^2 + c^4) = \\ = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2b^2a^2.$$

**240. Ответ.** Все натуральные числа, кроме 1.

Число 1 можно бесконечным числом способов представить в указанном виде, если рассмотреть пару  $(1, y)$ , где

$y$  — любое натуральное число. Пусть теперь  $\frac{x^2 + y}{xy + 1} = N > 1$ ,

тогда  $x^2 - Ny \cdot x + y - N = 0$ , для существования натурального решения необходимо, чтобы дискриминант этого квадратного уравнения был точным квадратом, т. е.

$$N^2y^2 - 4y + 4N = k^2.$$

Докажем, что  $Ny - 2 < k < Ny + 2$ . Действительно,

$$k^2 - (Ny - 2)^2 = 4Ny - 4y + 4N - 4 = (N - 1)(4y + 4) > 0 \text{ и}$$
$$(Ny + 2)^2 - k^2 = 4Ny + 4y + 4 - 4N = 4N(y - 1) + 4y + 4 > 0.$$

Допустим, что  $k = Ny \pm 1$ , тогда  $k^2 = N^2y^2 \pm 2Ny + 1 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow N^2y^2 - 4y + 4N = N^2y^2 \pm 2Ny + 1 \Rightarrow 4(N - y) = \pm 2Ny + 1$ ,  
что не верно, так как левая часть четна, а правая — нечетна.  
Значит,  $k^2 = N^2y^2$  или  $N = y$ , при этом  $x^2 - y^2 \cdot x = 0 \Rightarrow$   
 $\Rightarrow x = y^2$  ( $x \neq 0$ ).

Следовательно, единственный способ, дающий возможность представить число  $N > 1$ , — это взять пару  $x = N^2$ ,  $y = N$ .

## ▼ 11 класс

**241.** Пусть углы треугольника —  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . По теореме синусов треугольник со сторонами  $a = \sin \alpha$ ,  $b = \sin \beta$  и  $c = \sin \gamma$  подобен исходному. Таким образом, существует треугольник с рациональными сторонами и углами  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$ . Для него из теоремы косинусов  $\left( \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \right)$  следует ра-

циональность  $\cos \alpha$ . Аналогично рациональны  $\cos \beta$  и  $\cos \gamma$ .

**242.** Пусть  $\angle BMA = \alpha$ , а  $N$  — точка пересечения прямых  $AQ$  и  $BP$  (рис. 110), тогда утверждение задачи равносильно равенству  $\angle BNA = \alpha$ . Имеем  $\angle BO_1A = 2\alpha$  (центральный угол)  $\Rightarrow \angle BO_2A = \pi - 2\alpha \Rightarrow \angle BQA = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \angle MAQ = \frac{\pi}{2}$ . Далее,  $\angle NPA = \pi - \angle BPA = \angle BQA = \frac{\pi}{2} - \alpha$ . Отсюда  $\angle BNA = \alpha$ .

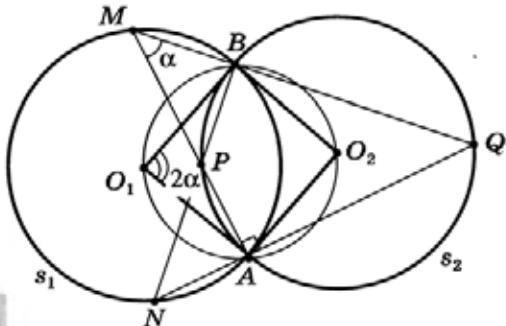


Рис. 110

**243. Ответ.** Существует. Например,  $P(x) = (x + a)^{2001}$ , где  $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

Будем искать многочлен  $P(x)$  в виде  $P(x) = (x + a)^{2001}$ . Тогда  $P(x^2 - 1) = (x^2 - 1 + a)^{2001}$ ,  $P(x) = (x + a)^{2001}$ , и условие выполняется, если  $x^2 - 1 + a \vdots x + a$ . Но  $x^2 - 1 + a = x^2 - a^2 + (a^2 + a - 1)$  делится на  $x + a$ , если  $a^2 + a - 1 = 0$ , т. е. при  $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$ .

**244. Ответ.** 48 авиарейсов.

Городов всего 64, поэтому, чтобы попасть из любого города в любой другой город, необходимо не менее 63 авиарейсов (каждый авиарейс добавляет к городам, в которые можно добраться из данного города, не более одного города). Покажем, что если будет только 63 авиарейса, то найдется два таких города, что путь из одного в другой потребует не менее 15 перелетов.

При 63 авиарейсах, используя каждый рейс не более одного раза и только в одну сторону, можно из любого города в любой другой попасть только одним способом. Пусть  $A$  и  $C$ ,  $B$  и  $D$  — пары городов в диагонально противоположных вершинах «большого квадрата».

Рассмотрим кратчайший путь из  $A$  в  $B$ . Если он пересекает меридиан  $4^\circ 30'$ , т. е. попадает в некоторую точку  $E \in \Pi(\text{III})$ , то путь состоит не менее чем из  $4 + 7 + 4 = 15$  перелетов (рис. 111, а). Это следует из того, что за один перелет широта или долгота изменяется на  $1^\circ$ , а нам требуется увеличить широту на  $7^\circ$  и на пути  $A \rightarrow E$  ( $E \rightarrow B$ ) изменить долготу по крайней мере на  $4^\circ$ .

Рассмотрим путь  $A \rightarrow B \rightarrow C$  (как мы показали выше, он не заходит в область  $\Pi$ ) и выделим из него кратчайший

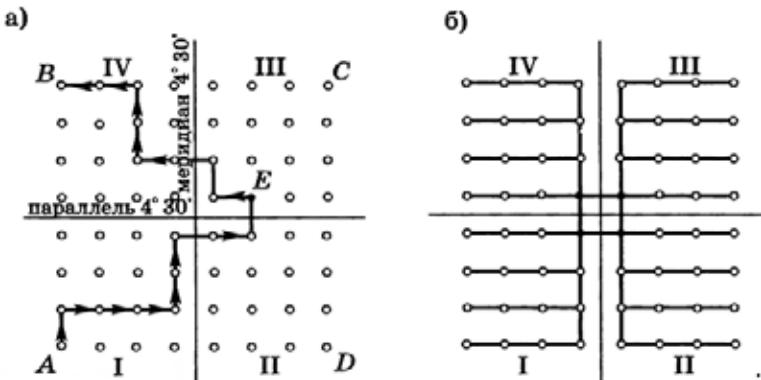


Рис. 111

путь из  $A$  в  $C$ . Он обязан пройти только через области I, IV и III. Аналогично, выделяя из пути  $A \rightarrow D \rightarrow C$  кратчайший, получим, что он обязан пройти только через области I, II и III. Таким образом, из  $A$  в  $C$  ведут два различных пути. Противоречие.

Таким образом, нужно не менее 64 авиарейсов, т. е. можно закрыть не более  $8 \cdot 7 \cdot 2 - 64 = 48$  авиарейсов.

Пример, как это можно сделать, показан на рисунке 111, б. В любой из четырех групп в центральный город (на рисунке закрашен) можно добраться, совершив не более 6 перелетов, а из любого центрального города до любого центрального города можно добраться, совершив не более двух перелетов. Значит, из любого города в любой другой через центральные можно добраться, совершив не более  $6 \cdot 2 + 2 = 14$  перелетов.

**245.** Заметим, что левая и правая части неравенства равны, так как

$$\begin{aligned} & \frac{a^2}{a+b} + \frac{b^2}{b+c} + \frac{c^2}{c+a} - \left( \frac{b^2}{a+b} + \frac{c^2}{b+c} + \frac{a^2}{c+a} \right) = \\ & = \frac{a^2 - b^2}{a+b} + \frac{b^2 - c^2}{b+c} + \frac{c^2 - a^2}{c+a} = (a-b) + (b-c) + (c-a) = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, равны все три выражения. Тогда, вычитая из первого второе, получим

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{a^2 - c^2}{a+b} + \frac{b^2 - a^2}{b+c} + \frac{c^2 - b^2}{c+a} = \frac{a^2c^2 + b^2a^2 + c^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{(a+b)(b+c)(c+a)} = \\ &= -\frac{(a^2 - b^2)^2 + (b^2 - c^2)^2 + (c^2 - a^2)^2}{2(a+b)(b+c)(c+a)}. \end{aligned}$$

Если числитель равен 0, то  $a^2 = b^2 = c^2$ , и, учитывая, что  $a+b \neq 0$ ,  $b+c \neq 0$ ,  $c+a \neq 0$ , имеем  $a=b=c$ .

**246.** Из условия следует, что числа  $\frac{10^{2000}}{p}$  и  $\frac{10^{1999} \cdot a}{b}$  имеют одинаковые дробные части. Значит, число

$$\frac{10^{2000}}{p} - \frac{10^{1999} \cdot a}{b} = \frac{10^{2000}b - 10^{1999}ap}{bp} -$$

целое. Тогда  $10^{2000}b - 10^{1999}ap$  делится на  $p$ , следовательно, и  $10^{2000}b$  делится на  $p$ . А так как  $10^{2000}$  взаимно просто с  $p$ , то  $b$  делится на  $p$ .

**247.** Рассмотрим треугольник  $ABC$  с вершинами в вершинах  $P_2$ , содержащий точку  $X$  — центр рассматриваемой гомотетии  $H$ . Очевидно, что такой существует. Покажем, что одну из его вершин  $H$  оставляет внутри треугольника  $ABC$ . Отсюда будет следовать утверждение задачи, так как  $P_2$  лежит в  $P_1$ .

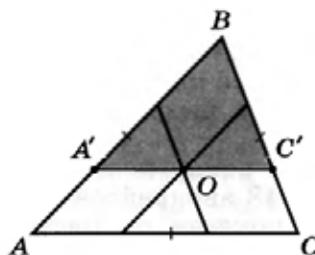


Рис. 112

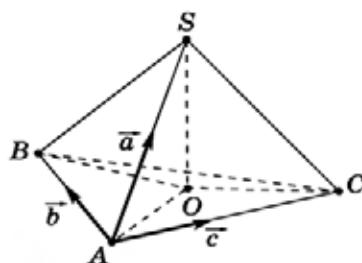


Рис. 113

Проведем через точку  $O$  пересечения медиан треугольника  $ABC$  прямые, параллельные сторонам (рис. 112). Тогда точка  $X$  окажется внутри одного из треугольников, отсекаемых этими прямыми. Пусть, например, точка  $X$  лежит в закрашенной части ( $\triangle A'C'B$ ). Тогда при гомотетии с центром в точке  $X$  и коэффициентом  $k = -\frac{1}{2}$  точка  $B$  не выйдет за треугольник  $ABC$ . Аналогично для других частей.

Утверждение задачи доказано.

**248.** По условию в треугольнике  $SAB$   $\angle ASB > \frac{\pi}{3}$ , следовательно, меньший из углов  $SAB$  и  $SBA$  меньше  $\frac{\pi}{3}$  (рис. 113). Аналогично каждый из наименьших углов двух других боковых граней пирамиды меньше  $\frac{\pi}{3}$ . Покажем, что какие-то два из наименьших углов боковых граней имеют общую вершину. Пусть это не так. Без ограничения общности, пусть  $\angle SAB$ ,  $\angle SBC$  и  $\angle SCA$  — наименьшие углы боковых граней пирамиды. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона, поэтому тогда будут выполняться неравенства  $SB < SA$ ,  $SC < SB$ ,  $SA < SC \Rightarrow SA < SA$ . Противоречие. Следовательно, какие-то два из наименьших углов боковых граней имеют общую вершину. Пусть, например, это углы  $SAB$  и  $SAC$ . Тогда  $\angle SAB < \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle SAC < \frac{\pi}{3}$ . Покажем, что отсюда следует неравенство  $\angle SAO < \frac{\pi}{3}$ . Действительно,

если  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  — единичные векторы на лучах  $AS$ ,  $AB$  и  $AC$ , то  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle SAB = \cos \angle SAB > \frac{1}{2}$ . Аналогично  $\vec{a} \cdot \vec{c} > \frac{1}{2}$ . Точка  $O$  лежит между лучами  $AB$  и  $AC$ , поэтому

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO} &= x\vec{b} + y\vec{c}, \text{ где } x > 0, y > 0. \text{ Следовательно, } \cos \angle SAO = \\ &= \frac{\vec{a} \cdot \overrightarrow{AO}}{|\vec{a}| |\overrightarrow{AO}|} = \frac{\vec{a} \cdot (x\vec{b} + y\vec{c})}{|\overrightarrow{AO}|} > \frac{1}{2} \frac{x+y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\vec{b} \cdot \vec{c}}} > \frac{1}{2}, \text{ так как} \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= |\vec{b}| |\vec{c}| \cos \angle BAC < 1. \text{ А это и означает, что } \angle SAO < \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

## 2001–2002

### ▼ 8 класс

**249.** Ответ. Нет.

Пусть из какой-то коробки в следующую переложен белый шарик. Тогда в нее из предыдущей надо переложить черный, иначе надпись на ней останется верной. Аналогично если из коробки переложен черный шарик, то в нее должен быть переложен белый. Значит, цвета переложенных шариков должны чередоваться по кругу. Но тогда если мы, начав с какой-то коробки, обойдем круг полностью, то цвет переложенного в нее (2001-го по счету) шарика будет таким же, как цвет переложенного из нее (первого по счету).

**250.** Ответ. Нет.

Предположим, что описанная в условии ситуация возможна. Заметим, что результат перемножения трех подряд идущих нечетных чисел делится на 3, т. е. можно считать, что Вася получил число  $3m$ . Пусть Коля перемножил числа  $2k - 1$  и  $2k + 1$ . Тогда  $(2k - 1)(2k + 1) = 3m + 2002$ , т. е.  $(2k)^2 - 3(m + 667) + 2$ . Но квадраты целых чисел при делении на 3 могут иметь остатки только 0 и 1, а в нашем случае  $(2k)^2$  имеет остаток 2. Противоречие.

**251.** Мысленно сгруппируем вазочки, в которых поровну конфет. При этом вазочек, содержащих максимальное и минимальное число конфет, может быть по одной, но в каждой из остальных групп вазочек не меньше двух. В самом деле, если отметить по вазочке с наибольшим и наименьшим числом конфет, то на каждой из двух дуг, на которые эти вазочки разбивают окружность, каждое из промежуточных значений принимается хотя бы по разу. Теперь сосчитаем, сколько вазочек в каждой группе. Сумма полученных чисел равна 50, и среди них не больше двух единиц. Очевидно, число вазочек, которые останутся полными, равно числу нечетных слагаемых в этой сумме, а наибольшее число нечетных слагаемых получается, когда два из них — единицы, а 16 — тройки. В этом случае полных вазочек остается 18, в остальных случаях — больше.

а)

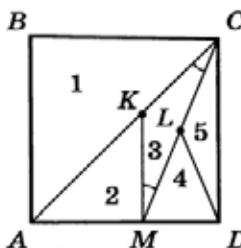


Рис. 114

б)

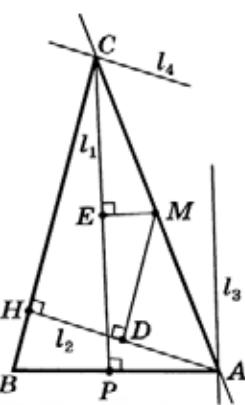
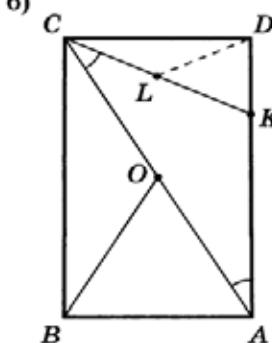


Рис. 115

**252.** 1) Пусть прямоугольник — квадрат (рис. 114, а). Приведем биссектрису  $CM$  угла  $ACD$ . Точка  $K$  на  $AC$  выбирается так, что  $KM \parallel CD$ ,  $L$  — середина  $CM$ . Треугольник  $CMK$  равнобедренный, так как  $\angle KMC = \angle MCD = \angle KCM$ . Остальные четыре треугольника также, очевидно, равнобедренные.

2) Пусть прямоугольник — не квадрат и  $AD > AB$  (рис. 114, б),  $O$  — середина  $AC$ ,  $K$  выбирается так, что  $AK = KC$  ( $L$  — середина  $KC$ ). При этом отрезок  $LD$  проводится, если  $KD \neq CD$  (получается 5 равнобедренных треугольников), и не проводится в противном случае (4 треугольника).

В обоих случаях полученные равнобедренные треугольники различны, так как любые два из них отличаются либо основаниями, либо высотами.

**253. Ответ.** Нет.

Допустим, что такое число существует и равно  $N = \overline{abc} = 100a + 10b + c$ , тогда  $N = abc + a + b + c \Leftrightarrow a(100 - bc - 1) + b(10 - 1) = 0$ ,  $a(99 - bc) + 9b = 0$ , но  $bc \leqslant 9 \cdot 9 = 81 \Rightarrow 99 - bc > 0$ , значит,  $a(99 - bc) + 9b > 0$ . Противоречие.

**254.** В треугольнике  $ACP$  (рис. 115)  $ME$  — средняя линия, поэтому  $ME \parallel AB$ , следовательно  $ME \perp CP$ . Аналогично  $MD \perp AH$ . Кроме того,  $AP = 2ME$  и  $CH = 2MD$ . Отсюда получаем построение:

1) Через точку  $E$  проводим прямую  $l_1$ ,  $l_1 \perp ME$ ; через точку  $D$  проводим прямую  $l_2$ ,  $l_2 \perp MD$ .

2) Проводим прямую  $l_3$ ,  $l_3 \parallel l_1$  на расстоянии  $h_1 = 2ME$  от  $l_1$ , расположенную с той же стороны от  $l_1$ , что и точка  $M$ ,  $A = l_3 \cap l_2$ .

3) Аналогично  $C = l_4 \cap l_1$  (см. рис. 115).

4)  $B = l_A \cap l_C$ , где  $l_A \perp l_1$ ,  $l_C \perp l_2$ .

**255. Ответ.** Нет.

Рассмотрим числа 1, 2 и 3. Мы не можем менять места-  
ми какие-либо два из этих трех чисел, даже если они стоят  
рядом. Значит, их порядок по часовой стрелке будет сохра-  
няться. Таким образом, мы не можем изменить их порядок  
на противоположный.

**256.** Так как  $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdots \frac{9}{10} = \frac{2}{5}$ ,  $\frac{10}{11} \cdot \frac{11}{12} \cdots \frac{19}{20} = \frac{1}{2}$ ,  
 $\frac{20}{21} \cdot \frac{21}{22} \cdots \frac{99}{100} = \frac{1}{5}$ ,  $\frac{100}{101} \cdot \frac{101}{102} \cdots \frac{199}{200} = \frac{1}{2}$  и  $\frac{200}{201} \cdot \frac{201}{202} \cdots \times$   
 $\times \frac{999}{1000} = \frac{1}{5}$ , то, заменив плюсами звездочки после  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{3}{4}$ , ми-  
нусами — звездочки после  $\frac{9}{10}$ ,  $\frac{19}{20}$ ,  $\frac{99}{100}$  и  $\frac{199}{200}$ , а знаками  
умножения — все остальные звездочки, получим выраже-  
ние, равное  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = 0$ .

**9 класс**

**257.** Пусть для некоторого  $k$  трехчлен  $x^2 + a^k x + b^k$  имеет корни. Тогда  $D_k = a^{2k} - 4b^k \geq 0 \Leftrightarrow a^{2k} \geq 4b^k$ . Поэтому для любого нечетного  $n$  трехчлен  $x^2 + a^{nk} x + b^{nk}$  также имеет корни. Действительно, если  $b^k < 0$ , то  $b^{nk} < 0$  и  $D_{nk} = a^{2nk} - 4b^{nk} > 0$ , а если  $b^k \geq 0$ , то  $a^{2nk} \geq (4b^k)^n = 4^n b^{nk} \geq 4b^{nk} \Rightarrow D_{nk} \geq 0$ .

**258.** Предположим, что существует такая последовательность операций, при которой цифра 3 никогда не появится на доске. Будем строить последовательность выписанных чисел (все они натуральные) в обратном порядке, т. е. либо деляя число на 2 (при этом оно должно быть четным), либо прибавляя к нему 1, выбирая ту из операций, которая не дает числа с цифрой 3. Получаем  $2002 \rightarrow 1001 \rightarrow 1002 \rightarrow 501 \rightarrow 502 \rightarrow 251 \rightarrow 252 \rightarrow 126 \rightarrow 127 \rightarrow 128 \rightarrow 64 (128 \rightarrow 129 \rightarrow 130) \rightarrow 65 \rightarrow 66 \rightarrow 67 \rightarrow 68 \rightarrow 69 \rightarrow 70 \rightarrow 71 \rightarrow 72$  (каждое из чисел 66, 68, 70, 72 при делении на 2 дает цифру 3)  $\rightarrow 73$ . Утверждение доказано.

**259. Первое решение.** Пусть  $\angle BAC = 2\alpha$ , тогда  $\angle ACD = \frac{\pi}{2} - 2\alpha$ ,  
 $\angle NCD = \frac{1}{2} \angle BCD = \alpha \Rightarrow \angle ANC = \pi - \angle NAC - \angle ACD - \angle NCD =$   
 $= \pi - \alpha - \left( \frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) - \alpha = \frac{\pi}{2}$  (рис. 116). Аналогично  $\angle BMC = \frac{\pi}{2}$ .

Пусть  $I$  — точка пересечения биссектрис  $AN$  и  $BM$  тре-  
угольника  $ABC$ . Тогда  $\angle CNI = \angle CMI = \frac{\pi}{2}$ , следовательно,

точки  $M$  и  $N$  лежат на окружности с диаметром  $CI$ . Отсюда по теореме синусов

$$MN = CI \cdot \sin \angle MCN = CI \cdot \sin \frac{\pi}{4}.$$

С другой стороны,  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , поэтому ее радиус  $IK = CI \cdot \sin \angle KCI = CI \cdot \sin \frac{\pi}{4}$ .

Утверждение доказано.

**Второе решение.** Пусть  $CP$  и  $CQ$  — биссектрисы треугольников  $ACD$  и  $BCD$ . Тогда отрезок  $BM$  является высотой и биссектрисой треугольника  $CBP$ , поэтому  $CM = MP$ . Аналогично  $CN = NQ$ , т. е.  $MN$  — средняя линия треугольника  $PCQ$  и  $MN = 0,5PQ$ . Пусть  $AC = b$ ,  $BC = a$ ,  $AB = c$ , тогда  $AP = c - a$ ,  $BQ = c - b$  (треугольники  $CBP$  и  $CAQ$  — равнобедренные) и  $PQ = c - (c - a) - (c - b) = a + b - c$ . Но в прямоугольном треугольнике сумма катетов равна сумме диаметров вписанной и описанной окружностей, т. е.  $a + b - c = a + b - 2R = 2r$ , откуда  $MN = 0,5PQ = r$ .

**260.** Проведем доказательство индукцией по числу  $n$  команд. Если  $n = 2$ , то все очевидно.

Допустим, что есть команда  $A$ , игравшая только дома. Тогда условие задачи останется справедливым, если убрать команду  $A$ . Значит, для оставшихся команд по предположению индукции можно составить расписание игр на три дня. По условию с  $A$  играла (на выезде) единственная команда  $B$ . Она сыграла на выезде еще не более чем с одной командой  $C$  и один раз сыграла дома с некоторой командой  $D$ . Поэтому игру  $A$  с  $B$  можно провести в день, когда  $B$  не играла ни с  $C$ , ни с  $D$ . В этом случае все доказано.

Предположим теперь, что каждая команда сыграла хотя бы одну игру в гостях. Тогда каждая команда сыграла ровно по одной игре дома и в гостях, так как суммарное количество игр, сыгранных всеми командами дома, равно суммарному количеству игр, сыгранных всеми командами в гостях. Значит, все команды разбиваются на группы таким образом, что в группе из  $k$  команд  $A_1, A_2, \dots, A_k$  команда  $A_1$  сыграла дома с  $A_2$ , команда  $A_2$  сыграла дома с  $A_3$  и т. д.,  $A_{k-1}$  с  $A_k$ ,  $A_k$  с  $A_1$ . Тогда в каждой группе пару  $A_1, A_2$  относим к первому дню, пару  $A_2, A_3$  — ко второму, пару  $A_3, A_4$  — к первому и т. д. Если  $k$  четное, то все пары будут расписаны по двум дням, если же  $k$  — нечетное, то последнюю пару  $A_k, A_1$  отнесем к третьему дню. Проделав это для всех групп, мы получим расписание на три дня.

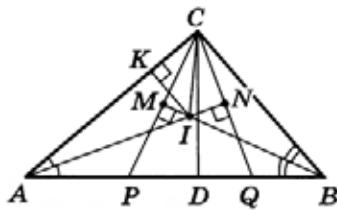


Рис. 116

**261.** По условию  $py + qx$  делится на  $xy$ . Поэтому  $py$  делится на  $x$ , и, следовательно (так как  $p$  взаимно просто с  $x$ ),  $y$  делится на  $x$ . Аналогично доказывается, что  $x$  делится на  $y$ . Но если каждое из двух натуральных чисел делится на другое, то эти числа равны.

**262. Ответ.** Через 66 мин.

За один час, с какого бы времени ни начала работать программа, в окне высветится число  $1 + 2 + \dots + 59 = 1770$ , поэтому прошло более часа, и по его истечении число должно было увеличиться еще на  $2001 - 1770 = 231$ .

Из неравенства  $56 + 57 + 58 + 59 = 230 < 231$  следует, что прошло дополнительно не менее 5 мин. Но сумма пяти подряд идущих чисел в последовательности 1, 2, 3, ..., 58, 59, 0, 1, 2, 3, 4 делится на 5, т. е. отлична от 231. Значит, прошло не менее 6 мин. Из равенства  $56 + 57 + 58 + 59 + 0 + 1 = 231$  следует, что число 2001 могло появиться через 66 мин.

**263.** Так как точки  $A, P, B, O$  лежат на одной окружности, то  $\angle BPA = 180^\circ - \angle BOA$  (рис. 117). Из параллельности прямых  $AD$  и  $BC$  получаем, что  $\angle BPA = \angle DAN$  ( $N$  — точка на продолжении отрезка  $PA$  за точку  $A$ ). Отсюда  $\angle DAN = 180^\circ - \angle BOA = \angle AOD$ .

Но тогда по теореме, обратной теореме об угле между касательной и хордой,  $PA$  является касательной к окружности, описанной около треугольника  $AOD$ .

**264. Ответ.** Выигрывает второй игрок.

Второй игрок отвечает симметрично ходу первого относительно центра окружности, пока у него нет выигрышного хода, а как только такой появляется, делает его. Первый игрок не сможет выиграть, ибо после хода второго не появляются новых пар соседних чисел, отличных от имеющихся перед его ходом (это верно, пока чисел больше четырех, но из дальнейших рассуждений станет ясно, что игра закончится раньше, чем их станет меньше). Рассмотрим первое появление числа, большего 2. Если это число 4, то игра на этом закончится. Если 3, то или рядом с этим числом стоит 1, и тогда следующим ходом второй игрок выигрывает (у первого выигрышного хода быть не может, как показано выше), или рядом с числом 3 две двойки, но тогда выигрышный ход был перед этим, так как 3 могло получиться только из 2 и 1, а  $2 + 2 = 4$ . Таким образом, после появления числа 3 или 4 игра заканчивается, следовательно, больших чисел появиться не может и ничьей не будет. А значит, выигрывает второй игрок.

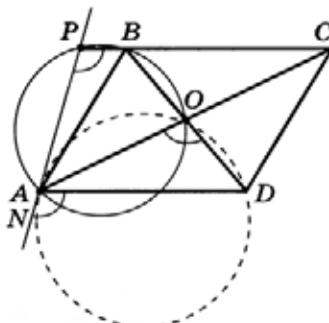


Рис. 117

**265.** Из условия следует, что  $-1 \leq \operatorname{tg} x \leq \operatorname{ctg} x \leq 1$ .  $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ , поэтому либо  $|\operatorname{tg} x|$ , либо  $|\operatorname{ctg} x|$  не меньше 1. Поэтому если неравенство выполнено, то либо  $\operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x = 1$ , либо  $\operatorname{tg} x = -\operatorname{ctg} x = -1$ . Но в обоих этих случаях  $|\sin x| = |\cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , и неравенство из условия не выполняется. Значит, у него нет решений.

**266. Ответ.** Выигрывает Юра.

Для выигрыша ему достаточно каждым ходом, пока число на доске меньше  $2002! - 2$ , прибавлять к нему  $1 = 1!$ . Тогда перед ходом Феди число на доске нечетно, и он может прибавить лишь 1. Таким образом, за 2 хода число увеличивается на 2. В конце концов оно станет равным  $2002! - 2$  (перед ходом Юры). Юра прибавит к нему  $2 = 2!$  и выиграет.

**267.** Пусть для определенности  $\angle B \geq \angle C$  (рис. 118). Пусть  $I$  — центр окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Угол между хордами  $BI$  и  $BB_1$  равен  $180^\circ - \frac{B}{2}$ , так как

$BI$  — биссектриса угла  $ABC$  и  $\angle ABI = \frac{B}{2}$ .

Между этими хордами находятся две дуги  $BB_1$  и  $BI$  окружности. На дугу  $BI$  опирается вписанный угол  $BCI = \frac{C}{2}$ . Значит, на дугу  $B_1B$  опирается вписанный угол,

равный  $\left| \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right|$ . Аналогично на дугу  $IC_1C$  опирается вписанный угол  $\frac{B}{2}$ , а на дугу  $IC_1$  — угол  $\frac{C}{2}$ , значит, хорде  $C_1C$  тоже соответствует вписанный угол, равный  $\left| \frac{B}{2} - \frac{C}{2} \right|$ .

Таким образом, хорды  $BB_1$  и  $CC_1$  равны, так как им соответствуют равные вписанные углы.

**268.** См. решение задачи 260.

**269.** См. решение задачи 261.

**270. Ответ.** Верно.

Назовем пару соседних чисел одной строки *хорошой*, если в ней оба числа не меньше 13, и *плохой* — в противном случае. Любая хорошая пара  $p, q$ , где  $p < q$ , — искомая, ибо

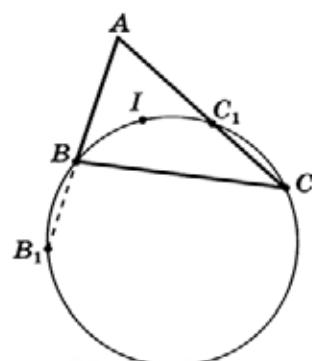
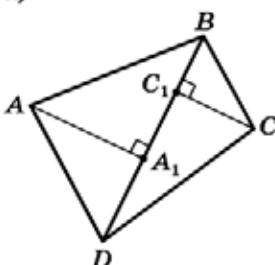


Рис. 118

для нее  $D = p^2 - 4q \geq 13^2 - 4q \geq 13^2 - 4 \cdot 36 = 25 > 0$ , т. е. трехчлен  $x^2 + px + q$  имеет два различных действительных корня. Докажем, что хорошая пара найдется. Для этого разобьем числа в таблице на 18 пар (в первой строчке 3 пары соседних, во второй — 3 пары соседних и т. д.). Из этих 18 пар не более 12 будут плохими. Любая из оставшихся пар — хорошая.

**271.** Рассмотрим точки  $A_1$  и  $C_1$  — основания перпендикуляров, опущенных из точек  $A$  и  $C$  соответственно на диагональ  $BD$  (рис. 119, а). Окружности  $S_{AB}$ ,  $S_{BC}$ ,  $S_{CD}$ ,  $S_{DA}$  описаны около треугольников  $ABA_1$ ,  $BCC_1$ ,  $CDC_1$ ,  $DAA_1$  соответственно. Покажем, что  $A_1$  и  $C_1$  совпадают.

а)



б)

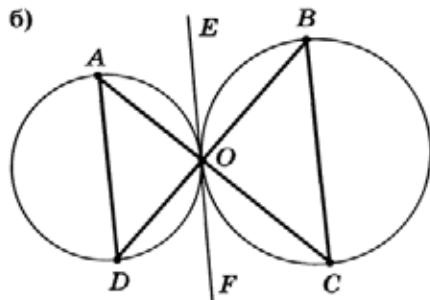


Рис. 119

Если это не так, то либо отрезки  $DC_1$  и  $BA_1$ , либо отрезки  $DA_1$  и  $BC_1$  пересекаются по общему отрезку, а значит, либо  $S_{CD}$  и  $S_{AB}$ , либо  $S_{BC}$  и  $S_{AD}$  имеют общие внутренние точки, что противоречит условию их касания. Тем самым мы доказали, что точки касания совпадают с точкой пересечения диагоналей  $ABCD$ .

Теперь пусть  $EF$  — касательная  $S_{BC}$  и  $S_{DA}$ , проходящая через их точку касания  $O$  (рис. 119, б). Тогда  $\angle BCO = \angle EOB = \angle DOF = \angle DAO$  по теореме об углах между секущей и касательной. Значит,  $DA \parallel BC$ . Аналогично получаем  $AB \parallel CD$ .  $ABCD$  — параллелограмм с перпендикулярными диагоналями, следовательно,  $ABCD$  — ромб.

**272. Ответ.** Не существуют.

Предположим, что такие многочлены существуют. Изобразим многочлены точками и соединим каждые две точки отрезком, как показано на рисунке 120, а.

Назовем отрезок *положительным*, если сумма многочленов, соответствующих его концам, всегда положительна, и *отрицательным*, если сумма многочленов, соответствующих его концам, всегда отрицательна. Каждый из шести данных отрезков будет либо положительным, либо отрицательным, так как если многочлен не имеет корней,

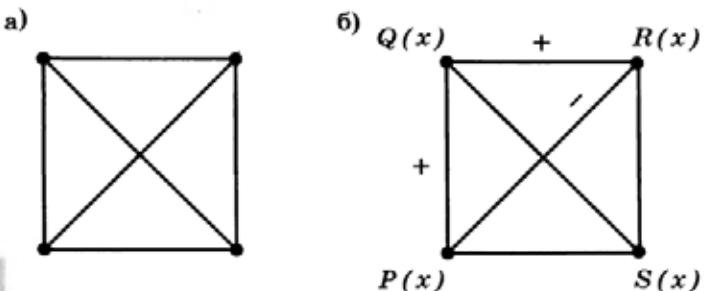


Рис. 120

то все его значения имеют один и тот же знак. Для данной диаграммы верна лемма.

**Лемма.** *Нет треугольника со сторонами одного знака.*

**Доказательство.** Если для любых  $x$   $P(x) + Q(x) > 0$ ,  $Q(x) + R(x) > 0$ ,  $R(x) + P(x) > 0$ , то  $P(x) + Q(x) + R(x) = \frac{1}{2}((P(x) + Q(x)) + (Q(x) + R(x)) + (R(x) + P(x))) > 0$  для

любых  $x$  — противоречие. Случай, когда все стороны отрицательны, рассматривается аналогично. Лемма доказана.

Не нарушая общности, можно считать, что на сторонах треугольника  $QRP$  плюсы и минусы расположены, как на рисунке 120, б).

Один из отрезков  $RS$  и  $PS$  положителен (иначе противоречие лемме). Не нарушая общности, можно считать, что  $RS > 0$ . Из треугольника  $QRS$  и леммы следует, что  $QS < 0$ . Тогда  $(P(x) + Q(x)) + (R(x) + S(x)) > 0$ , а  $(P(x) + R(x)) + (Q(x) + S(x)) < 0$  — противоречие.

## 11 класс

273. См. решение задачи 265.

274. Поскольку каждый раз Федя прибавляет хотя бы 1, то рано или поздно число на доске станет не меньше  $2002!$ . Рассмотрим ту операцию, после которой это впервые произошло. Пусть до этого было записано число  $N = 2002! - a$  ( $a > 0$ ), а Федя прибавил  $n!$ . Тогда  $n! < 2002!$ , поэтому  $n < 2002$  и  $2002!$  делится на  $n!$ . Тогда и  $a = 2002! - N$  делится на  $n!$ . Поэтому  $a \geq n!$ , и Федя получил число  $2002! - a + n! \leq 2002!$ . Но поскольку оно по предположению не меньше  $2002!$ , то оно и есть  $2002!$ .

275. Ответ. Нет.

Будем обозначать через  $AB$  количество бусинок на меньшей из двух дуг с концами в бусинках  $A$  и  $B$ . Пока-

жем, что если до хода  $AB = p^{n-1} - 1$ , то и после хода  $AB = p^{n-1} - 1$ , из чего отрицательный ответ на вопрос задачи вытекает очевидным образом. Пусть  $d$  — число кусков, на которые мы делим бусы. Так как  $p^n$  делится на  $d$ , то  $d = p^k$ . Если  $k = 0$ , то кусок всего один и  $AB$  не меняется. Если  $k > 0$ , то длина  $l$  куска равна  $\frac{p^n}{d} = p^{n-k} \leq p^{n-1}$ , следовательно,  $A$  и  $B$  лежат в разных кусках. Между ними лежит  $\frac{p^{n-1}}{p^{n-k}} - 1 = p^{k-1} - 1$  кусков. Занумеруем их так, чтобы кусок, где лежит  $A$ , был под номером 0, а  $B$  — под номером  $p^{k-1}$ . Пусть  $A$  в своем куске стоит на месте  $t$ , а  $B$  — на месте  $r$ , тогда  $AB = p^{n-k} - t + (p^{k-1} - 1)p^{n-k} + r - 1 = (r - t) + p^{n-1} - 1$ , а с другой стороны,  $AB = p^{n-1} - 1$ , значит,  $t = r$ . Отсюда следует, что после перестановки бусинок в кусках их номера  $A$  и  $B$  в своих кусках будут также равными, и потому  $AB$  останется равным  $p^{n-1} - 1$ , что и требовалось доказать.

276. Пусть  $T_{AB}$ ,  $T_{AC}$ ,  $T_{AD}$  — точки касания сферы  $\omega$  с ребрами  $AB$ ,  $AC$  и  $AD$  соответственно. Тогда

$$IT_{AB} \perp AB, IT_{AC} \perp AC, IT_{AD} \perp AD,$$

т. е.  $\angle AT_{AB}I = \angle AT_{AC}I = \angle AT_{AD}I = 90^\circ$ .

Значит, точки  $T_{AB}$ ,  $T_{AC}$  и  $T_{AD}$  лежат на сфере, построенной на отрезке  $AI$  как на диаметре. Тогда  $T_{AB}T_{AC}$ ,  $T_{AC}T_{AD}$  и  $T_{AD}T_{AB}$  — хорды этой сферы, причем хотя бы одна из них не является диаметром  $R$ . Значит,  $T_{AB}T_{AC} + T_{AC}T_{AD} + T_{AD}T_{AB} < 3AI$ . Записав три аналогичных неравенства для трех оставшихся вершин тетраэдра  $ABCD$  и сложив их, получим требуемое неравенство.

277. Из теоремы Виета следует, что  $\frac{b}{a} = x_1 + x_2$  и  $\frac{c}{a} = x_1 \cdot x_2$  — целые числа, поэтому можно рассматривать приведенное квадратное уравнение  $x^2 - px + q = 0$ , коэффициенты которого — степени двойки или единицы:  $p = 2^k$ ,  $q = 2^l$ . Произведение корней — степень двойки, следовательно, каждый из них — степень двойки или единица. Пусть  $x_1 = 2^n$ , тогда  $2^{2n} - 2^k2^n + 2^l = 0$ . Разделив это равенство на наименьшую входящую в него степень двойки, получаем равенство  $A - B + C = 0$ , где по крайней мере одно из чисел  $A$ ,  $B$ ,  $C$  равно единице, а два других — неотрицательные степени двойки. Это возможно только в случае  $A = C = 1$ ,  $B = 2$ . Откуда следует, что  $p = 2^{n+1}$ ,  $q = 2^{2n}$ , и, значит,  $x_2 = x_1 = 2^n$ .

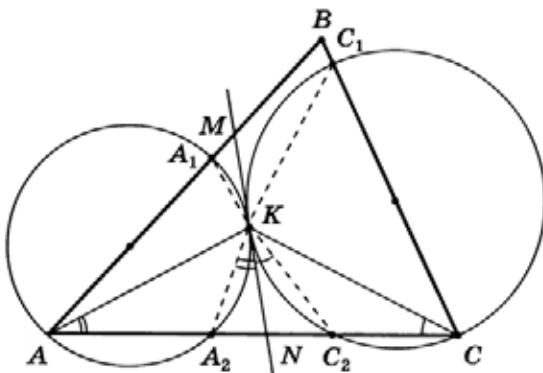


Рис. 121

**278.** Проведем через точку  $K$  общую касательную  $MN$  к окружностям  $\omega_1$  и  $\omega_2$  (рис. 121). Имеем  $\angle KAC = \angle A_2KN$  по теореме об угле между касательной и хордой. Также  $\angle KCA = \angle C_2KN$ . Далее,  $\angle AKA_1 = \angle CKC_1 = 90^\circ$ , так как эти углы опираются на диаметры окружностей  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Отсюда  $\angle A_2KC_2 = \angle A_2KN + \angle C_2KN = \angle KAC + \angle KCA = 180^\circ - \angle AKC = 180^\circ - (360^\circ - \angle AKA_1 - \angle CKC_1 - \angle A_1KC_1) = \angle A_1KC_1$ .

**279. Ответ.** Верно.

Предположим, что у какой-то прогрессии  $X_1$  разность  $d_1$  меньше первого члена  $a_1$ . Тогда рассмотрим число  $a_1 - d_1$ . Оно, очевидно, натуральное и потому принадлежит какой-то другой прогрессии  $X_2$  с разностью  $d_2$ .

Но тогда число  $a = (a_1 - d_1) + d_1 d_2 = a_1 + (d_2 - 1)d_1$  принадлежит и  $X_1$ , и  $X_2$  — противоречие.

**280.** См. решение задачи 272.

## 2002–2003



### 8 класс

**281. Ответ.** 3 конфеты.

Очевидно, что конфет не меньше трех. Пусть, например, их стоимости равны 1, 3 и 8 рублям. Тогда  $(1 + 3) \cdot 2 = 8$  и  $3 \cdot 3 = 1 + 8$ .

**282.** Пусть  $H$  — точка пересечения высот (ортогоцентр),  $BB_1$  — высота треугольника  $ABC$ ,  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $BC$  (рис. 122).

Пусть  $BB_1 \cap MN = K$ , тогда  $MN \parallel AC$  (средняя линия),  $BH \perp AC$ ,

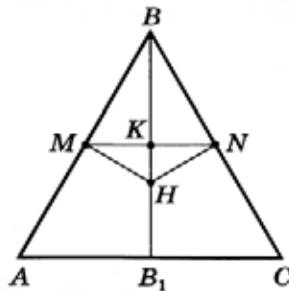


Рис. 122

значит,  $HK$  — высота треугольника  $MHN$ . Но  $HM = HN$ , следовательно,  $HK$  — биссектриса треугольника  $MHN$ . Поэтому  $\triangle HMB \cong \triangle HNB$  и  $BM = BN$ ,  $\frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}BC$ , т. е.  $BA = BC$ . Аналогично  $BC = CA$ .

**283. Ответ.** Среди 2002-значных чисел редких пар больше.

Два последовательных числа не могут делиться на одно и то же число, большее 1. Поэтому если  $n = \overline{a_1 a_2 \dots a_m}$  и  $(n, n+1)$  — редкая пара, то  $a_1 = a_2 = \dots = a_{m-1} = 1$  (первые  $m-1$  цифры чисел  $n$  и  $n+1$  совпадают, так как  $a_m \neq 9$ , в противном случае  $n+1$  оканчивается на 0).

Ясно, что при  $a_m$ , равном 1, 2 или 5, число  $n$  делится на  $P(n)$  (где  $P(n)$  — произведение цифр числа  $n$ ), при  $a_m$ , равном 3 или 6, из признаков делимости на 3 следует, что  $n \mid P(n)$ , если  $n$  — 2002-значное. Из признаков делимости на 4 и 9 следует, что при  $a_m$ , равном 4, 8 или 9, число  $n$  не делится на  $P(n)$ . Значит, для 2002-значных чисел заведомо редкими будут пары при  $a_m$ , равном 1, 2 или 5, а для 2003-значных чисел — только при  $a_m = 1$ . (Можно также проверить, что на 7 не делятся оба числа, оканчивающиеся на 7.)

**284. Ответ.** 6 полосок.

На рисунке 123 показан пример оклеивания кубика шестью полосками по 9 клеток каждая. Показаны 3 полоски. Аналогично располагаются 3 другие полоски (рис. 124).

Докажем, что меньшим числом полосок обойтись нельзя. Допустим, что существует оклейка пятью полосками, тогда хотя бы одна из них имеет длину 11 или 12 клеток ( $9 \cdot 6 = 54 > 5 \cdot 10$ ). Значит, оставшимися четырьмя полосками надо оклеить 43 или 42 клетки. Длинная полоска (11 или 12 клеток) оклеивает клетки четырех граней и не затрагивает двух граней. Посмотрим на них (рис. 125). Для того чтобы оклеить клетки, обозначенные крестиком, необходимо использовать 2 полоски, суммарная длина которых не может быть больше 10 клеток: по 3 клетки в этих двух гранях и 4 клетки на остальных четырех гранях. Сле-

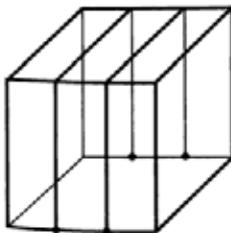


Рис. 123

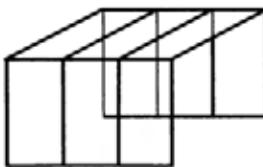


Рис. 124

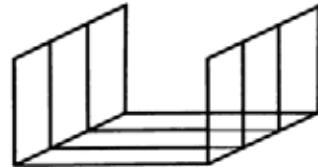




Рис. 125

довательно, двумя оставшимися полосками нужно оклеить не менее 32 клеток. Длина же каждой не более 12 клеток. Противоречие.

**Замечание.** См. также решение задачи 300.

**285. Ответ.** «Реалист».

Ответы А не совпадают, поэтому он не рыцарь. Если А — лжец, то он оба раза солгал. Но тогда получается, что Б — лжец и сказал про А правду. Противоречие. Значит, А — реалист. Первое его высказывание, очевидно, ложно (иначе получается, что он — лжец). Значит, истинно второе высказывание А, т. е. Б — реалист. Поскольку первое высказывание Б ложно, то второе истинно, значит, пропущенное слово — «реалист».

**286.** Предположим, что хотя бы одно из чисел  $x, y, z$  меньше 3. Тогда сумма оставшихся двух чисел больше 8. Следовательно, одно из них больше 4. В этом случае

$$[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geq 4^4 = 256 > 243.$$

Таким образом, можно считать, что все числа больше или равны 3.. В этом случае

$$[x]^4 + [y]^4 + [z]^4 \geq 3^4 + 3^4 + 3^4 = 243.$$

**287. 1)** Пусть параллелограмм не является прямоугольником, а  $AD \geq AB$ , тогда проекция точки  $B$  на  $AD$  лежит на отрезке  $AD$  и не совпадает ни с  $A$ , ни с  $D$ . Аналогично проекция точки  $D$  на  $BC$  лежит между  $B$  и  $C$ . Обозначим эти проекции через  $B'$  и  $D'$  (рис. 126). Прямоугольные треугольники  $ABB'$  и  $CDD'$  можно разрезать на 2 равнобедренных каждый, как на рисунке 127 ( $P$  — середина  $AB \Rightarrow AP = PB = PB'$ ).

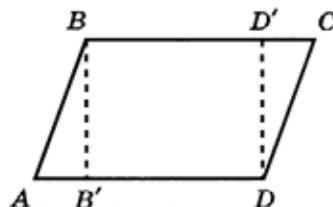


Рис. 126

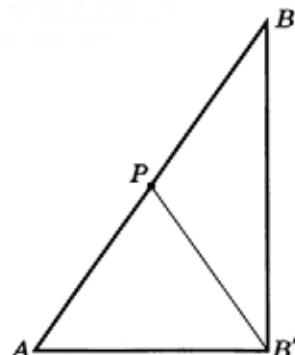


Рис. 127

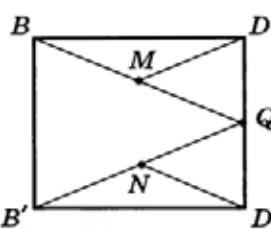


Рис. 128

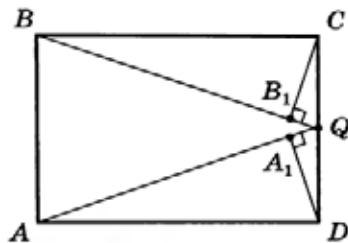


Рис. 129

Разрежем прямоугольник  $B'BDD'$  на 5 равнобедренных треугольников (рис. 128) ( $Q$  — середина  $DD'$ ,  $M$  — середина  $BQ$ ,  $N$  — середина  $B'Q$ ).

2) Пусть параллелограмм является прямоугольником (рис. 129):  $Q$  — середина  $CD$ ,  $CB_1$  — высота треугольника  $BCQ$ ,  $DA_1$  — высота треугольника  $ADQ$ . Тогда  $\triangle BQA$  — равнобедренный, а каждый из четырех прямоугольных треугольников  $BB_1C$ ,  $B_1CQ$ ,  $QA_1D$ ,  $AA_1D$  можно разрезать на 2 равнобедренных треугольника, как показано на рисунке 127.

**288. Ответ.** Выигрывает первый.

Перенумеруем точки по порядку числами от 1 до 56. Для выигрыша первому достаточно первым ходом стереть точки, номера которых делятся на 7. Покажем, что тогда уже нельзя стереть точки, делящие окружность на  $7m$  частей. В любом таком наборе есть точки, делящие ее на 7 равных частей. Но тогда их номера имеют разные остатки от деления на 7, поэтому среди них есть номер, делящийся на 7, но соответствующая точка уже стерта.

В таком случае игроки могут стирать только точки, делящие окружность на  $2^k$  частей. Такие точки имеют одинаковый остаток от деления на 7. Разобьем все оставшиеся точки на 6 множеств точек, имеющих фиксированный остаток, а эти множества — на пары. Тогда если второй стер в каком-то из этих множеств несколько точек, то первому достаточно вычеркнуть соответствующие точки в парном множестве. Таким образом, первый всегда сможет сделять ход и выиграет.

## ▼ 9 класс

**289. Ответ.** Нельзя.

Предположим, что такая раскраска существует. Пусть клетка  $a$  цвета  $A$  (рис. 130), тогда клетки  $b$  и  $e$  следующего цвета  $B$ . У клетки  $b$  по крайней мере два соседа цвета  $C$ , поэтому  $c$  и  $f$  цвета  $C$ . Далее,

$a$	$b$	$c$	$d$	...	$k$	$l$
$e$	$f$	$g$			$m$	$n$

Рис. 130

аналогично клетки  $d$  и  $g$  цвета  $A$  и т. д. Итак, цвета вдоль стороны повторяются:  $A, B, C, A, B, C, \dots$ . Тогда клетки  $l$  и  $m$  одного цвета и у клетки  $l$  нет двух соседей следующего цвета, так как клетка  $k$  предыдущего цвета. Противоречие.

**290.** С полуночи до 5 ч утра суммарная высота деревьев увеличилась на 6 м. Поэтому в 5 ч деревьев было не меньше двух. С 5:00 до 10:00 суммарная высота деревьев увеличилась на 13 м. Поэтому в 5 ч деревьев было меньше трех. Получается, что в 5:00 деревьев было ровно два, причем одно из них было посажено в 4:00. Деревья, посаженные с 5:00 до 10:00, за это время суммарно выросли на 3 м. Если их два или больше, то утверждение задачи очевидно. Если же дерево одно, то оно посажено в 7:00 и ровно на 3 м ниже посаженного в 4:00.

**291.** Так как  $AH$  — диаметр  $\omega$ , то  $\angle AB_1H = 90^\circ \Rightarrow \triangle HB_1B$  — прямоугольный (рис. 131).

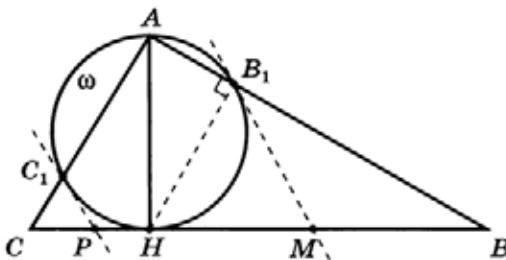


Рис. 131

Пусть  $M$  — точка пересечения касательной, проведенной в  $B_1$ , со стороной  $CB$ . Тогда  $MB_1 = MH$  как длины отрезков касательных к  $\omega$ , проведенных из точки  $M$ .

Значит,  $\triangle HB_1M$  — равнобедренный и  $\angle B_1HM = \angle HB_1M$ . Так как  $\angle B_1BH + \angle BHB_1 = \angle MB_1B + \angle MB_1H = 90^\circ$ , то  $\angle MB_1B = \angle MBB_1$ , а значит,  $\triangle MB_1B$  — равнобедренный, т. е.  $MB = HM$ . Аналогично  $CP = PH \Rightarrow PM = \frac{CB}{2}$ .

**292.** Для любого натурального  $n \geq 2$  можно взять число  $(3^n + 2)^2$ . Действительно,  $(3^n + 2)^2 = 3^{2n} + 4 \cdot 3^n + 4 = 3^{2n} + 3^{n+1} + 3^n + 3 + 1$ .

**293.** Пусть  $a = n$  — наибольшее из этих чисел,  $b$  и  $c$  ( $b > c$ ) — два других числа. Тогда  $b \leq n - 1$  и  $c \leq n - 2$ . Поэтому, если поставить  $n$  вместо самой левой звездочки, получим квадратное уравнение с  $\frac{D}{4} = a^2 - 3(b + c) \geq n^2 - 3(n - 1 + n - 2) = n^2 - 6n + 9 = (n - 3)^2 \geq 0$ .

**294. Ответ.** 30 гостей.

Гостям выдано  $10 + 25 = 35$  «пол-литров» чая, а суммарный объем кружек равен  $10 \cdot 2 + 25 = 45$  «пол-литров».

Чтобы наполнить наибольшее количество полных кружек, нужно оставить пустыми минимальное число. Но так как гостям не хватает 10 «пол-литров», а в каждую кружку влезает не более 2 «пол-литров», то по крайней мере  $10 : 2 = 5$  кружек останутся пустыми. Следовательно, полных кружек может быть не более 30.

Объясним, как напоить 30 гостей — 25 с пол-литровыми кружками и 5 с литровыми. Пронумеруем по кругу всех гостей с литровыми кружками, начиная с некоторого (1, 2, ..., 10). Разобьем весь круг на куски от 1-го до 2-го, от 3-го до 4-го, ..., от 9-го до 10-го. В каждом таком куске гости передают чай по часовой стрелке следующему, кроме последнего (с литровой кружкой) в этом куске, который доливает себе свои пол-литра.

Все остальные гости с «пол-литрами», не входящие в такие куски, выливают чай в свои кружки. Таким образом, ровно 5 человек остались с пустыми литровыми кружками, и, следовательно, 30 человек напьются чая.

**295.** Выберем вершину  $A$ . Пусть  $A'$  симметрична  $A$  относительно  $P$  (рис. 132). Обозначим через  $A_0$  середину  $BC$ . Точки  $A'$  и  $Q$  симметричны относительно  $A_0$ .

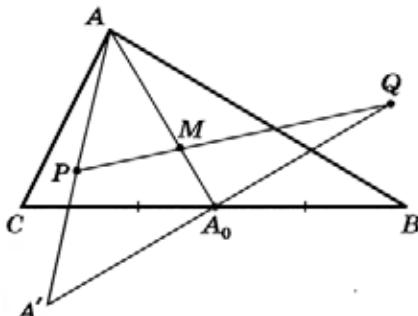


Рис. 132

Рассмотрим треугольник  $AA'Q$ . В нем отрезки  $AA_0$  и  $QP$  являются медианами. Значит, они пересекаются в точке  $M$ , делящей  $AA_0$  и  $QP$  в отношении  $2 : 1$ , но  $AA_0$  — медиана треугольника  $ABC$ , следовательно, точка  $M$  — это точка пересечения медиан треугольника  $ABC$  (так как, находясь на его медиане, точка  $M$  делит ее в отношении  $2 : 1$ ). Получается, что  $Q$  лежит на луче  $PM$  и удалена от  $M$  на расстояние, вдвое большее, чем  $PM$ . А так как точки  $P$  и  $M$  фиксированы, то точка  $Q$  фиксирована и не зависит от выбора вершины исходного треугольника.

**296. Ответ.** Если  $n$  есть степень двойки, то выигрывает второй, иначе — первый.

Перенумеруем точки по порядку числами от 1 до  $2n$ . Если  $n$  — степень двойки, то любой вычеркиваемый набор

делит окружность на  $2^k$  частей. Поэтому все вычеркнутые точки либо четные, либо нечетные, и все точки делятся на два равных  $n$ -угольника. Поэтому если первый вычеркнет несколько точек в одном из них, то второму достаточно вычеркнуть соответствующие точки в другом. Тогда второй всегда сможет сделать ход и выиграет.

Пусть теперь  $n$  имеет нечетный простой делитель  $p$ . Тогда для выигрыша первому достаточно первым ходом стереть точки, номера которых делятся на  $p$ . Покажем, что тогда уже нельзя стереть точки, имеющие разные остатки от деления на  $p$ . Действительно, рассмотрим набор, в котором две соседние стираемые точки имеют разные остатки, т. е. разность их координат не делится на  $p$ . Рассмотрим  $p$  стираемых точек подряд. Тогда они все имеют разные остатки от деления на  $p$ , ибо разности их координат не делятся на  $p$ . Поэтому среди них есть точка, координата которой делится на  $p$ , т. е. уже стертая точка.

В таком случае игроки могут стирать только точки, имеющие одинаковый остаток от деления на  $p$ . Разобьем все оставшиеся точки на  $p - 1$  множество точек, имеющих фиксированный остаток, а эти множества — на пары. Тогда если второй вычеркнул в каком-то из этих множеств несколько точек, то первому достаточно вычеркнуть соответствующие точки в парном множестве. Таким образом, первый всегда сможет сделать ход и выиграет.

## 10 класс

**297. Ответ.** Не может.

Пусть  $\operatorname{tg} \alpha = n \sin \alpha$  и  $\operatorname{tg} \alpha = m \cos \alpha$ , где  $m, n$  — натуральные числа, так как  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  положительны. Разделив первое равенство на второе, получаем  $1 = \frac{n}{m} \operatorname{tg} \alpha$ ,  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{m}{n}$  откуда  $\sin \alpha = \frac{m}{n^2}$ ,  $\cos \alpha = \frac{1}{n} \Rightarrow 1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \frac{m^2}{n^4} + \frac{1}{n^2} = \frac{m^2 + n^2}{n^4} \Rightarrow n^2(n^2 - 1) = m^2$ .

Отсюда  $m^2 : n^2$ , т. е.  $m = ns$ , тогда  $n^2 - 1 = s^2$ , что невозможно при натуральных  $n$  и  $s$ .

**298. Обозначим** через  $E$  точку, симметричную  $D$  относительно  $BC$  (рис. 133). Докажем, что четырехугольник  $AMBE$  вписанный.

Из симметрии точек  $D$  и  $E$  относительно  $BC$  вытекает, что  $\angle BEA = \angle BDE$ . Поскольку  $D$  и  $M$

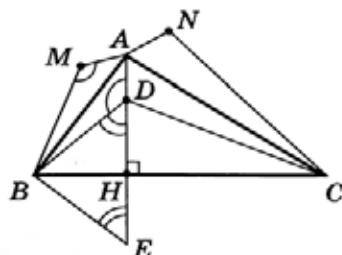


Рис. 133

симметричны относительно  $AB$ ,  $\angle AMB = \angle ADB$ . Но  $\angle ADB + \angle BDE = 180^\circ$ , поэтому  $\angle AMB + \angle BEA = 180^\circ$ , т. е. четырехугольник  $AMBE$  вписанный.

Аналогично доказывается, что четырехугольник  $ANCE$  вписанный, откуда следует утверждение задачи.

**299. Ответ.** Да, существуют.

Положим  $y = ax$ , тогда

$$x^{10} + y^{10} = x^{10} + (ax)^{10} = x^{10}(1 + a^{10}).$$

Взяв теперь  $a = 2$  и  $x = 2^{10} + 1$ , получим  $y = 2^{11} + 2$  и  $z = 2^{10} + 1$ . Найденные числа удовлетворяют условию задачи.

**300. Ответ.**  $2n$  полосок.

На рисунке 123 (задача 284) показан пример оклеивания  $2n$  полосками по  $3n$  клеток каждая. Показаны  $n$  полосок. Аналогично располагаются другие  $n$  полосок (см. рис. 124).

Докажем, что меньшим числом обойтись нельзя. Рассмотрим три грани, имеющие общую вершину. Отметим клетки, расположенные в этих трех гранях по диагоналям, выходящим из общей вершины, числами  $1, 2, \dots, n$  (рис. 134). Нетрудно увидеть, что одна полоска не может покрывать клетки, отмеченные различными числами. Кроме того, полоска покрывает не более двух клеток, отмеченных числами, т. е. на покрытие клеток, отмеченных числом  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), требуется не менее двух полосок. Таким образом, всего требуется не менее  $2n$  полосок.

**301. См. решение задачи 293.**

**302. Ответ.** 288 способами.

Будем называть белые и красные полосы ткани зелеными.

Обозначим через  $T_n$  количество способов, которыми можно украсить витрину при наличии  $n$  полос ткани. Первой полосой может быть только зеленая.

Если вторая полоса синяя, то далее должны следовать  $n - 2$  полосы, причем первая из них зеленая. Всего способов так развесить полосы —  $T_{n-2}$ .

Если вторая полоса тоже зеленая, то вместе с ней оставшихся полос  $n - 1$  и развесить их можно  $T_{n-1}$  способами. Итак,

$$T_n = T_{n-1} + T_{n-2}. \quad (*)$$

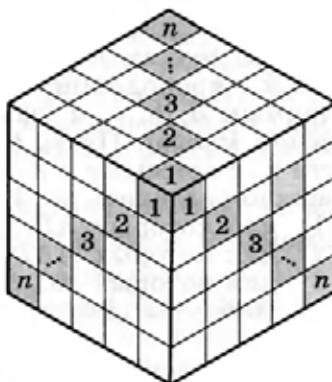


Рис. 134

Очевидно, что  $T_1 = 2$  (одна полоса может быть либо белой, либо красной),  $T_2 = 2$  (две полосы могут быть либо белой и красной, либо красной и белой).

Все последующие  $T_n$  считаются по формуле (\*):

$$\begin{aligned} T_3 &= T_2 + T_1 = 4, & T_4 &= T_3 + T_2 = 6, & T_5 &= T_4 + T_3 = 10, \\ T_6 &= T_5 + T_4 = 16, & T_7 &= T_6 + T_5 = 26, & T_8 &= T_7 + T_6 = 42, \\ T_9 &= T_8 + T_7 = 68, & T_{10} &= T_9 + T_8 = 110, & T_{11} &= T_{10} + T_9 = 178, \\ T_{12} &= T_{11} + T_{10} = 288. \end{aligned}$$

**303.** Пусть  $a, b, c, d$  — данные прямые. Докажем, например, что прямые  $c$  и  $d$  параллельны.

Рассмотрим некоторую плоскость, не параллельную ни одной из данных прямых. Пусть она пересекает прямые  $a$  и  $b$  в точках  $A$  и  $B$  соответственно. Рассмотрим плоскости  $\pi_\alpha$ , проходящие через прямую  $AB$  и не параллельные прямым  $a, b, c, d$  (заметим, что таких плоскостей бесконечно много). Пусть  $C_\alpha, D_\alpha$  — точки пересечения плоскости  $\pi_\alpha$  с прямыми  $c$  и  $d$ . Все рассматриваемые плоскости  $\pi_\alpha$  можно разделить на 3 типа:

- (1) для которых  $ABC_\alpha D_\alpha$  — параллелограмм;
- (2) для которых  $ABD_\alpha C_\alpha$  — параллелограмм;
- (3) для которых  $AC_\alpha BD_\alpha$  — параллелограмм.

Найдутся две различные плоскости  $\pi_{\alpha'}$  и  $\pi_{\alpha''}$  одного типа.

Допустим, что  $\pi_{\alpha'}$  и  $\pi_{\alpha''}$  — плоскости типа (1) (рис. 135, а). Тогда  $\vec{AB} = \vec{D_{\alpha'}C_{\alpha'}}$ , и также  $\vec{AB} = \vec{D_{\alpha''}C_{\alpha''}}$ . Следовательно, векторы  $\vec{D_{\alpha'}C_{\alpha'}}$  и  $\vec{D_{\alpha''}C_{\alpha''}}$  равны. Это значит, что  $C_{\alpha'}C_{\alpha''}D_{\alpha'}D_{\alpha''}$  — параллелограмм, следовательно,  $C_{\alpha'}C_{\alpha''} \parallel D_{\alpha'}D_{\alpha''}$ , т. е.  $c \parallel d$ .

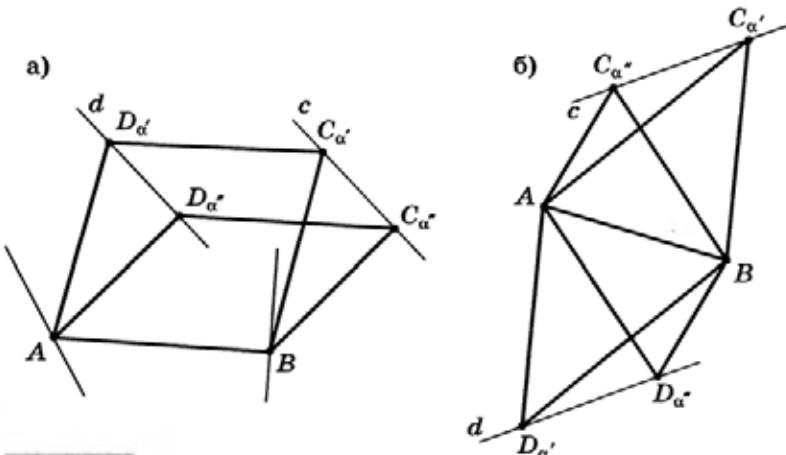


Рис. 135

Тот случай, когда  $\pi_{\alpha'}$  и  $\pi_{\alpha''}$  — плоскости типа (2), аналогичен уже разобранныму.

Допустим, что  $\pi_{\alpha'}$  и  $\pi_{\alpha''}$  — плоскости типа (3) (рис. 135, б). Тогда  $C_{\alpha'}$  и  $D_{\alpha'}$  симметричны относительно середины отрезка  $AB$ , и также  $C_{\alpha''}$  и  $D_{\alpha''}$  симметричны относительно середины отрезка  $AB$ . Следовательно, прямые  $c = C_{\alpha'}C_{\alpha''}$  и  $d = D_{\alpha'}D_{\alpha''}$  симметричны относительно середины отрезка  $AB$  и, значит, параллельны.

**304.** Обозначив карты буквами  $A, B, C, D, E, F, G$  и  $H$ , приведем один из способов. Первый вопрос — о всех 8 картах. Пусть в качестве ответа на него предложено число  $k$ . Три следующих вопроса — о парах  $(A, B)$ ,  $(C, D)$  и  $(E, F)$ . Поскольку каждый ответ позволяет определить четность числа бубновых карт в соответствующей группе, то эта четность станет известна для пар  $(A, B)$ ,  $(C, D)$ ,  $(E, F)$  и  $(G, H)$ . Ясно также, что если число бубновых карт в паре нечетно, то оно равно 1. Пусть среди указанных четырех пар ровно  $l$  содержат по одной бубновой карте.

Для пятого вопроса сформируем группу, состоящую из  $4 - l$  карт — по одной из каждой пары, где число бубновых карт четно (т. е. равно 0 или 2). Эти  $4 - l$  пар содержат в общей сложности  $k + 1 - l$  либо  $k - 1 - l$  карт бубновой масти, а сформированная группа — вдвое меньшее их количество, т. е.  $\frac{k+1-l}{2}$  либо  $\frac{k-1-l}{2}$ . Но числа  $\frac{k+1-l}{2}$  и  $\frac{k-1-l}{2}$  отличаются друг от друга на 1, и очевидно, что, получив в качестве ответа число, на 1 отличающееся от истинного значения, мы это истинное значение (пусть оно равно  $m$ ) сразу определим. Определится и общее число бубновых карт на столе — оно равно  $2m + l$ .

## 11 класс

**305.** Из равенства  $\cos \alpha + \cos \beta = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$  следует, что  $2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ , т. е. либо  $\cos \frac{\alpha + \beta}{2} = 0$  (что невозможно, так как  $\alpha + \beta < \pi$ ), либо  $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$ . Без ограничения общности считаем  $\alpha \geq \beta$ .

Переписав второе равенство в виде  $\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$ , получаем  $\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha + \beta}{2} \left( 0 \leq \frac{\alpha - \beta}{2} < \frac{\pi}{2} \right)$ , откуда  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

**Замечание.** Ошибочным является такое рассуждение:  $\cos \alpha + \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ . Левая часть не меньше правой, так как  $\sin \beta \leq 1$  и  $\sin \alpha \leq 1$ , т. е.

$$\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \leq \cos \alpha + \cos \beta, \quad (1)$$

причем равенство возможно, только если при ненулевых косинусах (хотя бы один такой есть!) стоят единичные синусы.

В действительности неравенство (1) неверно для произвольных углов  $\alpha$  и  $\beta$ , поскольку косинус одного из углов может быть отрицательным, например для углов  $\alpha = 120^\circ$ ,  $\beta = 30^\circ$ .

### 306. Ответ. $MO$ .

Пусть  $\angle A = 2\alpha$ ,  $\angle B = 2\beta$ ,  $\angle C = 2\gamma$ . Опустим перпендикуляры из точки  $O$  на стороны треугольника. Пусть  $L_1$ ,  $M_1$ ,  $N_1$  — основания этих перпендикуляров. (Из последующего подсчета углов следует, что углы  $ALB$ ,  $BMA$ ,  $CNA$  острые, значит, точки  $L$ ,  $M$ ,  $N$  расположены соответственно на отрезках  $CL_1$ ,  $CM_1$ ,  $BN_1$ , как показано на рисунке 136.)

В треугольниках  $OL_1L$ ,  $OM_1M$ ,  $ON_1N$  одинаковые катеты (равные радиусу вписанной окружности), поэтому та из гипотенуз (отрезков  $LO$ ,  $MO$ ,  $NO$ ) больше, которая образует со стороной треугольника меньший угол.

Угол  $L_1LO$  — внешний угол треугольника  $ALC$ , поэтому  $\angle L_1LO = 2\gamma + \alpha$ . Аналогично  $\angle M_1MO = 2\gamma + \beta$ ,  $\angle N_1NO = \gamma + 2\beta$ . Отсюда  $\angle L_1LO > \angle M_1MO$  и  $\angle N_1NO > \angle M_1MO$ , т. е.  $\angle M_1MO$  — наименьший из трех углов, а значит,  $OM$  — наибольший из отрезков.

307. Имеем  $2(xy + yz + xz) + x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + y + z) + 1 = 2 - 2(x + y + z) + 2(xy + yz + xz) - 2xyz$ , или  $(x + y + z - 1)^2 = 2(1 - x)(1 - y)(1 - z)$ .

По неравенству Коши, так как  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ , то  $2(1 - x)(1 - y)(1 - z) \leq 2 \left( \frac{3 - x - y - z}{3} \right)^3$ . Положим  $t = x + y + z - 1$ . Имеем неравенство  $t^2 + 2 \left( \frac{t - 2}{3} \right)^3 \leq 0$ .

Один корень многочлена  $t^2 + 2 \left( \frac{t - 2}{3} \right)^3$  равен  $\frac{1}{2}$ , и поэтому  $t^2 + 2 \left( \frac{t - 2}{3} \right)^3 = \frac{1}{27}(2t^3 + 15t^2 + 24t - 16) = \frac{1}{27}(2t - 1)(t + 4)^2$

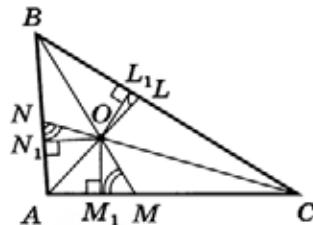


Рис. 136

или

$$\frac{1}{27}(2t-1)(t+4)^2 \leq 0, \text{ т. е. } 2t-1 \leq 0 \text{ (поскольку } t \geq -1).$$

Имеем

$$2(x+y+z-1) \leq 1 \Rightarrow x+y+z \leq \frac{3}{2}.$$

308. Ответ.  $\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}.$

Будем изображать школьников точками. Если школьники знакомы, то соединим их точки черным отрезком (ребром), иначе — красным.

Приведем пример, показывающий, что оценка достигается. Расположим точки в вершинах выпуклого  $n$ -угольника и закрасим его стороны красным, а диагонали черным. Тогда любые шесть точек образуют выпуклый шестиугольник, и его можно разбить на две тройки точек, идущих «чезрез одну».

Покажем, что черных ребер не менее указанного количества, т. е. красных не больше  $n$ . Если из какой-то вершины выходит хотя бы 4 красных ребра, то шестерку точек, содержащую эту вершину и вершины, соединенные с ней красным ребром, нельзя разбить указанным в условии способом. Поэтому из каждой вершины выходит не более трех красных ребер. Если из каждой вершины выходит не более двух ребер, то всего ребер не более  $n$ .

Осталось разобрать случай, когда какая-то вершина  $A$  связана красными ребрами ровно с тремя вершинами  $B, C$  и  $D$ . Рассмотрим шестерку точек  $A, B, C, D, E, F$ , где  $E$  и  $F$  — произвольные вершины, отличные от  $A, B, C, D$ , и разобьем ее на две тройки указанным в условии способом. Тогда вершины  $E$  и  $F$  должны быть в одной тройке с вершиной  $A$ . Таким образом,  $A, E, F$  соединены черными ребрами. Это означает, что из любых вершин красные ребра идут только в вершины  $B, C$  и  $D$ , т. е. можно считать, что все красные ребра выходят из вершин  $B, C, D$ . Поскольку из каждой выходит не более 3 красных ребер, всего их не больше чем  $9 \leq n$ .

309. Предположим, что хотя бы одно из чисел меньше 3. Тогда сумма оставшихся двух чисел больше 8. Следовательно, одно из них больше 4. В этом случае

$$x^{[x]} + y^{[y]} + z^{[z]} \geq 4^4 = 256 > 81.$$

Таким образом, можно считать, что все числа больше или равны 3. Причем не все числа равны 3. В этом случае

$$x^{[x]} + y^{[y]} + z^{[z]} > 3^3 + 3^3 + 3^3 = 81.$$

**310.** Докажем утверждение по индукции. Для  $n = 3$  оно верно:  $\{1, 2, 3\} \rightarrow \left\{\frac{1+3}{2}, 2\right\} \rightarrow \{2\}$ . Пусть оно верно для

$n = m$ , т. е. из чисел от 1 до  $m$  можно получить любое число от 2 до  $m - 1$ . Рассмотрим набор  $\{1, \dots, m, m + 1\}$ . По предположению индукции из его части  $1, \dots, m$  можно получить любое число от 2 до  $m - 1$ . Значит, последним мы можем оставить на доске любое число из набора  $\frac{m+1+(m-1)}{2} = m, \frac{m+1+m-3}{2} = m-1, \dots, \frac{m+1+k}{2} = p$ ,

где  $k = 3$ , если  $m$  четно (тогда  $p = \frac{m+4}{2}$ ),  $k = 2$ , если  $m$  нечетно (тогда  $p = \frac{m+3}{2}$ ).

Теперь рассмотрим множество  $\{2, 3, \dots, m + 1\}$ . Из него указанными операциями можно получить в конце любое число от 3 до  $m$ . (Здесь все числа на 1 больше, чем в наборе  $\{1, \dots, m\}$ , а среднее арифметическое чисел  $a + 1$  и  $b + 1$  на 1 больше среднего арифметического чисел  $a$  и  $b$ .) Значит, последним мы можем оставить на доске любое число из набора  $\frac{1+3}{2} = 2, \frac{1+5}{2} = 3, \dots, \frac{1+l}{2} = s$ , где  $l = m - 1$ , если  $m$  четно (тогда  $s = \frac{m}{2}$ ),  $l = m$ , если  $m$  нечетно (тогда  $s = \frac{1+m}{2}$ ).

Итак, если  $m$  четно, то мы получили в конце любое число от 2 до  $m$ , а если нечетно, то любое число, кроме  $a = \frac{m+2}{2}$ . Но число  $a$  можно получить, разбив вначале все числа, кроме  $a$ , на пары  $(1, m + 1), (2, m), \dots, (a - 1, a + 1)$ , где средние арифметические чисел в парах равны  $a$ .

**311.** В  $\triangle ASB$   $A_1B_1$  — средняя линия (рис. 137, а), поэтому  $A_1B_1 \parallel AB$ , значит,  $A_1B_1 \parallel (ABC)$ . Но по условию прямые  $A_1B_1$  и  $CD$  лежат в одной плоскости. Значит,  $A_1B_1 \parallel CD$ , отсюда  $AB \parallel CD$ . Аналогично  $AD \parallel BC$ , т. е.  $ABCD$  — параллелограмм со сторонами  $AB = a, AD = b$ .

Будем через  $\rho(PQ, EF)$  обозначать расстояние между параллельными прямыми  $PQ$  и  $EF$ ,  $\rho(O, PQ)$  — расстояние от точки  $O$  до прямой  $PQ$ . По условию  $S_{DA_1B_1C} = S_{AD_1C_1B}$ , но эти трапеции обе имеют основания  $a$  и  $\frac{a}{2}$ , поэтому

$\rho(DC, A_1B_1) = \rho(AB, C_1D_1)$ . Пусть  $A', B', C', D', O$  — соответственно проекции точек  $A_1, B_1, C_1, D_1, S$  на плоскость  $(ABC)$  (т. е.  $SO$  — высота пирамиды,  $SO = H$ ). Тогда  $A', B', C', D'$  — соответственно середины отрезков  $OA, OB, OC, OD$  (рис. 137, б).

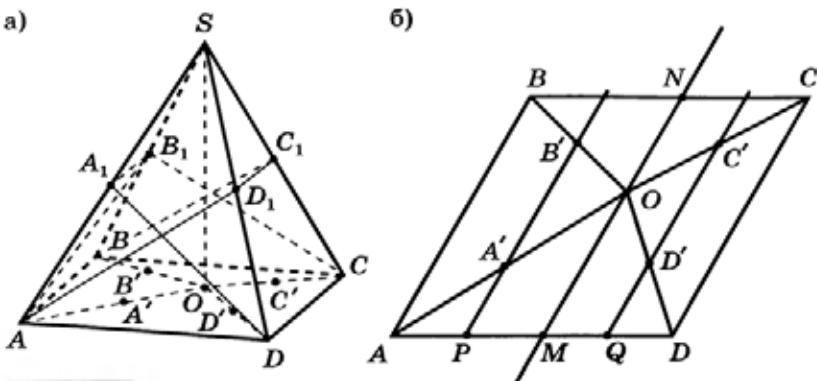


Рис. 137

По теореме Пифагора  $\rho^2(CD, A'B') = \rho^2(CD, A_1B_1) - \left(\frac{H}{2}\right)^2 = \rho^2(AB, C_1D_1) - \left(\frac{H}{2}\right)^2 = \rho^2(AB, C'D')$ , т. е.  $\rho(CD, A'B') = \rho(AB, C'D')$ , откуда  $AQ = DP$ . Положив  $AP = PM = x$ ,  $DQ = QM = y$ , где  $P, Q, M$  — параллельные проекции точек  $A'(B')$ ,  $C'(D')$ ,  $O$  на  $AD$ , имеем  $2x + y = 2y + x$ , т. е.  $x = y$ , и, значит,  $O$  лежит на средней линии  $MN$  параллелограмма  $ABCD$ . Аналогично она лежит на второй его средней линии, т. е.  $O$  — точка пересечения диагоналей параллелограмма. Тогда  $\rho(CD, A'B') = \frac{3}{4} \rho(CD, AB) = \frac{3}{4} h_a$ ,  $\rho(AD, B'C') = \frac{3}{4} \rho(AD, BC) = \frac{3}{4} h_b$ , где  $a \cdot h_a = b \cdot h_b = S_{ABCD}$ . По условию  $S_{CDA_1B_1} = S_{ABC_1D_1}$ , т. е.  $\frac{1}{2} \left(a + \frac{a}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{3}{4} h_a\right)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(b + \frac{b}{2}\right) \sqrt{\left(\frac{3}{4} h_b\right)^2 + \left(\frac{H}{2}\right)^2}$ , значит, с учетом равенства  $a \cdot h_a = b \cdot h_b$  получаем  $a \cdot H = b \cdot H$ , откуда  $a = b$ . Утверждение доказано.

312. См. решение задачи 304.

**2003–2004**

## 8 класс

313. **Первое решение.** Сложив указанные числа, получим  $S = (x^2 + 2xy + z^2) + (y^2 + 2yz + x^2) + (z^2 + 2zx + y^2) = (x^2 + 2xy + y^2) + (y^2 + 2yz + z^2) + (z^2 + 2zx + x^2) = (x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 \geq 0$ . Следовательно, одно из чисел  $x^2 + 2xy + z^2$ ,  $y^2 + 2yz + x^2$ ,  $z^2 + 2zx + y^2$  неотрицательно.

**Второе решение.** Рассмотрим наибольшее из чисел  $x^2$ ,  $y^2$ ,  $z^2$ . Пусть для определенности это число  $x^2$  (условие циклически симметрично относительно  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ). Тогда  $y^2 + 2yz + x^2 = (y^2 + 2yz + z^2) + (x^2 - z^2) = (y + z)^2 + (x^2 - z^2) \geq 0$ .

**314. Ответ.** Выигрывает второй.

**Первое решение.** Заметим, что игра закончится, когда будут покрашены все клетки. При этом за каждый ход красится нечетное число клеток. Это означает, что после хода первого будет покрашено нечетное число клеток, а после хода второго — четное. Так как всего клеток 1000, то после каждого хода первого будет оставаться нечетное число непокрашенных клеток, т. е. хотя бы одна, и второй всегда сможет сделать ход. Это означает, что проигрывает первый.

**Второе решение.** Предложим выигрышную стратегию для второго игрока. Пусть он красит прямоугольники симметрично относительно центра прямоугольника. Такой ответный ход возможен во всех случаях, кроме случая, в котором первый покрасит прямоугольник, содержащий центр доски. В этом случае второй должен отвечать так, чтобы после его хода множество покрашенных клеток было симметрично относительно центра прямоугольника (рис. 138) (Темным цветом показаны ходы первого игрока, светлым — ответы второго.)

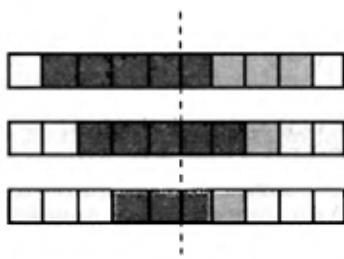


Рис. 138

**315.** Рассмотрим  $\triangle AC_1D$ , где  $D$  — точка пересечения  $AC$  с прямой, проходящей через  $C_1$  (рис. 139). Так как  $\angle AC_1D = \angle C_1AD$ , то  $\triangle AC_1D$  — равнобедренный, поэтому высота  $DK$ , проведенная из  $D$ , делит основание  $AC_1$  пополам, но так как  $\angle AC_1C = 90^\circ$ , то эта высота  $DK$  параллельна отрезку  $CC_1$ . В треугольнике  $AC_1C$  отрезок  $DK$  параллелен стороне  $CC_1$  и проходит через середину стороны  $AC$ , значит,  $DK$  — средняя линия треугольника  $AC_1C$ , т. е.  $D$  — середина  $AC$ . Аналогичные рассуждения приводят к тому, что вторая из указанных в условии прямых (проходящая через  $A_1$ ) также проходит через середину  $AC$ .

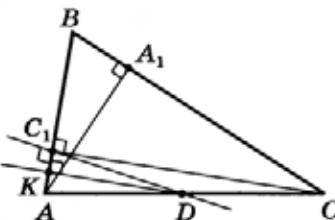


Рис. 139

**316. Ответ.** Существуют.

Если  $a$  и  $b$  — натуральные числа, такие, что  $a^2 - b^3 = 1$ , то, очевидно, достаточно взять  $(x, y) = \left(2003^{\frac{2004}{3}} a, 2003^{\frac{2004}{3}} b\right)$ .

Но такие  $a$  и  $b$  существуют:  $a = 3$ ,  $b = 2$ . Таким образом, мы пришли к равенству

$$\left(2003^{\frac{2004}{2}} \cdot 3\right)^2 - \left(2003^{\frac{2004}{3}} \cdot 2\right)^3 = 2003^{2004}.$$

**317. Ответ.** Из города рыцарей.

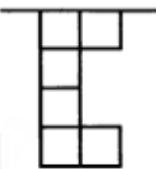
Из утверждения третьего следует, что он из одного города со вторым, но тогда второй уже не может говорить правду. Значит, по крайней мере есть два лжеца (второй и третий). А теперь независимо от утверждения первого получается, что либо он прав и, следовательно, четвертый — рыцарь, либо он не прав и все равно четвертый — рыцарь (так как рыцари на встрече были). Таким образом, промолчавший из города рыцарей.

**318.** Вместе с числом  $an + 1$  на  $bn + 1$  делится и разность  $(an + 1) - (bn + 1) = (a - b)n$ . С другой стороны,  $n$  взаимно просто с  $bn + 1$ , поскольку разность  $(bn + 1) - b \cdot n = 1$  должна делиться на любой общий делитель  $n$  и  $bn + 1$ . Поэтому  $(a - b)$  делится на  $bn + 1$ . Но число  $bn + 1$  при достаточно больших  $n$  будет больше целого неотрицательного числа  $|a - b|$ , поэтому  $a - b = 0$ .

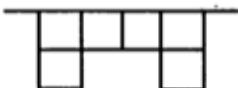
**319. Ответ. 3.**

Так как корытце имеет площадь 6 клеточек, а количество отдельных клеточек нечетно, то площадь прямоугольника должна быть нечетной, т. е. обе стороны прямоугольника нечетные. Корытце может примыкать к стороне прямоугольника либо двумя клеточками (рис. 140, а), либо

а)



б)



в)

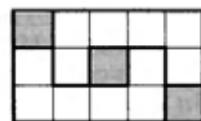


Рис. 140

четырьмя (рис. 140, б), значит, к каждой стороне прямоугольника примыкает хотя бы одна отдельная клеточка. Следовательно, клеточек по крайней мере 3. Пример для трех клеточек (прямоугольник  $3 \times 5$ ) показан на рисунке 140, в.

**320.** Пусть  $AC$  — большая из сторон треугольника  $ABC$ , тогда углы  $A$  и  $C$  — острые. Обозначим  $C_0$  и  $A_0$  середины сторон  $AB$  и  $BC$  соответственно (рис. 141, а).

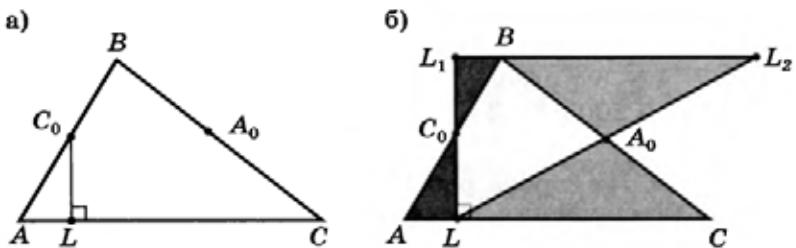


Рис. 141

Пусть  $L$  — проекция точки  $C_0$  на  $AC$ . Так как  $\angle A$  и  $\angle C$  — острые, то  $L$  находится на отрезке  $AC$ . Проведем разрезы по отрезкам  $C_0L$  и  $LA_0$ .

Повернем отрезанные треугольники  $C_0LA$  и  $A_0LC$  так, как показано на рисунке 141, б. Полученный  $\triangle LL_1L_2$  — прямоугольный. (Точки  $L_1$ ,  $B$  и  $L_2$  лежат на одной прямой, параллельной  $AC$ , так как  $\angle L_1BC_0 = \angle C_0AL$  и  $\angle L_2BA_0 = \angle A_0CL$ .)

## 9 класс

**321. Ответ.** Выигрывает второй.

Предложим стратегию для второго игрока. Если первый поставит точку в какую-нибудь клетку, то второму следует поставить точку в ту же клетку. Тогда после каждого хода второго игрока в любой клетке будет стоять четное число точек. А это означает, что после каждого хода второго игрока в клетках любой строки и любого столбца будет стоять суммарно четное число точек, т. е. 5 точек в строке или столбце появятся только после хода первого игрока, и он проиграет.

**322. Ответ.** 10.10.10; 11.11.11; 12.12.12.

Пусть  $A$  и  $B$  — исходное и новое числа,  $A$  состоит из  $3n$  цифр. Если  $n = 1$ , то  $A = \overline{aaa}$ , а  $B$  состоит из трех одинаковых групп, первая из которых  $\overline{aaa}$ , поэтому в  $B$  все цифры одинаковы.

Пусть  $n > 1$ ,

$$A = \overline{a_1a_2\dots a_n a_1a_2\dots a_n a_1a_2\dots a_n},$$

$$B = \overline{b_1b_2\dots b_{n+2} b_1b_2\dots b_{n+2} b_1b_2\dots b_{n+2}}.$$

Тогда

$$\overline{b_1b_2\dots b_n} = \overline{a_1a_2\dots a_n} = \overline{a_3\dots a_n a_1a_2},$$

откуда  $a_i = a_{i+2}$  при любом  $1 \leq i \leq n-2$ ,  $a_n = a_2$ . Если  $n$  нечетно, то  $a_{n-1} = a_{n-3} = \dots = a_2 = a_n = a_{n-2} = \dots = a_1$ , т. е. все цифры  $A$  равны, а значит, и все цифры  $B$  равны, так как  $b_1b_2\dots b_{n+2}$  содержится в начале записи числа  $A$ . Если

*n* нечетно, то  $\overline{b_{n+1}b_{n+2}} = \overline{a_1a_2} = \overline{a_3a_4} = \dots = \overline{a_{n-1}a_n}$ , поэтому  $A = \overline{abab\dots ab}$ ,  $B$  имеет такой же вид. Значит, дата имеет вид  $aa.aa.aa$  или  $ab.ab.ab$ . Так как первая цифра исходного числа не ноль, а месяцев 12, то  $a = 1$  и  $b \in \{0, 1, 2\}$ .

Все три возможности реализуются: если дата имеет вид  $ab.ab.ab$ , то можно положить  $A = \overline{ababab}$ .

**323.** Обозначим точку пересечения отрезков  $AC_1$  и  $CA_1$  через  $K$  (рис. 142). Так как  $AA_1 \parallel CC_1$ , то треугольники  $AA_1K$  и  $C_1CK$  подобны, поэтому

$$\frac{CK}{KA_1} = \frac{C_1K}{KA} = \frac{CC_1}{AA_1}.$$

Так как  $\angle A_1BA = \angle CBC_1$ , то прямоугольные треугольники  $CC_1B$

и  $AA_1B$  подобны, и  $\frac{CC_1}{AA_1} = \frac{C_1B}{A_1B}$ .

Значит,  $\frac{C_1K}{KA} = \frac{C_1B}{A_1B}$ , т. е.  $BK \parallel CC_1 \Rightarrow BK \perp A_1C_1$  и  $BK$  — биссектриса внутреннего угла  $B$  (так как перпендикулярна биссектрисе внешнего угла).

**Замечание.** В трапеции точка пересечения диагоналей делит пополам отрезок с концами на боковых сторонах, проходящий через эту точку и параллельный основаниям, поэтому  $K$  — середина отрезка  $BB_1$ .

**324.** Нетрудно убедиться, что требуемым свойством обладает, например, набор из следующих 5 вариантов прогноза:

- 1) победа хозяев в матче № 1, ничьи в матчах № 2 и № 3;
- 2) победа хозяев в матче № 2, ничьи в матчах № 1 и № 3;
- 3) победа хозяев в матче № 3, ничьи в матчах № 1 и № 2;
- 4) победа хозяев во всех матчах;
- 5) победа гостей во всех матчах.

Предположим, что при каком-то исходе трех матчей в любом варианте прогноза истинно хотя бы одно предсказание. Тогда есть хотя бы один (для определенности первый) матч, закончившийся победой хозяев, и хотя бы один (для определенности второй), закончившийся победой гостей. Тогда если третий матч закончился ничьей, то неверен ни один исход третьего варианта, иначе неверен ни один исход второго варианта.

С другой стороны, какие бы ни были 4 варианта прогноза, может оказаться так, что в каждом из них исход хотя бы одного матча предсказан верно. Действительно, среди 4 вариантов найдутся два, в которых предсказан один и тот же

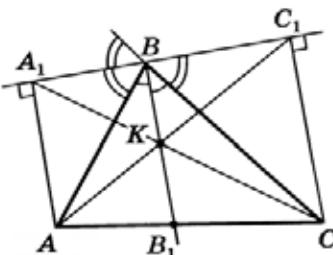


Рис. 142

исход для матча № 1; матч № 1 может завершиться именно этим исходом, а матчи № 2 и № 3 — исходами, указанными в двух других вариантах соответственно.

**325. Ответ.**  $P(x) = x^2 + x + 1$  или  $P(x) = 2x^2 + 2x + 2$ .

Пусть  $P(x) = ax^2 + bx + c$ .

Если два квадратных трехчлена  $F(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$  и  $G(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$  при всех  $x$  удовлетворяют неравенству  $F(x) \leq G(x)$ , то  $a_1 \leq a_2$ . Действительно, в противном случае  $F(x) - G(x) = (a_1 - a_2)x^2 + (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2)$  — квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом, который должен в некоторых точках принимать положительные значения. Поэтому  $a = 1$  или  $a = 2$ .

Если два квадратных трехчлена  $F(x) = ax^2 + b_1x + c_1$  и  $G(x) = ax^2 + b_2x + c_2$  при всех  $x$  удовлетворяют неравенству  $F(x) \leq G(x)$ , то  $b_1 = b_2$ . Действительно, в противном случае  $F(x) - G(x) = (b_1 - b_2)x + (c_1 - c_2)$  — линейная функция с ненулевым коэффициентом при  $x$ , которая должна в некоторых точках принимать положительные значения.

Поэтому если  $a = 1$ , то  $b = 1$ , а если  $a = 2$ , то  $b = 2$ .

Если два квадратных трехчлена  $F(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$  и  $G(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$  при всех  $x$  удовлетворяют неравенству  $F(x) \leq G(x)$ , то  $c_1 \leq c_2$ . Для доказательства достаточно сравнить  $F(0) = c_1$  и  $G(0) = c_2$ . Поэтому  $c = 1$  или  $c = 2$ .

Итак, осталось четыре возможности:  $P(x) = x^2 + x + 1$ ,  $P(x) = 2x^2 + 2x + 2$  (очевидно удовлетворяющие условию задачи),  $P(x) = x^2 + x + 2$ ,  $P(x) = 2x^2 + 2x + 1$  (не удовлетворяющие условию задачи, например при  $x = -\frac{1}{2}$ ).

**326.** См. решение задачи 319.

**327.** Очевидно,  $p$  и  $q$  взаимно просты (если  $d$  — их общий делитель, то он является также делителем числа  $ap + 1$ , а следовательно, и числа  $ap + 1 - ap = 1$ ).

Поэтому число  $ap + aq + 1$ , которое делится и на  $p$ , и на  $q$ , делится на их произведение  $pq$ . Значит,  $a(p + q) \geq pq - 1$ , откуда  $2a(p + q) > pq$  (левая часть увеличилась на  $a(p + q) > 1$ ), и  $a > \frac{pq}{2(p + q)}$ .

**328.** Докажем сначала лемму.

**Лемма.** Точка  $P_1$  симметрична точке  $P$  относительно  $AB$ . Точка  $P_2$  симметрична точке  $P_1$  относительно середины  $AB$ . Тогда точки  $P$  и  $P_2$  симметричны относительно серединного перпендикуляра к  $AB$ .

**Доказательство.** Пусть  $Q$  — середина  $PP_2$ , а  $M$  — середина  $AB$  (рис. 143). То-

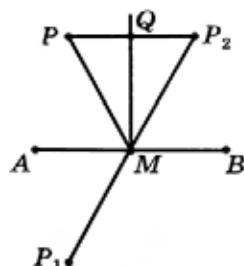


Рис. 143

гда  $QM \parallel PP_1$ , и, значит,  $QM \perp AB$ . Так как  $P_2$  находится на таком же расстоянии от  $AB$ , что и  $P$ , то  $PP_2 \parallel AB$ , и, значит,  $QM \perp PP_2$ , следовательно,  $P$  и  $P_2$  симметричны. Лемма доказана.

Пусть точка  $O$  — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ . Проведем окружность с центром  $O$  радиуса  $OP$  (рис. 144). Из леммы следует, что точки  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$  являются точками, симметричными точке  $P$  относительно серединных перпендикуляров треугольника  $ABC$ . Значит,  $OP = OA' = OB' = OC'$ , и четырехугольник  $A'B'C'P$  — вписанный.

Пусть для определенности  $P$  лежит на дуге  $A'C'$ , не содержащей  $B'$ .

Докажем, что  $\angle BAC = \angle B'A'C'$ . Имеем  $\angle B'A'C' = \angle B'PC'$  как вписанные. По лемме  $PB' \parallel AC$  и  $PC' \parallel AB$ , значит,  $\angle B'PC' = \angle CAB$ . Аналогично  $\angle BCA = \angle B'C'A' \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ .

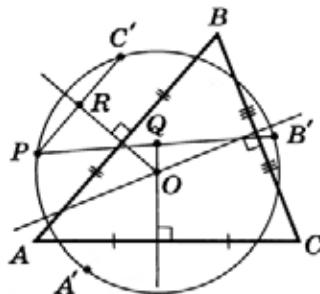


Рис. 144

## ▼ 10 класс

**329. Ответ. 9.**

Число дней, проходящих от одного совпадения четвергов до следующего, равно наименьшему общему кратному числа дней в нашей неделе (7) и числа дней в островной неделе (6), т. е. равно 42. Это значит, что совпадение четвергов происходит ровно 1 раз в течение 42 дней. А поскольку  $\frac{366}{42} < 9$ , то число таких совпадений в течение года не превосходит 9.

С другой стороны, за три года (2003—2005) должно произойти не менее  $26$  совпадений четвергов (поскольку  $\frac{365 + 366 + 365}{42} > 26$ ). Следовательно, в течение 2004 и 2005 гг.

четверги совпадут (в общей сложности) не менее  $26 - 8 = 18$  раз. Это означает, что в каждом из этих годов будет ровно 9 совпадений.

**330.** Пусть  $x_1$  — общий корень  $f(x)$  и  $g(x) + h(x)$ ,  $x_2$  — общий корень  $g(x)$  и  $h(x) + f(x)$ ,  $x_3$  — общий корень  $h(x)$  и  $f(x) + g(x)$ . Так как  $f(x_1) = 0$  и  $g(x_1) + h(x_1) = 0$ , то  $f(x_1) + g(x_1) + h(x_1) = 0$ , т. е.  $x_1$  — корень уравнения  $f(x) + g(x) + h(x) = 0$ . Аналогично получаем, что  $x_2$  и  $x_3$  — корни уравнения  $f(x) + g(x) + h(x) = 0$ . По условию старшие коэффициенты трехчленов  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  положительны,

поэтому  $f(x) + g(x) + h(x)$  является квадратным трехчленом с положительным старшим коэффициентом. Следовательно, уравнение  $f(x) + g(x) + h(x) = 0$  имеет не более двух различных корней, и какие-то два из чисел  $x_1, x_2, x_3$  совпадают. Пусть для определенности  $x_1 = x_2 = a$ . Тогда  $f(a) = 0, g(a) = 0, f(a) + g(a) + h(a) = 0$ , откуда  $h(a) = 0$ , т. е.  $a$  — общий корень трехчленов  $f(x), g(x), h(x)$ .

**331.** Ответ.  $3 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ .

Из формулы  $l = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$  следует, что каждое звено имеет длину  $\sqrt{n}$ , где  $n$  — натуральное число. Поэтому если  $l_1 < l_2 < l_3 < l_4 < l_5$  — упорядоченные длины звеньев ломаной, то  $l_1 \geq 1, l_2 \geq \sqrt{2}, l_3 \geq \sqrt{3}, l_4 \geq 2, l_5 \geq \sqrt{5}$ . Покажем, что все написанные нестрогие неравенства не могут обратиться в равенства.

Действительно, из совпадения четности чисел  $(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$  и  $x_2 - x_1 + y_2 - y_1 + z_2 - z_1$  следует, что у ребер длины 1,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  четность суммы координат начала и четность суммы координат конца ребра различны, а у ребер  $\sqrt{2}$  и 2 — одинакова. Значит, при перемещении вдоль ребер длины 1,  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ , 2,  $\sqrt{5}$  (в любом порядке) конечная точка будет иметь противоположную начальной четность суммы координат. Значит,  $l_5 \geq \sqrt{6}$  и длина ломаной будет не меньше, чем  $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + \sqrt{6}$ . Искомой является ломаная, проходящая, например, через точки

$$(0; 0; 0) \xrightarrow{l=1} (0; 1; 0) \xrightarrow{l=\sqrt{2}} (1; 0; 0) \xrightarrow{l=\sqrt{3}} (0; 1; 1) \xrightarrow{l=2} (2; 1; 1) \xrightarrow{l=\sqrt{6}} (0; 0; 0).$$

**332.** Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $ABE$  и  $ACD$  (рис. 145). Поскольку  $O_1O_2 \perp AK$ , достаточно доказать, что  $O_1O_2 \parallel BC$ .

Пусть  $O'_1$  и  $O'_2$  — образы точек  $O_1$  и  $O_2$  при гомотетии с центром  $A$  и коэффициентом 2. Точка  $O'_1$  диаметрально противоположна точке  $A$  на окружности, описанной около треугольника  $ABE$ . Углы  $O'_1BA$  и  $O'_1EA$  прямые, как опирающиеся на диаметр. Отсюда, в частности, вытекает, что  $O'_1, M$  и  $E$  лежат на одной прямой. В треугольнике  $BMO'_1$   $BM = \frac{BC}{2}$ ,

$O'_1B \perp AB$ ,  $O'_1M \perp AC$ . Аналогич-

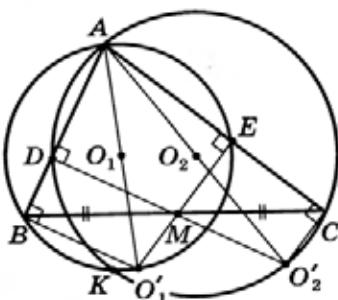


Рис. 145

ным образом доказывается, что в треугольнике  $MCO_2'$   $MC = \frac{BC}{2}$ ,  $O_2'M \perp AB$ ,  $O_2'C \perp AC$ . Это означает, что треугольники  $BMO_1'$  и  $MCO_2'$  равны и совмещаются параллельным переносом на вектор  $\overrightarrow{BM}$ , параллельный  $BC$ . Следовательно,  $O_1O_2' \parallel BC$ , и по свойству гомотетии  $O_1O_2 \parallel BC$ .

**333.** Докажем вначале, что

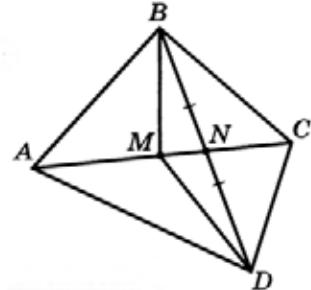
$$(x+y)^n > x^n + y^n, \quad (1)$$

если  $x, y > 0$ ,  $n > 1$ . Для этого заметим, что из  $\alpha + \beta = 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$ ,  $n > 1$  следует  $\alpha^n + \beta^n < 1$ . Положив в этом равенстве  $\alpha = \frac{x}{x+y}$ ,  $\beta = \frac{y}{x+y}$  и умножив обе части на  $(x+y)^n$ , получим (1).

Докажем теперь неравенство задачи. Пусть для определенности  $a > 0$ ,  $b < 0$ . Поскольку, очевидно,  $a^n + b^n \geq a^n - |b|^n$ , достаточно доказать, что  $a^n - |b|^n > (a - |b|)^n$ . Последнее неравенство следует из (1), если в нем положить  $x = |b|$ ,  $y = a - |b|$ .

**334.** Пусть  $O$  — точка внутри четырехугольника,  $h_1, h_2, h_3, h_4$  — расстояния от  $O$  до  $AB, BC, CD, DA$  соответственно. Тогда  $S_{AOB} \cdot S_{BOC} \cdot S_{COD} \cdot S_{DOA} = \frac{h_1 \cdot AB}{2} \cdot \frac{h_2 \cdot BC}{2} \cdot \frac{h_3 \cdot CD}{2} \cdot \frac{h_4 \cdot DA}{2} = h_1 h_2 h_3 h_4 \cdot \frac{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}{16}$ . Так как  $\frac{AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA}{16}$  постоянно и не зависит от точки  $O$ , то максимальное значение  $h_1 h_2 h_3 h_4$  достигается в той же точке, в которой достигается максимальное значение произведения площадей. Тогда

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{S_{AOB} S_{BOC} S_{COD} S_{DOA}} \leq \\ & \leq \sqrt{\frac{S_{AOB} S_{BOC} + S_{COD} S_{DOA}}{2}} \leq \\ & \leq \frac{S_{AOB} + S_{BOC}}{2} + \frac{S_{COD} + S_{DOA}}{2} = \\ & = \frac{S_{ABCD}}{4} = \sqrt[4]{\left(\frac{S_{ABCD}}{4}\right)^4}, \end{aligned}$$



поэтому произведение площадей максимально в том случае, если они равны (оба неравенства одновременно обращаются в равенство только при  $S_{AOB} = S_{BOC} = S_{COD} = S_{DOA}$ ).

Пусть  $M$  — середина  $AC$ , а  $N$  — точка пересечения  $AC$  и  $BD$  (рис. 146). Тогда  $S_{AMB} = S_{BMC} = \frac{S_{ABC}}{2} = \frac{AC \cdot BN \cdot \sin BNC}{4} =$

$= \frac{AC \cdot ND \cdot \sin CND}{4} = \frac{S_{ADC}}{2} = S_{CMD} = S_{DMA}$ . Таким образом, точка  $M$  удовлетворяет поставленному нами условию и, следовательно, является искомой, что и требовалось доказать.

### 335. Ответ. 1001.

Пусть есть два странных человека, знакомых между собой. Тогда среди остальных 2002 людей у каждого из них по 1002 знакомых, и они все различны, так как иначе у них есть общий знакомый. Но такого быть не может. Значит, знакомых между собой странных людей нет. Но тогда странных людей может быть не более 1001, так как странными не могут быть все знакомые данного странного человека.

1001 странный человек может быть, например, в следующем случае: 1001 человек попарно знаком с остальными 1003.

### 336. Ответ. 23, 25, 27.

Пусть наши числа суть  $n - 2$ ,  $n$  и  $n + 2$ . Ни одно из них не делится на 2 и ровно одно делится на 3, поэтому наибольший делитель одного из этих чисел составляет от него треть, а наибольшие делители остальных чисел — меньше трети от них.

Число, кратное трем, — это наибольшее число  $n + 2$ . В противном случае у большего числа нашелся бы делитель, не меньший  $\frac{n-2}{3} + 2 > \frac{n+2}{3}$ .

Наибольший делитель числа  $n$  равен  $\frac{n}{5}$ : если это не так, он должен быть не больше  $\frac{n}{7} < \frac{1}{2} \cdot \frac{n+2}{3}$ , т. е. второй член нашей прогрессии меньше половины третьего, а первый отрицателен.

Пусть  $n = 5k$ . Чтобы  $n + 2$  делилось на 3,  $k$  должно иметь вид  $3m + 2$ , откуда  $n = 15m + 10$ , его наибольший делитель равен  $3m + 2$ ;  $n + 2 = 15m + 12$ , наибольший делитель  $n + 2$  равен  $5m + 4$ , и тем самым оставшееся число  $n - 2 = 15m + 8$  имеет наибольший делитель  $m$ . Таким образом, 8 делится на  $m$  и  $m$  нечетно (так как  $15m + 8$  нечетно). Поэтому  $m = 1$ ; осталось проверить, что числа в ответе подходят.

## ▼ 11 класс

337. Пусть  $1 + b + \dots + b^n = a + kd$ ,  $1 + b + \dots + b^m = a + ld$ , где  $a$  и  $d$  — первый член и разность прогрессии,  $k, l \in N$ . Пусть  $k < l$ , соответственно  $n < m$ . Тогда  $b^{n+1} + b^{n+2} + \dots +$

$+ b^m = a + ld - (a + kd) = (l - k)d = pd$ ,  $p \in N$ . Заметим, что  $b^{m+1} + b^{m+2} + \dots + b^{2m-n} = b^{m-n}(b^{n+1} + b^{n+2} + \dots + b^m) = = b^{m-n}pd = qd$ ,  $q \in N$ , и, значит, число  $1 + b + \dots + b^{2m-n} = = a + ld + qd = a + (l + q)d$  также является членом прогрессии.

**Замечание.** Аналогично доказывается, что бесконечно много чисел из  $S$  являются членами прогрессии.

**338.** Отрезок  $MN$  — общая хорда равных окружностей (рис. 147), поэтому  $\sin \angle B = \sin \angle MCN$ , т. е. либо  $\angle B = \angle MCN$ , либо  $\angle B + \angle MCN = 180^\circ$ . Последнее невозможно (в противном случае окружности совпадают). Значит,  $\angle B = \angle MCN$  и  $MB = MC$ , т. е. точка  $M$  лежит на серединном перпендикуляре к стороне  $BC$ . Аналогично точка  $N$  лежит на серединном перпендикуляре к стороне  $AB$ . Точка  $H$  пересечения серединных перпендикуляров — центр окружности, описанной около треугольника  $ABC$ , и одновременно ортоцентр треугольника  $MBN$ , так как  $MQ \perp BC$  и  $NP \perp AB$ .

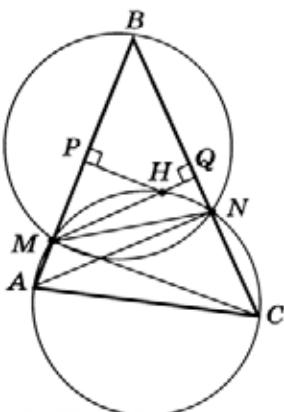


Рис. 147

**339.** Из условия задачи следует, что  $y + z = 3 - x$ , значит,  $x(3 - x) + yz = a$ . Следовательно,

$$a = -x^2 + 3x + yz \leq -x^2 + 3x + \left(\frac{y+z}{2}\right)^2 = -x^2 + 3x + \left(\frac{3-x}{2}\right)^2.$$

После домножения на 4 и раскрытия скобок получим

$$3(x-1)^2 = 3x^2 - 6x + 3 \leq 4(3-a).$$

Для завершения доказательства осталось поделить на 3.

**340. Ответ.** Нет.

Предположим, что доску разбить можно. Тогда раскрасим ее в три цвета следующим образом: первую строку в белый цвет, вторую — в синий, третью — в красный, четвертую — в белый и т. д. (эти три цвета чередуются). Заметим, что, где бы ни лежала любая из фигурок разбиения, в ней будут присутствовать все три цвета, при этом клеток каждого цвета будет нечетное количество (либо одна, либо три).

Подсчитаем, сколько клеток доски окрашено в белый цвет. Всего будет закрашено 334 ряда, 2 из которых состоят из 997 клеток (верхний и второй снизу), и 332 ряда из 1001 клетки, т. е. всего  $997 \cdot 2 + 1001 \cdot 332$  — четное количество. Но это означает, что и фигурок разбиения четное число (так как каждая из них содержит либо 1, либо 3 белые клетки).

Подсчитаем теперь количество красных клеток. Их будет 333 ряда по 1001 клетке, т. е. всего  $1001 \cdot 333$  — нечетное количество, а значит, и фигурок нечетное число, что противоречит предыдущему утверждению. Значит, доску такими фигурками замостить нельзя.

**341. Первое решение.** Из условия следует, что каждый из этих трехчленов имеет хотя бы один корень, поэтому дискриминанты этих трехчленов неотрицательны, т. е.  $b^2 \geq ac$ ,  $a^2 \geq bc$ ;  $c^2 \geq ab$ . Заметим, что если хотя бы одно из этих неравенств строгое, то при их перемножении получим неверное неравенство  $b^2 \cdot a^2 \cdot c^2 > ac \cdot bc \cdot ab$ , поэтому  $b^2 = ac$ ;  $a^2 = bc$ ;  $c^2 = ab$ . Разделив первое равенство на второе, получим  $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a}{b}$ , т. е.  $a = b$ . Аналогично можно показать, что  $b = c$ , а значит,  $a = b = c$ .

**Второе решение.** Предположим, что в совокупности эти три квадратных трехчлена имеют три различных корня  $x_1 < x_2 < x_3$ . Тогда в точке  $x_2$  сумма этих трехчленов принимает отрицательное значение, так как в этой точке два из них обращаются в нуль, а один из них отрицателен (его корнями являются числа  $x_1$  и  $x_3$ ). Но сумма этих трехчленов равна  $(a + b + c)(x + 1)^2$  и принимает только неотрицательные значения. Получили противоречие.

Если же в совокупности корней меньше трех (два или один), то все три трехчлена имеют общий корень, который равен  $-1$ , так как сумма этих трехчленов равна  $(a + b + c)(x + 1)^2$ . Поэтому  $2b = a + c$ ,  $2a = b + c$ ,  $2c = a + b$ . Вычитая из первого равенства второе, получаем, что  $2(b - a) = a - b$ , т. е.  $a = b$ . Аналогично можно показать, что  $b = c$ , а значит,  $a = b = c$ .

**342. Ответ.** Выигрывает второй.

Предложим стратегию для второго игрока. Если первый игрок на своем  $k$ -м ходу провел диаметр  $d_k$ , то второй проводит диаметр  $d'_k$ , перпендикулярный  $d_k$ . Он всегда сможет это сделать. Заметим, что после каждого хода второго игрока рисунок (круг и множество проведенных диаметров) переходит в себя при повороте на угол  $90^\circ$  вокруг центра круга. Следовательно, если после хода второго игрока получился сектор площади меньше 1, то на рисунке и до этого хода присутствовал сектор площади меньше 1.

**343. Ответ.** Искомое ГМТ — объединение диагоналей  $AC'$ ,  $BD'$ ,  $CA'$ ,  $DB'$ .

**Лемма.** Пусть в треугольниках  $XYZ$  и  $X'Y'Z'$  равны стороны  $YZ$  и  $Y'Z'$ , а также высоты из вершин  $X$  и  $X'$ . Радиусы вписанных окружностей равны тогда и только тогда, когда либо  $\triangle XYZ = \triangle X'Y'Z'$ , либо  $\triangle XYZ = \triangle X'Z'Y'$ .

**Доказательство.** Если треугольники равны, то радиусы вписанных окружностей тоже равны. Докажем, что верно обратное. Построим треугольник  $X'YZ$ , равный треугольнику  $X'Y'Z'$  и лежащий в той же полуплоскости относительно  $YZ$ , что и  $X$  (рис. 148). Тогда либо  $X'' = X$  и лемма доказана, либо  $X''X \parallel YZ$ . Пусть  $V$  — точка, симметричная  $X$  относительно серединного перпендикуляра к  $YZ$ . Достаточно доказать, что  $V = X''$ .

Поскольку  $S = pr$ , то  $X'Y + X''Z = XY + XZ$ . Пусть  $U$  — точка, симметричная  $Z$  относительно  $XX''$ , тогда  $X'Y + X''U = XY + XU = VY + VU$ . Пусть для определенности  $X''$  лежит в той же полуплоскости относительно  $YU$ , что и  $V$ . Тогда один из треугольников  $YUX''$  и  $YUV$  содержится внутри другого. Покажем, что их периметры могут совпадать, лишь когда  $X'' = V$ . Пусть для определенности  $X''$  лежит в треугольнике  $YUV$ . Пусть луч  $YX''$  пересекает  $UV$  в точке  $W$ . Тогда  $YX'' + X''U \leq YX'' + X''W + WU = YW + WU \leq YV + VW + WU = YV + VU$ , оба неравенства становятся равенствами лишь при  $X'' = V$ , что и требовалось. Лемма доказана.

Назовем *трехгранником* три непараллельные плоскости, параллельные некоторой прямой  $l$ . Рассмотрим сферу, вписанную в трехгранник. Ее центр и точки касания лежат в одной плоскости, перпендикулярной  $l$ , и в сечении трехгранника и сферы этой плоскостью получается треугольник с его вписанной окружностью (пусть ее радиус равен  $r$ ). Все такие треугольники равны, поэтому ГМТ центров вписанных сфер есть прямая, параллельная  $l$  и лежащая на расстоянии  $r$  от каждой из плоскостей.

Рассмотрим пирамиду  $PABCD$ . Она описана тогда и только тогда, когда существует сфера, вписанная одновременно в трехгранники  $(PAB, PCD, ABCD)$  и  $(PAD, PBC, ABCD)$ , т. е. когда ГМТ их центров имеют общую точку. ГМТ центров этих сфер есть перпендикулярные прямые, которые, очевидно, пересекаются тогда и только тогда, когда равны радиусы вписанных окружностей соответствующих треугольников. Заметим, что у этих треугольников равны основания и высоты к основаниям. Поэтому по лемме пирамида описана тогда и только тогда, когда треугольники равны.

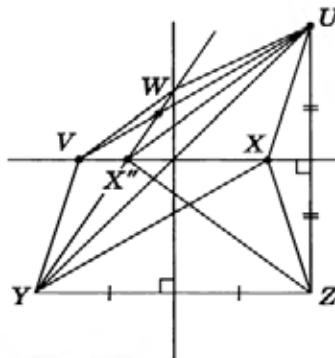


Рис. 148

Введем систему координат с началом в точке  $A$ , осями  $AB$ ,  $AD$ ,  $AA'$  и единицей измерения  $AB$ . Пусть точка  $P$  имеет координаты  $(x; y; z)$ . Понятно, что упомянутые треугольники равны тогда и только тогда, когда  $x = y$  или  $x = 1 - y$  (т. е. когда проекции соответствующих вершин на основания делят их в одном и том же отношении). Аналогично для остальных пяти пирамид получаем условия  $x = z$  или  $x = 1 - z$ ,  $y = z$  или  $y = 1 - z$ . Легко видеть, что из двух этих условий следует третье. Условие  $x = y$  и  $x = z$  означает, что  $P \in AC'$ , для остальных трех случаев аналогично получаем три другие диагонали куба.

**344. Ответ.** Не существует.

Предположим, что такое  $x$  существует. Рассмотрим сначала две леммы.

**Лемма 1.** Пусть  $\operatorname{ctg} x$  рациональное число,  $n$  — натуральное число. Тогда либо  $\operatorname{ctg} nx = \operatorname{ctg} k$ , где  $k$  — целое число, либо  $\operatorname{ctg} nx$  — рациональное число.

**Доказательство.** При  $x = \frac{\pi}{2}l$ , где  $l$  — целое число, утвержде-

ние очевидно. Пусть  $x \neq \frac{\pi}{2}l$ . Заметим, что в этом слу-

чае  $\operatorname{ctg} 2x$  определено и, кроме того, для любого натурального  $n$  определено хотя бы одно из чисел  $\operatorname{ctg} nx$  и  $\operatorname{ctg}(n+1)x$ . В самом деле, в противном случае число  $x = (n+1)x - nx$  было бы кратно  $\pi$  и  $\operatorname{ctg} x$  не было бы определено. Далее, обозначив  $a = \operatorname{ctg} x$ , видим, что  $\operatorname{ctg} 2x = \frac{a^2 - 1}{2a}$  рационально. Докажем теперь лемму по

индукции. База:  $n = 1, 2$ . Индукционный переход. Пусть  $n \geq 3$  и для всех  $k < n$  утверждение справедливо. Значит, либо  $\operatorname{ctg}(n-2)x$ , либо  $\operatorname{ctg}(n-1)x$  — рациональное число. Если  $\operatorname{ctg} nx$  определено, то в первом случае подставим в равенство

$$\operatorname{ctg}(y+z) = \frac{\operatorname{ctg} y \operatorname{ctg} z - 1}{\operatorname{ctg} y + \operatorname{ctg} z}$$

числа  $y = (n-2)x$ ,  $z = 2x$ , во втором случае — числа  $y = (n-1)x$ ,  $z = x$ . В обоих случаях получим справа рациональное число. Лемма доказана.

**Лемма 2.** Пусть  $\operatorname{ctg} x$  — рациональное число,  $\operatorname{ctg} 2x$  — целое. Тогда  $\operatorname{ctg} 2x = 0$ .

**Доказательство.** Обозначив  $r = \operatorname{ctg} x$ ,  $c = \operatorname{ctg} 2x$ , получим  $c = \frac{r^2 - 1}{2r}$ , или  $r = c \pm \sqrt{c^2 + 1}$ . Отсюда легко получить, что  $c^2 + 1 = d^2$ , где  $d$  — целое число, а значит,  $c = 0$ . Лемма доказана.

Вернемся к решению задачи. Поскольку  $\operatorname{ctg} 2004x$  определен, то определены и числа  $\operatorname{ctg} 1002x$  и  $\operatorname{ctg} 501x$ . Вследствие леммы 1  $\operatorname{ctg} 1002x$  и  $\operatorname{ctg} 501x$  рациональны. Из рациональности  $\operatorname{ctg} 1002x$  по лемме 2 следует, что  $\operatorname{ctg} 2004x = 0$ , т. е.  $2004x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k$  — целое число. Значит,  $\operatorname{ctg} 1002x = \pm 1$ .

Вследствие леммы 2 это противоречит рациональности  $\operatorname{ctg} 501x$ .

## 2004–2005

### ▼ 8 класс

**345. Ответ.** 1003 раза.

Последнее число в  $n$ -й строке равно  $2n - 1$ . Поэтому из равенства  $2n - 1 = 2005$ ,  $n = 1003$  следует, что в первый раз число 2005 встретится в 1003 строке. Число 2005 будет встречаться по одному разу в строках с 1003 по 2005 и, таким образом, будет выписано  $2005 - 1003 + 1 = 1003$  раза.

**346. Ответ.** 35 г.

Упорядочим веса гирь по возрастанию:  $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5$ . Предположим, что  $a_3 \leq 6$ . Тогда  $a_1 + 2 \leq a_2 + 1 \leq a_3$ ,  $a_5 - 2 \geq a_4 - 1 \geq a_3$ , откуда  $a_4 + a_5 \geq (a_3 + 1) + (a_3 + 2) = 2a_3 - 3 + 6 \geq 2a_3 - 3 + a_3 = a_3 + (a_3 - 1) + (a_3 - 2) \geq a_3 + a_2 + a_1$ , что противоречит условию. Значит,  $a_3 \geq 7$ ,  $a_4 \geq 8$ ,  $a_5 \geq 9$ ,  $a_4 + a_5 \geq 17$ , следовательно,  $a_1 + a_2 + a_3 \geq a_4 + a_5 + 1 \geq 18$ , откуда  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geq 18 + 17 = 35$ . Пример для 35 дает набор гирь: 5, 6, 7, 8, 9.

**347.** Пусть  $E$  и  $F$  — основания перпендикуляров, опущенных из точки  $C$  на прямые  $AB$  и  $AD$  соответственно. Тогда  $AF = EC = AB$ ,  $CF = AD$ , откуда следует равенство прямоугольных треугольников  $ABD$  и  $FAC$  (по двум катетам). Поэтому  $\angle CAF = \angle ABD$  (рис. 149), а если  $O$  — точка пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$ , то  $\angle AOD = 180^\circ - \angle CAF - \angle ADB = 180^\circ - \angle ABD - \angle ADB = \angle BAD = 90^\circ$ . Утверждение задачи доказано.

**348. Ответ.** Выигрывает второй игрок.

Рассмотрим момент, когда любой ход ведет к проигрышу, т. е. закрашивание любой незакрашенной клетки ведет к тому, что на любом луче с началом в центральной клетке

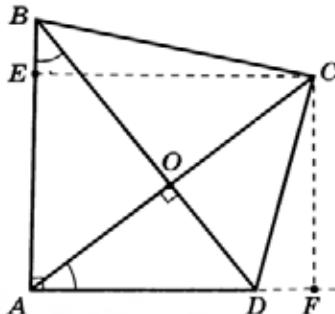


Рис. 149

окажется закрашенная точка (помимо начала луча). В этот момент на каком-то луче  $l$  с началом в центральной клетке еще нет закрашенных точек. Луч  $l$  пересекает границу квадрата  $3 \times 3$  (рис. 150) в некоторой точке  $X$ . Тогда найдутся соседние по стороне клетки  $A$  и  $B$  (где  $B$  примыкает стороной к границе квадрата  $5 \times 5$ , а  $A$  не примыкает), на границе которых находится точка  $X$ . Луч  $l$  пересекает клетки  $A$  и  $B$ , поэтому они не закрашены. Для расположения пары клеток  $A$  и  $B$  существует два варианта (с точностью до поворотов и симметрий), и для каждого из этих вариантов есть луч с началом в центральной клетке, пересекающий только клетки  $A$  и  $B$  (см. рис. 150). Поэтому если, кроме этих клеток, есть еще хотя бы одна незакрашенная, то ее можно закрасить, не проигрывая.

Таким образом, в рассматриваемый нами момент незакрашенной остается только пара клеток  $A$  и  $B$ . Это означает, что к этому моменту времени было сделано  $24 - 2 = 22$  хода, т. е. последний ход сделал второй игрок, а значит, первый игрок проигрывает.

**349. Ответ.**  $33\frac{1}{3}\%$ .

Пусть всего в школе  $m$  мальчиков и  $n$  девочек. Заметим, что число мальчиков, сидящих с девочками, равно числу девочек, сидящих с мальчиками, т. е. число  $0,4m$  ( $100\% - 60\% = 40\%$  от числа  $m$ ) равно  $0,8n$  ( $100\% - 20\% = 80\%$  от  $n$ ). Поэтому  $m = 2n$ , и девочки составляют  $\frac{n}{m+n} \cdot 100\% = \frac{n}{2n+n} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$  учащихся.

**350. Ответ.** 65.

Из того что произведение любых 5 чисел из набора четно, следует, что нечетных чисел меньше 5. Из того что сумма всех чисел нечетна, следует, что в наборе нечетное число нечетных чисел. Таким образом, в наборе либо 3, либо 1 нечетное число. Сумма чисел набора будет наименьшей, если мы возьмем первые подряд идущие четные и нечетные числа. Причем нечетных чисел нужно брать три, а не одно, так как  $2 + 4 + \dots + 14 + 1 + 3 + 5 < 2 + 4 + \dots + 18 + 1$ . Таким образом, наименьшей будет сумма  $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + 1 + 3 + 5 = 65$ .

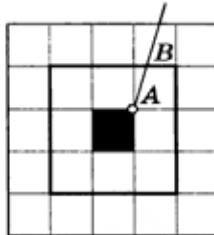
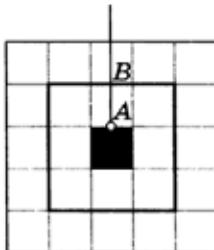


Рис. 150

351. Отметим на  $AB$  точку  $C_2$  так, что  $AC_1 = C_1C_2 = C_2B$  (рис. 151). Тогда по теореме, обратной теореме Фалеса,  $C_2B_1 \parallel BC$ . Тогда если  $L$  — точка пересечения  $C_2B_1$  и  $C_1A_1$ , то по теореме Фалеса  $\frac{C_1L}{LA_1} = \frac{C_1C_2}{C_2B} = 1$ ,

т. е.  $L$  — середина отрезка  $C_1A_1$ , и медиана треугольника  $A_1B_1C_1$  параллельна стороне треугольника  $ABC$ .

Отсюда следует построение. Проведем в треугольнике  $A_1B_1C_1$  медианы  $A_1K$ ,  $B_1L$ ,  $C_1M$ . Проведем затем через точки  $C_1$ ,  $A_1$ ,  $B_1$  прямые, параллельные соответственно  $A_1K$ ,  $B_1L$ ,  $C_1M$ . Тогда эти прямые содержат стороны исходного треугольника, и его вершины являются точками пересечения этих прямых.

### 352. Ответ. Верно.

Занумеруем выключатели: 1, 2, ..., 10. Пусть указанный Олегом выключатель имеет номер 10. За первые три попытки Боря проверит следующие тройки выключателей: (1, 2, 10), (1, 3, 10) и (2, 3, 10). Если хотя бы в одной из попыток лампочка не загорится — значит, десятый выключатель к ней не подсоединен. Поэтому будем считать, что в каждой попытке лампочка включалась. После этого он проведет еще две тройки попыток: (4, 5, 10), (4, 6, 10), (5, 6, 10) и (7, 8, 10), (7, 9, 10), (8, 9, 10). Также можно полагать, что в каждой попытке лампочка загоралась (иначе Боря уже наверняка знает, что десятый выключатель к ней не подсоединен). Допустим, что Олег все-таки перерезал провод от десятого выключателя. Тогда из первых трех попыток Боря может заключить, что из трех выключателей (1, 2, 3) хотя бы два соединены с лампочкой. Действительно, если с ней не соединены хотя бы два выключателя, то в какой-то из попыток все три выключателя не будут подсоединенны к лампочке, и, следовательно, она не загорится, что противоречит нашему предположению о том, что она загоралась в каждой попытке. Аналогично получим, что в тройках (4, 5, 6) и (7, 8, 9) хотя бы по два выключателя соединены с лампочкой. То есть всего с лампочкой соединены не менее шести выключателей, что противоречит условию. Значит, наше предположение, что десятый выключатель не подсоединен к лампочке, неверно. Таким образом, за указанные девять попыток Боря может наверняка установить, подсоединен ли выбранный выключатель к лампочке.

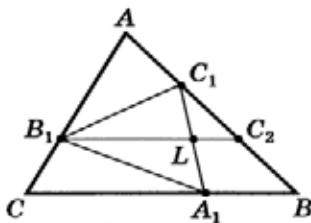


Рис. 151

353. См. решение задачи 346.

354. Ответ. 777 777 777 000.

Пусть  $x = ab\dots cde\dots fg$  — искомое число. Вписав между какими-либо соседними цифрами  $t$  и  $n$  двойку, видим, что цифра  $g$  четна, а вписав пятерку — что  $g = 0$  либо  $g = 5$ . Значит,  $g = 0$ . Рассмотрим теперь произвольную цифру  $d$ , стоящую не в первом и не в последнем разряде десятичной записи числа  $x$ . Число  $y$ , полученное вписыванием 7 между  $d$  и  $e$ , и число  $z$ , полученное вписыванием этой цифры между  $c$  и  $d$ , делятся на 7. Следовательно, на 7 делится  $y - z$ , а потому делится и  $10d - d = 9d$ . Значит,  $d = 0$  либо  $d = 7$ . Любая цифра, кроме первой — 0 или 7; вписав 7 между  $t$  и  $n$ , получим, что первая цифра равна 7. Вписав 9 между  $t$  и  $n$ , получаем, что количество семерок в десятичной записи числа  $x$  кратно 9, поэтому  $x$  хотя бы десятизначное. Наконец, вписав между  $a$  и  $b$  восьмерку, видим, что  $x$  оканчивается не менее чем тремя нулями. Итак,  $x \geq 777\ 777\ 777\ 000$ . С другой стороны, это число удовлетворяет условиям задачи.

355. Пусть робот загадал число  $A$  (мы его пока не знаем). Будем проводить поочередно следующие операции: сначала проверяем, является ли число в памяти робота точным квадратом, если нет, то увеличиваем число на 1, и т. д. до тех пор, пока число в памяти робота не будет точным квадратом. Назовем это число  $N^2$  (мы его пока не знаем). Сделаем несколько операций уменьшения числа на 1, пока мы не получим число  $A - 1$ . Теперь будем проводить поочередно следующие операции: сначала проверяем, является ли число в памяти робота точным квадратом, если нет, то уменьшаем число на 1, и т. д. до тех пор, пока число в памяти робота не будет точным квадратом. Заметим, что это число должно равняться  $(N - 1)^2$ , так как между ним и числом  $N^2$  больше нет точных квадратов. Пусть мы сделали  $t$  операций уменьшения на 1, тогда  $t = N^2 - (N - 1)^2 = 2N - 1$ . Это означает, что мы можем узнать число  $N$ : оно равно  $\frac{t+1}{2}$ . Зная, сколько операций увеличения на 1 мы сделали, мы можем определить число  $A$ , загаданное роботом. Посчитаем теперь количество операций. Операций уменьшения на 1 мы сделали ровно  $t$ . Операций увеличения на 1 мы сделали не больше  $t$ . Операций проверки на точный квадрат мы сделали ровно  $t + 1$ . Так как  $44^2 < 2005 < 45^2$ , то  $N \leq 45$ ,  $t \leq 91$ , т. е. мы сделали не более 274 операций, что и требовалось.

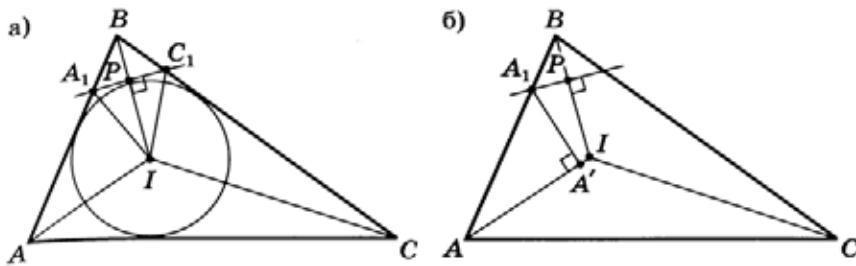


Рис. 152

356. Докажем, что  $\angle AIA_1 + \angle CIC_1 = 180^\circ$  ( $I$  — центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ , рис. 152, а).

Так как  $A_1I$  и  $C_1I$  — биссектрисы углов  $AA_1C_1$  и  $CC_1A_1$ , то

$$\begin{aligned} (180^\circ - \angle AIA_1) + (180^\circ - \angle CIC_1) &= \\ &= \angle IAA_1 + \angle IA_1A + \angle ICC_1 + \angle IC_1C = \\ &= \frac{1}{2}(\angle CAA_1 + \angle C_1A_1A + \angle ACC_1 + \angle A_1C_1C) = 180^\circ. \end{aligned}$$

Значит,  $\angle AIA_1 + \angle CIC_1 = 180^\circ$ .

Расстояние  $A_1A'$  от  $A_1$  до прямой  $AI$  равно  $A_1I \sin \angle AIA_1$  (рис. 152, б). Аналогично расстояние  $C_1C'$  от  $C_1$  до  $CI$  равно  $C_1I \sin \angle CIC_1$ .

Равенство  $C_1C'$  и  $A_1A'$  следует из того, что  $IA_1 = IC_1$  (из симметрии относительно  $BI$ ), и равенства синусов углов ( $\angle AIA_1$  и  $\angle CIC_1$ ), сумма которых равна  $180^\circ$ .

357. Ответ. Все числа равны нулю.

Пусть данные числа —  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5$ . Тогда по условию

$$\begin{aligned} S &= a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \geqslant \\ &\geqslant (a_5 + a_2) + (a_1 + a_3) + (a_2 + a_4) + (a_3 + a_5) + (a_4 + a_1) = 2S. \end{aligned}$$

Значит,  $S \leqslant 0$ . С другой стороны,

$$S \leqslant (a_3 + a_4) + (a_4 + a_5) + (a_5 + a_1) + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) = 2S,$$

т. е.  $S \geqslant 0$ . Отсюда  $S = 0$ . Тогда

$$a_1 = a_1 + S = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_1) \geqslant a_4 + a_1 + a_3 \geqslant a_1 + a_1,$$

т. е.  $a_1 \leqslant 0$ . Аналогично получаем,

что и все остальные числа неположительны. Но их сумма равна нулю. Значит, они все равны нулю.

**Замечание.** Сравните с решением задачи 365.

358. Обозначим точки пересечения прямых со сторонами треугольника через  $L_1$  и  $L_2$ ,  $M_1$  и  $M_2$ ,  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 153). Это концы отрезков  $l$ ,  $m$  и  $n$ . В силу того что отрезки

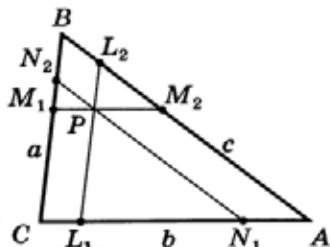


Рис. 153

$L_1L_2$ ,  $M_1M_2$  и  $N_1N_2$ , проходящие через точку  $P$ , параллельны сторонам треугольника, четырехугольники  $CM_1PL_1$ ,  $BL_2PN_2$  и  $AN_1PM_2$  являются параллелограммами. Значит,  $CM_1 = L_1P$ ,  $N_2B = PL_2$ ,  $CL_1 = M_1P$ ,  $N_1A = PM_2$ ,  $BL_2 = PN_2$ ,  $M_2A = PN_1$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} b + c &= (CL_1 + L_1N_1 + N_1A) + (AM_2 + M_2L_2 + L_2B) = \\ &= (M_1P + L_1N_1 + PM_2) + (N_1P + M_2L_2 + PN_2) = \\ &= M_1M_2 + L_1N_1 + N_1N_2 + M_2L_2 = m + n + L_1N_1 + M_2L_2. \end{aligned}$$

Треугольники  $N_1PL_1$  и  $M_2L_2P$  подобны треугольнику  $ABC$ , следовательно,  $PL_2$  — наименьшая сторона в треугольнике  $PL_2M_2$ , а  $L_1P$  — наименьшая сторона в треугольнике  $L_1PN_1$ . Таким образом,  $L_1N_1 + M_2L_2 \geq L_1P + PL_2 = L_1L_2 = l$ , откуда следует, что  $b + c \geq l + m + n$ .

**Замечание.** Также можно доказать, что  $a + b \leq l + m + n$ .

### 359. Ответ. Нельзя.

Пусть такие трехчлены существуют. Из теоремы Виета следует, что корни этих уравнений — четные числа. Тогда произведение корней любого трехчлена делится на 4. Но среди 100 последовательных четных чисел 50 делятся на 4, а 50 не делятся. Значит, каждое из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_{50}$  не делится на 4. Но  $-a_k$  есть сумма корней уравнения  $x^2 + a_kx + b_k = 0$ . Значит, один из корней этого уравнения делится на 4, а другой нет. Но тогда  $b_k$  делится на 8. Однако среди 100 последовательных четных чисел только 25 делятся на 8. Противоречие.

**360.** Через  $|A|$ ,  $|B|$ ,  $|C|$  обозначим число ромбиков вида  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Каждый ромбик вида  $B$  и  $C$  лежит в одной из  $2n$  горизонтальных полос, на которые разбивается шестиугольник. Рассмотрим две соседние полосы  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$ , разделенные прямой  $l$  (рис. 154). Каждому ромбiku  $R$  вида  $B$  или  $C$  из полосы  $\Pi_1$  поставим в соответствие ромбик вида  $B$  или  $C$  из полосы  $\Pi_2$ , имеющий с  $R$  общий отрезок длины 1 прямой  $l$ .

Это соответствие взаимно однозначно, следовательно, в полосах  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  одинаковое суммарное количество ромбиков вида  $B$  и  $C$ . Итак, в каждой из  $2n$  полос одно и то же суммарное количество ромбиков вида  $B$  и  $C$ . Заметим, что в самой верхней полосе имеется ровно  $n$  ромбиков вида  $B$  или  $C$  (каждый из них примыкает к верхней стороне длины  $n$ ), следовательно,  $|B| + |C| = 2n \cdot n = 2n^2$ .

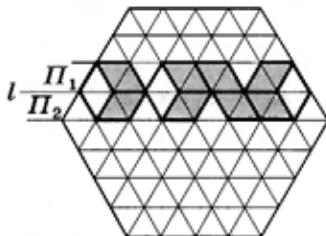


Рис. 154

Аналогичными рассуждениями доказываем, что  $|C| + |A| = 2n^2$  и  $|A| + |B| = 2n^2$ , откуда

$$|A| = \frac{(|C| + |A|) + (|A| + |B|) - (|B| + |C|)}{2} = n^2.$$

Так же получаем, что  $|B| = |C| = n^2$ .

## ▼ 10 класс

361. Ответ. 109 г.

Упорядочим веса гирь по возрастанию:  $a_1 < a_2 < \dots < a_7 = x < a_8 < \dots < a_{11}$ . Тогда  $a_6 \leq x - 1$ ,  $a_5 \leq x - 2$ , ...,  $a_1 \leq x - 6$ ;  $a_8 \geq x + 1$ , ...,  $a_{11} \geq x + 4$ . Так как  $a_1 + \dots + a_7 > a_8 + a_9 + \dots + a_{10} + a_{11}$ , то  $7x - 21 > 4x + 10$ , т. е.  $3x > 31$  и  $x \geq 11$ . Тогда  $a_1 + \dots + a_7 > a_8 + \dots + a_{11} \geq 4 \cdot 11 + 10 = 54$ , откуда  $a_1 + \dots + a_{11} \geq 55 + 54 = 109$ . Суммарный вес 109 реализуется на наборе гирь  $\{4, 6, 7, 8, \dots, 15\}$ .

362. Имеем  $\underbrace{1 \dots 1}_{n} \underbrace{21 \dots 1}_{n} = \underbrace{1 \dots 1}_{n} \cdot 10^n + \underbrace{1 \dots 1}_{n+1} = \underbrace{1 \dots 1}_{n+1} \cdot 10 \dots 01$ .

Из условия следует, что хотя бы один сомножитель делится на 11. Если первый, то  $n+1$  четно, если второй, то  $n-1$  четно, в силу признака делимости на 11. Тогда оба числа  $n+1$  и  $n-1$  четны, оба сомножителя делятся на 11, и их произведение делится на 121.

363. При гомотетии с центром  $B_0$  и коэффициентом 2 середины отрезков  $AB_0$  и  $CB_0$  перейдут соответственно в вершины  $A$  и  $C$ , а перпендикуляры, опущенные из этих середин на стороны  $BC$  и  $AB$ , — в высоты треугольника  $ABC$  (рис. 155). Отсюда следует, что при рассматриваемой гомотетии точка  $B'$  пересечения перпендикуляров перейдет в точку пересечения высот  $H$  треугольника  $ABC$ . Получаем, что  $B'$  — середина отрезка  $HB_0$ . Аналогично  $A'$  — середина отрезка  $HA_0$  и  $C'$  — середина отрезка  $HC_0$ . Это означает, что при гомотетии с центром  $H$  и коэффициентом 2 треугольник  $A'B'C'$  перейдет в треугольник  $A_0B_0C_0$ , подобный треугольнику  $ABC$ . Следовательно, треугольник  $A'B'C'$  также подобен треугольнику  $ABC$ .

364. Ответ.  $n(2n - 1)$ .

Примером служит раскраска (рис. 156, а), в которой закрашены  $n$  столбцов, идущих через один.

Докажем индукцией по  $n$ , что не удастся закрасить большее число клеток. Для  $n = 1$  это очевидно. Пусть это вер-

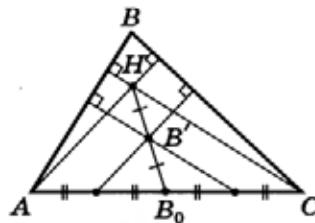
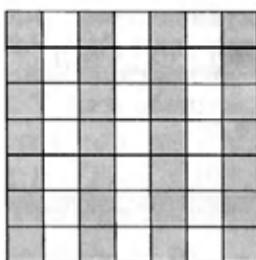


Рис. 155

а)



б)

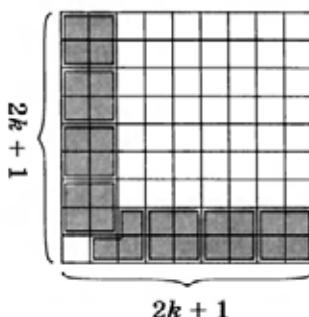


Рис. 156

2k + 1

но для  $n = k$ . Докажем для  $n = k + 1$ . Квадрат  $(2(k + 1) - 1) \times (2(k + 1) - 1)$  разбивается на квадрат  $(2k - 1) \times (2k - 1)$  и угол толщиной в 2 клетки. Угол разобьем на  $2k - 1$  квадратиков  $2 \times 2$ , один уголок из трех клеток и одну клетку (рис. 156, б). В квадратике  $2 \times 2$  и в уголке должно быть не более двух закрашенных клеток. Итого в угле не более  $2 \cdot (2k - 1) + 2 + 1 = 4k + 1$  закрашенных клеток. В квадрате  $(2k - 1) \times (2k - 1)$  не более  $k(2k - 1)$  закрашенных клеток по предположению индукции. Поэтому в квадрате  $(2(k + 1) - 1) \times (2(k + 1) - 1)$  не более  $k(2k - 1) + 4k + 1 = (k + 1)(2(k + 1) - 1)$  закрашенных клеток. Утверждение доказано.

**365. Ответ.** Все числа равны нулю.

**Первое решение.** Пусть в вершинах записаны числа  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2004}$  и их сумма равна  $S$ . Будем считать, что  $a_{k+2005} = a_k$ , тогда условие задачи можно записать в виде  $a_{i-1002} + a_{i+1002} \leq a_i \leq a_{i-1} + a_{i+1}$ . Сложив эти неравенства для всех  $i$ , получаем  $2S \leq S \leq 2S$ . Значит,  $S = 0$ . Далее, сложив неравенства  $a_{i+1} \leq a_i + a_{i+2}$  и  $a_{i+2} \leq a_{i+1} + a_{i+3}$ , получаем  $a_{i+1} + a_{i+2} \leq a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3}$ , т. е.  $0 \leq a_i + a_{i+3}$ . Сложив полученные неравенства при всех  $i$ , получаем  $0 \leq 2S$ . Но  $S = 0$ , значит, все неравенства обращаются в равенства:  $a_i + a_{i+3} = 0$ . Тогда  $-a_i = a_{i+3} = -a_{i+6} = \dots = a_{i+3 \cdot 2005}$ . Но  $a_{i+3 \cdot 2005} = a_i$ . Значит,  $a_i = -a_i$ , т. е.  $a_i = 0$ .

**Второе решение.** Пусть  $a_0$  — наибольшее из данных чисел  $a_0, a_1, \dots, a_{2004}$ , тогда  $a_0 \geq a_{1002}$  и  $a_0 \geq a_{1003}$ . Но по условию  $a_0 + a_1 \leq a_{1003}$  и  $a_{2004} + a_0 \leq a_{1002}$ . Значит,  $a_1 \leq 0$  и  $a_{2004} \leq 0$ . Тогда  $a_0 \leq a_{2004} + a_1 \leq 0$ . Наибольшее из чисел неположительно, значит, все они неположительны. Но сложив, как и выше, неравенства  $a_0 \leq a_{2004} + a_1, a_1 \leq a_0 + a_2, \dots, a_{2004} \leq a_{2003} + a_0$ , получаем  $S \leq 2S$ , т. е.  $S \geq 0$ . Сумма неположительных чисел неотрицательна, поэтому все числа равны нулю.

**366.** Пусть  $XY$  — касательная в точке  $B$  к окружности, описанной около треугольника  $ABC$  (рис. 157). Тогда  $\angle ABX = \angle ACB$ . Отсюда  $\angle PBY = 180^\circ - \angle PBX = 90^\circ - \angle ABX = 90^\circ - \angle ACB = \angle BQC$ .

Из полученного равенства углов следует, что окружность, описанная около треугольника  $PBQ$ , касается прямой  $XY$ .

**367. Ответ.** Не существует.

Предположим противное, и такие  $f_1, f_2, f_3$  нашлись. Так как многочлены  $g_1 = f_2 + f_3$ ,  $g_2 = f_3 + f_1$ ,  $g_3 = f_1 + f_2$  не имеют корней, то каждый из них принимает либо положительные значения на всей числовой оси, либо отрицательные, т. е. либо  $g_i > 0$  для всех  $x$ , либо  $g_i < 0$  для всех  $x$ .

Все три многочлена  $g_1, g_2, g_3$  не могут иметь один и тот же знак. Действительно, если, скажем,  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$  и  $g_3 > 0$ , то  $f_1 + f_2 + f_3 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3) > 0$ , и  $f_1 + f_2 + f_3$  не имеет корней. Противоречие.

Пусть теперь два из многочленов  $g_1, g_2, g_3$  одного знака, а третий — другого, скажем,  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$ ,  $g_3 < 0$ . Тогда  $f_3 = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 - g_3) > 0$ , т. е.  $f_3$  не имеет корней — также получаем противоречие.

**368.** Длина диагонали квадрата со стороной 0,8 равна  $d = 0,8\sqrt{2}$ . Квадрат со стороной 1 можно поместить в полуокружность радиуса  $d$ . В самом деле, пусть  $M$  — середина стороны  $AB$  квадрата  $ABCD$ . Тогда нетрудно проверить, что  $MC = MD = \frac{\sqrt{5}}{2} < d$ . Значит, на серединном перпендикуляре к  $AB$  найдется такая точка  $O$ , что  $OC = OD = d$ , причем точка  $O$  и квадрат лежат по разные стороны от прямой  $AB$ .

Тогда квадрат содергится в полуокружности радиуса  $d$  с диаметром, параллельным  $AB$  (рис. 158). Более того, найдется такое  $\varepsilon > 0$ , что квадрат со стороной 1 помещается в сектор радиуса  $d$  с центральным углом  $\pi - \varepsilon$  (достаточно взять  $\varepsilon = 2 \operatorname{arctg}(2OM)$ ).

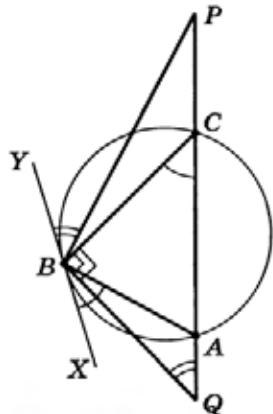


Рис. 157

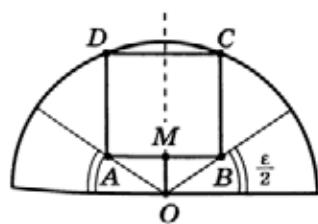


Рис. 158

По условию множество  $L$  бесконечно, поэтому найдутся две прямые  $l_1$  и  $l_2$  из  $L$ , пересекающиеся под углом, меньшим  $\varepsilon$ . Опишем окружность  $\omega$  радиуса  $d$  с центром в точке пересечения  $P$  прямых  $l_1$  и  $l_2$ . В один из образовавшихся секторов с центральным углом, большим  $\pi - \varepsilon$ , поместим квадрат  $K$  со стороной 1. Так как прямые  $l_1$  и  $l_2$  не пересекают  $K$ , то найдется прямая  $l_3$  из  $L$ , имеющая с  $K$  хотя бы одну общую точку  $Q$ . Но  $Q$  лежит внутри  $\omega$ , поэтому  $PQ \leq d$ , и, следовательно, точки  $P$  и  $Q$  можно покрыть квадратом со стороной 0,8. Этот квадрат и будет искомым — его пересекают прямые  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ .

## 11 класс

**369.** См. решение задачи 362.

**370. Первое решение.** Разложим данные суммы на множители:

$$A = \sin x + 1 - 2 \sin^2 x = (2 \sin x + 1)(1 - \sin x), \\ B = \cos x(2 \sin x + 1).$$

По условию  $B \neq 0$ , следовательно,  $\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{A}{B}$  рационально. Но

$$\frac{1 - \sin x}{\cos x} = \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \\ = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) = t.$$

Значит, рациональными будут числа

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \text{ и } \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{2t}{1 + t^2}.$$

**Второе решение.** Имеем

$$AB = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \sin x \cdot \sin 2x + \cos x \cos 2x = \\ = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin 3x \cos x + \cos(2x - x) = (\sin 3x + 1) \cos x, \\ A^2 + B^2 = (\cos^2 x + \sin^2 x) + (\cos^2 2x + \sin^2 2x) + \\ + 2(\sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x) = 2(1 + \sin 3x).$$

Значит, число  $\frac{2AB}{A^2 + B^2} = \cos x$  рационально. Тогда  $\sin x = A - (2 \cos^2 x - 1)$  также рационально.

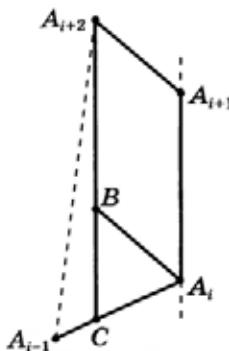


Рис. 159

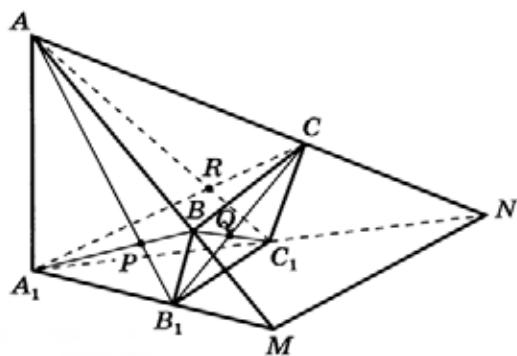


Рис. 160

371. Покажем сначала, что у многоугольника есть сторона, сумма прилегающих углов к которой не меньше  $\pi$ . В самом деле, сумма углов, прилегающих ко всем сторонам, равна удвоенной сумме углов  $n$ -угольника, так как каждый угол считается дважды. Значит, есть сторона, сумма прилегающих углов к которой не меньше  $\frac{2\pi(n-2)}{n} \geq \pi$ , если  $n \geq 4$ .

Пусть  $A_iA_{i+1}$  — искомая сторона, т. е.  $\angle A_{i-1}A_iA_{i+1} + \angle A_iA_{i+1}A_{i+2} \geq \pi$ . Не умаляя общности, можно считать, что из двух вершин  $A_{i-1}$ ,  $A_{i+2}$  вершина  $A_{i+2}$  находится не дальше от прямой  $A_iA_{i+1}$ . Прямая, проходящая через  $A_{i+2}$  параллельно  $A_iA_{i+1}$ , отсекает от четырехугольника  $A_{i-1}A_iA_{i+1}A_{i+2}$  трапецию  $CA_iA_{i+1}A_{i+2}$  (рис. 159).

Взяв на основании  $CA_{i+2}$  точку  $B$ , такую, что  $\angle BA_iA_{i+1} + \angle A_iA_{i+1}A_{i+2} = \pi$ , получим параллелограмм  $BA_iA_{i+1}A_{i+2}$ , лежащий в исходном многоугольнике. Ясно, что координаты точки  $B$  целые, поскольку  $\overrightarrow{A_iB} = \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}$ .

372. По условию плоскости  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  непараллельны, поэтому среди пар прямых  $AB$  и  $A_1B_1$ ,  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $CA$  и  $C_1A_1$  не более одной пары параллельных. Без ограничения общности будем считать, что  $AB$  пересекается с  $A_1B_1$  в точке  $M$  и  $AC$  пересекается с  $A_1C_1$  в точке  $N$ . Тогда  $MN$  — прямая пересечения плоскостей  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$ .

Пусть  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  — точки пересечения соответственно диагоналей граней  $ABB_1A_1$ ,  $BCC_1B_1$ ,  $CAA_1C_1$  (рис. 160). Плоскости  $ABC_1$  и  $A_1B_1C$  содержат точку  $M$  и пересекаются по прямой  $RQ$ , поэтому  $M$  лежит на прямой  $RQ$ . Аналогично  $N$  лежит на прямой  $PQ$ . Следовательно,  $MN$  лежит в плоскости  $PQR$ .

373. См. решение задачи 365.

**374.** Так как  $\angle PB_2C = \angle PA_2C = 90^\circ$  (рис. 161), точки  $C, B_2, P, A_2$  лежат на одной окружности, следовательно,  $\angle PB_2A_2 = \angle PCA_2$ .

Аналогично точки  $A, C_2, P, B_2$  лежат на одной окружности, следовательно,  $\angle PB_2C_2 = \angle PAC_2$ .

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned}\angle A_2B_2C_2 &= \angle PCA_2 + \angle PAC_2 = \\ &= \angle C_1CB + \angle A_1AB = \\ &= \frac{1}{2}C_1\overset{\smile}{B} + \frac{1}{2}A_1\overset{\smile}{B} = \angle A_1B_1C_1.\end{aligned}$$

Аналогично доказывается равенство других пар углов треугольников  $A_2B_2C_2$  и  $A_1B_1C_1$ .

**375.** Заметим, что  $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2 = 3 \cdot 2 - 2^2 = 2$ . Сделаем замену  $x = a - b, y = b - c, z = c - a$ . Имеем  $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 2$ . Тогда среди чисел  $x, y, z$  найдутся либо 2 неотрицательных числа, либо 2 неположительных. Пусть это числа  $y$  и  $z$ . Тогда  $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + (y + z)^2 - 2yz = 2x^2 - 2yz = 2, x^2 = 1 + yz \geq 1, (a - b)^2 \geq 1, |a - b| \geq 1$ .

**376. Ответ.** Первый игрок.

Пусть первыми четырьмя своими ходами первый игрок заменяет на  $-1$  свободные члены в трехчленах  $f_1$  и  $f_2$ , расположенных в левой части уравнения, и трехчленах  $g_1$  и  $g_2$ , расположенных в правой части.

Далее он выполняет произвольные ходы вплоть до своего последнего хода, когда остались только две звездочки.

Рассмотрим возможные ситуации:

1) Звездочками обозначены свободные члены двух трехчленов  $h_1$  и  $h_2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $h_1 = x^2 + ax + *$  находится в левой части. Тогда коэффициенты хотя бы одного из трехчленов  $g_1$  и  $g_2$  заполнены, например  $g_1 = x^2 + cx - 1$ , и он имеет действительные корни  $x_1 < 0 < x_2$  ( $D = c^2 + 4 > 0, x_1 \cdot x_2 = -1$ ). Пусть  $x_0$  — тот из корней  $x_1$  и  $x_2$ , знак которого совпадает со знаком  $a$ . Положив  $* = -x_0^2 - ax_0 < 0$ , получаем, что  $h_1(x_0) = 0$ , значит, левая и правая части уравнения обращаются в 0 при  $x = x_0$ .

2) Звездочками обозначены свободный член и коэффициент при  $x$  (у одного или у разных трехчленов). Заменим свободный член на такое число, чтобы произведения свободных членов в левой и правой частях уравнения стали одинаковыми. Полученное уравнение будет иметь корень  $x = 0$ .

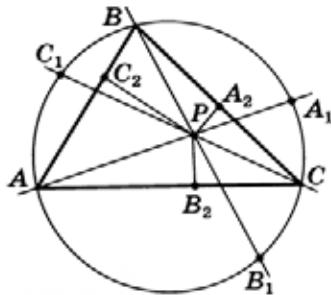


Рис. 161

3) Звездочками обозначены коэффициенты при  $x$  двух трехчленов  $h_1$  и  $h_2$ ,  $h_1 = x^2 + *x + b$ . Опять же считаем, что  $h_1$  находится в левой части. Пусть  $x_0$  — тот из корней трехчлена  $g_1$ , для которого  $x_0^2 \neq -b$  (такой можно найти, так как  $x_1 \cdot x_2 = -1$  и  $x_1 + x_2 = -c \neq 0$ ). Тогда  $x_0 \neq 0$ , и, положив  $* = \frac{-x_0^2 - b}{x_0}$ , получаем, что обе части уравнения обращаются в 0 при  $x = x_0$ .

## 2005–2006

### ▼ 8 класс

377. Заметим, что все рыцари знакомы с одним и тем же числом рыцарей и одним и тем же числом лжецов; аналогично для лжецов. Значит, достаточно доказать, что если рыцарь сделал такие два утверждения, то и лжец сделает такие же (и наоборот). Но количество лжецов, с которыми знакомы рыцарь и лжец, различаются на 1, поэтому утверждение «Я знаком с нечетным числом лжецов» могут сделать либо оба, либо ни один. Аналогично с другим утверждением.

378. Ответ. 5 нулей.

Двухзначные числа в произведении  $\Pi = \text{ДО} \cdot \text{РЕ} \cdot \text{МИ} \cdot \text{СИ}$  оканчиваются на три разных цифры. По крайней мере одна из них не 0 и не 5, поэтому хотя бы один из сомножителей не делится на 5. Каждое из трех остальных чисел делится не более чем на вторую степень пятерки, причем на  $5^2$  оно может делиться только в том случае, если оно 25, 50 или 75. Поэтому  $\Pi$  делится не более чем на шестую степень пятерки, причем шестая степень может оказаться только в том случае, если наши три числа — это 25, 50 и 75. Но они все содержат в своей записи цифру 5, а у нас каждая цифра встречается не более двух раз. Поэтому произведение может делиться максимум на пятую степень пятерки и, как следствие, не более чем на пятую степень десятки (соответственно заканчиваться не более чем пятью нулями). В то же время, например, произведение  $\Pi = 30 \cdot 64 \cdot 25 \cdot 75 = 3\,600\,000$  оканчивается на 5 нулей.

379. Ответ. Две хороших диагонали.

Если у пятиугольника не менее 3 хороших диагоналей, то какие-то две из них пересекаются. Пусть это диагонали  $AC$  и  $BE$ .

Тогда в четырехугольнике  $ABMN$  (рис. 162) диагонали делятся точкой пересечения  $O$  пополам. Значит,  $ABMN$  —

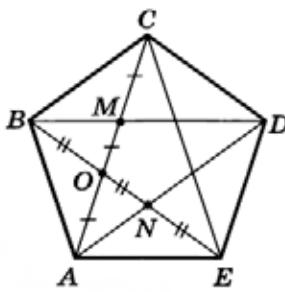


Рис. 162

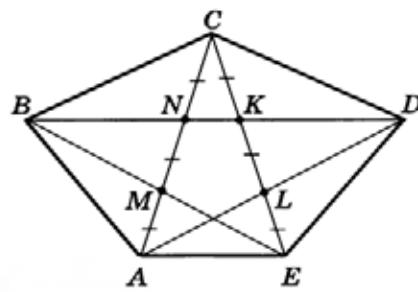


Рис. 163

параллелограмм. Но тогда  $BM \parallel AN$ , т. е.  $BD \parallel AD$  — противоречие. На рисунке 163 приведен пример пятиугольника с двумя хорошими диагоналями. Он может быть получен из произвольного треугольника  $ACE$  делением боковых сторон на три равные части (точки  $M, N, K, L$ ) и построением вершин  $B = EM \cap NK$  и  $D = AL \cap NK$ .

**380.** Можно считать, что любая пара контактов соединена не более чем одним проводом, и проводов не меньше четырех. Если найдутся два провода  $AB$  и  $XY$ , не имеющие общих концов, то любой третий провод должен иметь общий конец либо с  $AB$ , либо с  $XY$ . Значит, в любом случае нашлись два провода, имеющие общий конец (скажем,  $AB$  и  $AC$ ). Если любой провод имеет концом один из контактов  $A, B, C$ , то  $A, B, C$  — требуемая тройка контактов. Иначе имеется провод  $DE$ , где контакты  $D$  и  $E$  отличны от  $A, B, C$ . Добавим к  $AB, AC, DE$  четвертый провод  $XY$ . Для них найдутся такие два контакта, что любой из этих четырех проводов подсоединен хотя бы к одному из них. Один из контактов —  $D$  или  $E$ , значит, другой —  $A$ . Таким образом, любой провод подсоединен к одному из контактов  $A, D, E$ , что и требовалось.

**381.** Вначале Петя достаточно взять произвольное нечетное  $A > 2$ , а затем, какое бы  $B$  ни написал Коля, положить  $C = AB - B$ . Очевидно,  $C > 0$ . Число на доске окажется целым:  $\frac{AC}{B+C} = \frac{AB(A-1)}{AB} = A-1$ . Осталось доказать, что  $C \neq A$ ,

$C \neq B$ . Поскольку  $A \neq 2$ , то  $C \neq B$ . Далее,  $C = (A-1)B$  четно, следовательно,  $C \neq A$ .

**Замечание.** Неравенство  $C \neq A$  легко доказать и при произвольном  $A$ , большем 2.

**382. Ответ.** 32 клетки.

Пример показан на рисунке 164. Докажем теперь, что более 32 клеток не может быть покрашено в первый цвет.

1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	3	2	3
1	1	1	1	1	1	1	1
2	3	2	3	2	3	2	3
...							

Рис. 164

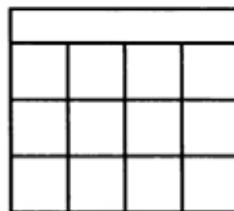


Рис. 165

Заметим, что в любом квадратике  $2 \times 2$  не более двух клеток первого цвета. Разобьем прямоугольник  $7 \times 8$  на 12 квадратиков  $2 \times 2$  и один прямоугольник  $1 \times 8$  (рис. 165). В каждом квадрате не более двух клеток первого цвета, и в прямоугольнике не более 8 клеток первого цвета. Итого клеток первого цвета не более  $12 \cdot 2 + 8 = 32$ .

**383. Ответ.** Не могло.

Если в  $n$ -й ( $n \geq 2$ ) день Карлсон съел  $a_n$  пирожных, то в  $(n+1)$ -й день он съел  $a_{n+1} = a_n + 1 + a_n = 2a_n + 1$  пирожное. Тогда  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 5$ ,  $a_4 = 11$ , т. е. на четвертый день он съел 11 пирожных. Но  $11 = 4k - 1$ , и на следующий день Карлсон съест  $2(4k - 1) + 1 = 8k - 1 = 4 \cdot 2k - 1$  пирожное. Следовательно, начиная с четвертого дня, количество пирожных, съеденных Карлсоном, дает остаток 3 при делении на 4. А число, оканчивающееся на 101, дает остаток 1 при делении на 4.

**384.** Отложим на луче  $SP$  отрезок  $SQ' = SQ$  (рис. 166). В равнобедренном треугольнике  $QSQ'$  биссектриса  $l$  угла  $PSQ$  является высотой и серединным перпендикуляром к отрезку  $QQ'$ . Отсюда следует, что прямые  $QQ'$  и  $MT$  параллельны, так как они перпендикуляры  $l$ . Так как  $MT$  проходит через середину  $PQ$ , то  $MT$  — средняя линия треугольника  $QPQ'$ , и  $T$  — середина  $PQ$ .

Пусть  $K$  — точка пересечения перпендикуляра к  $PQ$ , восставленного в  $M$  (т. е. серединного перпендикуляра к  $PQ$ ), и перпендикуляра к  $SP$ , восставленного в  $T$  (т. е. серединного перпендикуляра к  $PQ'$ ). Точка  $K$  равноудалена от  $P$  и  $Q$ , а также от  $P$  и  $Q'$ . Значит, она равноудалена от  $Q$  и  $Q'$ . Следовательно,  $K$  лежит на серединном перпендикуляре  $l$  к отрезку  $QQ'$ .

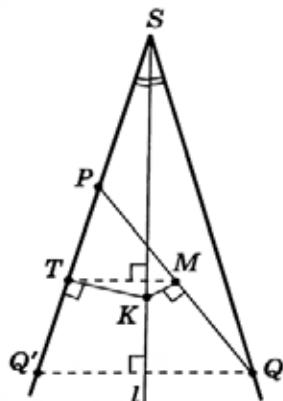


Рис. 166



## 9 класс

385. Ответ. Нельзя.

Пусть мы сможем поменять цвет всех клеток. Рассмотрим клетку  $A$ , которую мы перекрашиваем последней. К моменту перекрашивания клетки  $A$  все остальные клетки должны были изменить свой цвет на противоположный. Значит, в этот момент все соседние с  $A$  клетки одного с ней цвета, и  $A$  перекрасить нельзя.

386. Ответ.  $n = 1$ .

**Первое решение.** Докажем, что при  $n > 1$

$$\overline{1 \dots n} > n!. \quad (1)$$

Для этого вначале докажем, что при любых  $a, b \in N$

$$\overline{ab} > a \cdot b. \quad (2)$$

Имеем  $\overline{ab} > a \cdot 10^n$ , если  $b$  —  $n$ -значное число. Отсюда  $a \cdot 10^n > a \cdot b$ . Неравенство (2) доказано, а неравенство (1) сразу получается из неравенства (2) по индукции.

**Второе решение.** Заметим, что число  $\overline{1 \dots n}$  имеет на конце столько же нулей, как и число  $n!$  при  $n > 5$  — большее количество нулей, так как при  $n > 5$  в произведении  $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$  встречаются, кроме  $n$ , еще 2 и 5. Случай  $n \leq 5$  легко разбираются по отдельности.

387. Так как  $CD$  — диаметр, проведенный в точку касания окружности с прямой  $AC$ , то  $CD \perp AC$  и, следовательно,  $BH \parallel AC$  (рис. 167). Продлим  $DB$  до пересечения с прямой  $AC$  в точке  $E$ . Углы  $CBD$  и  $CBE$  прямые, поскольку  $CD$  — диаметр. Из равенства касательных  $AC$  и  $AB$  следует, что точка  $A$  лежит на серединном перпендикуляре к катету  $BC$  прямоугольного треугольника  $EBC$ . Значит, она лежит на средней линии этого треугольника, поэтому точка  $A$  — середина стороны  $EC$ . Следовательно, прямая  $AD$  делит отрезок  $CE$  пополам. Тогда она делит пополам и параллельный ей отрезок  $BH$ .

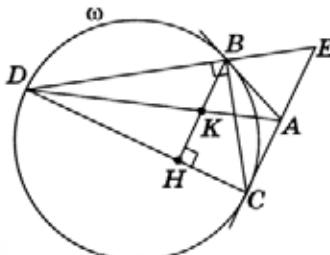


Рис. 167

388. Для решения задачи докажем лемму.

**Лемма.** Пусть в некоторой компании каждый человек из этой компании записал, сколько у него в компании знакомых. Тогда количество записанных нечетных чисел четно.

**Доказательство.** Рассмотрим количество (упорядоченных) пар  $(A, B)$  знакомых в этой компании. Оно четно, так

как вместе с парой  $(A, B)$  присутствует и пара  $(B, A)$ . С другой стороны, оно равно сумме всех записанных чисел, так как количество пар вида  $(A, x)$  равно числу, записанному  $A$ . Лемма доказана.

Рассмотрим любого человека, отличного от президента. Если он лжец, то у него четное число знакомых лжецов и нечетное число знакомых рыцарей. Если он рыцарь, то наоборот — нечетное число знакомых лжецов и четное число знакомых рыцарей. В любом случае у него нечетное число знакомых. Тогда по лемме и у президента также нечетное число знакомых.

Пусть президент — рыцарь. Применим к компании из всех рыцарей лемму. Так как у каждого рыцаря, отличного от президента, было четное число знакомых рыцарей, получаем, что у президента тоже четное число знакомых рыцарей, а значит, нечетное число знакомых лжецов, и утверждение задачи доказано. Если же президент лжец, достаточно аналогичным образом применить лемму ко множеству всех лжецов.

**389. См. решение задачи 383.**

**390. Ответ.** Можно.

Покажем по индукции, как получить любой многочлен вида  $x^n + 1$ . База индукции:  $x^n + 1$  для  $n = 1$  и  $n = 2$  заданы изначально. Пусть на доске есть многочлены  $f_{n-2} = x^{n-2} + 1$  и  $f_{n-1} = x^{n-1} + 1$ . Тогда выпишем  $g_n = f_{n-1} - f_{n-2} = x^{n-1} - x^{n-2}$ ,  $h_n = (x+1) \cdot g_n = x^{n-2}(x-1)(x+1) = x^n - x^{n-2}$ ,  $h_n + f_{n-2} = x^n - x^{n-2} + x^{n-2} + 1 = x^n + 1$ . (Если в какой-то момент мы хотим выписать многочлен, уже написанный на доске, то пропустим этот шаг.) Утверждение доказано.

**391.** Используя то, что четырехугольники  $ABCQ$ ,  $BCPQ$  и  $ARSC$  вписаные (рис. 168), получаем равенства:

$$\begin{aligned}\angle NQP &= \angle BQC + \angle CQP = \\&= \angle BAC + \angle CBP = (180^\circ - \angle RSC) + \\&\quad + \angle CBP = \angle BSR + \angle CBP = \\&= \angle BSM + \angle SBM = \angle SMP = \\&= 180^\circ - \angle NMP.\end{aligned}$$

Итак,  $\angle NQP + \angle NMP = 180^\circ$ , откуда следует требуемое.

**392. Ответ.** Можно.

Укажем способ отыскания настоящей монеты. Для первого взвешивания положим на чашки весов по 4 монеты. Возможны два случая.

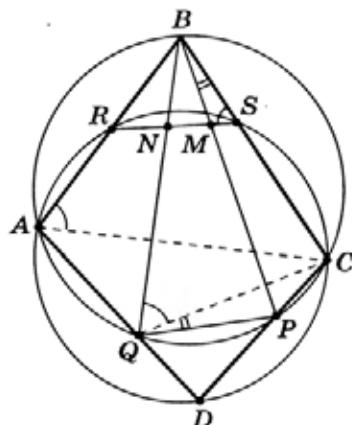


Рис. 168

1. Одна из чашек перевесила. Обозначим через  $A, B, C$  и  $D$  массы монет на этой чашке; ясно, что хотя бы одна из этих монет настоящая. Вторым взвешиванием сравниваем величины  $A + B$  и  $C + D$ . Если  $A + B > C + D$  или  $A + B = C + D$ , то монеты с массами  $A$  и  $B$  не могут обе быть фальшивыми, и тогда третьим взвешиванием сравниваем  $A$  и  $B$ . Более тяжелая из монет обязательно настоящая, а при  $A = B$  настоящие обе. (Если же  $A + B < C + D$ , то третьим взвешиванием сравним  $C$  и  $D$ .)

2. При первом взвешивании зафиксировано равенство масс. Это значит, что на чашках по одному и тому же числу фальшивых монет, а общее число взвешенных фальшивых монет четно. Следовательно, среди остальных 7 монет число фальшивых также четно. Для второго взвешивания положим на чашки по 2 монеты из ранее не взвешенных. Если какая-то пара тяжелее, то третьим взвешиванием сравним монеты этой пары; монета, которая тяжелее или равна другой, настоящая. Если же массы пар монет во втором взвешивании равны, то в этих парах по одному и тому же числу фальшивых монет, общее число фальшивых среди взвешенных четно, четно оно и среди 3 оставшихся (ни разу не взвешенных). Тогда возьмем любые 2 из этих 3 монет и сравним их массы; если какая-то чашка перевесит, то монета на ней настоящая, в случае же равенства настоящей обязательно будет третья монета.



## 10 класс

393. См. решение задачи 385.

394. Пусть нашлась такая перестановка  $a_1, a_2, \dots, a_{100}$  чисел 1, 2, ..., 100, что каждая из сумм  $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{99} + a_{100}$  либо не больше 50 (в этом случае назовем сумму *маленькой*), либо не меньше 150 (в этом случае назовем сумму *большой*). Тогда среди этих сумм найдется как маленькая (например, содержащая число 1), так и большая (например, содержащая число 100). Значит, найдутся две соседние суммы  $a_{i-1} + a_i, a_i + a_{i+1}$ , одна из которых маленькая, а другая — большая. Модуль разности между этими суммами должен быть не меньше  $150 - 50 = 100$ . С другой стороны,

$$|(a_{i-1} + a_i) - (a_i + a_{i+1})| = |a_{i-1} - a_{i+1}| \leq 100 - 1 = 99.$$

Противоречие.

395. Из условия следует, что  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab$  ( $a + b$ ) делится на  $ab$ . Докажем, что каждое из чисел  $a^3$  и  $b^3$  делится на  $ab$ . Пусть  $p$  — простой делитель числа  $ab$ .

Без ограничения общности будем считать, что число  $a$  делится на  $p^\alpha$  и не делится на  $p^{\alpha+1}$ , число  $b$  делится на  $p^\beta$  и не

делится на  $p^{\beta+1}$ , где  $\alpha \geq \beta \geq 0$ . Тогда  $ab$  делится на  $p^{\alpha+\beta}$  и не делится на  $p^{\alpha+\beta+1}$ . Число  $a^3$  делится на  $p^{3\alpha}$ , а значит, и на  $p^{\alpha+\beta}$ ; отсюда  $b^3 = (a^3 + b^3) - a^3$  также делится на  $p^{\alpha+\beta}$ . Значит, и  $a^3$ , и  $b^3$  делятся на  $p^{\alpha+\beta}$ . В силу произвольности выбора простого  $p$ , получаем, что  $a^3$  и  $b^3$  делятся на  $ab$ .

Тогда  $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$  делится на  $ab$ . Значит,  $|a-b|^3 \geq ab > 10^6 \cdot 10^6 = 10^{12}$ . Получаем  $|a-b| > 10^4$ , что и требовалось.

**Замечание.** Пример чисел, удовлетворяющих условию задачи:  $a = 101 \cdot 103^2$ ,  $b = 101^2 \cdot 103$ .

**396. Первое решение.** Так как  $PM$  — медиана треугольника  $APC$ , то

$$S_{APM} = S_{MPC} \Rightarrow \frac{1}{2} AP \cdot PM \sin \angle APM = \frac{1}{2} MP \cdot CP \sin \angle CPM$$

(рис. 169). Следовательно,

$$\frac{\sin \angle APM}{\sin \angle CPM} = \frac{CP}{AP}.$$

Аналогично из того, что  $PN$  — медиана треугольника  $BPD$ , следует, что

$$\frac{\sin \angle BPN}{\sin \angle DPN} = \frac{DP}{BP}.$$

Так как  $\angle BPM = \angle CPN$ , то  $\angle CPM = \angle BPN$ , значит,

$$\frac{CP}{AP} = \frac{BP}{DP}, \text{ т. е. } PC \cdot PD = PB \cdot PA.$$

Значит, четырехугольник  $ABCD$  вписанный.

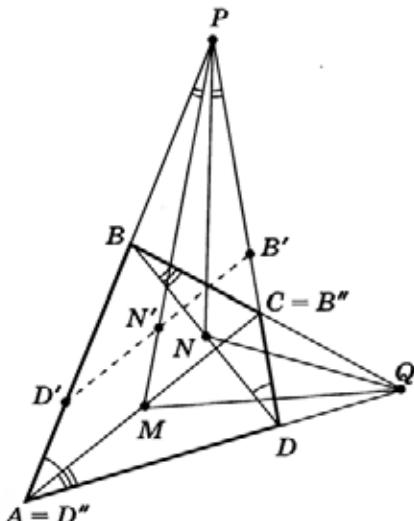


Рис. 169

Тогда  $QB \cdot QC = QA \cdot QD$ , откуда  $\frac{DQ}{BQ} = \frac{CQ}{AQ}$ . Аналогично, рассматривая медианы  $QM$  и  $QN$  в треугольниках  $ACQ$  и  $BDQ$ , приходим к выводу, что

$$\frac{\sin \angle BQN}{\sin \angle NQD} = \frac{\sin \angle AQM}{\sin \angle MQB},$$

кроме того,

$$\angle BQN + \angle NQD = \angle AQM + \angle MQB = \angle AQB$$

(обозначим этот угол  $\varphi$ ). Тогда  $\angle CQN = \angle AQM$ , так как функция

$$f(x) = \frac{\sin(\varphi - x)}{\sin x} = \frac{\sin \varphi \cos x - \sin x \cos \varphi}{\sin x} = \sin \varphi \operatorname{ctg} x - \cos \varphi$$

строго монотонна на  $(0, \varphi)$ .

**Второе решение.** Отразив треугольник  $BPD$  симметрично относительно биссектрисы  $l$  угла  $BPD$ , получим треугольник  $B'PD'$  (см. рис. 169). Медиана  $PN'$  треугольника  $B'PD'$  симметрична  $PN$  относительно  $l$ , поэтому  $N'$  лежит на луче  $PM$ . Рассмотрим гомотетию с центром  $P$ , переводящую  $N'$  в  $M$ . Точки  $B'$  и  $D'$  перейдут при этой гомотетии соответственно в точки  $B''$  и  $D''$ , лежащие на лучах  $PC$  и  $PA$ . Если  $B''$  не совпадает с  $C$ , а  $D''$  не совпадает с  $A$ , то в четырехугольнике  $AD''CB''$  диагонали  $AC$  и  $B''D''$  делятся точкой  $M$  пополам, откуда следует, что  $AD''CB''$  — параллелограмм, и  $AB \parallel CD$  — противоречие.

Следовательно,  $B'' = C$  и  $D'' = A$ , значит,  $\triangle CPA$  равен  $\triangle B''PD''$  и подобен треугольнику  $BPD$ .

Из подобия следует, что  $\angle BAC = \angle BDC$ , поэтому четырехугольник  $ABCD$  вписанный.

Тогда  $\angle QBD = \angle QAC$ , значит,  $\triangle QBD \sim \triangle QAC$ . Углы  $BQN$  и  $AQM$  равны как соответственные углы (между медианой и стороной) в подобных треугольниках.

**397. Ответ.**  $2x^3 + 2x^2 - x - 1 = 0$ .

Пусть  $\sin \alpha, \cos \alpha, \operatorname{tg} \alpha$  — корни уравнения. Тогда

$$\begin{aligned} 2x^3 + ax^2 + bx + c &= 2(x - \sin \alpha)(x - \cos \alpha)(x - \operatorname{tg} \alpha) = \\ &= 2x^3 - 2(\sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha)x^2 + \\ &+ 2(\sin \alpha \cos \alpha + \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha)x - 2 \sin \alpha \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{c}{2}, \text{ т. е. } \sin^2 \alpha = -\frac{c}{2},$$

откуда, учитывая, что  $c$  — целое число,  $\sin^2 \alpha = 0, \frac{1}{2}$  или 1.

Но если  $\sin \alpha = 0$ , то и  $\operatorname{tg} \alpha = 0$ , и два корня совпадают, а по условию уравнение имеет три различных корня. А если

$\sin^2 \alpha = 1$ , то  $\operatorname{tg} \alpha$  не существует. Значит,  $\sin \alpha = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$ , тогда  $\cos \alpha = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}$  (так как корни различны) и  $\operatorname{tg} \alpha = -1$ . Тогда

$$\begin{aligned}-\frac{a}{2} &= \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha = -1, \\ \frac{b}{2} &= \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

**398. Ответ. 24.**

Выделим в каждом равнобедренном треугольнике прямую, на которой лежит его основание. Если он равносторонний, произвольным образом объявим его основанием одно из его сторон.

Пусть  $l$  и  $m$  — некоторые две из проведенных прямых. Тогда существует не более одного равнобедренного треугольника, у которого на  $l$  лежит основание, а на  $m$  — боковая сторона. Действительно, направление третьей стороны тогда находится однозначно, и существует не более одной проведенной прямой этого направления. Тогда прямая  $l$  содержит основания не более чем трех треугольников; иначе у треугольников с основаниями, лежащими на  $l$ , было бы как минимум (если этих треугольников четыре) 8 боковых сторон, и две лежали бы на одной прямой, что невозможно, так как по условию никакие две прямые не параллельны.

Итого, имеется не более  $3 \cdot 8 = 24$  оснований, т. е. треугольников не больше 24.

Равнобедренных треугольников будет 24, если провести 8 прямых, параллельных восьми последовательным сторонам правильного 16-угольника, так, чтобы никакие три прямые не пересеклись в одной точке. Легко видеть, что тогда на каждой прямой будет лежать ровно по три основания.

**399.** Пусть диагонали трапеции пересекаются в точке  $S$ , а прямые  $AB$  и  $CD$  — в точке  $O$  (пусть для определенности точка  $O$  лежит на лучах  $AB$  и  $DC$ ). Тогда треугольники  $ASD$  и  $CSB$ , а также треугольники  $AOD$  и  $BOC$  подобны с

коэффициентом подобия  $k = \frac{AD}{BC}$  (поскольку  $AD \parallel BC$ ).

Обозначим через  $K$ ,  $L$ ,  $P$ ,  $Q$  точки касания окружностей  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  с прямыми  $AB$  и  $CD$  (рис. 170).

Тогда в треугольнике  $AOD$  имеем  $AN = AP$ ,  $DN = DQ$ ,  $OP = OQ$ , откуда

$$\begin{aligned}2AN &= (OP - OA) + AN = (OD + DN) + AN - OA = \\ &= OD + AD - OA.\end{aligned}$$

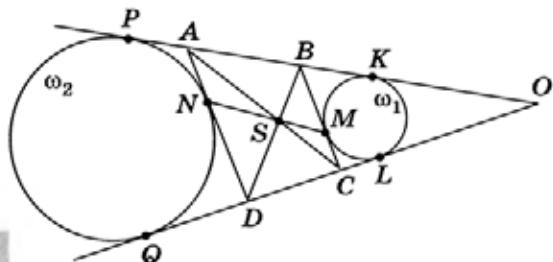


Рис. 170

Аналогично из треугольника  $BOC$  получаем

$$2CM = (OC - OL) + CM = OC - (OB - BM) + CM = \\ = OC - OB + BC.$$

Значит,

$$2AN = k(OC + BC - OB) = 2k \cdot CM,$$

т. е. точки  $N$  и  $M$  являются соответственными в треугольниках  $ASD$  и  $CSB$ . Тогда  $\angle ASN = \angle CSM$ , это и означает, что точки  $N, S, M$  лежат на одной прямой.

#### 400. Ответ. 13.

Для каждого возможного способа проезда запишем множество городов (отличных от  $A$  и  $B$ ), через которые путь проходит. Тогда для разных способов получаются различные множества.

Действительно, пусть для двух способов эти множества совпали. Поскольку каждые два города соединены не более чем одной дорогой, то порядок, в котором эти города встречаются на пути, разный. Следовательно, найдутся такие два города  $X$  и  $Y$ , что при первом способе  $X$  встречается раньше, чем  $Y$ , а при втором способе наоборот. Но тогда из  $X$  можно добраться до  $Y$  и затем вернуться в  $X$ , что противоречит условию.

Пусть в стране  $n$  городов. Тогда способов не больше, чем подмножеств множества из  $(n - 2)$  городов, отличных от  $A$  и  $B$ , т. е.  $2006 \leq 2^{n-2}$ , откуда  $n \geq 13$ .

Приведем пример страны с 13 городами, в которой условие выполнено. Перенумеруем города от 0 до 12 ( $A$  — нулевой,  $B$  — двенадцатый) и соединим пока любые два города в направлении от меньшего к большему. Тогда для каждого подмножества промежуточных городов существует путь по ним, т. е. всего способов  $2^{11} = 2048$ . Теперь закроем дороги, ведущие из второго, четвертого и шестого городов в  $B$ . Тогда из общего количества способов вычлосилось количество способов добраться из  $A$  во второй, из  $A$  в четвертый и из  $A$  в шестой города, т. е. количество способов стало равно  $2048 - 2^1 - 2^3 - 2^5 = 2006$ , что и требовалось.

## ▼ 11 класс

**401.** Пусть  $y = l(x)$  — данная линейная функция. Тогда из условия  $f(x) = l^2(x) + p$ . Условие касания означает, что уравнение  $l^2(x) + p = l(x)$  имеет единственное решение  $x = x_0$ . Но линейная функция, отличная от постоянной, каждое свое значение принимает ровно один раз. Значит, уравнение  $l^2 + p = l$  должно иметь единственное решение,  $l = l_0$ , т. е.  $D = 1 - 4p = 0$ , откуда  $p = \frac{1}{4}$ .

**402.** См. решение задачи 394.

**403.** Докажем сначала, что  $x + y \leq 2$ . Предположим противное, т. е.  $x + y > 2$ . Поскольку для любого натурального  $k$

$$\sqrt[k]{\frac{x^k + y^k}{2}} \geq \frac{x + y}{2} > 1, \quad (1)$$

то  $x^k + y^k > 2$  и, следовательно,

$$\begin{aligned} x + x^2 + \dots + x^n + y + \dots + y^n &= \\ &= (x + y) + (x^2 + y^2) + \dots + (x^n + y^n) > 2n, \end{aligned}$$

что противоречит условию.

Теперь из неравенства  $(x + y)^2 \geq 4xy$  получаем

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} \geq \frac{4}{x + y} \geq 2.$$

**Замечание.** Неравенство (1) можно доказать так: пусть  $x + y = 2$ , тогда  $x = 1 - \alpha$ ,  $y = 1 + \alpha \Rightarrow x^k + y^k = (1 - \alpha)^k + (1 + \alpha)^k = \left(1 - k\alpha + \frac{k(k-1)}{2}\alpha^2 - \dots\right) + \left(1 + k\alpha + \frac{k(k-1)}{2}\alpha^2 + \dots\right) = 2 + C_1\alpha^2 + C_2\alpha^4 + \dots$ , где  $C_1, C_2, \dots, C_k > 0$ . Значит, если  $x + y = 2$ , то  $x^k + y^k \geq 2$ .

Если же  $x + y > 2$ , то можно записать  $x = x_1d$ ,  $y = y_1d$ , где  $x_1 + y_1 = 2$ ,  $d > 1$ . Поэтому

$$x^k + y^k = d^k(x_1^k + y_1^k) \geq 2d^k > 2.$$

**404.** Докажем, что  $AB'C'D$  — параллелограмм. Пусть  $O$  — центр описанной окружности четырехугольника  $ABCD$ ,  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей, симметричных описанной относительно сторон  $AB$  и  $BC$  (рис. 171). Отрезки  $O_1O_2$  и  $O_1O$  являются серединными перпендикулярами к отрезкам  $BB'$  и  $BA$ . Пусть  $M$  и  $K$  — середины этих отрезков. Отрезок  $MK$  является средней линией треугольника  $OO_1O_2$ , а также средней линией треугольника  $ABB'$ . Отсюда следует, что  $\overrightarrow{OO_2} = \overrightarrow{AB'}$ . Аналогично  $\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{DC'}$ . Следовательно,

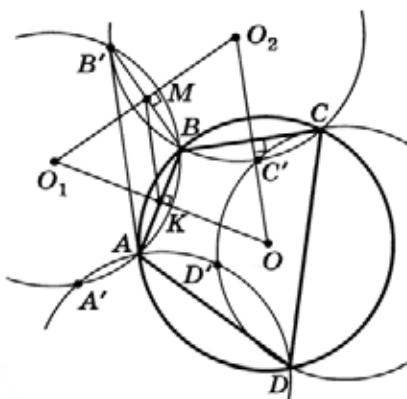


Рис. 171

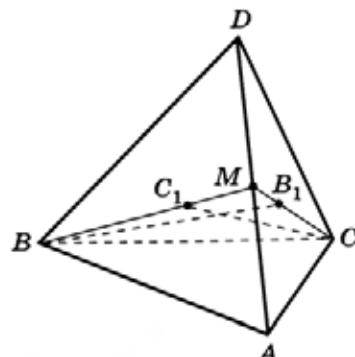


Рис. 172

$AB'C'D$  — параллелограмм. Значит,  $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AD}$ . Аналогично,  $\overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{D'A'} = \overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{DC}$ , следовательно, четырехугольники  $C'D'A'B'$  и  $ABCD$  равны.

405. Пусть  $q \neq 0$  — знаменатель прогрессии. Из условия следует, что  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = q^n$  для некоторого целого  $n$ .

Тогда  $\operatorname{ctg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg} x \cdot q^{-2n}$  также является ее членом.

406. Пусть  $BB_1$  и  $CC_1$  — две высоты пирамиды  $DABC$  (рис. 172). По условию  $B_1 \in CM$ ,  $C_1 \in BM$ , где  $M$  — середина ребра  $AD$ . Из определения высоты пирамиды следует, что  $BB_1 \perp AD$ ,  $CC_1 \perp AD$ , значит,  $AD \perp BMC$  (по признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Тогда  $BM$  — медиана и высота треугольника  $ABD$ , т. е.  $AB = BD$ . Аналогично из треугольника  $ACD$   $AC = CD$ . Рассматривая другие пары высот, получаем  $AD = AC$ ,  $BD = BC$  и  $AB = AD$ ,  $BC = CD$ . Отсюда следует утверждение задачи.

407. Ответ. 60.

Выделим в каждом равнобедренном треугольнике прямую, на которой лежит его основание. Если же он равносторонний, то объявим основанием одну из его сторон.

Пусть  $l$  и  $m$  — некоторые две из проведенных прямых. Тогда существует не более одного равнобедренного треугольника, у которого на  $l$  лежит основание, а на  $m$  — боковая сторона. Действительно, направление третьей стороны тогда задается однозначно, и существует не более одной проведенной прямой этого направления. Тогда прямая  $l$  содержит основания не более чем пяти треугольников; иначе у треугольников с основаниями, лежащими на  $l$ , было бы

12 боковых сторон, и две лежали бы на одной прямой. Итого, всего есть не более  $5 \cdot 12 = 60$  оснований, т. е. треугольников не больше 60.

Равнобедренных треугольников будет 60, если провести 11 прямых, параллельных сторонам правильного 11-угольника, и двенадцатую прямую, перпендикулярную одной из его сторон (при этом никакие три прямые не должны пересекаться в одной точке). Легко видеть, что тогда на каждой прямой будет лежать ровно по пять оснований.

**Замечание.** Прямые, параллельные 12 последовательным сторонам правильного 24-угольника, не дают оптимального примера. Действительно, если в конфигурации есть равносторонний треугольник, то для двух прямых (не содержащих его основания) будет существовать не более чем по 4 треугольника с основаниями на них.

**408. Ответ.** Если  $N$  четно, то побеждает первый; если же  $N$  нечетно, то побеждает второй.

Пусть  $N$  четно. Докажем, что первый может каждым своим ходом добиваться того, что оставшиеся кучи делятся на пары равных (такую ситуацию назовем *симметричной*). Первым своим ходом он разделит кучу на две равные. Далее, если второй очередным своим ходом сделает некоторое действие с какой-то кучей, то первый может сделать такое же действие с парной кучей, и симметрия сохранится. Тогда, очевидно, второй не сможет взять последний камень.

Пусть  $N$  нечетно. Докажем, что второй каждым своим ходом может добиться одной из двух ситуаций: либо все кучи делятся на пары равных (*симметричная ситуация*), либо же все кучи, кроме одной, делятся на пары равных, а в оставшейся — нечетное число камней, большее 1 (такую ситуацию назовем *почти симметричной*). Тогда, очевидно, первый не сможет забрать последний камень.

Заметим, что перед первым ходом первого именно такая, почти симметричная ситуация. Рассмотрим, что сделал первый своим очередным ходом. Если он совершил какое-то действие с кучей, входящей в одну из пар, то второй делает аналогичное действие с парной кучей. Если первый взял камень из непарной нечетной кучи, то она стала четной (и в ней есть еще камни!), и второй может разделить ее на две равные части, приводя к симметричной ситуации.

Пусть первый разделил нечетную кучу на две части, состоящие из  $a$  и  $b$  камней,  $a < b$ . Если  $a < b - 1$ , то второй кучу из  $b$  камней разделит на кучи из  $a$  и  $b - a > 1$  камней, приводя ситуацию к почти симметричной. Если же  $b - a = 1$ , то второй возьмет один камень из кучи в  $b$  камней, приводя ситуацию к симметричной. Итак, второй всегда может сделать ход с соблюдением этого условия. Поэтому он выигрывает.

## V 8 класс

**409.** Ответ. 2006.

$21 = 3 \cdot 7$ , значит, в получившемся произведении могут встречаться только цифры 3, 7 и два раза 1. Поэтому в исходном числе были цифры 2, 6 и два раза 0. Так как число не может начинаться с 0, то, чтобы быть минимальным, оно должно начинаться с 2. А из чисел 2600, 2060 и 2006 наименьшим является 2006.

**410.** Пусть  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AC$  и  $AB$  треугольника  $ABC$ ,  $K$  — точка на стороне  $BC$ , такая, что  $CK : KB = 1 : 3$ , причем  $MK = NK$  (рис. 173). Покажем, что  $\angle ACB = 90^\circ$ .

Соединим точки  $M$  и  $N$  и проведем в равнобедренном треугольнике  $MKN$  высоту  $KP$ . Она является медианой этого треугольника, поэтому  $MP = \frac{1}{2}MN = \frac{1}{4}CB$

(последнее равенство следует из того, что  $MN$  — средняя линия треугольника  $ABC$ ).

Таким образом,  $MP = KC$ . Кроме того,  $MN \parallel CB$ , поэтому  $\angle PMK = \angle MKC$ , и треугольники  $PMK$  и  $CKM$  равны по двум сторонам ( $MP = KC$ ,  $MK$  — общая) и углу между ними. Тогда  $\angle MCK = \angle KPM = 90^\circ$ , что и требовалось доказать.

**411.** Ответ.  $n = 4$ .

Назовем пару «ладья — слон» *ладейной*, если в ней ладья бьет слона, и *слоновой*, если в ней слон бьет ладью. Заметим, что слон и ладья не могут бить друг друга, поэтому пара не может являться одновременно слоновой и ладейной.

По условию ладейных пар не меньше  $2n$  и слоновых тоже не меньше  $2n$ . С другой стороны, общее количество пар «ладья — слон» равно  $n^2$ . Поэтому  $2n + 2n \leq n^2$ , откуда  $n \geq 4$ .

В случае  $n = 4$  искомая расстановка ладей и слонов существует (рис. 174).

**412.** Если для некоторой пары различных  $m$  и  $n$  коэффициенты  $b_m$  и  $b_n$  равны, то прямые  $y = k_m x + b_m$  и  $y = k_n x + b_n$  пересекаются на оси ординат, что противоречит усло-



Рис. 174

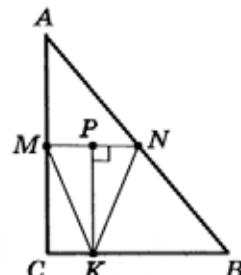


Рис. 173

вию. Следовательно, никакие два коэффициента из набора  $\{b_1, b_2, \dots, b_{20}\}$  не равны, поэтому каждое из чисел 1, 2, ..., 20 встречается в наборе  $\{b_1, b_2, \dots, b_{20}\}$  ровно по разу.

Так как никакие две прямые не параллельны, то никакие два коэффициента из набора  $\{k_1, k_2, \dots, k_{20}\}$  не равны, значит, каждое из чисел 1, 2, ..., 20 встречается в наборе  $\{k_1, k_2, \dots, k_{20}\}$  ровно по разу.

Вычислим абсциссу точки пересечения прямых  $y = k_m x + b_m$  и  $y = k_n x + b_n$  ( $m \neq n$ ):  $x_{mn} = \frac{b_m - b_n}{k_n - k_m}$ .

Отсюда вытекает, что произведение  $\Pi$  всех чисел  $x_{mn}$  равно дроби, числитель которой равен произведению всех попарных разностей чисел 1, 2, ..., 20. В знаменателе дроби находится то же самое произведение разностей (возможно, соответствующие разности в числителе и знаменателе отличаются знаком). Отсюда и следует, что  $\Pi$  равно +1 или -1.

#### 413. Ответ. 8.

Перепишем левую часть равенства как  $\overline{ABA} \cdot \overline{AA} = (101A + 10B) \cdot 11A = 1111A^2 + 110AB$ , а правую — как  $\overline{AB} \cdot \overline{AAA} - A = (10A + B) \cdot 111A - A = 1110A^2 + 111AB - A$ . Значит,  $1111A^2 + 110AB = 1110A^2 + 111AB - A$ , откуда  $A^2 = AB - A$ . Поделив обе части равенства на  $A \neq 0$ , получим  $A = B - 1$ . Так как  $B \leq 9$ , то решение существует для каждого  $A = 1, 2, \dots, 8$ .

**414. Первое решение.** Разделим все монеты на две части по 20 монет и взвесим. Так как фальшивых монет нечетное число, то одна из кучек перевесит. Значит, в ней не более одной фальшивой монеты. Разделим ее на две кучки по 10 монет и взвесим их. Если чашки весов оказались в равновесии, то все 20 взвешиваемых монет настоящие. Если одна из чашек перевесила, то на ней 10 настоящих монет, а среди других 10 монет ровно одна фальшивая. Разделим эти 10 монет на три кучки, состоящие из 4, 4 и 2 монет. Третьим взвешиванием сравним две кучки по 4 монеты. Если они уравновесятся, то все 8 монет настоящие и мы нашли 18 настоящих монет. Если одна из кучек перевесит, то в ней 4 настоящие монеты, в другой кучке есть фальшивая, а 2 отложенные монеты — настоящие.

Всего найдено 16 настоящих монет.

**Второе решение.** Разделим все монеты на пять равных кучек, в каждой из которых по 8 монет, и пронумеруем их. Положим на одну чашку весов 1-ю и 2-ю кучки, а на другую — 3-ю и 4-ю.

Рассмотрим первый случай — весы уравновесились. Тогда либо на каждой чашке находится по одной фальшивой монете, либо все монеты во взвешивании настоящие.

Тогда возьмем и взвесим 1-ю и 2-ю кучки. Если они уравновесились, то все 16 монет настоящие. Если одна из кучек перевесила, то в ней 8 настоящих монет. Третьим взвешиванием сравниваем 3-ю и 4-ю кучки и определяем следующие 8 настоящих монет.

Теперь рассмотрим второй случай — весы не уравновесились. Пусть для определенности перевесили 1-я и 2-я кучки, тогда среди них не более одной фальшивой монеты. Вторым взвешиванием сравним 1-ю и 2-ю кучки. Если они уравновесились, то все 16 монет настоящие. Если одна из кучек перевесила, то в ней 8 настоящих монет, а в другой ровно одна фальшивая. Следовательно, в 3-й и 4-й кучках ровно две фальшивые монеты, а в 5-й кучке 8 настоящих монет. Значит, всего найдено 16 настоящих монет.

**415. Первое решение.** Обозначим середину отрезка  $BH$  через  $K$ , а точку, симметричную ей относительно  $BC$ , через  $L$  (рис. 175). Так как  $KL$  и  $HA_1$  перпендикулярны  $BC$ , то  $KL$  параллельна  $HA_1$ , а в силу того, что  $K$  — середина  $BH$ ,  $KL$  содержит среднюю линию треугольника  $BHA_1$ . Значит, в четырехугольнике  $BLA_1K$  диагонали  $BA_1$  и  $KL$  делятся пополам точкой их пересечения. Тогда  $BLA_1K$  — параллелограмм, и  $LA_1 \parallel BK$ , а следовательно,  $LA_1 \perp AC$ . Значит, перпендикуляр к  $AC$ , проведенный через точку  $L$ , и есть  $LA_1$ .

**Второе решение.** Обозначим середину отрезка  $BH$  через  $K$ , а точку, симметричную ей относительно  $BC$ , через  $L$ . Так как  $A_1K$  — медиана прямоугольного треугольника  $BA_1H$ , то  $KA_1 = KB$ , откуда  $\angle KBA_1 = \angle KA_1B$ . В силу симметрии точек  $K$  и  $L$  относительно прямой  $BA_1$ ,  $\angle BA_1K = \angle LA_1B$ . Значит,  $\angle B_1BA_1 = \angle BA_1K = \angle BA_1L$ , откуда следует параллельность прямых  $BB_1$  и  $LA_1$ , т. е. перпендикулярность прямых  $LA_1$  и  $AC$ .

**416.** Пусть по окружности расположены числа  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Каждое слагаемое в сумме  $T = (a_1 + a_2 + \dots + a_{13}) + (a_2 + a_3 + \dots + a_{14}) + \dots + (a_n + a_1 + a_2 + \dots + a_{12})$  не пре-  
восходит 13, и каждое из чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$  входит в эту сумму 13 раз. Поэтому  $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{T}{13} \leq n$ .

Для решения задачи теперь достаточно доказать, что если  $S = n$ , то все числа равны 1. Будем говорить, что для расположенных чисел выполнено  $C(k)$ , если сумма любых  $k$  подряд идущих чисел равна  $k$ . Если  $S = n$ , то каждая скоб-

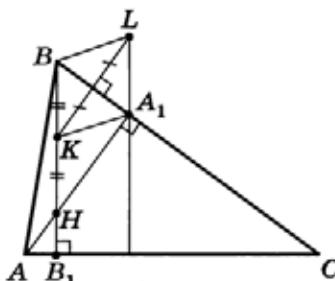


Рис. 175

ка в сумме  $T$  равна 13, т. е. выполнено условие  $C(13)$ . Аналогично если  $S = n$ , то выполнено и условие  $C(21)$ .

Заметим, что если при натуральных  $a > b$  выполняются условия  $C(a)$  и  $C(b)$ , то выполняется и условие  $C(a - b)$ . Действительно, возьмем любые  $a - b$  подряд идущих чисел и следующие за ними  $b$  чисел. Сумма  $b$  чисел равна  $b$ , а сумма всех  $a$  чисел равна  $a$ , значит, сумма данных  $a - b$  чисел равна  $a - b$ .

Значит, из условий  $C(21)$  и  $C(13)$  последовательно выводим условия  $C(21 - 13) = C(8)$ ,  $C(13 - 8) = C(5)$ ,  $C(8 - 5) = C(3)$ ,  $C(5 - 3) = C(2)$ ,  $C(3 - 2) = C(1)$ . Но условие  $C(1)$  и означает, что все числа на окружности равны 1, что противоречит условию, следовательно,  $S < n$ .

## 9 класс

417. Ответ. 3 хода.

Очевидно, что одного хода не хватит. После двух ходов найдутся по крайней мере три карточки, перевернутые по два раза, а значит, эти карточки будут в исходном положении.

Приведем пример переворачивания всех карточек за три хода. Пронумеруем карточки цифрами от 1 до 7 и перевернем за первый ход карточки с номерами 1, 2, 3, 4, 5, за второй ход — 1, 2, 3, 4, 6, а за третий ход — 1, 2, 3, 4, 7.

418. Пусть  $x_1, x_2$  — корни уравнения  $cx^2 + dx + a = 0$ , тогда  $nx_1$  и  $nx_2$  — корни уравнения  $ax^2 + bx + c = 0$ , где  $n = 2007$ . Тогда по теореме Виета  $x_1 + x_2 = -\frac{d}{c}$ ,  $x_1x_2 = \frac{a}{c}$ ,  $nx_1 + nx_2 = -\frac{b}{a}$ ,

$$nx_1nx_2 = \frac{c}{a}, \text{ т. е.}$$

$$\frac{dn}{c} = -n(x_1 + x_2) = \frac{b}{a}, \quad (*)$$

$$\frac{n^2a}{c} = n^2x_1x_2 = \frac{c}{a}. \quad (**)$$

Из равенства  $(**)$  получаем  $n^2 = \frac{c^2}{a^2}$ , а из равенства  $(*)$  имеем  $\frac{d^2n^2}{c^2} = \frac{b^2}{a^2}$ , откуда  $\frac{b^2}{a^2} = \frac{d^2}{c^2} \frac{c^2}{a^2} = \frac{d^2}{a^2}$ , значит,  $b^2 = d^2$ .

**Замечание.** Ясно, что числа  $\frac{d}{c}$  и  $\frac{b}{a}$  имеют одинаковые знаки — они различаются в 2007 раз. Поэтому если знаки  $a$  и  $c$  совпадают, то  $b = d$ , иначе  $b = -d$ ; оба случая возможны.

419. Заметим, что  $AI$  — биссектриса угла  $BAC$ . Из равенства углов  $C_1AI$  и  $B_1AI$  следует равенство хорд  $C_1I$  и  $B_1I$ .

Аналогично  $B_1I = A_1I$  (рис. 176). Значит, точка  $I$  является центром описанной окружности для всех треугольников  $A_1B_1C_1$ .

**420. Ответ.**  $k = 2$ .

Заметим, что потребуется сделать не менее двух пересадок. Действительно, из произвольного города  $A$  без пересадок можно добраться не более чем в 4 города, а ровно с одной пересадкой —

не более чем в  $4 \cdot 3 = 12$  городов (так как один из рейсов ведет из каждого из этих городов в  $A$ ). Итак, если использовать не более одной пересадки, то из любого города можно долететь не более чем в 16 других городов, а требуется — в 19. На рисунке 177 показано, как можно организовать рейсы, чтобы было не более двух пересадок. Картинка симметрична, поэтому достаточно показать, как можно добраться из первого города в любой другой. Из него без пересадок можно добраться до городов 2, 3, 4, 5. Затем с одной пересадкой — в города 6, 7, 8 (из 5), 9 (из 2), 13 (из 3) и 17 (из 4). И с двумя пересадками — в города 10, 11, 12 (из 9), в 14, 15, 16 (из 13), в 18, 19, 20 (из 17).

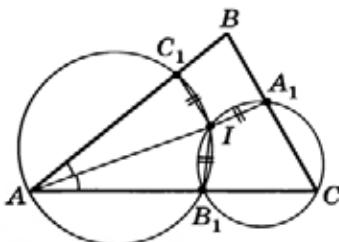


Рис. 176

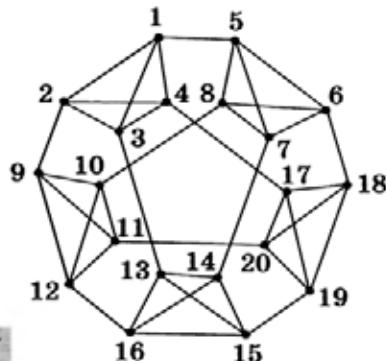


Рис. 177

**421. Ответ.** Могло.

Например, подойдет набор палочек с длинами 1, 1, 2, 3, 5. Разломив палочку длины 5 на две палочки длиной 2 и 3, мы сможем составить два равнобедренных треугольника со сторонами 1, 2, 2 и 1, 3, 3.

**422. См. решение задачи 414.**

**423.** Предположим противное: число  $n$  делится ровно на вторую степень каждого своего простого делителя. Тогда  $n = k^2$ , где  $k$  — произведение всех простых делителей  $n$ .

Следовательно, достаточно доказать, что  $n$  не может являться точным квадратом.

Предположим противное:  $n = m^2$ , где  $m$  — натуральное. Если  $n$  четно, то  $n + 2$  также четно, и одно из них не делится на 4, что противоречит условию. Если  $n$  нечетно, то и  $m$  нечетно,  $m = 2k - 1$ . Тогда  $n + 1 = (2k - 1)^2 + 1 = 4(k^2 - k) + 2$  делится на 2, но не делится на 4, что опять противоречит условию.

424. Обозначим вписанную окружность треугольника  $ABC$  через  $\omega$ , ее центр — через  $I$ , точки касания  $\omega$  с  $AC$  и  $A_0C_0$  — через  $K$  и  $L$  соответственно. Тогда в треугольниках  $IKC$  и  $ILA_0$  углы  $\angle IKC$  и  $\angle ILA_0$  прямые (как углы между радиусом и касательной) и  $\angle IKC = \angle ILA_0$ , так как оба этих отрезка — радиусы  $\omega$  (рис. 178). Также, поскольку точки  $A, I, A_0$  лежат на биссектрисе угла  $A$ , а точки  $C, I, C_0$  — на биссектрисе угла  $C$ , то  $\angle ICK = \angle C_0CA = \angle C_0A_0A = \angle LA_0I$  (так как углы  $\angle C_0A_0A$  и  $\angle C_0CA$  опираются на одну дугу описанной окружности  $C_0A$ ). Поэтому прямоугольные треугольники  $IKC$  и  $ILA_0$  равны по катету и острому углу, следовательно,  $IA_0 = IC$ , т. е. треугольник  $IA_0C$  равнобедренный. Далее,  $\angle A_0IC = \frac{1}{2}(\angle A_0C_0 + \angle A_0C) = \frac{1}{2}(\angle C_0B + \angle A_0B) = \frac{1}{2}A_0BC_0 = \angle A_0CC_0 \Rightarrow \angle A_0IC = \angle A_0CI \Rightarrow A_0I = A_0C$ . Значит,  $\triangle A_0IC$  — равносторонний. Отсюда  $\angle ABC = \angle AA_0C = 60^\circ$ .

**Замечание.** Если рассмотреть произвольный треугольник  $ABC$ , в котором  $\angle B = 60^\circ$ , то для него отрезок  $A_0C_0$  касается  $\omega$ . Действительно, проведя все рассуждения в обратном порядке (приняв за  $L$  проекцию  $I$  на  $A_0C_0$ ), получаем равенство треугольников  $IKC$  и  $ILA_0$  по гипотенузе и острому углу, из которого следует, что  $IK = IL$ , поэтому  $L$  лежит на  $\omega$ , и, следовательно,  $A_0C_0$  касается  $\omega$ .

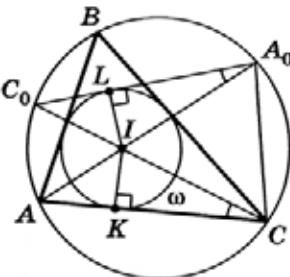


Рис. 178

## ▼ 10 класс

425. Ответ. Не существуют.

Предположим, что такие восемь чисел найдутся. Из условия следует, что ровно одно из них не делится на 2 и ровно два из них не делятся на 3. Значит, среди рассматриваемых чисел не менее пяти чисел делятся на 2 и на 3, т. е. делятся на 6. Но по условию чисел, делящихся на 6, должно быть ровно три. Противоречие.

**426.** Из неравенств в условии получаем, что многочлены  $(ax^2 + bx + c) - (bx^2 + cx + a)$  и  $(bx^2 + cx + a) - (cx^2 + ax + b)$  принимают неотрицательные значения при всех значениях  $x$ . Отсюда следует, что их старшие коэффициенты  $a - b$  и  $b - c$  неотрицательны, т. е.  $a \geq b \geq c$ .

С другой стороны, подставив в исходные неравенства  $x = 0$ , получаем  $c \geq a \geq b$ , откуда  $a \geq b \geq c \geq a$ , что возможно лишь в случае равенства всех коэффициентов.

**427.** Рассмотрим некоторую точку  $X$ , лежащую внутри  $\triangle ABC$ , для которой длины отрезков  $b_X$  и  $c_X$  равны. Обозначим через  $K, L, M, N$  концы отрезков  $b_X$  и  $c_X$  (рис. 179). Достроим  $\triangle KXM$  до параллелограмма  $KXMT$ . Пусть  $TK$  и  $AB$  пересекаются в точке  $P$ , а  $TM$  и  $AC$  — в точке  $Q$ . По построению  $APQT$  — параллелограмм, причем  $TP = MN = KL = TQ$ , т. е.  $APQT$  — ромб. Отсюда вытекает, что точка  $T$  лежит на биссектрисе  $AA_1$  угла  $BAC$ . Из подобий  $\triangle ABA_1 \sim \triangle TMA_1$  и  $\triangle ACA_1 \sim \triangle TKA_1$  следует:

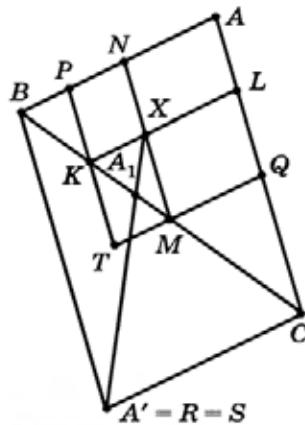
$$\frac{A_1K}{A_1C} = \frac{A_1T}{A_1A} = \frac{A_1M}{A_1B}.$$


Рис. 179

Проведем через точку  $B$  прямую, параллельную  $AC$ , до пересечения с прямой  $XA_1$  в точке  $R$ . Также проведем через точку  $C$  прямую, параллельную  $AB$ , до пересечения с прямой  $XA_1$  в точке  $S$ . Из подобий  $\triangle A_1MX \sim \triangle A_1BR$  и  $\triangle A_1KX \sim \triangle A_1CS$  вытекает, что  $\frac{A_1X}{A_1R} = \frac{A_1M}{A_1B} = \frac{A_1K}{A_1C} = \frac{A_1X}{A_1S}$ .

Отсюда  $A_1R = A_1S$ , значит, точки  $S$  и  $R$  совпадают с такой точкой  $A'$ , что  $ABA'C$  — параллелограмм. Получаем, что точка  $X$  лежит на фиксированной прямой  $A_1A'$ .

**428. Ответ.** Петя.

Заметим, что число  $A_n = \overbrace{1011\dots11}^n$  не делится на 11.

Действительно, если  $n$  четно, то  $A_n = \underbrace{1000\dots00}_{n+1 \text{ нулей}} + \underbrace{11\dots11}_n$ , а если  $n$  нечетно, то  $A_n = \underbrace{9000\dots00}_{n \text{ нулей}} + \underbrace{111\dots11}_{n+1 \text{ единиц}}$ . В обоих случаях второе слагаемое делится на 11, а первое нет.

Поскольку с каждым ходом число на доске уменьшается, рано или поздно один из игроков проиграет.

Предъявим беспрогрышную стратегию для Пети, действуя по которой он сможет после каждого своего хода получать число вида  $A_n$ . Первым ходом Петя заменит вторую слева единицу на ноль, а в дальнейшем он либо стирает ноль, появившийся на предыдущем ходе Васи (т. е. получает число вида  $A_m$ ), либо, если тот стер единственный ноль, опять заменяет вторую слева единицу на ноль. Если Петя не может сделать последнего действия, то перед ним число 11, т. е. Вася уже проиграл на предыдущем ходу.

**429. Ответ.** Последовательность ровно из 2007 семерок.

Последовательность ровно из 2007 семерок появится, например, при выписывании чисел  $N = \underbrace{777\dots 77}_{1004 \text{ семерки}}$

$N + 1 = \underbrace{777\dots 78}_{1003 \text{ семерки}}$ , так как числу  $N$  предшествует число

$N - 1$ , оканчивающееся на цифру 6.

Предположим, что последовательность  $p$  из 2006 подряд идущих шестерок встретилась раньше числа  $N$ . Подчеркнем в строке у каждого из чисел 1, 2, ...,  $N - 1$ ,  $N$  последнюю цифру. Между ближайшими подчеркнутыми цифрами не более 1003 цифр (так как  $N - 1004$ -значное число), поэтому в последовательности  $p$  есть подчеркнутая шестерка (т. е. последняя цифра некоторого числа  $M$ ), причем ровно одна, так как ближайшие к ней подчеркнутые цифры 5 и 7:  $\underbrace{\dots 5}_{M} \dots \underbrace{6}_{M+1} \dots \underbrace{7}_{\dots}$ . В числах  $M$  и  $M + 1$

соответствующие цифры, кроме последних, равны. Поэтому количество шестерок между 5 и 7 — нечетное число, не превосходящее  $2 \cdot 1003 + 1 = 2007$ , т. е. между 5 и 7 либо 2007 шестерок подряд, либо не более 2005 шестерок. Противоречие.

**430.** Продолжим отрезок  $TE$  до пересечения с прямой  $AC$  в точке  $K$  (рис. 180). Покажем, что отрезок  $EK$  — высота треугольника  $CEA$ . Пусть  $\angle CAB = \alpha$ . Из прямоугольного треугольника  $AEC$  получаем  $\angle ACE = 90^\circ - \alpha$ . Далее,  $\angle CDB = \angle CAB = \alpha$  (как вписанные, опирающиеся на одну дугу). С другой стороны,  $ET$  — медиана в прямоугольном треугольнике  $BED$ , поэтому  $ET = DT$  и  $\angle TED = \angle TDE = \alpha$ , и  $\angle KEC = \alpha$  (как вертикальный с углом  $TED$ ). Отсюда получаем  $\angle EKC = 180^\circ - \angle KEC - \angle KCE = 90^\circ$ .

Таким образом,  $TE \perp AC$  и  $ON \perp AC$  (так как  $N$  — середина  $AC$ ), откуда  $TE \parallel ON$ . Аналогично  $OT \parallel EN$ , что и требовалось.

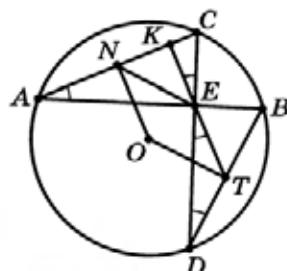


Рис. 180

**Замечание.** Утверждение задачи остается в силе и в том случае, если в точке  $E$  пересекаются не сами хорды  $AB$  и  $CD$ , а их продолжения. Доказательство в этом случае полностью аналогично изложенному.

**431. Ответ.** Нельзя.

Обозначим через  $q(n)$  такое наибольшее целое число  $k$ , что  $n$  делится на  $5^k$ . Для каждого  $n$  из начального набора чисел  $q(n) = 0$  или  $q(n) = 1 = 2^0$ . Заметим, что  $q(a^2) = 2q(a)$ , а  $q(\text{НОК}(a, b))$  равно  $q(a)$  или  $q(b)$ . Отсюда вытекает, что для чисел  $n$ , выписанных в любой момент на доске, число  $q(n)$  является целой степенью двойки или равно 0.

Число 1 000 000 не могло быть выписано, поскольку  $q(1\ 000\ 000) = 6$  не является ни нулем, ни степенью двойки.

**432. Лемма.** Пусть в множестве  $M$  городов отмечено ровно  $2k$  городов, а среди неотмеченных никакие два не соединены дорогой. Если в множестве  $M$  нет трех городов, попарно соединенных дорогами, то множество  $M$  можно разбить на  $(k + 1)$  округов так, чтобы любая дорога соединяла города из разных округов.

**Доказательство.** Применим индукцию по  $k$ . Если  $k = 1$ , то отмечены два города  $X$  и  $Y$ . Если между  $X$  и  $Y$  нет дороги, то отмеченные и неотмеченные города образуют нужные округа. Если  $X$  и  $Y$  соединены дорогой, то среди неотмеченных нет городов, соединенных с  $X$ , и с  $Y$ . Поэтому в первый округ можно включить все города, в которые из  $X$  ведет дорога (в том числе город  $Y$ ), а во второй округ — все остальные города.

Пусть  $k \geq 2$ . Среди отмеченных городов выделим округ из двух городов, не соединенных дорогой (такие найдутся). По предположению индукции оставшиеся  $2k - 2$  отмеченных города и все неотмеченные можно разбить на  $k$  округов нужным образом. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Отметим некоторые два города, соединенные дорогой. Далее, на очередном шаге среди еще не отмеченных выбираем два города, соединенные дорогой, и отмечаем их. Действуем так, пока это возможно.

В конце концов (после  $k$  шагов) получим  $2k$  отмеченных городов, и среди неотмеченных городов нет двух, соединенных дорогой. Из условия следует, что  $k \leq n - 1$ . По лемме все города можно разбить на  $k + 1 \leq n$  округов нужным образом.

## 11 класс

433. См. решение задачи 425.

434. См. решение задачи 426.

435. Обозначим через  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $D'$  середины боковых ребер  $SA$ ,  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$  пирамиды  $SABCD$  соответственно (рис. 181). Пусть для определенности ребра  $SB$ ,  $SC$  и  $SD$  *хорошие*, т. е.  $AB' = CB'$ ,  $BC' = DC'$ ,  $CD' = AD'$ . Геометрическое место точек, равноудаленных от  $A$  и  $C$ , — плоскость, перпендикулярная отрезку  $AC$  (и проходящая через его середину). Значит, точки  $B'$  и  $D'$  лежат в этой плоскости, поэтому  $B'D' \perp AC$ . Так как  $B'D'$  — средняя линия треугольника  $SBD$ , то  $BD \parallel B'D'$ , откуда  $BD \perp AC$ .

Так как  $A'C'$  — средняя линия треугольника  $SAC$ , то  $AC \parallel A'C'$ , откуда  $BD \perp A'C'$ , значит, точка  $A'$  лежит в плоскости, перпендикулярной  $BD$  и проходящей через точку  $C'$ . Так как  $BC' = DC'$ , то эта плоскость является геометрическим местом точек, равноудаленных от  $B$  и  $D$ . Отсюда  $BA' = DA'$ , т. е.  $SA$  — *хорошее* ребро.

436. Применим индукцию по  $n$ . При  $n \leq 50$  утверждение верно. Докажем утверждение для некоторого  $n \geq 51$ , предполагая, что оно верно для  $1, 2, \dots, n-1$ .

Для каждой пары городов  $X$ ,  $Y$  обозначим через  $p(X, Y)$  единственный путь от  $X$  до  $Y$ , в котором ни одна дорога не пройдена дважды. Зафиксируем город  $A$  (столицу) (рис. 182). Для каждого города  $C$  путь  $p(A, C)$  содержит  $A$ ,  $C$  и некоторое количество промежуточных городов (в частности,  $p(A, A)$  содержит только  $A$ ). Если город  $C$  входит в путь  $p(A, D)$ , то будем говорить, что  $D$  подчинен  $C$  (в частности,  $C$  подчинен самому себе, а все города подчинены  $A$ ). Если город  $D$  подчинен городу  $C$  и, кроме этого, имеется дорога из  $D$  в  $C$ , то скажем, что  $D$  — пригород  $C$ .

Среди всех городов, у которых не меньше 51 подчиненных (таков, например, город  $A$ ), рассмотрим город  $B$  с наименьшим количеством  $l$  подчиненных. Пусть  $B_1, B_2, \dots, B_l$  — все пригорода города  $B$ ; у города  $B_i$  подчиненных меньше, чем у города  $B$ , поэтому их не больше 50 (иначе получилось бы противоречие с выбором  $B$ ).

Сделаем город  $B$  закрытым. После этого из города  $X$ , подчиненного городу  $B_i$ , нельзя добраться до города  $Y$ , не

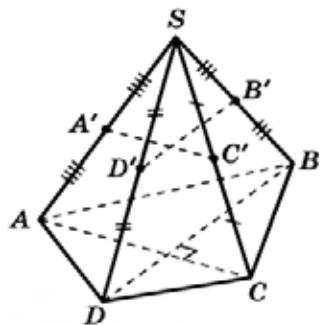


Рис. 181

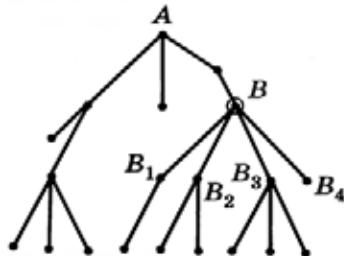


Рис. 182

подчиненного  $B_i$ , так как путь  $p(X, Y)$  проходит через город  $B$ . Если же города  $X$  и  $Y$  подчинены  $B_i$ , то путь  $p(X, Y)$  содержит только города, подчиненные  $B_i$ , и в нем не более 49 дорог. Далее, к множеству городов, не подчиненных  $B$  (таких городов не более  $n - 51$ , и любые два из них по-прежнему соединены путем), можно применить предположение индукции и закрыть не более  $\frac{n-51}{51}$  городов, чтобы выполнялось условие задачи. Итого закрыто не более  $\frac{n-51}{51} + 1 = \frac{n}{51}$  городов, и все условия выполнены.

**437.** Пусть  $a \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $b \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$  и  $a + b = \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $(\operatorname{tg} b)^{\sin b} = (\operatorname{ctg} a)^{\cos a}$ ,  $(\operatorname{ctg} b)^{\cos b} = (\operatorname{tg} a)^{\sin a}$ . Таким образом, если требуемое неравенство выполняется для  $x = a$ , то оно выполняется и для  $x = b$ ; поэтому достаточно доказать неравенство для  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ .

Если  $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ , то  $\operatorname{ctg} x \geq 1$ ,  $\cos x \geq \sin x$ , поэтому  $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geq (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\sin x} = (\operatorname{tg} x)^{\sin x} + \frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{\sin x}} = A + \frac{1}{A}$  для положительного  $A$ . Но  $A + \frac{1}{A} = \left(\sqrt{A} - \frac{1}{\sqrt{A}}\right)^2 + 2 \geq 2$ .

**438.** См. решение задачи 430.

**439. Ответ.** При  $n$ , делящихся на 3, выигрывает первый; при всех остальных  $n$  — второй.

Заметим, что после ходов первого и второго игроков количество закрашенных клеток увеличивается на 3. Поэтому после хода второго оно всегда кратно трем.

Пусть  $n$  не кратно трем. Тогда второй может ходить, как ему заблагорассудится. Предположим, что после очередного хода второго первый не может сделать ход. Тогда все клетки закрашены. Это противоречит тому, что количество закрашенных клеток кратно трем. Поэтому первый всегда сможет сделать ход, и выиграет второй.

Пусть  $n$  кратно трем. Приведем выигрышную стратегию для первого. Первым ходом он закрасит клетку, отстоящую на 3 от края; тогда полоска разбилась на не более чем два куска, один из которых имеет длину 2 (назовем такой кусок *домино*). Покажем, что первый сможет добиться выполнения следующего условия:

После хода первого, если полоска разбита на  $k$  кусков, то не менее  $\frac{k}{2}$  из них — домино. После хода второго, если полоска разбита на  $k$  кусков, то не менее  $\frac{k-1}{2}$  из них — домино.

В таком случае после любого хода первого останется хотя бы один кусок (так как до его хода количество клеток было кратно трем), а значит, останется хотя бы одно домино; поэтому второй всегда сможет сделать ход и проиграет.

Итак, пусть после очередного хода первого условие выполняется. Второй своим ходом либо закрашивает домино (тогда число кусков  $k$  уменьшается на 1), либо закрашивает 2 клетки в большем куске (тогда  $k$  увеличивается не более чем на 1). В любом случае условие выполнено.

Если еще остался кусок длины 3 или больше, то первый закрашивает в нем третью клетку от края; тогда количество домино увеличивается хотя бы на 1, а  $k$  — не больше чем на 1. Если остался кусок длины 1, то, закрасив его, первый просто уменьшает количество кусков. Наконец, если все куски — домино, то их хотя бы три, так как их суммарная длина делится на 3. Тогда после закрашивания первым произвольной клетки остается хотя бы три куска, из которых только один не домино. Таким образом, после хода первого условие опять же выполнено.

**440. Ответ.**  $x = y = z = t = 0$ .

**Первое решение.** Возведем в квадрат обе части равенства  $x + y = -(z + t)$ , получим  $x^2 + 2xy + y^2 = z^2 + 2zt + t^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - z^2 - t^2 = 2(zt - xy) \Rightarrow (x^2 + y^2 - z^2 - t^2)^2 = 4(zt - xy)^2$ .

Раскрыв скобки, получим из этого равенства  $4xyzt = A - \frac{B}{2}$ , где  $A = x^2y^2 + x^2z^2 + x^2t^2 + y^2z^2 + y^2t^2 + z^2t^2$ ,  $B = x^4 + y^4 + z^4 + t^4$ .

Обозначив  $N = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ , имеем  $2N = 2(x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt) = 2\left(B + \left(A - \frac{B}{2}\right)\right) = B + 2A = (x^2 + y^2 + z^2 + t^2)^2$ . Если  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \neq 0$ , то в разложение числа  $N$  на простые множители двойка входит в нечетной степени, значит,  $N$  не является квадратом. Итак,  $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$ , что приводит к решению  $x = y = z = t = 0$ .

**Второе решение.** Пусть четверка чисел, не все из которых равны нулю, удовлетворяет условию задачи. Если каждое из них четно, разделим все числа на 2, получим четверку чисел, удовлетворяющих условию. Продолжим деление на 2 до тех пор, пока одно из чисел не станет нечетным. Так как сумма чисел нечетна, то среди них либо два нечетных, либо все они нечетные.

Если среди чисел два нечетных, то  $N = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$  имеет остаток 2 при делении на 4 и поэтому не является точным квадратом.

Пусть все числа нечетны:  $x = 2a + 1$ ,  $y = 2b + 1$ ,  $z = 2c + 1$ ,  $t = 2d + 1$ , где  $a + b + c + d = -2$ . Покажем, что  $N = x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$  делится на 8, но не делится на 16. Отсюда будет следовать, что  $N$  не является точным квадратом. Запишем  $N = 16(a^4 + b^4 + c^4 + d^4) + 32(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) + + 24(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 8(a + b + c + d) + 4 + 4(4K + 2a + + 2b + 2c + 2d + 1)$ , где  $K$  — целое число. Далее, так как  $a + b + c + d = -2$ , то  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$  четно, откуда  $N = 16M + 8$ , где  $M$  — целое число.

**2007–2008**

## 8 класс

**441.** Ответ. 1 878 787.

Будем складывать числа  $A$  и  $B$  столбиком. Пронумеруем разряды справа налево. Так как последние цифры чисел  $A$  и  $B$  разной четности, то последняя цифра числа  $C$  нечетная. При этом из первого разряда обязан произойти перенос во второй разряд, иначе вторая с конца цифра в числе  $C$  также была бы нечетной. Аналогично из третьего и пятого разрядов также должен произойти перенос. Заметим, что ни в одном из этих разрядов в числе  $C$  девятка стоять не может, так как единственный способ получить одновременно и девятку, и перенос — это сложить две девятки и единицу, пришедшую из предыдущего разряда, однако в числе  $A$  нет девяток.

Если число  $C$  шестизначное, то оно не превосходит 999 999. Если же оно семизначное, то его седьмая (с конца) цифра может быть только единицей. Значит, цифры, стоящие у него на четных местах, — четные и не превышают 8, а на нечетных местах — нечетные, не большие 7. Таким образом, число  $C$  не может превышать 1 878 787. Это возможно, например, так:  $1\ 878\ 787 = 886\ 868 + 991\ 919$ .

**442.** Обозначим середину стороны  $AC$  через  $K$ , а точку пересечения  $KA_2$  с  $BC$  через  $P$  (рис. 183). В прямоугольном треугольнике  $AA_1C$  отрезок  $KP$  — средняя линия, так как он проходит через середину  $AC$  и параллелен  $AA_1$  (поскольку  $KP \perp BC$ ). Значит, прямоуголь-

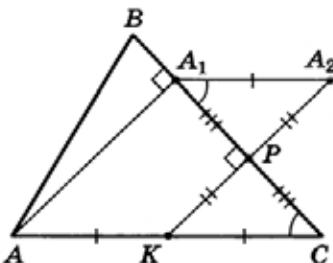


Рис. 183

ные треугольники  $PA_1A_2$  и  $PCK$  равны по двум катетам:  $A_1P = PC$  и  $KP = PA_2$ . Отсюда следует, что  $\angle PA_1A_2 = \angle PCK$ , т. е. отрезок  $A_1A_2$  параллелен стороне  $AC$ .

Аналогично доказывается, что  $C_1C_2 \parallel AC$ . Поэтому  $A_1A_2 \parallel AC \parallel C_1C_2$ .

**443. Ответ.** Не существуют.

**Первое решение.** Обозначим  $x = a(b - c)$ ,  $y = b(c - a)$ ,  $z = c(a - b)$ . Так как  $x + y + z = 0$ , то  $x = y = z = 0$ . Значит, либо разность хотя бы в одной из скобок равна 0, либо  $a = b = c = 0$ . В обоих случаях нашлись два равных числа.

**Второе решение.** Пусть для определенности  $ab \geq ac$ ,  $ab \geq bc$ . Раскрывая скобки в равенстве  $a(b - c) = b(c - a)$ , получаем  $2ab = ac + bc$ . Значит,  $ab = ac = bc$ . Если все три числа не нулевые, то немедленно получаем  $a = b = c$ . Иначе, если  $ab = ac = bc = 0$ , то хотя бы два из чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  должны быть нулями, т. е. должны быть равны.

**Замечание.** Легко видеть, что если  $a = b \neq 0$ , то  $a = b = c$ .

**444. Ответ.** 16 ладей.

**Первое решение.** Нетрудно проверить, что расстановка на рисунке 184 удовлетворяет условию. Допустим, существует такая расстановка, когда ладей меньше чем 16. Если на какой-либо горизонтали нет ни одной ладьи, то каждая из ее клеток может находиться под боем не более двух ладей. Следовательно, на одной из горизонталей (назовем ее  $H$ ) должна стоять ровно одна ладья (назовем ее  $r$ ). Рассмотрим любую из семи свободных клеток на  $H$ . Сверху и снизу от нее должно находиться по ладье, поэтому ладей хотя бы  $1 + 2 \cdot 7 = 15$ . Значит, их ровно 15, причем 7 из них стоят выше  $H$ , а другие 7 — ниже.

На вертикали, где стоит  $r$  (назовем ее  $V$ ), больше ладей нет. Поэтому, из аналогичных соображений, на любой горизонтали, кроме  $H$ , стоят ровно 2 ладьи: одна левее  $V$ , другая правее (если их больше двух, то всего ладей уже 16). Значит, сверху от  $H$  стоит четное число ладей, но мы знаем, что их 7. Противоречие.

**Второе решение.** Приведем другое доказательство того, что меньше 16 ладей быть не может. Предположим противное. Разрежем доску на 4 квадрата  $4 \times 4$ . В одном из них будет не более трех ладей — пусть для определенности это левый верхний квадрат. Тогда в этом квадрате найдут-

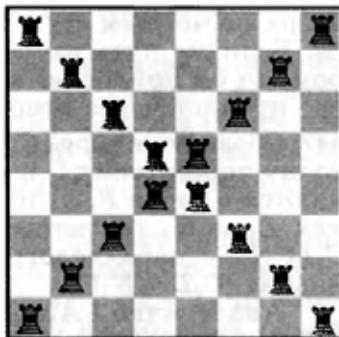


Рис. 184

ся пустая строка и пустой столбец. Рассмотрим клетку на их пересечении. Она пуста, и ее не могут быть ладьи слева и сверху, так как столбец и строка пусты. Противоречие.

**445. Ответ.** Третье по величине число —  $d$ .

Из условия следует, что  $a - b < 0$ ,  $b - c > 0$ . Поэтому  $(c - d)(d - a) > 0$ . Значит, либо  $c > d$  и  $d > a$ , либо  $c < d$  и  $d < a$ . В первом случае получаем  $b > c > d > a$ , во втором случае —  $b > a > d > c$ . В обоих случаях третье по величине число —  $d$ .

**Замечание.** В частности, мы показали, что при данных условиях все числа различны.

**446. Ответ.** Может.

Например, сумма будет отрицательной, если числа на ступеньках равны (снизу вверх) 1, 2, -2, 2, -2, ..., 2, -2, -2 (на всех четных ступеньках, кроме 2008-й, написано 2, а на всех нечетных, кроме первой, написано -2). Если путь начнется со ступеньки с четным номером, то он пойдет вверх по четным ступенькам до 2008-й, а далее зациклится. Если же путь начнется со ступеньки с нечетным номером, то он пойдет по нечетным ступенькам до первой, далее пройдет через вторую и все четные, вплоть до 2008-й.

**447.** Обозначим через  $C_1$  точку пересечения  $n_a$  и  $l_b$ , а через  $A_1$  точку пересечения  $l_b$  и  $m_c$ . Пусть прямые  $m_a$ ,  $n_b$  и  $l_c$  пересекаются в точке  $P$ , а сторона  $AC$  пересекается с  $l_c$  и  $n_a$  в точках  $L_1$  и  $N_1$  соответственно (рис. 185). Четырехугольник  $C_1LCN_1$  — параллелограмм, так как  $C_1N_1 \parallel LC$  и  $C_1L \parallel N_1C$ . Значит,  $C_1L = N_1C$ .

Аналогично  $LA_1ML_1$  — параллелограмм, откуда  $LA_1 = L_1M$ .

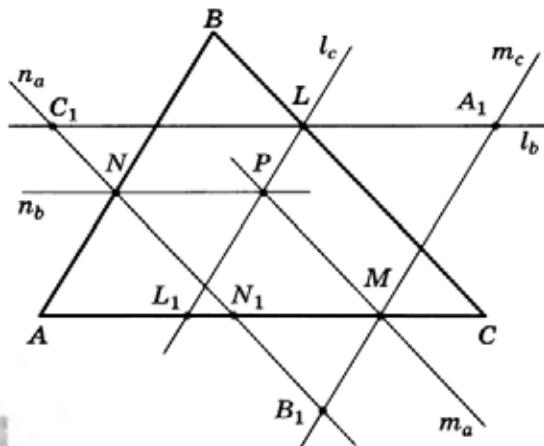


Рис. 185

Рассмотрим треугольники  $ANN_1$  и  $L_1PM$ . В них  $AN = L_1P$  (так как  $ANPL_1$  — параллелограмм), а из-за параллельности сторон имеем  $\angle ANN_1 = \angle L_1PM$  и  $\angle NAN_1 = \angle PL_1M$ . Тогда эти треугольники равны по стороне и двум прилежащим углам, и  $AN_1 = L_1M = LA_1$ .

Получаем  $C_1A_1 = C_1L + LA_1 = N_1C + AN_1 = AC$ . Теперь можно утверждать, что треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  равны по стороне и двум прилежащим углам.

**448. Ответ.** При  $n = 3k$  или  $n = 3k + 1$  выигрывает второй, а при  $n = 3k + 2$  — первый.

В каждом случае мы приведем одну из возможных выигрышных стратегий для игрока.

Назовем обведенную точку *непарной*, если противоположная ей не обведена. Ясно, что после каждого хода количество непарных точек либо уменьшается на 1 (если игрок обвел точку, противоположную непарной), либо увеличивается на 1 (в противном случае). В каждом случае выигрышная стратегия будет заключаться в уменьшении числа непарных точек.

1. Приведем стратегию второго, позволяющую ему выиграть при  $n = 3k$  или  $n = 3k + 1$ . После хода первого число непарных точек нечетно, поэтому каждым своим ходом второй может уменьшить это число на 1. Тогда после каждого хода первого это число будет равно 1, а после хода второго — 0.

Покажем, что тогда второй всегда сможет сделать такой ход. Если первый уже сделал  $d$  ходов, то обведено  $6d - 3$  точек, но так как  $2n = 6k$  или  $2n = 6k + 2$ , то осталось хотя бы три необведенные точки, из которых ровно одна непарная. Значит, еще осталась пара необведенных противоположных точек и второй всегда сможет сделать требуемый ход, а значит, выигрывает.

2. Теперь приведем стратегию первого, позволяющую ему выиграть, если  $n = 3k + 2$ . Если после хода второго остались непарные точки, то первый уменьшает их число на 1, в противном случае он создает единственную непарную точку. Тогда нетрудно увидеть, что после каждого хода второго остается 0 или 2 непарные точки, а после каждого хода первого — ровно одна.

Покажем, что первый всегда сможет сделать такой ход. Если второй сделал  $d$  ходов, то обведено  $6d$  точек, а значит, осталось хотя бы 4 необведенные точки. При этом максимум 2 из них непарные, поэтому осталась пара необведенных противоположных точек и еще хотя бы одна необведенная, кроме них. Это значит, что первый всегда сможет сделать ход и выигрывает.

**449. Ответ.** Не могут.

Предположим, что это возможно и числа указанным образом разбиты на 33 тройки. Хотя бы в одной из троек присутствует число, делящееся на 9, поэтому сумма цифр хотя бы одного произведения (а значит, и всех произведений) делится на 9. Поэтому произведение чисел в любой тройке делится на 9, а следовательно, и на 3. Но среди 99 последовательных натуральных чисел ровно 33 числа, делящихся на 3, поэтому в каждой тройке ровно одно такое число. Однако при этом 22 из них не делятся на 9, значит, и произведения в соответствующих тройках не делятся на 9. Противоречие.

**Замечание.** См. также решение задачи 457.

**450. Первое решение.** Первое равенство преобразуется к виду  $c(a^2 - b^2) + ab(a - b) - (a^3 - b^3) = 0$ , или  $(a - b)(c(a + b) - a^2 - b^2) = 0$ , откуда либо  $a = b$ , либо  $c(a + b) - a^2 - b^2 = 0$ . В первом случае из второго равенства задачи получаем  $a^2 + c^2 = 2ac$ ,  $(a - c)^2 = 0$ ,  $a = c$ . Значит, без ограничения общности можно рассматривать лишь второй случай:  $c(a + b) = a^2 + b^2$ . Аналогично можно считать, что  $a(b + c) = b^2 + c^2$ ,  $b(c + a) = c^2 + a^2$ . Сложив последние три равенства, получаем  $2ab + 2bc + 2ca = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2$ , или  $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 = 0$ , откуда опять же  $a = b = c$ . Утверждение задачи доказано.

**Второе решение.** Пусть  $|c| \leq |a|$ ,  $|c| \leq |b|$ . Как и выше, получаем равенство  $c(a + b) = a^2 + b^2$ . Имеем  $a^2 + b^2 = c(a + b) = ca + cb \leq |ca| + |cb| \leq a^2 + b^2$ . Отсюда  $ca = a^2$ ,  $cb = b^2$ , или  $c = a$ ,  $c = b$ , что и требовалось доказать.

**Замечание.** Школьники, знающие формулы Виета для уравнения третьей степени, могут решить эту задачу практически без вычислений. Достаточно доказать, что среди чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  есть равные. Предположим противное. Тогда  $a$ ,  $b$ ,  $c$  — корни некоторого уравнения  $x^2(s - 2x) = t$ , где  $s = a + b + c$ . По формулам Виета  $a + b + c = \frac{s}{2}$ , значит,  $s = \frac{2}{2} = 2$ ,  $s = 0$ , и  $-2a^3 = -2b^3 = -2c^3$ .

Отсюда  $a = b = c$ . Противоречие.

**451. Ответ.** 2.

Обозначим через  $O$  центр окружности, вписанной в трапецию (рис. 186). Так как  $CO$  — биссектриса угла  $BCD$ , то  $\angle BCO = \frac{1}{2} \angle BCD = \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC$ , откуда  $CO \parallel AB$ .

Рассмотрим прямую  $MN$ , симметричную прямой  $AB$  относительно центра  $O$  ( $M$  и  $N$  — точки на прямых  $BC$  и  $AD$  соответственно). Она касается окружности и параллельна  $AB$ .

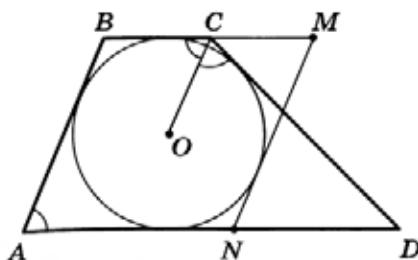


Рис. 186

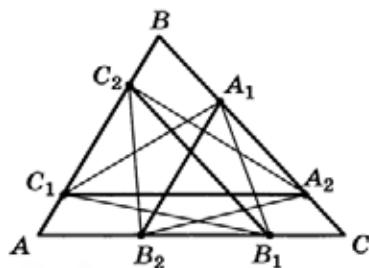


Рис. 187

Прямая  $CO$  равноудалена от сторон  $AB$  и  $MN$  параллелограмма  $ABMN$ , откуда  $BC = CM = \frac{BM}{2}$ . Параллелограмм  $ABMN$  является ромбом, так как описан около окружности, поэтому  $AB = BM$ , и, значит,  $\frac{AB}{BC} = \frac{BM}{BC} = 2$ .

**452.** См. решение задачи 444.

**453. Ответ.** 48 пассажиров.

Пусть  $k$  — число пассажиров, у которых в билете есть цифра 7. Тогда число всех пассажиров равно  $12k$ . Заметим, что среди любых десяти подряд идущих номеров есть один, содержащий семерку на конце. Значит,  $12k < 10(k+1)$ , откуда  $2k < 10$ ,  $k < 5$ . При  $k = 4$  искомый набор номеров существует, например 100 008, 100 009, 100 010, ..., 100 055.

**454.** См. решение задачи 446.

**455.** Для решения будем использовать два очевидных факта.

1. Если точка  $M$  лежит на отрезке  $PQ$  и  $\frac{PM}{PQ} = x$ , то  $\frac{QM}{PQ} = 1 - x$ .

2. Если точки  $A_1$  и  $C_1$  лежат соответственно на отрезках  $BC$  и  $AB$ , то  $S_{A_1BC_1} = \frac{BA_1}{BA} \cdot \frac{BC_1}{BC} \cdot S_{ABC}$ .

Обозначим  $x = \frac{BA_1}{BC} = \frac{AB_2}{AC}$ ,  $y = \frac{CB_1}{CA} = \frac{BC_2}{BA}$ ,  $z = \frac{AC_1}{AB} = \frac{CA_2}{CB}$  (рис. 187). Тогда  $S_{A_1BC_1} = x(1-z)S$ ,  $S_{C_1AB_1} = z(1-y)S$ ,  $S_{B_1CA_1} = y(1-x)S$ , где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ . Значит,  $S_{A_1B_1C_1} = S - S_{A_1BC_1} - S_{C_1AB_1} - S_{B_1CA_1} = S(1 - x - y - z + xy + yz + zx)$ .

Находя аналогичным образом  $S_{A_2B_2C_2}$ , приходим к тому же выражению через  $S$  и  $x, y, z$ .

**456. Ответ.** При всех.

Покажем, что можно некоторые числа домножить на  $1 = 2^0$ , а остальные — на  $2 = 2^1$  так, чтобы сумма стала степенью двойки.

Сумма всех чисел до домножения равна  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ . Пусть  $k$  — максимальное число, такое, что  $2^k < \frac{n(n+1)}{2}$ . Тогда  $2^{k+1} \geq \frac{n(n+1)}{2} > 2^k$ , поэтому  $A = 2^{k+1} - \frac{n(n+1)}{2} < 2^k < \frac{n(n+1)}{2}$ . Покажем, что можно выбрать несколько чисел из  $1, 2, \dots, n$  так, чтобы их сумма была равна  $A$ . Тогда, удвоив эти числа, мы увеличим сумму всех чисел на  $A$ , и она станет равна  $\frac{n(n+1)}{2} + A = 2^{k+1}$ , что и требовалось.

Пусть  $d$  — максимальное число, такое, что  $\frac{d(d-1)}{2} \leq A$ . Тогда  $d \leq n$ , так как  $A < \frac{n(n+1)}{2}$ . Далее,  $\frac{d(d-1)}{2} \leq A < \frac{d(d+1)}{2}$ , поэтому  $0 < B = \frac{d(d+1)}{2} - A \leq \frac{d(d+1)}{2} - \frac{d(d-1)}{2} = d$ . Таким образом,  $A = \frac{d(d+1)}{2} - B = (1 + 2 + \dots + d) - B$ , т. е.  $A$  есть сумма всех чисел от 1 до  $d$ , кроме  $B$ , что и требовалось.

## ▼ 10 класс

**457. Ответ.** Не могут.

Предположим, что это возможно и числа указанным образом разбиты на 18 четверок. Хотя бы в одной из четверок присутствует число, делящееся на 9, поэтому сумма цифр хотя бы одного произведения (а значит, и всех произведений) делится на 9.

Поэтому произведение чисел в любой четверке делится на 9. Тогда в каждой четверке либо найдется число, делящееся на 9 (четверки 1-го типа), либо найдутся два числа, делящиеся на 3, но не делящиеся на 9 (четверки 2-го типа). Среди 72 последовательных натуральных чисел ровно 8 чисел, делящихся на 9, и ровно 16 чисел, делящихся на 3, но не делящихся на 9. Следовательно, имеется не более 8 четверок 1-го типа и не более 8 четверок 2-го типа, однако всего четверок  $18 > 8 + 8$ . Противоречие.

**458. Ответ.**  $n = 199$ .

Пусть  $a$  точек помечены числом 1,  $b$  точек помечены числом 2 и  $c$  точек помечены числом 3. Тогда количества отрезков, помеченных числами 1, 2, 3, равны соответственно  $bc$ ,  $ca$  и  $ab$ . Получаем равенства  $n = a + bc = b + ca = c + ab$ . Отсюда  $(a + bc) - (b + ca) = (a - b)(1 - c) = 0$ . Аналогично  $(b - c)(1 - a) = (c - a)(1 - b) = 0$ .

Пусть среди чисел  $a, b, c$  нет двух чисел, равных 1. Тогда получаем, что  $a = b = c$ . Это невозможно, так как 200 не делится на 3. Если же два из чисел  $a, b, c$  равны 1, то третье равно 198. В этом случае равенства выполнены, и  $n = 199$ .

**459.** Так как  $AB$  и  $AC$  — диаметры окружностей  $\omega$  и  $\omega_1$ , то  $\angle AEC = \angle ADB = 90^\circ$ . Центр  $O$  окружности  $\omega_2$  является серединой отрезка  $BC$ . Пусть  $K$  — основание перпендикуляра, опущенного из  $O$  на  $AD$  (рис. 188), тогда точка  $K$  является серединой хорды  $MN$ . С другой стороны,  $CE \parallel OK \parallel BD$ , и по теореме Фалеса  $K$  является серединой отрезка  $DE$ . Итак, отрезки  $MN$  и  $DE$  имеют общую середину, откуда следует утверждение задачи.

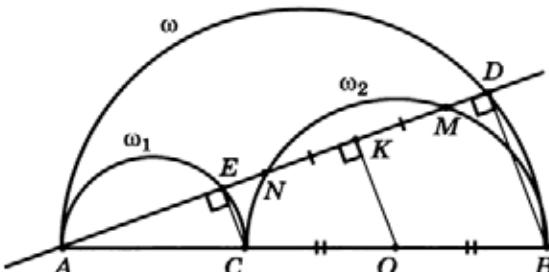


Рис. 188

**460. Ответ.**  $a = 116$ .

Пусть  $x_0 = 2,008\dots$  — корень нашего уравнения. Обозначим  $\varepsilon = x_0 - 2 = 0,008\dots$ . Тогда  $0 = x_0^2 - ax_0 + b = (2 + \varepsilon)^2 - a(2 + \varepsilon) + b = (4 - 2a + b) + (4 - a)\varepsilon + \varepsilon^2$ , поэтому число  $t = (4 - a)\varepsilon + \varepsilon^2$  является целым. Ясно, что  $t < 4\varepsilon < 0,04 < 1$ . Далее, если  $t = 0$ , то  $(4 - a) + \varepsilon = 0$ , что невозможно, так как  $\varepsilon$  нецелое. Поэтому  $t \leq -1$ , откуда  $(4 - a)\varepsilon < -1$  и  $a - 4 > \frac{1}{\varepsilon} > \frac{1}{0,009} > 111$ . Следовательно,  $a \geq 116$ .

Покажем, что значение  $a = 116$  возможно. Рассмотрим уравнение  $x^2 - 116x + 229 = 0$ . Оно переписывается в виде  $f(x) = (x - 2)^2 - 112(x - 2) + 1 = 0$ . Заметим, что  $f\left(2 + \frac{1}{112}\right) = \left(\frac{1}{112}\right)^2 > 0$ , а  $f(2,009) = 0,009^2 - 0,008 < 0$ . Значит, у этого уравнения есть корень  $x_0 \in \left(2 + \frac{1}{112}; 2,009\right)$ . Поскольку  $\frac{1}{112} = 0,008\dots$ , получаем  $2,008 < x_0 < 2,009$ , что и требовалось.

**Замечание.** Можно доказать, что уравнение  $x^2 - 116x + 229 = 0$  — единственное уравнение с  $a = 116$  и корнем вида 2,008...

461. См. решение задачи 453.

462. Докажем утверждение задачи индукцией по  $a$ . База очевидна:  $1^n - 1 \vdots n$ .

Пусть утверждение справедливо при некотором  $a = k$ , т. е.  $k^n - k \vdots n$ . Полагая  $a = k$ ,  $b = 1$  в выражении  $(a+b)^n - a^n - b^n$ , видим, что  $(k+1)^n - k^n - 1 \vdots n$ . Получаем

$$(k^n - k) + ((k+1)^n - k^n - 1) = (k+1)^n - (k+1) \vdots n.$$

Таким образом, утверждение верно и при  $a = k+1$ . Переход доказан.

**Замечание.** Нетрудно доказать, что утверждение, обратное утверждению задачи, также верно.

По малой теореме Ферма  $a^n - a \vdots n$  при любых целом  $a$  и простом  $n$ . Однако существуют и составные числа  $n$ , для которых  $a^n - a \vdots n$  при любом целом  $a$  (они называются числами Кармайклы); наименьшее из них равно 561. В 1994 г. было доказано, что чисел Кармайклы существует бесконечно много.

**463. Первое решение.** По построению точки  $M$  и  $N$  лежат на окружности  $\omega$  с диаметром  $BQ$  (рис. 189). Из симметрии относительно биссектрисы  $AI$  угла  $BAC$  следует, что  $\angle API = \angle AMI$ . Аналогично  $\angle CPI = \angle CNI$ , откуда  $\angle API = \angle BNI$ . Таким образом,  $\angle AMI = \angle BNI$ , следовательно, четырехугольник  $BMIN$  вписанный. Итак, точка  $I$  также лежит на окружности  $\omega$ , поэтому  $\angle QIB = 90^\circ$ .

**Второе решение.** Пусть прямые  $QM$  и  $QN$  пересекают биссектрису  $BI$  угла  $ABC$  в точках  $K$  и  $L$  соответственно (рис. 190).  $\angle KLQ = \angle BLN = 90^\circ - \angle IBC = 90^\circ - \angle IBA = \angle BKM = \angle LKQ$ , поэтому  $\triangle KLQ$  — равнобедренный ( $KQ = LQ$ ).

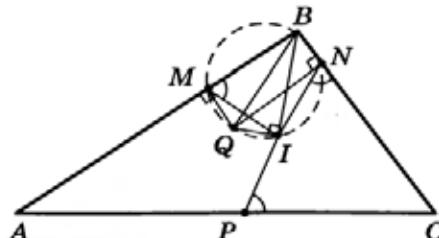


Рис. 189

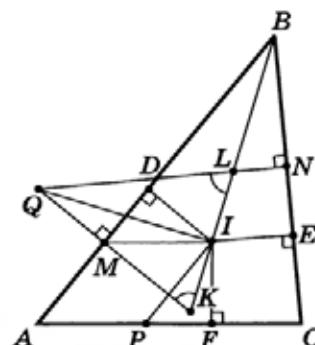


Рис. 190

Пусть  $D, E, F$  — проекции  $I$  на стороны  $AB, BC, CA$  соответственно. Имеем  $AD - AM = AF - AP = CP - CF = CN - CE$ , поэтому  $DM = EN$ . Далее,  $IK = \frac{DM}{\cos \angle IBA} = \frac{EN}{\cos \angle IBC} = IL$ , значит,  $QI$  — медиана равнобедренного треугольника  $KLQ$ . Следовательно,  $QI \perp KL$ , что и требовалось доказать.

#### 464. Ответ. Не может.

Пусть ладья обошла доску требуемым образом. Занумеруем клетки числами  $1, 2, \dots, 100$  в порядке посещения их ладьей. Раскрасим доску в два цвета (рис. 191), при такой раскраске на доске 52 черные клетки и 48 белых. Заметим, что ладья, делая ход длиной в две клетки, меняет цвет клетки. Если первый ход ладьи был длиной в две клетки, то в каждой из 50 пар  $(1, 2), (3, 4), (5, 6), \dots, (99, 100)$  клетки разных цветов. Если же первый ход ладьи был длиной в одну клетку, то в каждой из 49 пар  $(2, 3), (4, 5), (6, 7), \dots, (98, 99)$  клетки разных цветов. В любом случае получаем, что белых клеток не менее 49 — противоречие.

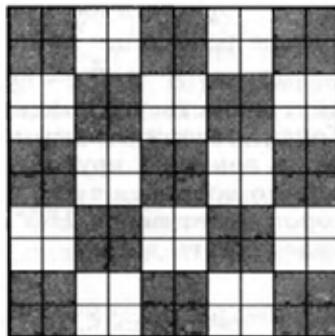


Рис. 191

## 11 класс

465. Покажем, что  $n = k + 1$ . Если  $n \geq k + 2$ , то  $\frac{n!}{k!}$  — это произведение двух или более последовательных натуральных чисел, причем ни одно из них не должно делиться на 5 (так как их произведение оканчивается на 8, т. е. не делится на 5). Заметим, что последняя цифра произведения зависит только от последних цифр сомножителей.

Покажем полным перебором, что это произведение не может оканчиваться на 8. Действительно, произведение двух последовательных чисел может оканчиваться на 2 ( $1 \cdot 2, 3 \cdot 4, 6 \cdot 7, 8 \cdot 9$ ) или на 6 ( $2 \cdot 3, 7 \cdot 8$ ), произведение трех последовательных чисел может оканчиваться на 6 ( $1 \cdot 2 \cdot 3, 6 \cdot 7 \cdot 8$ ) или на 4 ( $2 \cdot 3 \cdot 4, 7 \cdot 8 \cdot 9$ ), а произведение четырех последовательных чисел может оканчиваться только на 4 ( $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4, 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$ ).

Итак,  $n = k + 1$ , и тогда  $\frac{n!}{k!} = n$ , поэтому  $n$  оканчивается на 2008.

466. См. решение задачи 459.

**467.** Пусть  $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$  — данные векторы. Покажем, что их можно разбить на две группы так, что длины сумм векторов в группах будут различаться не более чем на 1.

Пусть  $\vec{S} = \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_n$ ,  $\vec{S}_k = \vec{a}_1 + \dots + \vec{a}_k$ ,  $\vec{T}_k = \vec{S} - \vec{S}_k = \vec{a}_{k+1} + \dots + \vec{a}_n$ . Обозначим  $s_k = |\vec{S}_k|$ ,  $t_k = |\vec{T}_k|$ . Ясно, что  $s_0 = 0 \leq |\vec{S}| = t_0$ , но  $s_n = |\vec{S}| \geq 0 = t_n$ . Значит, найдется такое  $k$ , что  $s_k \leq t_k$ , но  $s_{k+1} \geq t_{k+1}$ .

Заметим, что  $|s_{k+1} - s_k|$  и  $|t_{k+1} - t_k|$  не превосходят  $|\vec{a}_{k+1}| \leq 1$ . Значит,  $(t_k - s_k) + (s_{k+1} - t_{k+1}) \leq 2$ , т. е. либо  $1 \geq t_k - s_k \geq 0$ , либо  $1 \geq s_{k+1} - t_{k+1} \geq 0$ . В любом случае требуемое разбиение найдено.

Пусть  $\vec{S}'$  и  $\vec{T}'$  — суммы векторов в полученных группах, и пусть угол между этими суммами равен  $180^\circ - 2\alpha$ . Тогда, повернув векторы одной из групп по часовой стрелке, а векторы другой против часовой стрелки на угол  $\alpha$ , можно добиться того, что угол между суммами новых векторов будет равен  $180^\circ$ . Тогда сумма полученных векторов будет иметь длину

$$\|\vec{S}'\| - \|\vec{T}'\| \leq 1,$$

что и требовалось.

**468. Ответ.**  $-1$ .

Пусть  $a > 1$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = \sin x - (ax + b)$ ; у нее по условию  $m$  корней. Тогда  $f'(x) = \cos x - a < 0$  при любом  $x$ . Следовательно, функция  $f(x)$  монотонна и потому имеет не больше одного корня. В то же время, подставляя  $x_{1,2} = \frac{-b \pm 1}{a}$ , получаем, что в этих точках функция  $f(x)$  принимает значения разных знаков  $f(x_{1,2}) = \sin x_{1,2} \pm 1$ . Значит, она имеет корень, откуда  $m = 1$ .

Аналогично если  $a < 1$ , то функция  $g(x) = x - (a \cos x + b)$  монотонна, поэтому число ее корней  $n$  не превосходит 1. С другой стороны, при  $x_{1,2} = b \pm a$  функция принимает значения разных знаков  $g(x_{1,2}) = a(\pm 1 - \cos x_{1,2})$ , поэтому  $n \geq 1$ . Значит, в этом случае  $n = 1$ .

Итак, мы получили, что при любом значении  $a$  либо  $m = 1$ , либо  $n = 1$ . Следовательно, требуемое значение равно  $mn - m - n = (m - 1)(n - 1) - 1 = 0 - 1 = -1$ .

**Замечание.** Если  $a = 1$ , то обе функции также монотонны и  $m = n = 1$ . Но этот факт требует чуть более тщательного обоснования.

**469.** Складывая неравенства системы, получаем  $(a + b + c)x^2 < (a + b + c)(x + 1)$ , т. е.  $(a + b + c)(x^2 - x - 1) < 0$ , откуда  $x^2 - x - 1 < 0$ . Это неравенство имеет только два целочисленных решения 0 и 1. Значит, исходная система всегда

имеет не более двух целочисленных решений, и этими решениями могут быть только числа 0 и 1. Подставляя их в систему, получаем

- 1) из  $x = 0$ :  $0 < c, 0 < b, 0 < a$ ;
- 2) из  $x = 1$ :  $a < b + c, b < a + c, c < a + b$ , что выполнено для сторон треугольника.

Обратно, если  $a, b, c$  — длины сторон некоторого треугольника, то, как легко проверить, числа  $x = 0$  и  $x = 1$  являются решениями системы.

Утверждение доказано.

**470. Ответ.**  $n = 2, k = 1$  и  $n = 3, k = 1$ .

Если  $n = 2$  или  $n = 3$ , то, очевидно,  $k = 1$ . Пусть  $n > 3$ . Разделим обе части равенства  $(n - 1)! = n^k - 1$  на  $n - 1$ :  $(n - 2)! = n^{k-1} + \dots + 1$ . Поскольку  $n - 2 > 1$ , левая часть четна. Если  $n$  нечетно, то справа стоит сумма  $k$  нечетных слагаемых; так как  $k$  нечетно, то нечетна и их сумма. При четном  $n$  нечетность такой суммы очевидна (впрочем, из условия сразу следует, что  $n$  нечетно при  $n > 2$ ). Таким образом, при  $n > 3$  левая и правая части последнего равенства имеют разную четность, следовательно, в этом случае решений нет.

**Замечание.** Как показывает пример  $n = 5, k = 2$ , при четных значениях  $k$  решения тоже возможны.

**471.** Пусть  $O$  — центр сферы  $S$ , а  $T$  и  $T_1$  — центры окружностей, описанных около треугольников  $KLM$  и  $K_1L_1M_1$  (рис. 192). Тогда  $OT \perp (KLM)$ ,  $OT_1 \perp (K_1L_1M_1)$ , поэтому точки  $O, T$  и  $T_1$  лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскостям  $(KLM)$  и  $(K_1L_1M_1)$ .

В пирамидах  $AKLM$  и  $C_1K_1L_1M_1$  соответствующие грани параллельны, но эти пирамиды не равны. Значит, существует гомотетия, переводящая одну из этих пирамид в другую. Обозначим центр этой гомотетии через  $F$ . Заметим, что

$OK = OK_1$ , а  $\frac{FK}{FK_1} = \frac{KL}{K_1L_1} \neq 1$ , т. е. точки  $O$  и  $F$  различны. Так

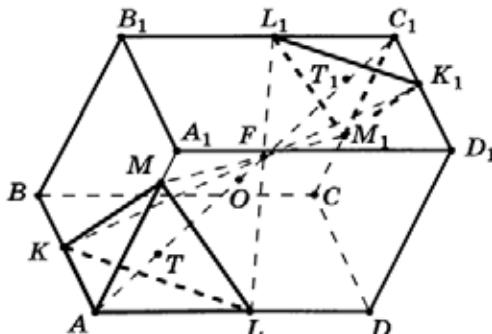


Рис. 192

как точки  $A$  и  $T$  при гомотетии переходят соответственно в  $C_1$  и  $T_1$ , то  $F$  лежит на прямых  $AC_1$  и  $TT_1$ . Но точка  $O$  также лежит на этих прямых, значит, прямые  $AC_1$  и  $TT_1$  совпадают, и  $AT \perp (KLM)$ .

Поскольку  $T$  — центр окружности, описанной около треугольника  $KLM$ , имеем  $TK = TL = TM$ , и прямоугольные треугольники  $ATK$ ,  $ATL$  и  $ATM$  равны по двум катетам. Поэтому  $\angle TAK = \angle TAL = \angle TAM$ , что и требовалось доказать.

**472. Ответ.** 6 цветов.

Будем называть двухклеточные прямоугольники, на которые разбита доска, *доминошками*. Рассмотрим разбиение, показанное на рисунке 193. В отмеченном фрагменте любые две доминошки содержат клетки, отстоящие на ход коня. Следовательно, чтобы наверняка раскрасить доску требуемым образом, потребуется не меньше шести цветов.

Докажем, что это количество является достаточным. Начнем с раскраски вертикальных доминошек. Пронумеруем все вертикали доски по порядку и разобьем их на 3 группы по остаткам от деления номеров на 3. Тогда все доминошки, находящиеся на вертикалях одной группы, можно раскрасить в один цвет. Действительно, если две клетки отстоят на ход коня, то они находятся либо на соседних вертикалях, либо через одну вертикаль. Поэтому при такой раскраске никакие две клетки, раскрашенные в один цвет, не будут отстоять на ход коня. Раскрасив аналогичным образом горизонтальные доминошки в 3 других цвета, мы используем в общей сложности 6 цветов и получим требуемую раскраску.

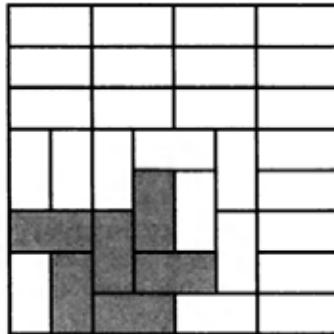


Рис. 193

# **Содержание**

Предисловие . . . . .	3
-----------------------	---

## **УСЛОВИЯ ЗАДАЧ**

1993—1994 . . . . .	4
1994—1995 . . . . .	7
1995—1996 . . . . .	10
1996—1997 . . . . .	15
1997—1998 . . . . .	19
1998—1999 . . . . .	23
1999—2000 . . . . .	27
2000—2001 . . . . .	31
2001—2002 . . . . .	35
2002—2003 . . . . .	39
2003—2004 . . . . .	44
2004—2005 . . . . .	48
2005—2006 . . . . .	53
2006—2007 . . . . .	57
2007—2008 . . . . .	61

## **РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ**

1993—1994 . . . . .	66
1994—1995 . . . . .	73
1995—1996 . . . . .	82
1996—1997 . . . . .	97
1997—1998 . . . . .	107
1998—1999 . . . . .	117
1999—2000 . . . . .	127
2000—2001 . . . . .	138
2001—2002 . . . . .	153
2002—2003 . . . . .	162
2003—2004 . . . . .	175
2004—2005 . . . . .	189
2005—2006 . . . . .	201
2006—2007 . . . . .	214
2007—2008 . . . . .	226

**Учебное издание**

**Серия «Пять колец»**

**Агаханов Назар Хангельдыевич**

**Богданов Илья Игоревич**

**Кожевников Павел Александрович и др.**

**МАТЕМАТИКА  
Областные олимпиады  
8—11 классы**

**Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова**

**Редактор Т. Г. Войлокова**

**Младшие редакторы Е. А. Андреенкова, Е. В. Троицко**

**Художники О. П. Богомолова, Т. Н. Самсонова**

**Художественный редактор О. П. Богомолова**

**Компьютерная графика О. Ю. Тупикиной, Е. В. Бугаевой**

**Технический редактор и верстальщик А. Г. Хуторовская**

**Корректоры А. К. Райхчин, Л. С. Александрова**

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 04.09.09. Формат 60×90<sup>1</sup>/16. Бумага писчая. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 13,74. Тираж 3000 экз. Заказ № 23485 (к-сы).

**Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».  
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.**

**Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат».  
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.**