пять колец

Н. Х. Агаханов П. А. Кожевников Д. А. Терешин

МАТЕМАТИКА

МЕЖДУНАРОДНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

ПЯТЬ КОЛЕЦ

Н. Х. Агаханов П. А. Кожевников Д. А. Терешин

МАТЕМАТИКА
МЕЖДУНАРОДНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
А23

Серия «Пять колец» основана в 2007 г.

Руководители проекта серии «Пять колец»
С. И. Демидова, И. И. Колисниченко

Агаханов Н. Х.
А23 Математика. Международные олимпиады / Н. Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. — М. : Просвещение, 2010. — 127 с. : ил. — (Пять колец). — ISBN 978-5-09-019788-5.

Книга содержит описание истории Международных математических олимпиад, особенности их проведения и результаты выступления команды России за 1992—2008 гг. В книге приведены задания олимпиад (1997—2008 гг.), а также ответы, решения и указания ко всем заданиям. Материал книги окажет помощь при подготовке учащихся к математическим соревнованиям высокого уровня.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-09-019788-5

ВВЕДЕНИЕ

Развитие международного сотрудничества в различных областях, начавшееся во второй половине XX в., а также широкое распространение в послевоенный период в ряде стран математических олимпиад привели к идее проведения международных соревнований школьников по математике, а затем и по другим дисциплинам естественно-математического цикла. Летом 1959 г. по инициативе Румынского математического и физического общества была проведена I Международная математическая олимпиада (ММО). С тех пор стало традицией ежегодно летом проводить Международную математическую олимпиаду школьников. Олимпиада непрерывно развивается, и участие в ней в последние годы принимают большинство стран Европы, Азии, Америки, Австралии и Океании, а также некоторые африканские страны. Победа в олимпиаде очень почетна, а на право ее проведения ежегодно претендует несколько стран-кандидатов. Награды победителям вручают президенты и члены царствующих домов, руководители правительств тех государств, в которых проходит Международная олимпиада.

Россия включилась в международное олимпиадное движение сразу после распада СССР и принимала участие во всех Международных математических олимпиадах начиная с 1992 г. В книге приведены результаты выступлений российских школьников на ММО, тексты заданий и их решения.

Каждая задача олимпиады нередко имеет несколько принципиально различных решений. Решения задач в этой книге зачастую основаны на идеях, приведенных российскими участниками ММО в их работах.

Перед текстом каждой задачи указана страна, предложившая данную задачу на ММО.

Для того чтобы читатели могли получить более полное представление о Международной математической олимпиаде, в книгу включены сведения о порядке проведения ММО, о формировании команды России, а также результаты выступлений ведущих команд за 1992—2008 гг.

Порядок проведения олимпиады

Претерпев некоторые изменения в период становления, Международная математическая олимпиада проходит по единому регламенту на протяжении многих последних лет.

Олимпиада проводится в два дня (два тура), в каждом школьники решают в течение 4,5 ч по три задачи. Несмотря на их различную сложность, правильное решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. Победители олимпиады определяются по сумме всех набранных за два тура баллов по следующим принципам: медалями награждаются не более половины всех участников олимпиады, медали среди победителей распределяются в пропорции 1 : 2 : 3 (соответственно золото, серебро, бронза). Участниками олимпиады могут быть молодые люди в возрасте до 20 лет, не обучавшиеся в вузах или университетах на момент начала олимпиады (для России такая возрастная граница кажется странной, но в целом ряде стран Европы, Северной Америки и Азии продолжительность обучения в школах составляет 12—13 лет).

Банк задач для олимпиады формируется на основе предложений стран-участниц (до 6 задач от одной страны). Около 30 лучших задач по четырем разделам школьной математики: алгебре и математическому анализу, геометрии, теории чисел, комбинаторике — включается в так называемый шорт-лист олимпиады, по 6—8 задач различной трудности в каждом разделе. На заседаниях, проходящих в течение 2—3 дней, руководители команд, входящие в жюри олимпиады, отбирают из шорт-листа те 6 задач, которые и будут составлять вариант олимпиады. В последние годы выбор задач для включения в вариант начинается с отбора относительно простых задач — на первые позиции каждого дня. Это ответственный выбор, так как важно предоставить каждому сильному, но, быть может, недостаточно подготовленному школьнику возможность успешно справиться хотя бы с одной задачей ММО (в регламенте олимпиады предусмотрено вручение почетной грамоты тем, кто не стал медалистом олимпиады, но полностью выполнил одно из заданий). «Лицом» Международной математической олимпиады являются красивые сложные задачи, поэтому, после того как пара простых задач определена, происходит отбор двух самых сложных задач олимпиады — на третьи позиции. И уже в конце, соблюдая тематическое разнообразие варианта, выбирают две средние (по позициям и по трудности) задачи. Наконец, на заключительном этапе голосуется распределение задач по двум дням соревнований. Каждая страна имеет на заседаниях жюри один голос, поэтому с учетом большого разнообразия уровня команд и тематических предпочтений разных делегаций обсуждение вариантов иногда проходит в жарких спорах. Рабочий язык заседаний международного жюри — английский, но перед каждым голосованием руководители команд Испании, России, Франции и Германии переводят предмет голосования на национальные языки, также являющиеся официальными языками ММО.

Участники олимпиады получают задания на двух языках: родном и любом дополнительном на свой выбор. Решения участниками выполняются на родных языках.

Оценка работ участников осуществляется на так называемой координации, в которой принимают участие, с одной стороны, руководители команд, с другой — члены координационного комитета. Он формируется как из числа математиков страны-организатора ММО, так и из приглашенных математиков других стран. Координация наиболее ответственный этап олимпиады, так как далеко не всегда участники предъявляют на суд жюри идеально написанные решения задач.

Участие команд России в ММО

Международные математические олимпиады заметно отличаются по содержанию заданий от основных математических соревнований, проводимых в России. Поэтому требуется специальная подготовка наших школьников к ММО, а отбор команды должен включать в себя выполнение кандидатами заданий, по стилю близких к заданиям Международной олимпиады. Подготовка команды осуществляется на летних учебно-тренировочных сборах, проходящих в течение трех недель в июне — июле, непосредственно перед Международной олимпиадой. А формирование команды России на ММО проходит в три этапа. На первом этапе из числа победителей Всероссийской олимпиады выбирается группа из 20—30 кандидатов, и они принимают участие в зимних сборах (второй этап), на которых круг кандидатов сужается примерно до 10—12 человек. Наконец, по итогам выступления кандидатов на Всероссийской олимпиаде следующего года окончательно определяется состав команды России на Международную математическую олимпиаду.

Для успешной подготовки команды к олимпиаде летние сборы проводятся в одном из пансионатов, расположенных в Центральной части России, где участники сборов имеют возможность сочетать напряженные учебные занятия с активным отдыхом, спортивными играми. Академическая подготовка национальной сборной включает в себя тематические лекционные и семинарские занятия. Кроме того, во время сборов члены команды участвуют в нескольких тренировочных олимпиадах.

В последние годы календарь подготовки команды составлен так, что кандидаты в сборную команду России принимают участие в национальных математических олимпиадах школьников Китая (в январе, Россию представляют в основном учащиеся 11 класса) и Болгарии (в мае, участвуют учащиеся 10 класса, победители Всероссийской олимпиады).

На результаты выступлений команд разных стран на Международной математической олимпиаде оказывает влияние несколько объективных факторов: уровень естественно-математического образования, традиции олимпиадного движения в стране, государственная поддержка как олимпиадного движения в целом, так и формирования национальной команды и ее участия в ММО в частности. Поэтому страны-участницы на протяжении многих лет демонстрируют стабильные результаты на Международных математических олимпиадах.

В России, несмотря на потрясения в конце прошлого столетия, удалось сохранить богатые традиции олимпиадного движения, заложенные во времена существования СССР. Российские школьники успешно выступают на ММО. Как правило, в неофициальном командном зачете наша команда входит в тройку лучших, а по количеству завоеванных за эти годы золотых медалей Россия уступает только Китаю. Ниже приведена таблица, в которой указано общее количество баллов и количество медалей, завоеванных 50 лучшими командами на Международных математических олимпиадах 1992—2008 гг.

№ п/п	Страна	Общее количество баллов	Общее количество золотых медалей	Общее количество серебряных медалей	Общее количество бронзовых медалей
1	Китай	3418	81	14	1
2	Россия	3263	65	28	9
3	США	3148	54	40	7
4	Болгария	2961	39	46	15
5	Вьетнам	2820	33	51	18
6	Южная Корея	2813	35	48	17
7	Румыния	2813	33	45	22
8	Иран	2790	28	54	18
9	Венгрия	2749	29	51	18
10	Тайвань	2630	22	58	17
11	Япония	2532	23	47	21

№ п/п	Страна	Общее количество баллов	Общее количество золотых медалей	Общее количество серебряных медалей	Общее количество бронзовых медалей
12	Германия	2396	22	38	30
13	Украина	2390	23	36	25
14	Великобритания	2254	13	37	42
15	Индия	2182	7	45	37
16	Австралия	2131	9	33	44
17	Белоруссия	2081	11	32	41
18	Польша	2028	11	29	39
19	Турция	2024	8	32	43
20	Канада	2012	11	24	44
21	Израиль	1986	8	25	50
22	Гонконг	1872	3	30	46
23	Сербия	1716	3	25	42
24	Франция	1700	9	15	40
25	Словакия	1692	3	25	43
26	Сингапур	1676	1	21	48
27	Чехия	1660	3	21	40
28	Таиланд	1615	5	21	34
29	Бразилия	1569	3	18	39
30	Казахстан	1533	8	14	38
31	Италия	1533	4	11	43
32	Аргентина	1525	3	18	40
33	Колумбия	1397	1	12	37
34	Грузия	1382	2	9	39
35	Армения	1324	1	9	35
36	Хорватия	1297	0	5	40
37	Молдова	1289	5	14	27
38	Монголия	1285	1	15	28

№ п/п	Страна	Общее количество баллов	Общее количество золотых медалей	Общее количество серебряных медалей	Общее количество бронзовых медалей
39	Бельгия	1275	0	6	28
40	Латвия	1226	1	10	29
41	Греция	1220	0	11	30
42	Южная Африка	1217	1	8	26
43	Швеция	1209	1	7	27
44	Австрия	1183	2	6	26
45	Мексика	1114	1	6	30
46	Голландия	1087	0	6	19
47	Новая Зеландия	1047	1	3	26
48	Македония	1039	0	3	34
49	Литва	1035	1	5	20
50	Норвегия	1023	2	6	19

В последующих таблицах содержится информация о выступлениях сборной России и результаты выступлений первых двадцати команд на Международных олимпиадах за последние 17 лет (1992—2008 гг.).

33-я ММО. 1992 г. Москва (Россия)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Кожевников Павел	Калуга, школа № 24	7	7	7	7	0	4	32	золото
Чиликов Алексей	Киров, школа № 35	7	7	7	7	0	4	32	золото
Исмаилов Руслан	С.-Петербург, СУМЦ	7	7	7	2	0	6	29	серебро
Певцова Юлия	С.-Петербург, СУМЦ	7	7	7	0	0	3	24	серебро

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Никулин Михаил	Москва, СУНЦ	0	5	0	6	7	4	22	бронза
Карпов Дмитрий	С.-Петербург, СУМЦ	7	1	7	0	1	3	19	бронза

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	240	6	0	0
2	США	181	3	3	0
3	Румыния	177	2	2	2
4	СНГ	176	2	3	0
5	Великобритания	168	2	2	2
6	Россия	158	2	2	2
7	Германия	149	0	4	2
8	Япония	142	1	3	1
8	Венгрия	142	1	3	1
10	Вьетнам	139	1	2	3
10	Франция	139	1	3	1
12	Югославия	136	0	2	4
13	Чехословакия	134	0	2	3
14	Иран	133	0	3	2
15	Болгария	127	1	1	3
16	КНДР	126	0	3	2
17	Тайвань	124	0	3	2
18	Южная Корея	122	1	0	4
19	Австралия	118	1	1	2
20	Израиль	108	0	2	2

34-я ММО. 1993 г. Стамбул (Турция)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Федоров Роман	Москва, школа № 57	7	7	7	3	6	7	37	золото
Бондарко Михаил	С.-Петербург, школа № 239	7	2	7	6	7	7	36	золото
Розенблюм Елизавета	С.-Петербург, школа № 239	7	3	4	7	6	5	32	золото
Поздняков Антон	С.-Петербург, школа № 292	0	2	7	7	7	7	30	золото
Бирюк Андрей	Краснодар, школа № 4	7	2	0	2	7	7	25	серебро
Панов Дмитрий	Москва, школа № 57	0	7	0	5	5	0	17	бронза

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	215	6	0	0
2	Германия	189	4	2	0
3	Болгария	178	2	4	0
4	Россия	177	4	1	1
5	Тайвань	162	1	4	1
6	Иран	153	2	3	1
7	США	151	2	2	2
8	Венгрия	143	3	1	2
9	Вьетнам	138	1	4	1
10	Чехия	132	1	2	3
11	Румыния	128	1	2	3

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
12	Словакия	126	1	3	1
13	Австралия	125	1	2	3
14	Великобритания	118	0	3	3
15	Индия	116	0	4	1
15	Южная Корея	116	0	3	3
17	Франция	115	2	1	1
18	Канада	113	1	1	3
18	Израиль	113	1	2	2
20	Япония	98	0	2	3

35-я ММО. 1994 г. Гонконг (Гонконг)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Бондарко Михаил	С.-Петербург, школа № 239	7	7	7	7	7	7	42	золото
Карасев Роман	Лобня (Московская обл.), школа № 5 г. Долгопрудный	7	7	7	7	7	7	42	золото
Норин Сергей	С.-Петербург, школа № 239	7	7	7	7	7	7	42	золото
Дюбина Анна	С.-Петербург, школа № 239	7	7	7	7	7	3	38	серебро
Добринская Наталья	Саратов, ФТЛ № 1	1	7	5	7	7	7	34	серебро
Борисов Александр	Нижний Новгород, школа № 40	0	7	7	7	5	0	26	бронза

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	США	252	6	0	0
2	Китай	229	3	3	0
3	Россия	224	3	2	1
4	Болгария	223	3	2	1
5	Венгрия	221	1	5	0
6	Вьетнам	207	1	5	0
7	Великобритания	206	2	2	2
8	Иран	203	2	2	2
9	Румыния	198	0	5	1
10	Япония	180	1	2	3
11	Германия	175	1	2	3
12	Австралия	173	0	2	3
13	Южная Корея	170	0	2	4
13	Польша	170	2	0	3
13	Тайвань	170	0	4	1
16	Индия	168	0	3	3
17	Украина	163	1	1	2
18	Гонконг	162	0	2	4
19	Франция	161	1	1	3
20	Аргентина	159	0	3	1

36-я ММО. 1995 г. Торонто (Канада)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Норин Сергей	С.-Петербург, школа № 239	7	7	7	7	7	7	42	золото
Островский Михаил	Москва, школа № 57	7	7	7	7	7	4	39	золото

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Запорожец Дмитрий	С.-Петербург, школа № 239	7	7	7	7	7	3	38	золото
Челкак Дмитрий	С.-Петербург, школа № 30	7	7	7	7	7	2	37	золото
Кацев Илья	С.-Петербург, школа № 30	7	7	7	7	7	1	36	серебро
Есаулова Вероника	С.-Петербург, школа № 239	7	7	7	7	7	0	35	серебро

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	236	4	2	0
2	Румыния	230	4	2	0
3	Россия	227	4	2	0
4	Вьетнам	220	2	4	0
5	Венгрия	210	3	1	2
6	Болгария	207	1	4	1
7	Южная Корея	203	2	3	1
8	Иран	202	2	3	1
9	Япония	183	1	3	2
10	Великобритания	180	2	1	3
11	США	178	0	3	3
12	Тайвань	176	0	4	1
13	Израиль	171	1	2	2
14	Индия	165	0	3	3
15	Германия	162	1	3	1
16	Польша	161	0	1	5
17	Югославия	154	0	2	3

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
17	Чехия	154	0	1	5
19	Канада	153	0	2	3
20	Гонконг	151	0	2	3

37-я ММО. 1996 г. Мумбай (Индия)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Дуров Николай	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	7	2	7	37	золото
Норин Сергей	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	7	1	7	36	золото
Есаулова Вероника	С.-Петербург, ФМЛ № 239	4	7	3	7	1	3	25	серебро
Рудо Елена	С.-Петербург, ФМЛ № 239	2	1	6	7	0	7	23	серебро
Салихов Константин	Москва, СУНЦ МГУ	2	7	5	7	1	0	22	серебро
Макарычев Юрий	Москва, школа № 57	6	7	5	1	0	0	19	бронза

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Румыния	187	4	2	0
2	США	185	4	2	0
3	Венгрия	167	3	2	1
4	Россия	162	2	3	1
5	Великобритания	161	2	4	0

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
6	Китай	160	3	2	1
7	Вьетнам	155	3	1	1
8	Южная Корея	151	2	3	0
9	Иран	143	1	4	1
10	Германия	137	3	1	1
11	Болгария	136	1	4	1
11	Япония	136	1	3	1
13	Польша	122	0	3	3
14	Индия	118	1	3	1
15	Израиль	114	1	2	2
16	Канада	111	0	3	3
17	Словакия	108	0	2	4
18	Украина	105	1	0	5
19	Турция	104	0	2	3
20	Тайвань	100	0	2	3

38-я ММО. 1997 г. Мар-дель-Плата (Аргентина)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Дуров Николай	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	4	7	7	39	золото
Лепчинский Михаил	Челябинск, лицей № 31	6	7	7	7	7	3	37	золото
Черепанов Евгений	Рыбинск (Ярославская обл.), школа № 17	4	7	7	7	7	5	37	золото
Митрофанов Михаил	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	1	7	7	5	34	серебро

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Уздин Сергей	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	4	7	1	33	серебро
Анно Ирина	Москва, школа № 57	7	7	0	1	7	0	22	бронза

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	223	6	0	0
2	Венгрия	219	4	2	0
3	Иран	217	4	2	0
4	США	202	2	4	0
5	Россия	202	3	2	1
6	Украина	195	3	3	0
7	Болгария	191	2	3	1
7	Румыния	191	2	3	1
9	Австралия	187	2	3	1
10	Вьетнам	183	1	5	0
11	Южная Корея	164	1	4	1
12	Япония	163	1	3	1
13	Германия	161	1	3	2
14	Тайвань	148	0	4	2
15	Индия	146	0	3	3
16	Великобритания	144	1	2	2
17	Белоруссия	140	0	2	4
18	Чехия	139	1	2	2
19	Швеция	128	1	0	3
20	Польша	125	0	2	2
20	Югославия	125	0	2	3

39-я ММО. 1998 г. Тайбэй (Тайвань)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Дуров Николай	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	7	7	4	39	золото
Дремов Владимир	Волгодонск (Ростовская обл.), школа № 24	5	7	7	7	0	7	33	золото
Черепанов Евгений	Рыбинск (Ярославская обл.), школа № 17	2	7	2	7	4	7	29	серебро
Анно Ирина	Москва, школа № 57	6	7	3	5	7	0	28	серебро
Розенберг Антон	С.-Петербург, школа № 419	7	7	2	7	3	0	26	серебро
Шаповалов Данил	Иваново, школа № 33	4	7	2	7	0	0	20	бронза

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Иран	211	5	1	0
2	Болгария	195	3	3	0
3	США	186	3	3	0
3	Венгрия	186	4	2	0
5	Тайвань	184	3	2	1
6	Россия	175	2	3	1
7	Индия	174	3	3	0
8	Украина	166	1	3	2
9	Вьетнам	158	1	3	2
10	Югославия	156	0	5	0

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
11	Румыния	155	3	0	2
12	Южная Корея	154	2	2	2
13	Австралия	146	0	4	2
14	Япония	139	1	1	3
15	Чехия	135	0	3	3
16	Германия	129	0	3	2
17	Великобритания	122	0	1	4
17	Турция	122	0	2	4
19	Белоруссия	118	0	1	4
20	Канада	113	1	1	2

40-я ММО. 1999 г. Бухарест (Румыния)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Дремов Владимир	Волгодонск (Ростовская обл.), школа № 24	7	7	7	7	7	1	36	золото
Петров Федор	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	3	7	7	5	36	золото
Поярков Алексей	Рыбинск (Ярославская обл.), лицей № 2	7	7	6	6	7	3	36	золото
Лифшиц Юрий	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	3	7	7	0	31	золото
Евсеев Антон	Москва, школа № 57	7	2	2	7	3	1	22	серебро
Лебедев Алексей	Нижний Новгород, лицей № 40	7	7	0	0	6	1	21	серебро

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	182	4	2	0
1	Россия	182	4	2	0
3	Вьетнам	177	3	3	0
4	Румыния	173	3	3	0
5	Болгария	170	3	3	0
6	Белоруссия	167	3	3	0
7	Южная Корея	164	3	3	0
8	Иран	159	2	4	0
9	Тайвань	153	1	5	0
10	США	150	2	3	1
11	Венгрия	147	1	4	1
12	Украина	136	2	2	1
13	Япония	135	2	4	0
14	Югославия	130	1	2	3
15	Австралия	116	1	1	3
16	Турция	109	1	1	4
17	Германия	108	0	2	4
18	Индия	107	0	3	3
19	Польша	104	1	0	5
20	Великобритания	100	0	3	2

41-я ММО. 2000 г. Тэджон (Южная Корея)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Гайфуллин Александр	Раменское (Московская обл.), гимназия	7	7	7	7	7	7	42	золото

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Поярков Алексей	Рыбинск (Ярославская обл.), гимназия № 2	7	7	7	7	7	7	42	золото
Лифшиц Юрий	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	4	7	6	38	золото
Дремов Владимир	Волгодонск (Ростовская обл.), школа № 24	7	7	1	7	7	4	33	золото
Федотов Алексей	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	1	6	7	5	33	золото
Халявин Андрей	Киров, ФМЛ № 35	7	1	2	7	7	3	27	серебро

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	218	6	0	0
2	Россия	215	5	1	0
3	США	184	3	3	0
4	Южная Корея	172	3	3	0
5	Болгария	169	2	3	1
5	Вьетнам	169	3	2	1
7	Белоруссия	165	2	2	2
8	Тайвань	164	3	2	1
9	Венгрия	156	1	5	0
10	Иран	155	2	3	1
11	Румыния	139	1	3	2
11	Израиль	139	2	1	3
13	Украина	135	2	2	0
14	Индия	132	0	5	1

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
15	Япония	125	1	2	3
16	Австралия	122	1	3	1
17	Канада	112	1	2	1
18	Турция	111	0	3	1
18	Словакия	111	0	2	3
20	Германия	108	1	1	2
20	Армения	108	0	2	3

42-я ММО. 2001 г. Вашингтон (США)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Спиридонов Сергей	Ижевск, школа № 41	6	7	7	7	7	5	39	золото
Воробьев Андрей	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	4	1	7	7	7	33	золото
Соколов Сергей	Рыбинск (Ярославская обл.), школа № 30	7	0	5	7	7	7	33	золото
Гарбер Михаил	Ярославль, школа № 33	7	7	4	7	7	0	32	золото
Глазырин Алексей	Челябинск, лицей № 11	7	3	7	7	7	0	31	золото
Халявин Андрей	Киров, ФМЛ № 35	7	7	1	7	4	2	28	серебро

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	225	6	0	0
2	Россия	196	5	1	0

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
2	США	196	4	2	0
4	Болгария	185	3	3	0
4	Южная Корея	185	3	3	0
6	Казахстан	168	4	1	0
7	Индия	148	2	2	2
8	Украина	143	1	5	0
9	Тайвань	141	1	5	0
10	Вьетнам	139	1	4	0
11	Турция	136	1	3	2
12	Белоруссия	135	1	2	3
13	Япония	134	1	3	2
14	Германия	131	1	3	1
15	Румыния	129	1	2	2
16	Бразилия	120	0	4	2
17	Израиль	113	1	2	1
18	Иран	111	0	2	4
19	Гонконг	107	0	2	4
19	Польша	107	0	3	1

43-я ММО. 2002 г. Глазго (Великобритания)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Халявин Андрей	Киров, ФМЛ	7	7	7	7	7	7	42	золото
Бадзян Андрей	Челябинск, ФМЛ № 31	7	7	5	7	7	3	36	золото
Гольберг Олег	Ростов-на-Дону, школа № 8	7	7	1	7	7	7	36	золото

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Сухов Кирилл	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	1	7	7	3	32	золото
Дубашинский Михаил	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	1	7	7	0	29	золото
Стырт Олег	Омск, лицей № 64	7	7	1	7	7	0	29	золото

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	212	6	0	0
2	Россия	204	6	0	0
3	США	171	4	1	0
4	Болгария	167	3	2	1
5	Вьетнам	166	3	1	2
6	Южная Корея	163	1	5	0
7	Тайвань	161	1	4	1
8	Румыния	157	2	3	1
9	Индия	156	1	3	2
10	Германия	144	2	1	2
11	Иран	143	0	4	2
12	Канада	142	1	3	1
12	Венгрия	142	1	2	3
14	Белоруссия	135	1	2	3
14	Турция	135	1	1	4
16	Казахстан	133	0	3	3
16	Япония	133	1	3	1
18	Израиль	130	0	3	3
19	Франция	127	0	2	3
20	Украина	124	1	3	0

44-я ММО. 2003 г. Токио (Япония)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы (по задачам)						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Гольберг Олег	Ростов-на-Дону, школа № 8	7	3	7	7	7	7	38	золото
Гравин Николай	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	7	7	1	36	золото
Бадзян Андрей	Челябинск, ФМЛ № 31	7	7	0	7	7	1	29	золото
Волков Юрий	Кемерово, классический лицей	7	3	0	7	7	1	25	серебро
Ширяев Дмитрий	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	0	7	1	1	23	серебро
Смирнов Александр	С.-Петербург, ФМЛ № 239	2	5	0	7	1	1	16	бронза

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Болгария	227	6	0	0
2	Китай	211	5	1	0
3	США	188	4	2	0
4	Вьетнам	172	2	3	1
5	Россия	167	3	2	1
6	Южная Корея	157	2	4	0
7	Румыния	143	1	4	1
8	Турция	133	1	3	1
9	Япония	131	1	3	2
10	Великобритания	128	1	2	3
10	Венгрия	128	1	3	1

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
12	Канада	119	2	0	3
12	Казахстан	119	1	2	2
14	Украина	118	1	2	3
15	Индия	115	0	4	1
16	Тайвань	114	1	2	2
17	Германия	112	1	2	1
17	Иран	112	0	3	2
19	Белоруссия	111	1	2	2
19	Таиланд	111	1	1	3

45-я ММО. 2004 г. Афины (Греция)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Бадзян Андрей	Челябинск, ФМЛ № 31	7	7	7	7	7	7	42	золото
Дубашинский Михаил	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	7	7	7	42	золото
Исаев Михаил	Барнаул, гимназия № 42	7	6	4	7	7	7	38	золото
Петухова Надежда	С.-Петербург, ФТШ	7	5	3	7	7	6	35	золото
Шнурников Игорь	Краснодар, гимназия № 36	7	7	0	7	4	0	25	серебро
Пермяков Дмитрий	Снежинск (Челябинская обл.), гимназия № 127	7	2	4	7	3	0	23	бронза

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	220	6	0	0
2	США	212	5	1	0
3	Россия	205	4	1	1
4	Вьетнам	196	4	2	0
5	Болгария	194	3	3	0
6	Тайвань	190	3	3	0
7	Венгрия	187	2	3	1
8	Япония	182	2	4	0
9	Иран	178	1	5	0
10	Румыния	176	1	4	1
11	Украина	174	1	5	0
12	Южная Корея	166	2	2	2
13	Белоруссия	154	0	4	2
14	Индия	151	0	4	2
15	Израиль	147	1	1	4
16	Польша	142	2	1	1
17	Молдова	140	2	0	4
18	Сингапур	139	0	3	3
19	Монголия	135	0	3	2
20	Великобритания	134	1	1	4

46-я ММО. 2005 г. Мерида (Мексика)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Гаврилюк Андрей	Долгопрудный (Московская обл.), ФМШ № 5	7	7	7	7	7	7	42	золото

Участник	Город, школа	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Магазинов Александр	Ярославль, лицей № 33	7	7	6	7	7	7	41	золото
Калинин Никита	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	7	7	1	36	золото
Козлов Павел	с. Шурскол (Ярославская обл.), школа	7	7	0	7	7	7	35	золото
Катышев Алексей	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	0	7	7	2	30	серебро
Астахов Василий	Саратов, ФТЛ № 1	7	7	0	7	0	7	28	серебро

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	235	5	1	0
2	США	213	4	2	0
3	Россия	212	4	2	0
4	Иран	201	2	4	0
5	Южная Корея	200	3	3	0
6	Румыния	191	4	1	1
7	Тайвань	190	3	2	1
8	Япония	188	3	1	2
9	Украина	181	2	2	2
9	Венгрия	181	2	3	1
11	Болгария	173	2	3	1
12	Германия	163	1	3	2
13	Великобритания	159	1	3	2
14	Сингапур	145	0	4	2
15	Вьетнам	143	0	3	3

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
16	Чехия	139	1	2	2
17	Гонконг	138	1	3	1
18	Белоруссия	136	1	3	1
19	Канада	132	1	2	2
20	Словакия	131	0	4	2

47-я ММО. 2006 г. Любляна (Словения)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Магазинов Александр	Ярославль, лицей № 33	7	7	7	7	7	7	42	золото
Девятов Ростислав	Москва, лицей «Вторая школа»	7	7	0	7	7	7	35	золото
Образцов Тимофей	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	0	7	7	0	28	золото
Затицкий Павел	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	1	2	7	7	1	25	серебро
Катышев Алексей	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	2	7	0	0	23	серебро
Глазман Александр	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	0	7	0	0	21	серебро

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	214	6	0	0
2	Россия	174	3	3	0
3	Южная Корея	170	4	2	0
4	Германия	157	4	0	2

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
5	США	154	2	4	0
6	Румыния	152	3	1	2
7	Япония	146	2	3	1
8	Иран	145	3	3	0
9	Молдова	140	2	1	3
10	Тайвань	136	1	5	0
11	Польша	133	1	2	3
12	Италия	132	2	2	0
13	Вьетнам	131	2	2	2
14	Гонконг	129	1	3	2
15	Канада	123	0	5	1
15	Таиланд	123	1	3	2
17	Венгрия	122	0	5	1
18	Словакия	118	1	2	3
19	Великобритания	117	0	4	1
19	Турция	117	0	4	1

48-я ММО. 2007 г. Ханой (Вьетнам)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Матвеев Константин	Омск, лицей № 66	7	7	2	7	7	7	37	золото
Илюхина Мария	Москва, лицей «Вторая школа»	7	7	5	7	7	1	34	золото
Есин Алексей	ст. Старонижестеблиевская (Краснодарский край), СОШ № 55	7	7	2	7	7	1	31	золото

Участник	Город, школа	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Дроздов Сергей	С.-Петербург, ФТШ	7	7	1	7	7	0	29	золото
Митрофанов Иван	Коломна (Московская обл.), гимназия № 2	7	7	1	7	7	0	29	золото
Волков Владислав	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	1	7	2	0	24	серебро

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Россия	184	5	1	0
2	Китай	181	4	2	0
3	Вьетнам	168	3	3	0
3	Южная Корея	168	2	4	0
5	США	155	2	3	1
6	Украина	154	3	1	2
6	Япония	154	2	4	0
8	КНДР	151	1	4	0
9	Болгария	149	2	3	1
9	Тайвань	149	2	3	1
11	Румыния	146	1	4	1
12	Гонконг	143	0	5	1
12	Иран	143	1	3	2
14	Таиланд	133	1	3	2
15	Германия	132	1	3	1
16	Венгрия	129	0	5	0
17	Турция	124	1	2	2

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
18	Польша	122	1	2	2
19	Белоруссия	119	1	1	4
20	Молдова	118	0	3	2

49-я ММО. 2008 г. Мадрид (Испания)

Результаты сборной России

Участник	Город, школа	Баллы по задачам						Сумма баллов	Медаль
		1	2	3	4	5	6		
Волков Владислав	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	7	7	7	7	2	37	золото
Бабичев Дмитрий	Долгопрудный (Московская обл.), ФМШ № 5	7	7	7	7	7	1	36	золото
Бойкий Роман	С.-Петербург, ФМЛ № 239	7	4	7	7	7	0	32	золото
Кудык Никита	Омск, гимназия № 117	7	4	7	7	7	0	32	золото
Бажо́в Иван	Екатеринбург, гимназия № 9	7	7	1	7	7	2	31	золото
Горинов Евгений	Киров, ФМЛ	7	4	6	7	7	0	31	золото

Командный зачет

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
1	Китай	217	5	1	0
2	Россия	199	6	0	0
3	США	190	4	2	0
3	Южная Корея	188	4	2	0

Место	Страна	Сумма баллов	Количество медалей		
			золото	серебро	бронза
5	Иран	181	1	5	0
6	Таиланд	175	2	3	1
7	КНДР	173	2	4	0
8	Турция	170	3	1	2
9	Тайвань	168	2	4	0
10	Венгрия	165	2	3	1
11	Япония	163	2	3	1
12	Вьетнам	159	2	2	2
13	Польша	157	2	3	1
14	Болгария	154	2	1	3
15	Украина	153	2	2	2
16	Бразилия	152	0	5	1
17	Перу	141	1	3	2
17	Румыния	141	0	4	2
19	Австралия	140	0	5	1
20	Сербия	139	1	3	0
20	Германия	139	1	2	3

Задачи международных математических олимпиад

1997 – 2008 гг.

38-я олимпиада. 1997 г.

97.1 **(Белоруссия)**

Координатная плоскость разделена на единичные квадраты с вершинами в точках с целочисленными координатами. Квадраты раскрашены в черный и белый цвета в шахматном порядке. Для каждой пары натуральных чисел m и n рассматривается прямоугольный треугольник с вершинами в точках с целочисленными координатами, катеты которого параллельны осям координат и имеют длину m и n. Пусть S_1 — суммарная площадь окрашенной черным части треугольника, а S_2 — суммарная площадь части, окрашенной белым. Пусть $f(m, n) = |S_1 - S_2|$.

а) Вычислите $f(m, n)$ для чисел m и n одной четности.

б) Докажите, что $f(m, n) \leqslant \frac{1}{2}\max\{m, n\}$ для любых m и n.

в) Докажите, что не существует такого числа C, что $f(m, n) < C$ для любых m и n.

97.2 **(Великобритания)**

В треугольнике ABC угол A наименьший. Пусть U — точка на той дуге BC описанной около треугольника окружности, которая не содержит точку A. Серединные перпендикуляры к отрезкам AB и AC пересекают прямую AU в точках V и W соответственно. Прямые BV и CW пересекаются в точке T. Докажите, что $AU = TB + TC$.

97.3 **(Россия)**

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — такие действительные числа, что $|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| = 1$ и $|x_i| \leqslant \frac{n+1}{2}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Докажите, что существует такая перестановка $y_1, y_2, \ldots, y_n$ чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что

$$|y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| \leqslant \frac{n+1}{2}.$$

97.4 **(Иран)**

Таблица $n \times n$, в каждой клетке которой записано одно из чисел множества $S = \{1, 2, \ldots, 2n - 1\}$ называется *серебряной*, если для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в объединении i-й строки и i-го столбца содержатся все элементы множества S. Докажите, что:

а) не существует серебряной таблицы для $n = 1997$;

б) серебряные таблицы существуют для бесконечного множества натуральных чисел n.

97.5 **(Чехия)**

Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что $a^{b^2} = b^a$.

97.6 **(Литва)**

Для каждого натурального n через $f(n)$ обозначим количество различных представлений числа n в виде суммы степеней двойки с целыми неотрицательными показателями. (Представления, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми.) Например, $f(4) = 4$, так как число 4 может быть представлено следующими четырьмя способами: 4; 2 + 2; 2 + 1 + 1; 1 + 1 + 1 + 1. Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 3$ выполнено неравенство

$$2^{\frac{n^2}{4}} < f(2^n) < 2^{\frac{n^2}{2}}.$$

39-я олимпиада. 1998 г.

98.1 **(Люксембург)**

В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны, а стороны AB и CD не параллельны. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке P, лежащей внутри четырехугольника $ABCD$. Докажите, что около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность тогда и только тогда, когда площади треугольников ABP и CDP равны.

98.2 **(Индия)**

На соревновании выступили a участников, их оценивали b судей, где b — нечетное число, не меньшее 3. За выступление участника каждый судья ставил оценку «удовлетворительно» или «неудовлетворительно». Число k таково, что для любых двух судей имеется не более k участников, получивших у них одинаковые оценки. Докажите неравенство

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

98.3 **(Белоруссия)**
Пусть $d(n)$ — количество всевозможных натуральных делителей натурального числа n, включая 1 и само n. Найдите все такие натуральные числа k, что $\frac{d(n^2)}{d(n)} = k$ при каком-либо n.

98.4 **(Великобритания)**
Найдите все пары (a, b) натуральных чисел такие, что $a^2b + a + b$ делится на $ab^2 + b + 7$.

98.5 **(Украина)**
Пусть I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Обозначим через K, L, M точки, в которых эта окружность касается сторон BC, CA, AB соответственно. Прямая, проведенная через точку B параллельно прямой MK, пересекает прямые LM и LK в точках R и S соответственно. Докажите, что угол RIS острый.

98.6 **(Болгария)**
Рассматриваются все функции f: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$, удовлетворяющие равенству

$$f(t^2 f(s)) = s(f(t))^2$$

для любых натуральных s и t. Найдите наименьшее возможное значение $f(1998)$.

40-я олимпиада. 1999 г.

99.1 **(Эстония)**
Найдите все конечные множества S точек плоскости, содержащие не менее трех точек, удовлетворяющие следующему условию: для любых двух различных точек A и B из множества S серединный перпендикуляр к отрезку AB является осью симметрии множества S.

99.2 **(Польша)**
Пусть n — целое число, $n \geqslant 2$.
а) Найдите наибольшее число C такое, что неравенство

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leqslant C \left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} x_i \right)^4 \qquad (1)$$

выполняется для всех неотрицательных действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
б) Для найденного числа C определите условие, при котором неравенство (1) обращается в равенство.

99.3 **(Белоруссия)**
В квадрате клетчатой бумаги размером $n \times n$ клеток, где n — четное число, отмечены N клеток таким образом, что каждая клетка квадрата (отмеченная или неотмеченная) имеет хотя бы одну отмеченную соседнюю клетку. (Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.) Определите наименьшее возможное значение N.

99.4 **(Тайвань)**
Найдите все пары (n, p) натуральных чисел такие, что p — простое, $n \leqslant 2p$ и $(p-1)^n + 1$ делится на n^{p-1}.

99.5 **(Россия)**
Две окружности Γ_1 и Γ_2, содержащиеся внутри окружности Γ, касаются Γ в различных точках M и N соответственно. Окружность Γ_1 проходит через центр окружности Γ_2. Прямая, проходящая через две точки пересечения окружностей Γ_1 и Γ_2, пересекает окружность Γ в точках A и B. Прямые MA и MB пересекают Γ_1 в точках C и D соответственно. Докажите, что CD касается Γ_2.

99.6 **(Япония)**
Найдите все функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ такие, что

$$f(x - f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$$

для всех $x \in \boldsymbol{R}$, $y \in \boldsymbol{R}$.

41-я олимпиада. 2000 г.

00.1 **(Россия)**
Окружности Γ_1 и Γ_2 пересекаются в точках M и N. Прямая l — общая касательная к окружностям Γ_1 и Γ_2 такая, что точка M расположена к прямой l ближе, чем точка N. Прямая l касается окружности Γ_1 в точке A, а окружности Γ_2 в точке B. Прямая, проходящая через точку M параллельно l, пересекает вторично окружность Γ_1 в точке C, а окружность Γ_2 в точке D. Прямые CA и DB пересекаются в точке E, прямые AN и CD — в точке P, прямые BN и CD — в точке Q. Докажите, что $EP = EQ$.

00.2 **(США)**
Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = 1$. Докажите, что

$$\left(a - 1 + \frac{1}{b}\right)\left(b - 1 + \frac{1}{c}\right)\left(c - 1 + \frac{1}{a}\right) \leqslant 1.$$

00.3 **(Белоруссия)**

Дано натуральное число $n \geqslant 2$. Пусть сначала на горизонтальной прямой сидят n блох, не все в одной точке. Для положительного числа λ определим *прыжок* следующим образом: выбираются две блохи, сидящие в произвольных точках A и B, причем A левее B, и блоха, сидящая в A, прыгает в точку C, расположенную на данной прямой справа от B такую, что

$$\frac{BC}{AB} = \lambda.$$

Определите все значения λ такие, что для любой точки M на этой прямой и для любого начального расположения n блох существует конечная последовательность прыжков, после которой все блохи окажутся справа от точки M.

00.4 **(Венгрия)**

У фокусника 100 карточек, занумерованных натуральными числами от 1 до 100. Он раскладывает все карточки в три ящика — красный, белый и синий — так, чтобы в каждом ящике лежала хотя бы одна карточка. Один из зрителей выбирает два из трех ящиков, вынимает из них по одной карточке и объявляет сумму номеров вытянутых карточек. Зная эту сумму, фокусник определяет тот ящик, из которого карточки не вынимались. Сколькими различными способами можно разложить карточки по ящикам так, чтобы этот фокус всегда удавался? (Способы, при которых хотя бы одна карточка попадает в разные ящики, считаются различными.)

00.5 **(Россия)**

Существует ли такое натуральное число n, что n имеет ровно 2000 различных простых делителей и $2^n + 1$ делится на n?

00.6 **(Россия)**

Пусть AH_1, BH_2, CH_3 — высоты остроугольного треугольника ABC. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается сторон BC, CA, AB в точках T_1, T_2, T_3 соответственно. Прямые l_1, l_2, l_3 являются образами прямых H_2H_3, H_3H_1, H_1H_2 при симметрии относительно прямых T_2T_3, T_3T_1, T_1T_2 соответственно. Докажите, что прямые l_1, l_2, l_3 образуют треугольник с вершинами на окружности, вписанной в треугольник ABC.

42-я олимпиада. 2001 г.

01.1 **(Южная Корея)**
Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного треугольника ABC. Точка P — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Известно, что $\angle BCA \geqslant \angle ABC + 30°$. Докажите, что

$$\angle CAB + \angle COP < 90°.$$

01.2 **(Южная Корея)**
Докажите, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geqslant 1$$

для любых положительных чисел a, b и c.

01.3 **(Германия)**
В математической олимпиаде приняли участие 21 мальчик и 21 девочка. Известно, что:
— каждый из них решил не более шести задач;
— для каждого мальчика и каждой девочки найдется по крайней мере одна задача, которая была решена ими обоими.
Докажите, что найдется задача, которую решили хотя бы 3 мальчика и 3 девочки.

01.4 **(Германия)**
Пусть n — нечетное число, $n > 1$, и k_1, k_2, ..., k_n — данные целые числа. Для каждой из $n!$ перестановок $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ чисел 1, 2, ..., n положим

$$S(a) = \sum_{i=1}^{n} k_i a_i.$$

Докажите, что найдутся такие различные перестановки b и c, что $S(b) - S(c)$ делится на $n!$.

01.5 **(Израиль)**
В треугольнике ABC биссектриса угла BAC пересекает сторону BC в точке P, а биссектриса угла ABC пересекает сторону CA в точке Q. Известно, что $\angle BAC = 60°$ и $AB + BP = AQ + QB$. Чему могут равняться величины углов треугольника ABC?

01.6 **(Болгария)**
Пусть a, b, c, d — такие целые числа, что $a > b > c > d > 0$. Предположим, что

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c).$$

Докажите, что число $ab + cd$ не является простым.

43-я олимпиада. 2002 г.

02.1 **(Колумбия)**
Дано натуральное число n. Обозначим через T множество точек (x, y) координатной плоскости, где x и y — неотрицательные целые числа такие, что $x + y < n$. Каждая точка из T окрашена в красный или синий цвет. Если точка (x, y) красная, то все точки (x', y') из T, для которых $x' \leqslant x$ и $y' \leqslant y$, также красные. Назовем *X-множеством* множество, состоящее из n синих точек, имеющих различные координаты x, а *Y-множеством* множество, состоящее из n синих точек, имеющих различные координаты y. Докажите, что количество X-множеств равно количеству Y-множеств.

02.2 **(Южная Корея)**
Дана окружность Γ с центром O и диаметром BC. Пусть A — такая точка окружности Γ, что

$$0^\circ < \angle AOB < 120^\circ,$$

а D — середина дуги AB, не содержащей C. Прямая, проходящая через точку O параллельно DA, пересекает прямую AC в точке J. Серединный перпендикуляр к отрезку OA пересекает окружность Γ в точках E и F. Докажите, что точка J является центром окружности, вписанной в треугольник CEF.

02.3 **(Румыния)**
Найдите все пары натуральных чисел $m \geqslant 3$, $n \geqslant 3$, для которых существует бесконечно много таких натуральных чисел a, что число $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ — целое.

02.4 **(Румыния)**
Дано натуральное число n, большее 1. Обозначим через $d_1, d_2, \ldots, d_k$ все его делители так, что $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$. Пусть

$$D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k.$$

а) Докажите, что $D < n^2$.
б) Найдите все n, для которых число D — делитель числа n^2.

02.5 **(Индия)**
Найдите все функции f: $\boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, такие, что

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$$

для всех действительных x, y, z, t.

02.6 **(Украина)**
На плоскости расположены окружности $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n$ радиуса 1 каждая с центрами $O_1, O_2, \ldots, O_n$ соответственно, где $n \geqslant 3$. Известно, что любая прямая плоскости имеет общие точки не более чем с двумя из этих окружностей. Докажите, что

$$\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{O_i O_j} \leqslant \frac{(n-1)\pi}{4}.$$

44-я олимпиада. 2003 г.

03.1 **(Бразилия)**
Пусть A — подмножество множества $S = \{1, 2, \ldots, 1000000\}$, содержащее в точности 101 элемент. Докажите, что найдутся такие числа $t_1, t_2, \ldots, t_{100}$ из S, что множества

$$A_j = \{x + t_i \mid x \in A\} \text{ для } j = 1, 2, \ldots, 100$$

будут попарно не пересекающимися.

03.2 **(Болгария)**
Найдите все такие пары (a, b) натуральных чисел, что число

$$\frac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$$

является натуральным.

03.3 **(Польша)**
Дан выпуклый шестиугольник, у которого для каждой из трех пар противоположных сторон выполняется условие: отношение расстояния между серединами этих сторон к сумме длин этих сторон равно $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Докажите, что все углы этого шестиугольника равны.

03.4 **(Финляндия)**
Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. Обозначим через P, Q и R основания перпендикуляров, опущенных из точки D на прямые BC, CA и AB соответственно. Докажите, что $PQ = QR$ тогда и только тогда, когда биссектрисы углов ABC и ADC пересекаются на прямой AC.

03.5 **(Ирландия)**
Пусть n — натуральное число и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — такие действительные числа, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$.

а) Докажите, что

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|x_i - x_j|\right)^2 \leqslant \frac{2(n^2-1)}{3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j)^2.$$

б) Докажите, что равенство достигается тогда и только тогда, когда числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ образуют арифметическую прогрессию.

03.6 (Франция)
Пусть p — простое число. Докажите, что существует такое простое число q, что при любом целом n число $n^p - p$ не делится на q.

45-я олимпиада. 2004 г.

04.1 (Румыния)
Пусть ABC — остроугольный треугольник, в котором $AB \neq AC$. Окружность с диаметром BC пересекает стороны AB и AC в точках M и N соответственно. Обозначим через O середину стороны BC. Биссектрисы углов BAC и MON пересекаются в точке R. Докажите, что окружности, описанные около треугольников BMR и CNR, имеют общую точку, лежащую на стороне BC.

04.2 (Южная Корея)
Найдите все многочлены $P(x)$ с действительными коэффициентами, удовлетворяющие равенству

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

для любых действительных чисел a, b, c таких, что $ab + bc + ca = 0$.

04.3 (Эстония)
Назовем *крюком* фигуру, состоящую из шести единичных квадратов, как показано на рисунке 1, а также любую фигуру, которую можно получить из нее с помощью поворотов и переворотов. Найдите все прямоугольники $m \times n$, которые можно замостить крюками.

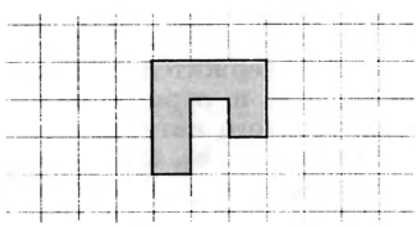

Рис. 1

04.4 **(Южная Корея)**
Пусть $n \geqslant 3$ — натуральное число. Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_n$ — положительные действительные числа такие, что

$$n^2 + 1 > (t_1 + t_2 + \ldots + t_n)\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \ldots \frac{1}{t_n}\right).$$

Докажите, что числа t_i, t_j, t_k являются длинами сторон треугольника при всех i, j, k таких, что $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$.

04.5 **(Польша)**
В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагональ BD не является ни биссектрисой угла ABC, ни биссектрисой угла CDA. Точка P, лежащая внутри четырехугольника $ABCD$, удовлетворяет условиям: $\angle PBC = \angle DBA$, $\angle PDC = \angle BDA$. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ является вписанным тогда и только тогда, когда $AP = CP$.

04.6 **(Иран)**
Назовем натуральное число *полосатым*, если любые две соседние цифры в его десятичной записи имеют разную четность. Найдите все натуральные n, для каждого из которых существует полосатое число, делящееся на n.

46-я олимпиада. 2005 г.

05.1 **(Румыния)**
На сторонах равностороннего треугольника ABC выбраны шесть точек:

A_1 и A_2 на BC; B_1 и B_2 на CA; C_1 и C_2 на AB.

Эти точки являются вершинами выпуклого шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$, стороны которого имеют равные длины. Докажите, что прямые A_1B_2, B_1C_2 и C_1A_2 пересекаются в одной точке.

05.2 **(Нидерланды)**
Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ — последовательность целых чисел, в которой содержится бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов. Известно, что для каждого натурального n все n остатков от деления чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ на число n различны. Докажите, что каждое целое число встречается в этой последовательности ровно один раз.

05.3 **(Южная Корея)**
Пусть x, y и z — такие положительные числа, что $xyz > 1$. Докажите, что

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + x^2 + y^2} \geqslant 0.$$

05.4 **(Польша)**
Последовательность a_1, a_2, ... определена следующим образом:

$$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1 \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Найдите все натуральные числа, которые взаимно просты с каждым членом этой последовательности.

05.5 **(Польша)**
Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$, стороны BC и AD которого равны, но не параллельны. Пусть E и F — такие внутренние точки отрезков BC и AD соответственно, что $BE = DF$. Прямые AC и BD пересекаются в точке P, прямые BD и EF пересекаются в точке Q, прямые EF и AC пересекаются в точке R. Рассмотрим треугольники PQR, получаемые для всех таких точек E и F. Докажите, что окружности, описанные около всех этих треугольников, имеют общую точку, отличную от P.

05.6 **(Румыния)**
На математической олимпиаде участникам были предложены 6 задач. Оказалось, что каждую пару задач решили более чем $\frac{2}{5}$ от общего числа участников, но никто не решил все 6 задач. Докажите, что найдутся по крайней мере два участника, каждый из которых решил ровно 5 задач.

47-я олимпиада. 2006 г.

06.1 **(Южная Корея)**
Точка I — центр окружности, вписанной в треугольник ABC. Внутри треугольника выбрана такая точка P, что

$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB.$$

Докажите, что $AP \geqslant AI$, причем равенство выполняется тогда и только тогда, когда точка P совпадает с точкой I.

06.2 **(Сербия)**

Диагональ правильного 2006-угольника P называется *хорошей*, если ее концы делят границу многоугольника P на две части, каждая из которых содержит нечетное число сторон. Стороны многоугольника P также называются *хорошими*.

Пусть 2003 диагонали многоугольника P, никакие две из которых не имеют общих точек внутри P, разбивают P на треугольники. Какое наибольшее число равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет две хорошие стороны, может иметь такое разбиение?

06.3 **(Ирландия)**

Определите наименьшее действительное число M такое, что неравенство

$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leqslant M(a^2 + b^2 + c^2)^2$

выполняется для любых действительных чисел a, b, c.

06.4 **(США)**

Найдите все пары (x, y) целых чисел такие, что

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2.$$

06.5 **(Румыния)**

Пусть $P(x)$ — многочлен степени $n > 1$ с целыми коэффициентами, k — произвольное натуральное число. Рассмотрим многочлен

$$Q(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$$

(здесь P применен k раз). Докажите, что существует не более n целых чисел t таких, что $Q(t) = t$.

06.6 **(Сербия)**

Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из площадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей треугольников, соответствующих всем сторонам многоугольника P, не меньше удвоенной площади этого многоугольника.

48-я олимпиада. 2007 г.

07.1 **(Новая Зеландия)**

Даны действительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ положим

$$d_i = \max\{a_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j \mid i \leqslant j \leqslant n\}.$$

Пусть

$$d = \max\{d_i\colon 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

а) Докажите, что для любых действительных чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ справедливо неравенство

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \qquad (1)$$

б) Покажите, что существуют такие действительные числа

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n,$$

что неравенство (1) обращается в равенство.

07.2 **(Люксембург)**
Даны пять точек A, B, C, D, E такие, что $ABCD$ — параллелограмм, а около четырехугольника $BCED$ можно описать окружность. Прямая l проходит через точку A, пересекает отрезок DC в его внутренней точке F, а прямую BC в точке G. Предположим, что $EF = EG = EC$. Докажите, что прямая l является биссектрисой угла DAB.

07.3 **(Россия)**
Среди участников математического соревнования некоторые дружат между собой; если A дружит с B, то и B дружит с A. Назовем группу участников *кликой*, если каждые двое из них дружат. (В частности, любая группа, состоящая менее чем из двух человек, является кликой.) Назовем количество человек в клике ее *размером*.
Известно, что наибольший размер клики, состоящей из участников соревнования, является четным числом. Докажите, что всех участников можно рассадить в две комнаты так, чтобы наибольший из размеров клик, находящихся в одной комнате, был равен наибольшему из размеров клик, находящихся в другой комнате.

07.4 **(Чехия)**
Биссектриса угла BCA треугольника ABC пересекает описанную около этого треугольника окружность вторично в точке R и пересекает серединные перпендикуляры к сторонам BC и AC в точках P и Q соответственно. Точки K и L — середины отрезков BC и AC соответственно. Докажите, что площади треугольников RPK и RQL равны.

07.5 **(Великобритания)**
Положительные целые числа a и b таковы, что число $(4a^2 - 1)^2$ делится на число $4ab - 1$. Докажите, что $a = b$.

07.6 **(Нидерланды)**
Пусть n — целое положительное число. Рассмотрим множество

$S = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \{0, 1, \ldots, n\},\ x + y + z > 0\}$,

состоящее из $(n + 1)^3 - 1$ точек трехмерного пространства. Найдите наименьшее возможное количество плоскостей, объединение которых содержит все точки множества S, но не содержит точку $(0, 0, 0)$.

49-я олимпиада. 2008 г.

08.1 **(Россия)**
Пусть H — точка пересечения высот остроугольного треугольника ABC. Окружность с центром в середине стороны BC, проходящая через точку H, пересекает прямую BC в точках A_1 и A_2. Аналогично окружность с центром в середине стороны CA, проходящая через точку H, пересекает прямую CA в точках B_1 и B_2, а окружность с центром в середине стороны AB, проходящая через точку H, пересекает прямую AB в точках C_1 и C_2. Докажите, что точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности.

08.2 **(Австрия)**
а) Докажите, что неравенство

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geqslant 1$$

выполняется для любых отличных от 1 действительных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$.
б) Докажите, что указанное неравенство обращается в равенство для бесконечного числа троек отличных от единицы рациональных чисел x, y, z таких, что $xyz = 1$.

08.3 **(Литва)**
Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел n таких, что число $n^2 + 1$ имеет простой делитель, больший числа $2n + \sqrt{2n}$.

08.4 **(Южная Корея)**
Найдите все функции f: $(0, +\infty) \to (0, +\infty)$ такие, что

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$$

для любых положительных w, x, y, z, удовлетворяющих равенству $wx = yz$.

08.5 **(Франция)**

Пусть n и k — такие натуральные числа, что $k \geqslant n$, а число $k - n$ четное. Имеется $2n$ лампочек, занумерованных числами 1, 2, ..., $2n$, каждая из которых может находиться в одном из двух состояний: *вкл.* (включена) или *выкл.* (выключена). Вначале все лампочки были выключены. Рассматриваются упорядоченные последовательности *шагов*: на каждом шаге ровно одна из лампочек меняет свое состояние на противоположное (с вкл. на выкл. либо с выкл. на вкл.). Обозначим через N количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой все лампочки с 1-й по n-ю включены, а все лампочки с $(n + 1)$-й по $(2n)$-ю выключены.

Обозначим через M количество последовательностей из k шагов, приводящих к ситуации, в которой также все лампочки с 1-й по n-ю включены, все лампочки с $(n + 1)$-й по $(2n)$-ю выключены, но при этом ни одна из лампочек с $(n + 1)$-й по $(2n)$-ю ни разу не меняла своего состояния.

Найдите значение отношения $\frac{N}{M}$.

08.6 **(Россия)**

Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, в котором $BA \neq BC$. Обозначим окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC, через ω_1 и ω_2 соответственно. Предположим, что существует окружность ω, которая касается продолжения отрезка BA за точку A, продолжения отрезка BC за точку C, а также касается прямых AD и CD. Докажите, что общие внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются на окружности ω.

Ответы. Решения. Указания

1997 год

97.1. **Ответ.** а) 0 для четных m и n, $\frac{1}{2}$ для нечетных m и n.

а) Обозначим рассматриваемый прямоугольный треугольник через ABC ($\angle A = 90°$, $AB = m$, $AC = n$) и достроим его до прямоугольника $ABDC$. Если числа m и n имеют одинаковую четность, то раскраска этого прямоугольника симметрична относительно середины его диагонали BC. Следовательно, $S_1(ABC) = S_1(BCD)$ и $S_2(ABC) = S_2(BCD)$. Значит,

$$f(m,\ n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = \\ = \frac{1}{2}|S_1(ABDC) - S_2(ABDC)|.$$

Поэтому $f(m,\ n) = 0$, если числа m и n оба четные, $f(m,\ n) = \frac{1}{2}$, если числа m и n оба нечетные.

б) Если числа m и n имеют одинаковую четность, то требуемый результат немедленно вытекает из решения пункта «а».

Пусть теперь m нечетно, а n четно. (Если m четно, а n нечетно, то достаточно переобозначить m и n.)

Рассмотрим на отрезке AB (рис. 2) точку L, такую, что $AL = m - 1$. Так как число $m - 1$ четное, то $f(m - 1,\ n) = 0$, т. е. $S_1(ALC) = S_2(ALC)$. Следовательно,

$$f(m,\ n) = |S_1(ABC) - S_2(ABC)| = |S_1(LBC) - S_2(LBC)| \leqslant \\ \leqslant S(LBC) = \frac{n}{2} \leqslant \frac{1}{2}\max\{m,\ n\}.$$

в) Вычислим $f(2k + 1,\ 2k)$. Как и в решении пункта «б», рассмотрим на AB такую точку L, что $AL = 2k$, и аналогично получим

$$f(2k + 1,\ 2k) = |S_1(LBC) - S_2(LBC)|.$$

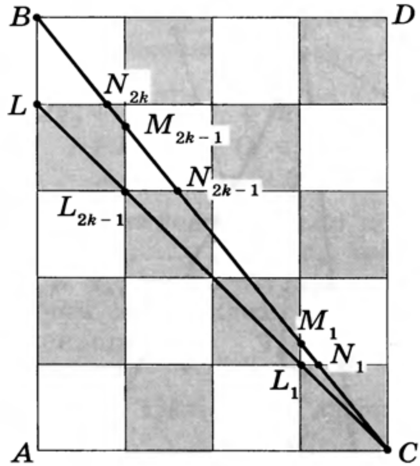

Рис. 2

Площадь треугольника LBC равна k. Без ограничения общности будем считать, что отрезок LC черный (см. рис. 2). Тогда белая часть треугольника LBC состоит из треугольников BLN_{2k}, $M_{2k-1}L_{2k-1}N_{2k-1}$, ..., $M_1L_1N_1$, каждый из которых, очевидно, подобен треугольнику ABC. Их суммарная площадь равна

$$S_2(LBC) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdot\left(\left(\frac{2k}{2k}\right)^2 + \left(\frac{2k-1}{2k}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{2k}\right)^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4k(2k+1)}(1^2 + 2^2 + \ldots + (2k)^2) = \frac{4k+1}{12}.$$

Значит,

$$S_1(LBC) = k - \frac{4k+1}{12} = \frac{8k-1}{12}$$

$$\text{и}\quad f(2k+1,\ 2k) = \frac{2k-1}{6}.$$

Ясно, что $\frac{2k-1}{6}$ принимает сколь угодно большие значения.

97.2. На дугах AB и AC (не содержащих соответственно точки C и B) построим точки C_1 и B_1 так, что $\breve{AC_1} = \breve{CU}$ и $\breve{AB_1} = \breve{BU}$ (рис. 3). (Так как угол A — наименьший угол треугольника, то $\breve{BC} < \breve{AB}$, $\breve{BC} < \breve{AC}$ и такие точки B_1 и C_1 существуют.) Тогда AU и CC_1 симметричны относительно серединного перпендикуляра к AC, значит, отрезки AU и CC_1 равны и пересекаются в точке W. Аналогично отрезки AU и BB_1 равны и пересекаются в точке V. Следовательно, отрезки BB_1 и CC_1 пересекаются в точке T.

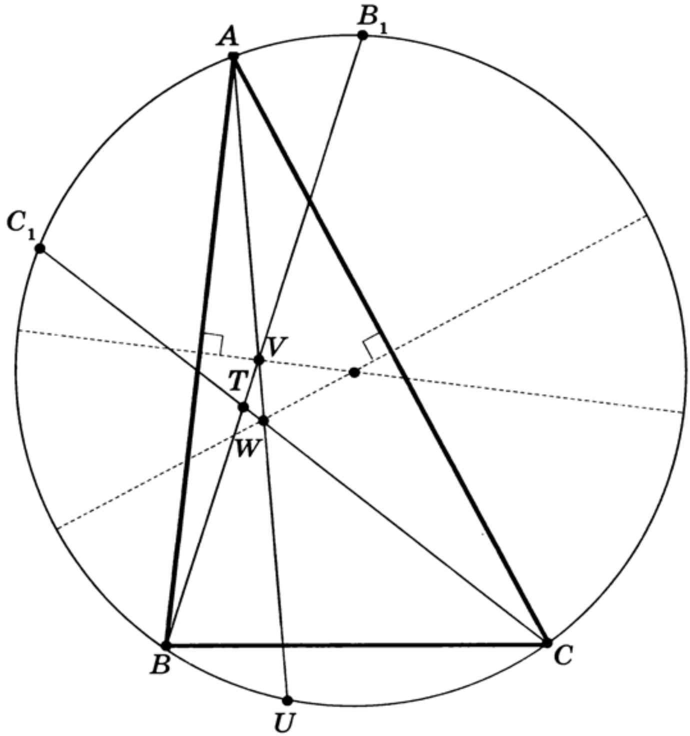

Рис. 3

Из равенства дуг BUC и B_1AC_1 вытекает, что BCB_1C_1 — равнобокая трапеция с основаниями BC_1 и CB_1. Из симметрии равнобокой трапеции следует, что $TB = TC_1$, поэтому

$$TB + TC = TC_1 + TC = CC_1 = AU,$$

что и требовалось доказать.

97.3. Допустим, что требуемой перестановки не существует, т. е. для любой перестановки выполнено неравенство

$$|S| = |y_1 + 2y_2 + \ldots + ny_n| > \frac{n+1}{2}.$$

Изменив, если это необходимо, знаки чисел и их нумерацию, мы можем считать, что

$$x_1 + \ldots + x_n = 1 \text{ и } x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n.$$

Рассмотрим перестановки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$. Пусть

$$S_1 = x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n,$$
$$S_2 = x_n + 2x_{n-1} + \ldots + nx_1.$$

Легко понять, что $S_2 \geqslant S_1$. Действительно, если в наборе $y_1, \ldots, y_n$ поменять местами y_k и y_{k+1}, то при $y_{k+1} \geqslant y_k$ получим

$$S'_{k+1} - S'_k = (y_1 + 2y_2 + \ldots + ky_k + (k+1)y_{k+1} + \ldots + ny_n) -$$
$$- (y_1 + 2y_2 + \ldots + ky_{k+1} + (k+1)y_k + \ldots + ny_n) =$$
$$= y_{k+1} - y_k \geqslant 0.$$

Поэтому если мы последовательно поменяем местами числа x_1 и x_2, x_1 и x_3, ..., x_1 и x_n, затем x_2 и x_3, ..., x_2 и x_n, ..., x_{n-1} и x_n, то из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ получим $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$, причем на каждом шаге рассматриваемая нами сумма не уменьшалась.

Заметим теперь, что

$$S_1 + S_2 = (n+1)(x_1 + \ldots + x_n) = n + 1,$$

поэтому $S_2 \geqslant \frac{n+1}{2} \geqslant S_1$. Но согласно предположению $|S_1| > \frac{n+1}{2}$ и $|S_2| > \frac{n+1}{2}$, следовательно,

$$S_2 > \frac{n+1}{2}, \text{ а } S_1 < -\frac{n+1}{2}.$$

С другой стороны,

$$|S'_{k+1} - S'_k| = |y_{k+1} - y_k| \leqslant |y_{k+1}| + |y_k| \leqslant n + 1.$$

Поэтому если $S'_k > \frac{n+1}{2}$, то и $S'_{k+1} > \frac{n+1}{2}$ (иначе, если $S'_{k+1} < -\frac{n+1}{2}$, то $|S'_{k+1} - S'_k| > n + 1$). Но $S_2 > \frac{n+1}{2}$, значит, в результате наших перестановок мы получим $S_1 > \frac{n+1}{2}$, что противоречит полученному ранее неравенству $S_1 < -\frac{n+1}{2}$. Итак, наше предположение неверно и искомая перестановка существует.

97.4. а) Пусть n — натуральное число, большее 1. Предположим, что серебряная таблица $n \times n$ существует. Пусть k — элемент из множества $\{1, 2, \ldots, 2n-1\}$, который не стоит на главной диагонали таблицы (такой элемент найдется, так как $n < 2n - 1$). Назовем объединение i-го столбца и i-й строки таблицы *i-м крестом*. Число k появляется в каждом кресте ровно один раз. Если число k стоит на пересечении i-го столбца и j-й строки, то оно входит и в i-й, и в j-й крест. Назовем эти кресты *k-связанными*. Таким образом, все n крестов разбиваются на пары k-связанных, т. е. n — четное число. Но 1997 — число нечетное.

б) При $n = 2$ таблица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ является серебряной. Из нее легко получить серебряную таблицу 4×4:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & 5 \\ 4 & 6 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 3 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Конструкция первой из этих таблиц несложным образом обобщается: если A — серебряная таблица $n \times n$, то построим таблицу D размером $2n \times 2n$ так:

$$D = \begin{pmatrix} A & B \\ C & A \end{pmatrix},$$

где таблица B получена из таблицы A добавлением $2n$ к каждому ее элементу, а таблица C получена из таблицы B заменой всех ее элементов, стоящих на главной диагонали, на $2n$. Таблица D будет серебряной. Действительно, пусть $i \leqslant n$ (случай $i > n$ разбирается аналогично). Рассмотрим i-й крест таблицы D. Он состоит из i-го креста таблицы A, i-й строки таблицы B и i-го столбца таблицы C; i-й крест таблицы A содержит числа $1, 2, \ldots, 2n - 1$, а i-я строка таблицы B и i-й столбец таблицы C содержат числа $2n, 2n + 1, \ldots, 4n - 1$.

97.5. **Ответ.** $\{(1, 1); (16, 2); (27, 3)\}$.

Из равенства $a^{b^2} = b^a$ следует, что $a = b^{\frac{a}{b^2}}$. Пусть $\frac{a}{b^2} = \frac{k}{l}$, где $(k, l) = 1$. Тогда

$$a = b^{\frac{k}{l}}, \left(b^{\frac{k}{l}}\right)^{b^2} = b^{b^{\frac{k}{l}}},$$

откуда

$$b^{\frac{kb^2}{l}} = b^{b^{\frac{k}{l}}}. \qquad (1)$$

Если $b = 1$, то и $a = 1$. Если же $b > 1$, то из равенства (1) вытекает, что $\frac{k}{l} b^2 = b^{\frac{k}{l}}$, т. е.

$$\frac{k}{l} = b^{\frac{k}{l} - 2}. \qquad (2)$$

I случай. Пусть $k - 2l \geqslant 0$. Тогда из равенства (2) следует, что число $\frac{k}{l}$ — целое, поэтому $l = 1$ (так как $(k, l) = 1$), т. е. $a = b^k$ и

$$k = b^{k-2}. \qquad (3)$$

Из неравенств $b^{k-2} \geqslant 2^{k-2} > k$ при $k \geqslant 5$ получаем, что равенство (3) возможно лишь при $k < 5$. Перебором убеждаемся, что $k = 4$, $b = 2$, $a = 16$ или $k = 3$, $b = 3$, $a = 27$.

II случай. Пусть $k - 2l < 0$. Из равенства (2) получаем, что $\frac{l}{k} = b^{2-\frac{k}{l}}$, где $2 - \frac{k}{l} > 0$, т. е. $k = 1$. Тогда $b = a^l$, $a^{2l-1} = l$, следовательно, $l \geqslant 2^{2l-1}$, что невозможно при $l \geqslant 2$.

97.6. Если $n = 2k + 1$ — любое нечетное число, большее 1, то каждое его представление в требуемом по условию задачи виде содержит единицу в качестве слагаемого. Убрав эту единицу, мы получим представление числа $2k$. Верно, очевидно, и обратное. Следовательно,

$$f(2k + 1) = f(2k). \tag{1}$$

Если $n = 2k$ — любое четное число, то каждое его представление в требуемом виде принадлежит к одному из двух типов: либо оно содержит слагаемое 1, либо не содержит таких слагаемых. В первом случае, убрав одно слагаемое 1, мы получим представление числа $2k - 1$. Как и выше, легко заметить, что есть взаимно однозначное соответствие между всеми представлениями числа $2k - 1$ и представлениями числа $2k$ первого типа. Во втором случае мы можем разделить все слагаемые на 2 и получить представление числа k. Это соответствие также взаимно однозначно. Итак,

$$f(2k) = f(2k - 1) + f(k). \tag{2}$$

Обе полученные формулы выполнены для всех натуральных $k \geqslant 1$. Очевидно, что $f(1) = 1$. Пусть по определению $f(0) = 1$, тогда формула (1) выполнена и при $k = 0$. Заметим еще, что из формул (1) и (2) следует, что $f(n)$ не убывает.

Согласно формуле (1) число $f(2k - 1)$ в формуле (2) можно заменить на $f(2k - 2)$, откуда следуют равенства

$$f(2k) - f(2k - 2) = f(k) \text{ для } k = 1, 2, 3, \ldots .$$

Суммируя эти равенства от 1 до k, получаем, что

$$f(2n) = f(0) + f(1) + \ldots + f(n), \; n = 1, 2, 3, \ldots . \tag{3}$$

В правой части равенства (3) каждое слагаемое не больше последнего, а так как $2 = f(2) \leqslant f(n)$ для $n \geqslant 2$, то

$$f(2n) = 2 + (f(2) + \ldots + f(n)) \leqslant 2 + (n - 1)f(n) \leqslant$$
$$\leqslant f(n) + (n - 1)f(n) = nf(n)$$
$$\text{для } n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Следовательно,

$$f(2^n) \leqslant 2^{n-1} \cdot f(2^{n-1}) \leqslant 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdot f(2^{n-2}) \leqslant \ldots$$
$$\ldots \leqslant 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+1} \cdot f(2) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2.$$

И так как $2^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot 2 < 2^{\frac{n^2}{2}}$ для $n \geqslant 3$, то верхняя оценка для $f(2^n)$ получена.

Чтобы получить нижнюю оценку, докажем сначала, что

$$f(b+1) - f(b) \geqslant f(a+1) - f(a), \qquad (4)$$

если $b \geqslant a \geqslant 0$, где a, b — целые числа одинаковой четности. Действительно, если числа a и b — четные, то из формулы (1) следует, что каждая часть неравенства (4) обращается в нуль, а если они оба нечетные, то из формулы (2) следует, что

$$f(b+1) - f(b) = f\left(\frac{b+1}{2}\right) \text{ и } f(a+1) - f(a) = f\left(\frac{a+1}{2}\right).$$

Остается вспомнить, что f не убывает.

Возьмем произвольные натуральные числа r и k такие, что $r \geqslant k$, r — четное, и в неравенство (4) подставим $a = r - j$, $b = r + j$ для $j = 0, \ldots, k - 1$. Сложив полученные неравенства, имеем

$$f(r+k) - f(r) \geqslant f(r+1) - f(r-k+1).$$

Так как r четно, то $f(r+1) = f(r)$, и, следовательно,

$$f(r+k) + f(r-k+1) \geqslant 2f(r) \text{ для } k = 1, \ldots, r.$$

Суммируя эти неравенства для $k = 1, \ldots, r$, запишем

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(2r) \geqslant 2rf(r).$$

В силу равенства (3) левая часть полученного неравенства равна $f(4r) - 1$. Поэтому

$$f(4r) \geqslant 2rf(r) + 1 > 2rf(r).$$

Возьмем $r = 2^{m-2}$. Тогда

$$f(2^m) > 2^{m-1} f(2^{m-2}). \qquad (5)$$

(Заметим, что $r = 2^{m-2}$ четно при $m > 2$, $m \in \boldsymbol{N}$; однако неравенство (5) справедливо и при $m = 2$.)

Наконец, пусть $n > 1$, $n \in \boldsymbol{N}$. Если l — такое натуральное число, что $2l \leqslant n$, то, применяя неравенство (5) к $m = n$, $n - 2, \ldots, n - 2l + 2$, получаем, что

$$f(2^n) > 2^{n-1} \cdot f(2^{n-2}) > 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot f(2^{n-4}) >$$
$$> 2^{n-1} \cdot 2^{n-3} \cdot 2^{n-5} \cdot f(2^{n-6}) > \ldots$$
$$\ldots > 2^{(n-1)+(n-3)+\ldots+(n-2l+1)} \cdot f(2^{n-2l}) =$$
$$= 2^{l(n-l)} \cdot f(2^{n-2l}).$$

Теперь, взяв $l = \frac{n}{2}$, если n четно, или $l = \frac{n-1}{2}$, если n нечетно, получим:

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2}{4}} \cdot f(2^0) = 2^{\frac{n^2}{4}}, \text{ где } n \text{ — четное число;}$$

$$f(2^n) > 2^{\frac{n^2-1}{4}} \cdot f(2^1) = 2^{\frac{n^2-1}{4}} \cdot 2 > 2^{\frac{n^2}{4}}, \text{ где } n \text{ — нечетное число.}$$

Нужный результат доказан для $n \geqslant 2$. Непосредственно проверяется, что и для $n = 1$ соответствующее неравенство справедливо.

1998 год

98.1. а) Докажем, что если около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность, то $S_{APB} = S_{CPD}$. Действительно, в этом случае серединные перпендикуляры к непараллельным сторонам AB и CD пересекаются в центре описанной окружности, т. е. $PA = PB = PC = PD$ (рис. 4). Кроме того, $\angle APB + \angle CPD = 180°$, так как $90° = \angle AOB = \frac{1}{2}(\breve{AB} + \breve{CD})$. Значит,

$$\sin\angle APB = \sin\angle CPD \Rightarrow S_{APB} = \frac{1}{2} PA \cdot PB \cdot \sin\angle APB = \frac{1}{2} PC \cdot PD \cdot \sin\angle CPD = S_{CPD}.$$

б) Докажем, что если $S_{APB} = S_{CPD}$, то около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Пусть это не так, тогда без ограничения общности можно записать, что $PA = PB > PC = PD$. Проведем окружность радиуса PA с центром в точке P. Пусть она пересечет второй раз прямую AC в точке K, прямую BD в точке L (рис. 5). Тогда

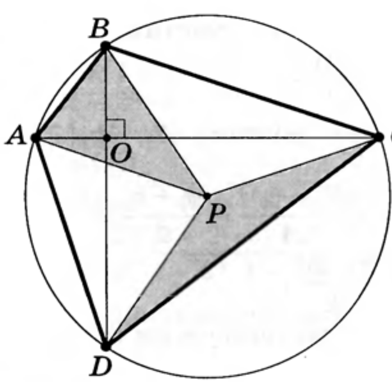

Рис. 4

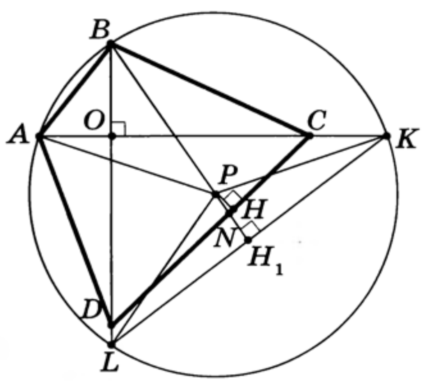

Рис. 5

точки K и C лежат по одну сторону от перпендикуляра, опущенного из P на прямую AC (так как точки A и C, а также A и K лежат по разные стороны от него), значит, точка C лежит между точками A и K. Также точки L и D лежат по одну сторону от перпендикуляра, опущенного из точки P на прямую BD, и точка D лежит между точками B и L. Тогда точка P и отрезок KL лежат по разные стороны от прямой CD. Отсюда следует, что если H_1 — середина KL, то отрезки PH_1 и CD пересекаются в некоторой точке N. Заметим, что PH_1 — высота треугольника KLP и $PH_1 > PN \geqslant PH$, где PH — высота треугольника CDP. Кроме того, $CD = \sqrt{OC^2 + OD^2} < \sqrt{OK^2 + OL^2} = KL$, поэтому $S_{KPL} = \frac{1}{2} PH_1 \cdot KL > \frac{1}{2} PH \cdot CD = S_{CPD}$. Но из пункта «а» следует, что $S_{KPL} = S_{APB}$, т. е. $S_{APB} > S_{CPD}$ — противоречие, значит, $PA = PB = PC = PD$, что и требовалось доказать.

98.2. Назовем *тройкой* двух судей и одного участника, если оценки, выставленные участнику этими судьями, совпадают. Пусть l — количество различных троек. Оценим число l. С одной стороны, по условию для любых двух судей существует не более k троек, включающих этих судей, поэтому

$$k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \geqslant l \qquad (1)$$

(где $\frac{b(b-1)}{2}$ — количество неупорядоченных пар судей).

С другой стороны, если b_1 — количество судей, поставивших некоторому определенному участнику оценку «удовлетворительно», а b_2 — количество судей, поставивших тому же участнику оценку «неудовлетворительно», то число троек, в состав которых входит этот участник, равно

$$\frac{b_1(b_1-1)}{2} + \frac{b_2(b_2-1)}{2}.$$

Но $b = b_1 + b_2$ — нечетное число, поэтому $|b_1 - b_2| \geqslant 1$, и, значит,

$$\frac{b_1(b_1-1)}{2} + \frac{b_2(b_2-1)}{2} = \frac{(b_1+b_2)^2}{4} + \frac{(b_1-b_2)^2}{4} - \frac{b_1+b_2}{2} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{b^2}{4} + \frac{1}{4} - \frac{b}{2} = \frac{(b-1)^2}{4}.$$

Суммируя все неравенства, соответствующие всем a участникам, получаем

$$l \geqslant a \cdot \frac{(b-1)^2}{4}. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) следует:

$$k \cdot \frac{b(b-1)}{2} \geqslant a \cdot \frac{(b-1)^2}{4} \Rightarrow \frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b},$$

что и требовалось доказать.

98.3. **Ответ.** В указанном виде представимы все нечетные числа, и только они.

Докажем сначала, что k нечетно. Действительно, если $n = 1$, то $d(n) = d(n^2) = 1 \Rightarrow k = 1$. Если $n > 1$, то

$$n = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{r_s}$$

(разложение числа n по степеням простых чисел). Тогда $n^2 = p_1^{2r_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{2r_s}$, поэтому число $k = \dfrac{d(n^2)}{d(n)}$ нечетное, так как числитель этой дроби

$$d(n^2) = (2r_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2r_s + 1) \text{ —}$$

нечетное число. Значит, $k = 2m + 1$.

Индукцией по m докажем, что для каждого нечетного k найдется такое n, что $k = \dfrac{d(n^2)}{d(n)}$, т. е.

$$k = \frac{(2r_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2r_s + 1)}{(r_1 + 1) \cdot \ldots \cdot (r_s + 1)}. \qquad (1)$$

Для $m = 1$ получим

$$2m + 1 = 3 = \frac{(2 \cdot 4 + 1) \cdot (2 \cdot 2 + 1)}{(4 + 1) \cdot (2 + 1)}.$$

Пусть для всех $m < M$ каждое число $2m + 1$ представимо в виде дроби (1). Докажем, что число $k = 2M + 1$ представимо в том же виде.

Пусть $k + 1 = 2^l \cdot t$, где t нечетно, тогда

$$t = \frac{k+1}{2^l} \leqslant \frac{k+1}{2} < k,$$

так как $l \geqslant 1$ и $k > 1$. Рассмотрим числа $r_1, \ldots, r_l$ вида $r_1 = 2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0$, $r_2 = 2^{l+1} \cdot t - 2^1 \cdot t - 2^1$, $\ldots$, $r_l = 2^{l+l-1} \cdot t - 2^{l-1} \cdot t - 2^{l-1}$, тогда для $n_1 = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_l^{r_l}$ запишем:

$$k_1 = \frac{d(n_1^2)}{d(n_1)} = \frac{(2^{l+1} \cdot t - 2^1 \cdot t - 2^1 + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{l+l} \cdot t - 2^l \cdot t - 2^l + 1)}{(2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0 + 1) \cdot \ldots \cdot (2^{l+l-1} \cdot t - 2^{l-1} \cdot t - 2^{l-1} + 1)} =$$

$$= \frac{2^{2l} \cdot t - 2^l \cdot t - 2^l + 1}{2^l \cdot t - 2^0 \cdot t - 2^0 + 1} = \frac{(2^l - 1)(2^l \cdot t - 1)}{(2^l - 1)t} = \frac{2^l \cdot t - 1}{t}.$$

По предположению индукции так как $t < k$, то найдется число $n_2 = q_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot q_s^{\alpha_s}$ такое, что t представимо в виде $t = \dfrac{d(n_2^2)}{d(n_2)}$. Выбрав различные простые числа $p_1, \ldots, p_l$, отличные от $q_1, \ldots, q_s$, получим, что для $n = n_1 \cdot n_2$ справедливо равенство

$$\frac{d(n^2)}{d(n)} = \frac{d(n_1^2)}{d(n_1)} \cdot \frac{d(n_2^2)}{d(n_2)} = k_1 \cdot t = 2^l \cdot t - 1 = k.$$

98.4. **Ответ.** $(11, 1)$, $(49, 1)$, $(7k^2, 7k)$, $k \in \mathbf{N}$.

Если $a^2b + a + b$ делится на $ab^2 + b + 7$, то

$$b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$$

делится на $ab^2 + b + 7$.

I случай. $b^2 - 7a = 0$. Тогда $b = 7k$, $k \in \mathbf{N}$, откуда $a = 7k^2$. Легко проверить, что при таких a и b условие выполнено.

II случай. $b^2 - 7a > 0$. Тогда $0 < b^2 - 7a < ab^2 + b + 7$ — делимость невозможна.

III случай. $b^2 - 7a < 0$. Если $b^2 - 7a$ делится на $ab^2 + b + 7$, то $7a - b^2 \geqslant ab^2 + b + 7$, откуда $7a > ab^2$, $7 > b^2$, т. е. $b = 1$ или $b = 2$.

Если $b = 1$, то $7a - b^2 = 7a - 1$ делится на $ab^2 + b + 7 = a + 8$, откуда $7(a + 8) - (7a - 1) = 57$ делится на $a + 8$. Получаем, что $a + 8 = 19$ или $a + 8 = 57$. Проверка показывает, что оба варианта подходят.

Если $b = 2$, то $7a - b^2 = 7a - 4$ делится на $ab^2 + b + 7 = 4a + 9$, откуда $7(4a + 9) - 4(7a - 4) = 79$ делится на $4a + 9$, отсюда $79 = 4a + 9$, что невозможно.

98.5. Заметим, что $\angle RMB = \angle AML = \angle LKM = \angle KSB$ (рис. 6). Аналогично $\angle MRB = \angle SKB$, отсюда вытекает подобие треугольников RMB и KSB. Из подобия следует, что

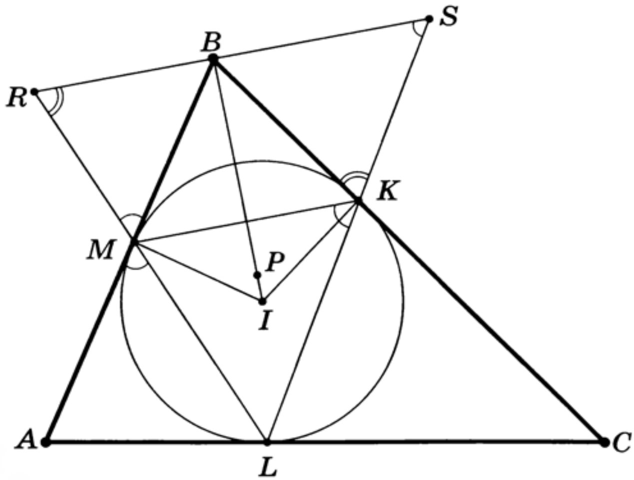

Рис. 6

$BR \cdot BS = BK \cdot BM$. Из равных прямоугольных треугольников BKI и BMI получаем $BK = BM < BI$, $BI \perp KM$. На отрезке BI найдется такая точка P, что $BP = BK$. Имеем $RS \perp BP$ (так как $MK \parallel RS$), $BP^2 = BR \cdot BS$, откуда треугольник PRS — прямоугольный с прямым углом RPS. Треугольник PRS лежит внутри треугольника IRS, поэтому $\angle RIS < \angle RPS = 90°$.

98.6. **Ответ.** 120.

Положим $f(1) = k$. Тогда $f(kt^2) = (f(t))^2$ и $f(f(t)) = k^2t$. Далее,

$$(f(kt))^2 = 1 \cdot (f(kt))^2 = f((kt)^2 \cdot f(1)) = f(k^3t^2) =$$
$$= f(k^2 \cdot (kt^2)) = f(f(f(kt^2))) = k^2 f(kt^2) = k^2(f(t))^2.$$

Отсюда вытекает, что $f(kt) = kf(t)$ (можно выносить k за скобку).

Докажем индукцией по n, что $f(k^{2^n-1}t^{2^n}) = (f(t))^{2^n}$. Для $n = 1$ равенство верно. Пусть оно верно для $n = m$, тогда

$$f(k^{2^{m+1}-1}t^{2^{m+1}}) = f(k \cdot (k^{2^m-1}t^{2^m})^2) =$$
$$= (f(k^{2^m-1}t^{2^m}))^2 = (f(t)^{2^m})^2 = (f(t))^{2^{m+1}},$$

т. е. верно для $n = m + 1$. Для любого n выполнено равенство $(f(t))^{2^n} = k^{2^n-1}f(t^{2^n})$, значит, $(f(t))^{2^n}$ делится на k^{2^n-1}.

Предположим, что $f(t)$ не делится на k, тогда найдется простое число p такое, что степень a вхождения числа p в разложение k больше степени b вхождения числа p в разложение $f(t)$. Тогда найдется такое n, что $\frac{b}{a} < \frac{2^n-1}{2^n}$, откуда $2^nb < (2^n-1)a$, что противоречит делимости $(f(t))^{2^n}$ на k^{2^n-1}. Значит, $f(t)$ делится на k. Теперь можем считать, что $k = 1$, иначе рассмотрим функцию $g\colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ такую, что $f(t) = kg(t)$. Для функции g верно равенство из условия задачи (так как $f(t^2f(s)) = f(kt^2g(s)) = kf(t^2g(s)) = k^2g(t^2g(s))$ и $s(f(t))^2 = k^2s(g(t))^2$ и значение $g(1998)$ меньше, чем $f(1998)$.

Итак, мы имеем $f(1) = 1$, $f(f(t)) = t$ и $f(t^2) = (f(t))^2$. Отсюда $(f(ts))^2 = f(t^2s^2) = f(t^2f(f(s^2))) = f(s^2)(f(t))^2 = (f(s))^2(f(t))^2$, следовательно, $f(ts) = f(t)f(s)$ (т. е. f мультипликативна и определяется однозначно по значениям на простых числах: $f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}) = (f(p_1))^{\alpha_1}(f(p_2))^{\alpha_2}\ldots(f(p_k))^{\alpha_k}$). Далее, если $t > 1$, то $f(t) > 1$, иначе $t = f(f(t)) = f(1) = 1$. Пусть число p — простое и число $f(p)$ — составное: $f(p) = ts$, где $t > 1$, $s > 1$. Тогда $p = f(f(p)) = f(ts) = f(t)f(s)$ — составное число, что неверно. Таким образом, для простого числа p значение $f(p) = q$ — простое число, причем $f(q) = p$.

Наоборот, любая мультипликативная функция, задающая такое соответствие $p_i \leftrightarrow q_i$ на множестве простых чисел, удовлетворяет условию. Действительно, если $t = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, $s = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k}$ (показатели α_i, β_i неотрицательны), то

$$f(t^2 f(s)) = f(p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \dots p_k^{2\alpha_k} \cdot q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_k^{\beta_k}) =$$
$$= q_1^{2\alpha_1} q_2^{2\alpha_2} \dots q_k^{2\alpha_k} \cdot p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} =$$
$$= p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} (q_1^{\alpha_1} q_2^{\alpha_2} \dots q_k^{\alpha_k})^2 = s(f(t))^2.$$

Имеем

$$f(1998) = f(2 \cdot 3^3 \cdot 37) = f(2)(f(3))^3 f(37) \leqslant pq^3 r$$

(где p, q, r — различные простые числа), что не меньше $2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

Равенство $f(1998) = 120$ достигается для любой мультипликативной функции f, заданной взаимно однозначным соответствием простых чисел, при котором $2 \leftrightarrow 3$ и $5 \leftrightarrow 37$.

1999 год

99.1. **Ответ.** S — множества, состоящие из вершин правильного n-угольника.

Пусть G — центр тяжести множества S. Так как S переходит в себя при симметрии r_{AB} относительно серединного перпендикуляра к отрезку AB (где $A \in S$, $B \in S$), то $r_{AB}(G) = G$. Отсюда вытекает, что любые две точки множества S равноудалены от G, и, значит, все точки множества S лежат на одной окружности с центром G. Таким образом, точки множества S — вершины выпуклого многоугольника $A_1A_2 \dots A_n$, вписанного в окружность. Заметим, что $r_{A_1A_3}$ переводит каждую из двух полуплоскостей, ограниченных прямой A_1A_3, в себя, поэтому образом точки A_2 может быть только она сама. Отсюда $A_1A_2 = A_2A_3$. Аналогично $A_2A_3 = A_3A_4 = \dots = A_nA_1$, и многоугольник $A_1A_2 \dots A_n$ — правильный.

Наоборот, множество S, состоящее из вершин правильного n-угольника, удовлетворяет условию задачи.

99.2. **Ответ.** $C = \dfrac{1}{8}$.

Неравенство в задаче симметрично и однородно, поэтому можно считать, что $x_1 \geqslant x_2 \geqslant \dots \geqslant x_n \geqslant 0$ и $\sum\limits_i x_i = 1$. Положим

$$F(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

Попробуем увеличить значение F, заменив

$$x = (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, 0, \dots, 0)$$

на

$$x' = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_k + x_{k+1}, 0, \dots, 0)$$

(здесь x_{k+1} — последнее ненулевое число набора, $k \geqslant 2$). Получим

$$F(x') - F(x) = x_k x_{k+1}\left(3(x_k + x_{k+1})\sum_{i=1}^{k-1} x_i - x_k^2 - x_{k+1}^2\right) =$$

$$= x_k x_{k+1}(3(x_k + x_{k+1})(1 - x_k - x_{k+1}) - x_k^2 - x_{k+1}^2) =$$

$$= x_k x_{k+1}((x_k + x_{k+1})(3 - 4(x_k + x_{k+1})) + 2x_k x_{k+1}).$$

Так как $1 \geqslant x_1 + x_k + x_{k+1} \geqslant \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1}) + x_k + x_{k+1}$, то $\frac{3}{4} > \frac{2}{3} \geqslant x_k + x_{k+1}$, следовательно,

$$F(x') - F(x) > 0.$$

Повторив указанную выше замену несколько раз, получим

$$F(x) \leqslant F(a, b, 0, \dots, 0) = ab(a^2 + b^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(2ab)(1 - 2ab) \leqslant \frac{1}{8} = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \dots, 0\right).$$

Значит, $C = \frac{1}{8}$.

Равенство выполнено тогда и только тогда, когда два числа набора $x_1, \dots, x_n$ равны между собой, а остальные числа равны нулю.

99.3. **Ответ.** $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)$.

Пусть $n = 2m$. Раскрасим клетки в шахматном порядке. Покажем, что $\frac{m(m+1)}{2}$ — минимальное количество отмеченных белых клеток. То же самое будет верно для отмеченных черных клеток, и мы получим в ответе число $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2} + 1\right)$.

Длиной диагонали будем называть количество клеток, из которых она состоит. Выделим черные диагонали нечетной длины через одну (рис. 7). Каждая отмеченная белая клетка является соседней для не более чем двух клеток одной из этих диагоналей. Так как длины выделенных черных диагоналей равны 1, 3, 5, ..., $2m - 1$, то должно быть отмечено не менее $1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$ белых клеток.

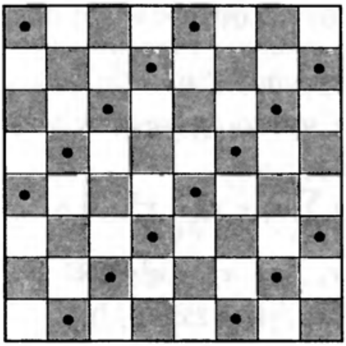

Рис. 7

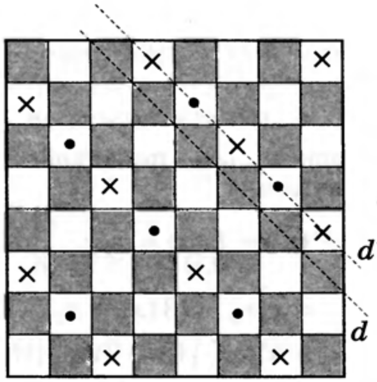

Рис. 8

Выделим белые диагонали нечетной длины через одну, и в каждой из них отметим белые клетки через одну, начиная от края доски (рис. 8). Каждая черная диагональ d, параллельная выделенным белым, имеет соседнюю выделенную белую диагональ d'. Поэтому для любой клетки диагонали d найдется соседняя отмеченная белая клетка на диагонали d'. Длины выделенных белых диагоналей равны 1, 3, 5, ..., $2m - 1$, поэтому в нашем примере отмечено ровно $1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$ белых клеток.

99.4. **Ответ.** $(1, p)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$ (p — любое простое число).

При $n = 1$ можно взять любое простое p.

Если n — четно, то $p - 1$ нечетно, откуда $p = 2$ и $n = 2$. Найденная пара подходит.

Пусть $n > 1$ — нечетно, q — наименьший простой делитель числа n (в частности $(n, q - 1) = 1$). Из условия $(p-1)^n \equiv -1 \pmod n$ вытекает, что $(p-1)^n \equiv -1 \pmod q \Rightarrow$ $\Rightarrow (p-1)^{2n} \equiv 1 \pmod q$. Из условия следует, что $p - 1$ и n взаимно просты, поэтому $p - 1$ не делится на q, и согласно малой теореме Ферма $(p-1)^{q-1} \equiv 1 \pmod q$. Пусть y — наименьшее натуральное число, для которого $(p-1)^y \equiv$ $\equiv 1 \pmod q$. Разделим $2n$ на y с остатком: $2n = ky + r$, $0 \leqslant r < y$. Имеем

$$1 \equiv (p-1)^{2n} \equiv ((p-1)^y)^k \cdot (p-1)^r \equiv (p-1)^r \pmod q.$$

Из определения y следует, что $r = 0$, т. е. $2n$ делится на y. Аналогично $q - 1$ делится на y. Но n и $q - 1$ взаимно просты, поэтому $y = 1$ или $y = 2$.

При $y = 1$ получаем $(p-1) \equiv 1 \pmod q \Rightarrow (p-1)^n \equiv$ $\equiv 1 \pmod q \Rightarrow -1 \equiv 1 \pmod q$ — противоречие.

Пусть $y = 2$, тогда

$$(p-1)^2 \equiv 1 \pmod q \Rightarrow (p-1)^n \equiv ((p-1)^2)^{\frac{n-1}{2}} \cdot (p-1) \equiv$$
$$\equiv p - 1 \pmod q \Rightarrow -1 \equiv p - 1 \pmod q \Rightarrow p = q.$$

Если $n > q$, то в силу выбора q имеем $q^2 \leqslant n$. Из неравенства $n \leqslant 2p = 2q$ получаем, что $q \leqslant 2$ — противоречие.

Пусть теперь $n = q = p$. Число $(p-1)^p + 1 = C_p^1 p - C_p^2 p^2 + \ldots$ (здесь все слагаемые, кроме первого, делятся на p^3) должно делиться на p^{p-1}. Отсюда $p \leqslant 3$. Получаем $p = 3$, $n = 3$. Эта пара удовлетворяет условию.

99.5. **Лемма 1.** Пусть окружность γ_1 касается окружности γ внутренним образом в точке P, а хорды XY окружности γ в точке Q. Тогда середина R дуги XY, не содержащей точки P, лежит на прямой PQ, и ее степень относительно окружности γ_1 равна RX^2 (рис. 9).

Доказательство. Гомотетия с центром P, переводящая γ_1 в γ, переводит точку Q в точку $R' \in PQ$ на окружности γ, а прямую XY в прямую l, касающуюся окружности γ, в точке R'. Получаем, что $l \parallel XY$, следовательно, R' — середина дуги XY, т. е. $R = R'$ (точка R' совпадает с точкой R).

Поскольку $\angle XPR = \angle XYR = \angle YXR$, треугольники XPR и QXR подобны, откуда $RP \cdot RQ = RX^2$. Лемма доказана.

Лемма 2. Пусть окружность γ_1 проходит через центр S окружности γ_2 и общие касательные к γ_1 и γ_2 касаются окружности γ_1 в точках X и Y. Тогда прямая XY касается окружности γ_2 (рис. 10).

Доказательство. Из касания окружности и прямых имеем $\angle TXS = \angle SYX$, а из симметрии относительно серединного перпендикуляра к XY получаем, что $\angle SXY =$ $= \angle SYX$. Отсюда $\angle TXS = \angle SXY$, значит, прямая XY сим-

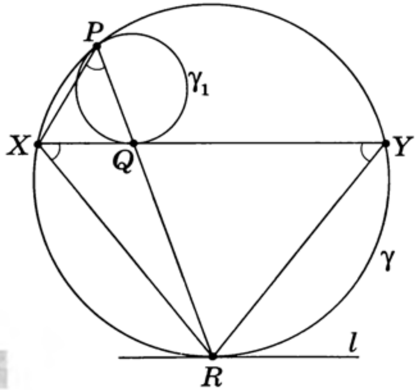

Рис. 9

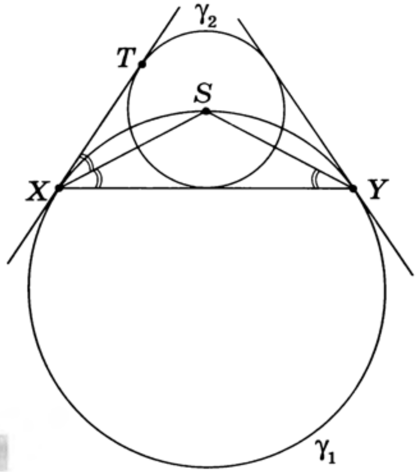

Рис. 10

метрична прямой XT относительно XS, т. е. XT и XY — пара симметричных относительно XS касательных к γ_2. Лемма доказана.

Перейдем к решению задачи. Проведем хорды EF и GH окружности γ, касающиеся окружностей Γ_1 и Γ_2 (рис. 11). Заметим, что прямая AB — радикальная ось окружностей Γ_1 и Γ_2, т. е. множество точек, имеющих равные степени относительно Γ_1 и Γ_2. По лемме 1 середина A' дуги EAF

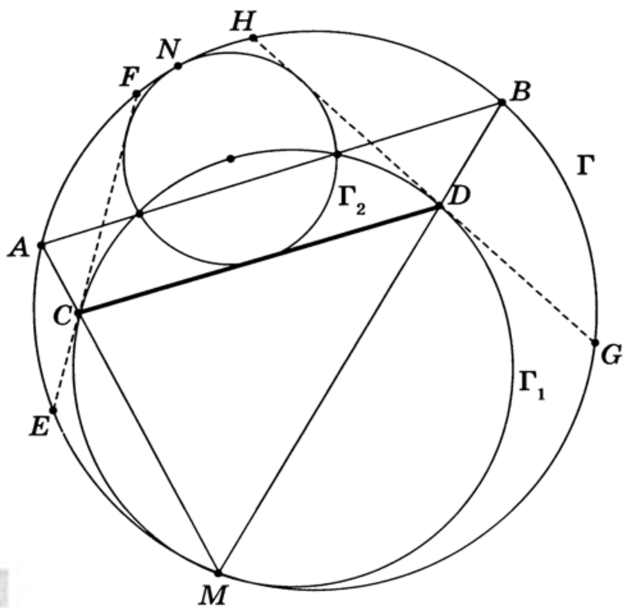

Рис. 11

имеет одинаковые степени (равные $A'E^2$) относительно Γ_1 и Γ_2, поэтому $A' \in AB$, т. е. A' совпадает с A. Аналогично доказываем, что B — середина дуги GBH. По лемме 1 прямая MA пересекает второй раз окружность Γ_1 в точке касания этой окружности с EF, отсюда $C \in EF$. Аналогично $D \in GH$. Применив теперь лемму 2 для окружностей Γ_1 и Γ_2, получим, что CD касается окружности Γ_2.

99.6. **Ответ.** $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

Пусть A — множество значений функции f и $c = f(0)$. Положив $x = y = 0$, мы получим $f(-c) = f(c) + c - 1$, поэтому $c \neq 0$.

Легко найти сужение функции f на множество A: взяв $x = f(y)$, получим

$$f(x) = \frac{c+1}{2} - \frac{x^2}{2} \qquad (1)$$

для всех $x \in A$.

Основной шаг доказательства состоит в том, чтобы показать, что множество разностей $x - y$, где x, $y \in A$, есть все множество $\boldsymbol{R}$. Для $y = 0$ мы имеем

$$\{f(x-c) - f(x) \mid x \in \boldsymbol{R}\} = \{cx + f(c) - 1 \mid x \in \boldsymbol{R}\} = \boldsymbol{R},$$

поскольку $c \neq 0$.

Теперь мы можем получить значение $f(x)$ для произвольного x: если мы выберем $y_1, y_2 \in A$ такие, что $x = y_1 - y_2$, и используем (1), то получим

$$f(x) = f(y_1 - y_2) = f(y_2) + y_1y_2 + f(y_1) - 1 =$$
$$= \frac{c+1}{2} - \frac{y_2^2}{2} + y_1y_2 + \frac{c+1}{2} - \frac{y_1^2}{2} - 1 = c - \frac{(y_1-y_2)^2}{2} = c - \frac{x^2}{2}. \qquad (2)$$

Сравнивая равенства (1) и (2), получим $c = 1$, и поэтому $f(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$ для всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Проверка показывает, что найденная функция удовлетворяет функциональному уравнению задачи.

2000 год

00.1. Пусть $K = MN \cap AB$ (рис. 12). По теореме о касательной и секущей $KA^2 = KN \cdot KM = KB^2$, следовательно, K — середина AB. Так как $PQ \parallel AB$, то M — середина PQ. Поэтому достаточно доказать, что $EM \perp PQ$.

Из параллельности прямых CD и AB вытекает, что A и B — середины дуг CM и DM, т. е. треугольники ACM и BDM — равнобедренные. Из сказанного следует, что $\angle BAM = \angle AMC = \angle ACM = \angle EAB$ и $\angle ABM = \angle BMD = \angle BDM = \angle EBA$, т. е. точки E и M симметричны относи-

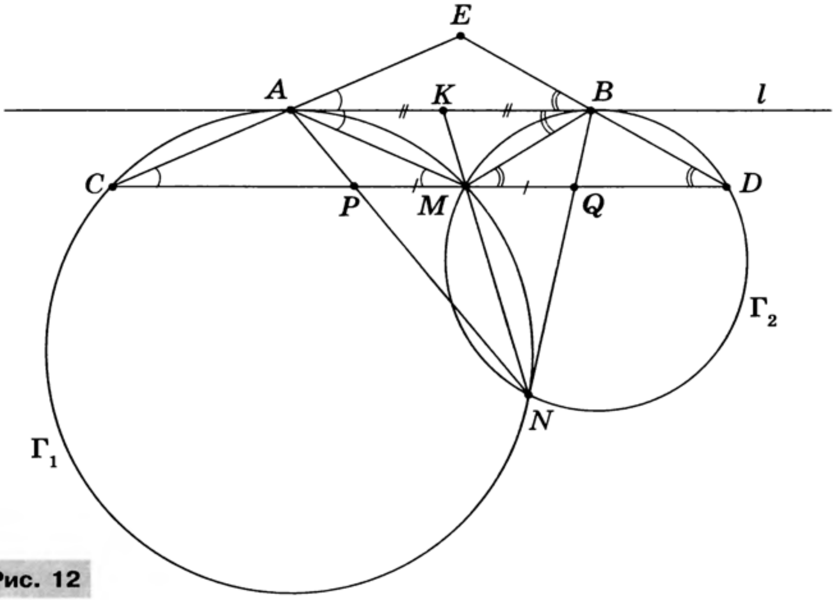

Рис. 12

тельно прямой AB. Значит, прямая EM перпендикулярна AB, а следовательно, и $EM \perp PQ$, т. е. треугольник EPQ — равнобедренный и $EP = EQ$.

00.2. Положим $a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$, $c = \frac{z}{x}$, где $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$. Тогда исходное неравенство перепишется в виде

$$(x - y + z)(y - z + x)(z - x + y) \leqslant xyz. \qquad (1)$$

Одно из возможных доказательств этого неравенства таково. Заметим, что среди чисел $u = x - y + z$, $v = y - z + x$, $w = z - x + y$ не более одного отрицательного, так как сумма любых двух из них положительна. Если отрицательное число одно, то $uvw \leqslant 0 < xyz$. Если же $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$, $w \geqslant 0$, то достаточно перемножить три верных неравенства:

$$x^2 \geqslant x^2 - (y - z)^2,$$
$$y^2 \geqslant y^2 - (z - x)^2,$$
$$z^2 \geqslant z^2 - (x - y)^2,$$

Замечание. При $u > 0$, $v > 0$, $w > 0$ неравенство (1) можно интерпретировать геометрически: в произвольном треугольнике радиус вписанной окружности не превосходит половины радиуса описанной окружности.

00.3. **Ответ.** $\lambda \geqslant \frac{1}{n-1}$.

Покажем сначала, что при указанных значениях λ мы можем увести всех блох так далеко вправо, как мы того пожелаем. Будем использовать следующую стратегию: на каждом прыжке выберем самую левую блоху и заставим ее прыгнуть через самую правую блоху. После k таких прыжков получим конфигурацию блох, для которой обозначим через d_k максимальное, а через δ_k минимальное расстояние между блохами. Очевидно, что $d_k \geqslant (n-1)\delta_k$. После $(k+1)$-го прыжка среди расстояний между соседними блохами появляется новое, равное λd_k. Может оказаться, что $\delta_{k+1} = \lambda d_k$. Если это не так, то $\delta_{k+1} \geqslant \delta_k$. В любом из этих случаев $\frac{\delta_{k+1}}{\delta_k} \geqslant \min\left\{1, \frac{\lambda d_k}{\delta_k}\right\} \geqslant \min\{1, (n-1)\lambda\}$.

Следовательно, если $\lambda \geqslant \frac{1}{n-1}$, то $\delta_{k+1} \geqslant \delta_k$ для всех k, т. е. наименьшее расстояние между блохами не убывает. Кроме того, $\delta_n > 0$, откуда и вытекает доказываемое утверждение.

Докажем теперь, что при $\lambda < \frac{1}{n-1}$ из любой начальной конфигурации нельзя увести всех блох далеко вправо никакой последовательностью прыжков. Введем на данной прямой систему координат. Пусть s_k — сумма координат всех блох после k-го прыжка в произвольной последовательности прыжков, а w_k — наибольшая из этих координат (т. е. координата самой правой блохи). Заметим, что $s_k \leqslant nw_k$. После $(k+1)$-го прыжка блоха из точки A перепрыгнула через B и оказалась в C. Пусть координаты точек A, B и C равны a, b, c соответственно. Тогда $s_{k+1} = s_k + c - a$. По условию $c - b = \lambda(b - a)$, т. е. $\lambda(c - a) = (1 + \lambda)(c - b)$. Значит,

$$s_{k+1} - s_k = c - a = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c - b).$$

Предположим, что $c > w_k$. Блоха, которая только что прыгнула, заняла новую крайнюю правую позицию $w_{k+1} = c$. Так как b — положение какой-то блохи после k-го прыжка, то $b \leqslant w_k$. Следовательно,

$$s_{k+1} - s_k = \frac{1+\lambda}{\lambda}(c - b) \geqslant \frac{1+\lambda}{\lambda}(w_{k+1} - w_k).$$

Эта оценка справедлива и в случае $c \leqslant w_k$:

$$w_{k+1} - w_k = 0,\ s_{k+1} - s_k = c - a > 0.$$

Пусть $z_k = \frac{1+\lambda}{\lambda} w_k - s_k$ для $k = 0, 1, 2, \ldots$. Применяя сделанную выше оценку, получаем, что $z_{k+1} - z_k \leqslant 0$. В частности, $z_k \leqslant z_0$ для всех k. Здесь рассматриваем

$\lambda < \dfrac{1}{n-1}$, т. е. $1 + \lambda > n\lambda$. В этом случае $z_k = (n + \mu) w_k - s_k$, где $\mu = \dfrac{1+\lambda}{\lambda} - n > 0$. Поэтому из равенства

$$z_k = \mu w_k + (n w_k - s_k) \geqslant \mu w_k$$

следует, что $w_k \leqslant \dfrac{z_0}{\mu}$ для всех k. Таким образом, положение самой правой блохи не превосходит некоторой константы (зависящей от n, λ и начального расположения блох, но не от последовательности прыжков).

00.4. **Ответ.** 12.

Пусть карточка 1 (или число 1) лежит в красном ящике (сокращенно КЯ), а карточка с наименьшим числом k, не лежащая в КЯ, лежит в белом ящике (БЯ). Тогда карточка с числом $k - 1$ находится в КЯ.

По условию в синем ящике (СЯ) есть хотя бы одна карточка; пусть n — наименьшее число (т. е. карточка с наименьшим числом) в СЯ, т. е. $n > k$. Если карточка $n - 1$ лежит в КЯ, то зритель может вытащить либо карточки $n - 1$ и k из КЯ и БЯ, либо карточки n и $k - 1$ из СЯ и КЯ. Суммы чисел на карточках одинаковы, значит, в этом случае фокус не удастся. Следовательно, карточка $n - 1$ находится в БЯ.

Предположим, что карточка 2 лежит в КЯ. Тогда, взяв либо карточки 2 и $n - 1$ из КЯ и БЯ, либо карточки 1 и n из КЯ и СЯ, получим одинаковые суммы, значит, $k = 2$ и карточка 2 находится в БЯ.

Рассмотрим два случая.

1) В КЯ нет других карточек, кроме 1. Покажем, что тогда $n = 100$. Пусть $n < 100$. Тогда карточка $n + 1$ лежит либо в БЯ, либо в СЯ. Пары карточек $(1, n + 1)$ и $(2, n)$ с одинаковой суммой находятся в паре (КЯ, БЯ (СЯ)) и в паре (БЯ, СЯ) — фокус не удался. Значит, $n = 100$, т. е. в СЯ только одна карточка 100, в КЯ одна карточка 1, в БЯ карточки 2, 3, ..., 99. Покажем, что в этом случае фокус всегда удается: если мы берем карточки из БЯ и КЯ, то получаем суммы 3, 4, ..., 100, если из КЯ и СЯ — сумму 101, если из БЯ и СЯ — суммы 102, 103, ..., 199, т. е. суммы различны.

2) В КЯ есть другие числа, и m — наименьшее из них. Тогда $m > 2$, значит, карточка $m - 1$ не лежит в КЯ. Если карточка $m - 1$ находится в БЯ, то для пар $(m - 1, n)$ из БЯ и СЯ и $(n - 1, m)$ из БЯ и КЯ фокус не удастся. Значит, карточка $m - 1$ лежит в СЯ.

Лемма 1. Если в двух различных ящиках лежат карточки x и $x+1$, а в третьем — карточки y и $y+1$, то фокус не удастся.

Доказательство. Одинаковые суммы имеют пары $(x, y+1)$ и $(x+1, y)$ из разных пар ящиков.

Лемма 2. Если в одном ящике лежат карточки x и y, а в двух других — карточки $x+1$ и $y+1$ соответственно, то фокус не удастся.

Доказательство леммы 2 дословно повторяет доказательство леммы 1.

Выше мы показали, что для каждой пары ящиков есть карточки с двумя последовательными числами, а именно

КЯ, БЯ: 1, 2
БЯ, СЯ: $n-1$, n
СЯ, КЯ: $m-1$, m

Значит, по лемме 1 ни в одном из ящиков нет карточек с двумя последовательными числами. Если карточка x лежит в КЯ, а карточка $x+1$ лежит в СЯ, то по лемме 2 ($y=1$) фокус не удастся. Аналогично фокус не удастся, если карточка x находится в БЯ, а карточка $x+1$ находится в КЯ ($y=n-1$) и если карточка x лежит в СЯ, а карточка $x+1$ лежит в БЯ ($y=m-1$).

Итак, если карточка a находится в КЯ, то карточка $a+1$ лежит в БЯ, карточка $a+2$ — в СЯ, карточка $a+3$ — в БЯ и т. д. Значит, в КЯ находятся числа, сравнимые с 1 по модулю 3, в БЯ — сравнимые с числом 2, в СЯ — делящиеся на 3. Покажем, что такое расположение карточек подходит: сумма чисел на карточках из КЯ и БЯ делится на 3, из КЯ и СЯ сравнима с 1 по модулю 3, из СЯ и БЯ сравнима с 2 по модулю 3, т. е. всегда можно определить, из каких ящиков взяты карточки.

Из вышеизложенного ясно, что если карточка 1 лежит в КЯ, а карточка с наименьшим числом не из КЯ находится в БЯ, то существует два варианта раскладывания карточек. Аналогично рассуждаем в случае других пяти пар ящиков. Значит, всего имеется $2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$ различных способов.

00.5. **Ответ.** Существует.

Докажем по индукции, что для любого натурального k существует нечетное число n_k, имеющее k различных простых делителей, делящееся на 3 и такое, что $2^{n_k}+1$ делится на n_k.

Для $k=1$ можно взять $n=3$. Пусть число $n_k=n$, кратное 3, имеет k различных простых делителей, причем 2^n+1 делится на n.

Число $2^{3n} + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$ делится на $3n$. Это следует из того, что $2^n + 1$ делится на n, а число

$$2^{2n} - 2^n + 1 = (2^n - 2)(2^n + 1) + 3 \tag{1}$$

делится на 3 (поскольку при нечетном n числа $2^n + 1$ и $2^n - 2$ делятся на 3).

Число $2^{2n} - 2^n + 1$ не делится на 9, поскольку на 9 делится произведение $(2^n - 2)(2^n + 1)$. Значит, поскольку $2^{2n} - 2^n + 1 > 3$ при $n > 1$, то это число имеет при $n > 1$ простой делитель $p > 3$. Так как

$$\text{НОД}(2^n + 1,\ 2^{2n} - 2^n + 1) = 3,$$

что тоже ясно из равенства (1), то p — не делитель n.

Из сказанного следует, что число $3pn$ имеет $k + 1$ простой делитель, причем $2^{3pn} + 1$ делится на $3pn$. Последнее следует, например, из равенства

$$(2^{3n})^p + 1 = (2^{3n} + 1)((2^{3n})^{p-1} - (2^{3n})^{p-2} + \ldots + 1).$$

Для завершения решения достаточно положить $n_{k+1} = 3pn = 3pn_k$.

00.6. Пусть окружность ω радиуса r с центром I является вписанной в треугольник ABC окружностью. Впишем в эту окружность треугольник $A'B'C'$, гомотетичный треугольнику ABC с отрицательным коэффициентом (рис. 13). Докажем, что прямые l_1, l_2, l_3 содержат стороны треугольника $A'B'C'$; отсюда сразу будет следовать решение задачи.

Заметим, что $IB' = IC'$, $\angle B'IC' = 2\angle B'A'C' = 2\angle A$, откуда следует, что расстояние от I до прямой $B'C'$ равно $IB' \cos A = r \cos A$.

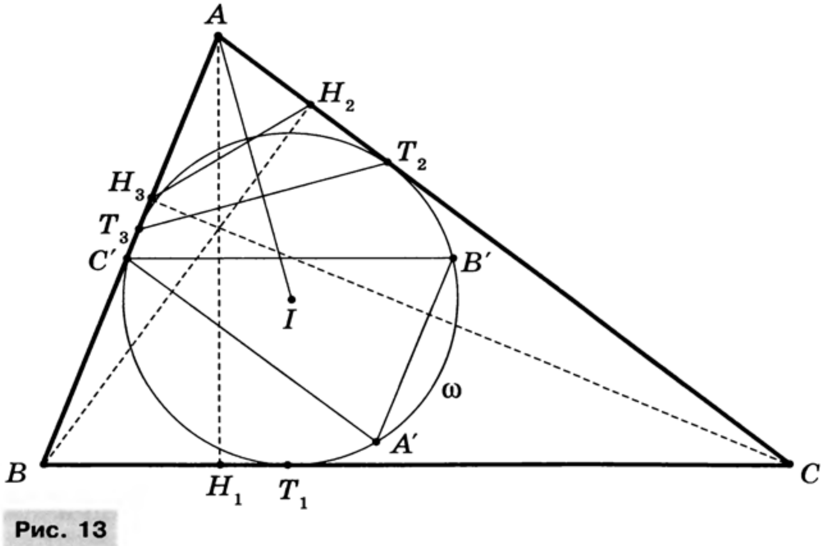

Рис. 13

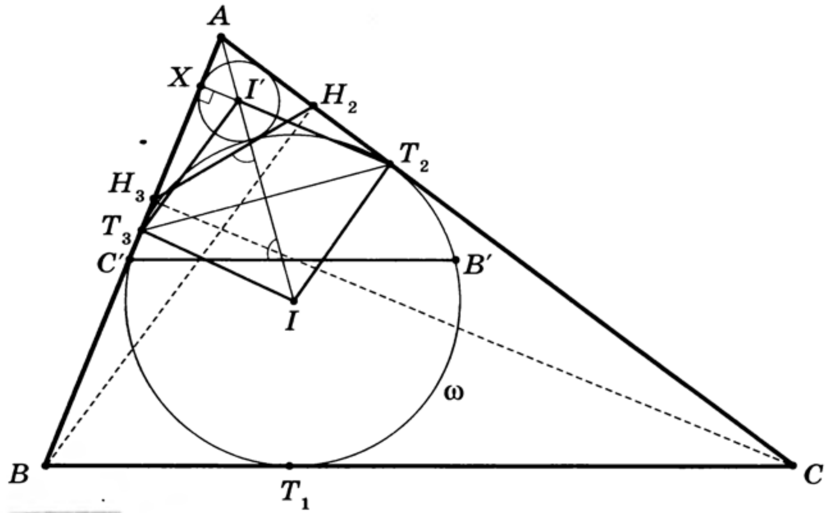

Рис. 14

Треугольники AH_2H_3 и ABC подобны (с коэффициентом $\cos A$), поэтому прямые H_2H_3 и $B'C' \parallel BC$ составляют равные углы с биссектрисой угла BAC, а также равные углы с прямой $T_2T_3 \perp AI$.

Впишем окружность ω' с центром I' в треугольник AH_2H_3 (рис. 14). Из подобия треугольников AH_2H_3 и ABC следует, что радиус окружности ω' равен $r\cos A$. Если X — точка касания ω' со стороной AB ($I'X \perp AB$), то в силу того же подобия $AX = AT_2 \cos A$, значит, в треугольнике AXT_2 угол AXT_2 прямой. Отсюда $I' \in XT_2 \Rightarrow I'T_2 \perp AB \Rightarrow I'T_2 \parallel IT_3$. Аналогично $I'T_3 \parallel IT_2$, следовательно, $I'T_2IT_3$ — параллелограмм с перпендикулярными диагоналями, т. е. ромб.

Итак, точки I' и I симметричны относительно T_2T_3, прямые H_2H_3 и $B'C'$ составляют равные углы с T_2T_3 и удалены соответственно от I' и I на одно и то же расстояние $r\cos A$. Отсюда вытекает, что прямые H_2H_3 и $B'C'$ симметричны относительно T_2T_3, т. е. $B'C'$ совпадает с прямой l_1.

2001 год

01.1. Проведем в окружности, описанной около треугольника ABC, диаметр MN, параллельный стороне BC (рис. 15). По условию

$$60^\circ \leqslant \overset{\smile}{BMA} - \overset{\smile}{CNA} = \overset{\smile}{MA} - \overset{\smile}{NA} = 180^\circ - 2\overset{\smile}{NA},$$

откуда $\overset{\smile}{NA} \leqslant 60^\circ$. Это означает, что точка A лежит на дуге A_0N, где A_0 — точка описанной окружности, лежащая

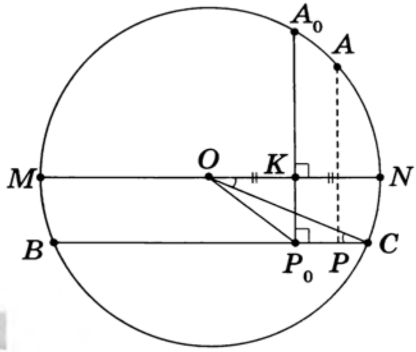

Рис. 15

со стороной BC по разные стороны от MN и такая, что $\angle A_0ON = 60°$, т. е. треугольник A_0ON правильный (здесь O — центр описанной окружности).

Точка P лежит на отрезке CP_0, где P_0 — проекция A_0 на BC, поэтому $\angle CAB + \angle COP \leqslant \angle CAB + \angle COP_0$. Заметим, что $\angle CAB = \frac{1}{2}\breve{BC} = \frac{1}{2}(\breve{MN} - \breve{CN} - \breve{BM}) = \frac{1}{2}(180° - 2\breve{CN}) = 90° - \angle CON$. Тем самым для решения задачи достаточно показать, что $\angle COP_0 < \angle CON$.

Пусть A_0P_0 пересекается с ON в точке K. Так как $A_0P_0 \perp ON$, то A_0K — высота правильного треугольника A_0ON, откуда $OK = KN$. Далее, $P_0C < KN = OK < OP_0$. Из треугольника COP_0 получаем $\angle COP_0 < \angle OCP_0$ (против большей стороны лежит больший угол), но $\angle OCP_0 = \angle CON$, т. е. $\angle COP_0 < \angle CON$.

01.2. Так как выражение в левой части однородно относительно a, b и c (т. е. $f(a, b, c) = f(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$), то можно считать, что $abc = 1$.

Из равенства $abc = 1$ следует, что

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8abc}{a^3}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{8}{a^3}}}.$$

Пусть $1 + \frac{8}{a^3} = x$, $1 + \frac{8}{b^3} = y$, $1 + \frac{8}{c^3} = z$, тогда нужно доказать неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{z}} \geqslant 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{xy} + \sqrt{xz} + \sqrt{yz} \geqslant \sqrt{xyz} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy + xz + yz + 2\sqrt{x^2yz} + 2\sqrt{xy^2z} + 2\sqrt{xyz^2} \geqslant xyz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow xy + xz + yz + 2\sqrt{xyz}\left(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}\right) \geqslant xyz. \qquad (1)$$

Теперь, применив неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом, находим

$$x = 1 + \underbrace{\frac{1}{a^3} + \ldots + \frac{1}{a^3}}_{8\ \text{раз}} \geqslant 9 \cdot \sqrt[9]{1 \cdot \left(\frac{1}{a^3}\right)^8} = \frac{9}{a^{\frac{8}{3}}},$$

поэтому $\sqrt{x} \geqslant \dfrac{3}{a^{\frac{4}{3}}}$. Аналогично

$$\sqrt{y} \geqslant \frac{3}{b^{\frac{4}{3}}},\ \sqrt{z} \geqslant \frac{3}{c^{\frac{4}{3}}},$$

следовательно,

$$\sqrt{xyz} \geqslant \frac{27}{(abc)^{\frac{4}{3}}} = 27$$

и

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{\sqrt{xyz}} \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{27} = 9.$$

Поэтому для доказательства неравенства (1) достаточно показать, что

$$xy + xz + yz + 2 \cdot 27 \cdot 9 > xyz. \qquad (2)$$

Положим $\dfrac{8}{a^3} = A$, $\dfrac{8}{b^3} = B$, $\dfrac{8}{c^3} = C$, тогда неравенство (2) примет вид

$$(1 + A)(1 + B) + (1 + A)(1 + C) + (1 + B)(1 + C) + 486 \geqslant$$
$$\geqslant (1 + A)(1 + B)(1 + C) \Leftrightarrow A + B + C + 488 \geqslant A \cdot B \cdot C.$$

Но $A \cdot B \cdot C = \dfrac{8^3}{(abc)^3} = 8^3$, отсюда

$$A + B + C \geqslant 3 \cdot \sqrt[3]{A \cdot B \cdot C} = 24,$$

и, значит,

$$A + B + C + 488 \geqslant 512 = 8^3 = A \cdot B \cdot C.$$

01.3. Исключим из рассмотрения те задачи, которые никто не решил. Обозначим через A множество задач, каждую из которых решили не более двух мальчиков, а через $\overline{A}$ остальные задачи олимпиады, т. е. решенные не менее чем тремя мальчиками. Аналогично для девочек определим множества B и $\overline{B}$. Если бы некоторый мальчик решил задачи только из множества B, то не более 12 девочек решили бы общие с ним задачи (хотя бы по одной), что противоречит условию задачи. Значит, каждый мальчик решил хотя бы одну задачу из множества $\overline{B}$ и тем самым не более пяти задач из множества B. Поэтому у каждого мальчика не более чем с 10 девочками общие задачи из множества B и, следовательно, не менее чем с 11 девочками общие задачи только из множества $\overline{B}$. (Если у некоторой девочки общие с ним задачи как из B, так и из $\overline{B}$, то она в число этих 11 девочек не входит.) Для всех мальчиков мы получили множество M из не менее $21 \cdot 11$ пар «мальчик — девочка» с общими задачами только из множества $\overline{B}$. Точно так же рассматривая девочек, получаем множество N из не менее $21 \cdot 11$ пар «девочка — мальчик» с общими задачами только из множества $\overline{A}$. Всего число пар «мальчик — девочка» равно $21 \cdot 21$, следовательно, какая-то пара «мальчик — девочка» входит как в множество M, так и в множество N, т. е. у них есть общая решенная задача, входящая в множества $\overline{B}$ и $\overline{A}$. Это означает, что найденную задачу решили по крайней мере 3 девочки и по крайней мере 3 мальчика. Утверждение доказано.

01.4. Просуммируем все $S(a)$. На i-м месте каждое из чисел от 1 до n встретится по $(n-1)!$ раз. Поэтому сумма выражений $S(a)$ для всех $n!$ перестановок есть

$$M = (k_1(1+\ldots+n) + k_2(1+\ldots+n) + \ldots + k_n(1+\ldots+n))(n-1)! =$$
$$= (n-1)!\,\frac{n(n+1)}{2}(k_1+\ldots+k_n) =$$
$$= n!\,\frac{n+1}{2}(k_1+\ldots+k_n) \equiv 0 \pmod{n!},$$

так как из нечетности n следует, что $\dfrac{n+1}{2}$ — целое число.

Предположим, что искомых перестановок не существует. Тогда остатки от деления всех $S(a)$ на $n!$ различны. Всего этих остатков $n!$, поэтому

$$M \equiv 1 + 2 + \ldots + n! = \frac{(n!+1)n!}{2} \pmod{n!}.$$

Таким образом,

$$\frac{(n!+1)n!}{2} \equiv 0 \pmod{n!} \Rightarrow \frac{(n!+1)n!}{2} \,\vdots\, n! \Rightarrow \frac{n!}{2} \,\vdots\, n!,$$

так как числа $n!+1$ и $n!$ взаимно просты. Получили противоречие; значит, искомые перестановки b и c существуют.

01.5. **Ответ.** $\angle ABC = 80°$, $\angle ACB = 40°$.

Пусть $\angle ABC = 2\delta$. Отложим на продолжении отрезка AB за точку B отрезок BX, равный BP, а на продолжении отрезка AQ за точку Q отрезок QY, равный BQ (рис. 16). Из условия следует, что $AX = AY$; точки X и Y симметричны относительно биссектрисы AP угла BAC, поэтому $PX = PY$, $\angle PXB = \angle PYQ$. Кроме того, $\angle ABQ = \angle CBQ = \angle BPX = \angle BXP = \delta$. Из равенств $BQ = QY$ и $\angle QBP = \angle QYP$ следует, что лучи BP и YP симметричны относительно биссектрисы угла BQY. Рассмотрим два случая.

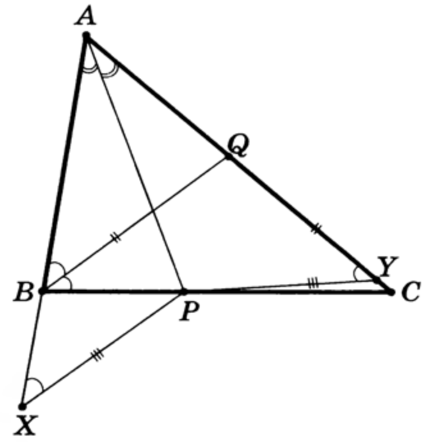

Рис. 16

1) Пусть прямые BP и YP совпадают. Тогда совпадают точки Y и C, $\angle ACB = \delta$, $\angle ABC + \angle ACB = 3\delta = 120°$, откуда $\delta = 40°$.

2) Если прямые BP и YP различны, то их точка пересечения P лежит на биссектрисе угла BQY, отсюда $PY = PB$. Получаем, что $BX = BP = PX \Rightarrow \angle PBX = 60°$, значит, $BP \parallel AC$ — противоречие.

01.6. Пусть $x = b + d + a - c$, тогда $x > 1$ (так как $b + d + a - c > b + d > 1$) и $c \equiv a + b + d$, $d \equiv c - a - b$ (здесь и далее сравнения по модулю x). Отсюда следует, что

$$0 \equiv x(b + d - a + c) = ac + bd \equiv a(a + b + d) + bd = (a + b)(a + d)$$

и

$$0 \equiv ac + bd \equiv ac + b(c - a - b) = (a + b)(c - b),$$

т. е.

$$(a + b)(a + d) \vdots x, \ (a + b)(c - b) \vdots x.$$

Возможны два случая.

1) $(a + b) \vdots x \Rightarrow (a + b) \vdots (a + b + d - c)$. Но $c > d$, поэтому $a + b > x$.

С другой стороны, в силу $b > c$ имеем

$$2x = 2a + 2b + 2d - 2c > 2a + 2d > 2a > a + b.$$

Итак, $2x > a + b > x$ и $(a + b) \vdots x$, что невозможно.

2) $(a + b) \not\vdots\, x$. Пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — разложение x на простые множители. Тогда существует i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ такое, что $(a + b) \not\vdots\, p_i^{\alpha_i}$. Отсюда, учитывая, что $(a + b)(a + d) \vdots x$, $x \vdots p_i^{\alpha_i}$, получаем $(a + d) \vdots p_i$. Аналогично $(b - c) \vdots p_i$. Следовательно, $ab + cd = ((a + d)b - (b - c)d) \vdots p_i$, т. е. $ab + cd$ не является простым, так как $ab + cd > ac + bd \geqslant x \geqslant p_i$.

2002 год

02.1. Рассмотрим всевозможные подмножества $R \subset T$ красных точек, удовлетворяющие условию задачи. Пусть k_i — число синих точек с абсциссой i, l_j — число синих точек с ординатой j ($i, j \in \{0, 1, ..., n-1\}$).

Докажем индукцией по количеству точек в множестве R, что упорядоченные наборы $K = (k_0, k_1, ..., k_{n-1})$ и $L = (l_0, l_1, ..., l_{n-1})$ получаются один из другого перестановкой. Если $R = \varnothing$, то $K = L = (n, n-1, ..., 1)$.

Предположим, что утверждение доказано для всевозможных множеств из $(m-1)$ красных точек ($m \geqslant 1$). Рассмотрим некоторое подмножество R из m красных точек. Выберем красную точку $(i, j) \in R$ с наибольшей суммой $i + j$. Перекрасив эту точку в синий цвет, мы перейдем к множеству красных точек R' из $(m-1)$ точек, причем легко видеть, что R' удовлетворяет условию. В наборе K для множества R при переходе к R' изменилось лишь $k_i = n - 1 - (i + j)$ на $k_i' = n - (i + j)$, а в наборе L изменилось лишь $l_j = n - 1 - (i + j)$ на $l_j' = n - (i + j)$ (на рисунке 17 точки обозначены так: • — красные, ○ — синие).

Остается заметить, что количество X-множеств равно $k_0 k_1 k_2 ... k_{n-1}$, а количество Y-множеств равно $l_0 l_1 l_2 ... l_{n-1}$.

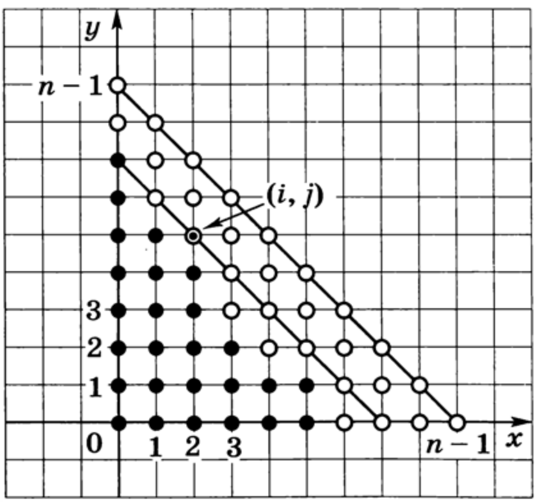

Рис. 17

02.2. Из условия (рис. 18) следует, что $OF = FA$, $OE = EA$, и, кроме того, $OF = OA = OE = R$, где R — радиус окружности Г. Значит, треугольники OFA и OEA правильные. Отсюда $\angle AOE = \angle AOF = 60°$, следовательно, точка E

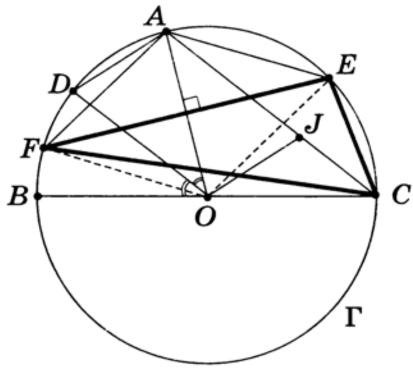

Рис. 18

лежит на дуге AC, не содержащей точки B (так как $\angle AOB < 120°$). Заметим, что

$$\angle ECA = \frac{1}{2}\breve{EA} = \frac{1}{2}\angle AOE = 30°,$$

$$\angle ACF = \frac{1}{2}\breve{AF} = \frac{1}{2}\angle AOF = 30°,$$

т. е. CA — биссектриса угла ECF.

Далее, OD — биссектриса внешнего угла равнобедренного треугольника AOC, отсюда $OD \parallel AC \Rightarrow ADOJ$ — параллелограмм $\Rightarrow AJ = OD = R = AE$. Таким образом, точка J однозначно определена равенством $AJ = AE$ и тем, что она лежит на луче AC. Так как центр T окружности, вписанной в треугольник CEF, лежит на CA, то осталось доказать, что $AT = AE$. Пусть биссектриса FT пересекает окружность в точке X (рис. 19). Тогда из равенства дуг AE и AF, а также дуг XC и XE вытекает, что $\angle TAX = \angle EAX$ и $\angle TXA = \angle EXA$, откуда $\triangle ATX = \triangle AEX$, т. е. $AT = AE$.

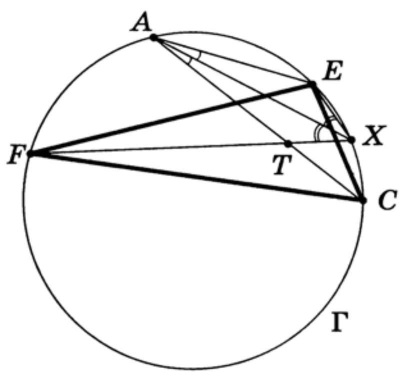

Рис. 19

02.3. **Ответ.** $m = 5,\ n = 3$.

Пусть $P(x) = x^n + x^2 - 1$, $Q(x) = x^m + x - 1$. Если $m \leqslant n$, то при $a > 1$ имеем $0 < a^m + a - 1 < a^n + a^2 - 1$ и, значит, число $\dfrac{a^m + a - 1}{a^n + a^2 - 1}$ не целое. Поэтому $m > n$. Коэффициенты многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ — целые, и старший коэффициент многочлена $P(x)$ равен 1, поэтому

$$Q(x) = R_1(x) \cdot P(x) + R_2(x),\ \text{где } \deg R_2 < n = \deg P$$

($\deg f$ — степень многочлена f), и многочлены $R_1(x)$ и $R_2(x)$ имеют целочисленные коэффициенты. Далее, из равенства

$$\frac{Q(a)}{P(a)} = R_1(a) + \frac{R_2(a)}{P(a)}$$

следует, что

$$\frac{Q(a)}{P(a)} \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \frac{R_2(a)}{P(a)} \in \mathbf{Z}.$$

Но так как степень многочлена R_2 меньше степени многочлена P, можно выбрать такое число N, что $|R_2(a)| < P(a)$ при всех $a > N$. Если $R_2 \not\equiv 0$, то многочлен R_2 имеет конечное число корней, поэтому можно выбрать число $M \geqslant N$ такое, что $R_2(a) \neq 0$ при $a > M$. Но тогда при $a > M$ число

$$\frac{R_2(a)}{P(a)} \in (-1;\ 0) \cup (0;\ 1)$$

не является целым, что противоречит условию. Значит, $R_2 \equiv 0$. Поэтому нужно найти такие m и n, что многочлен $Q(x)$ делится на многочлен $P(x)$.

Если $Q(x) \vdots P(x)$, то любой корень многочлена $P(x)$ является корнем многочлена $Q(x)$. Но $P(x) = 0 \Leftrightarrow x^n + x^2 = 1$. На отрезке $[0;\ 1]$ функция $f(x) = x^n + x^2$ является возрастающей, $f(0) = 0$, $f(1) = 2 > 1$. Значит, $c^n + c^2 = 1$ при некотором $c \in (0;\ 1)$. Тогда $Q(c) = 0 \Rightarrow c^m + c = 1$. Но $c + c^{n+1} > c^2 + c^n$ при любом $c \in (0;\ 1)$, так как

$$c + c^{n+1} - c^2 - c^n = c(1 - c - c^{n-1} + c^n) =$$
$$= c(1 - c)(1 - c^{n-1}) > 0.$$

Значит, $m \neq n + 1 \Rightarrow m \geqslant n + 2$. Тогда $m \geqslant 5$ при $n = 3$. Если $m = 5$, то $x^5 + x - 1 = (x^3 + x^2 - 1)(x^2 - x + 1)$, т. е. пара $n = 3$, $m = 5$ подходит. При $m \geqslant 6$ получаем $c^6 + c < c^5 + c = 1$, так как $c^5 + c = c^3 + c^2 = 1$, значит, пары $n = 3$, $m \geqslant 6$ не подходят.

Пусть теперь $n \geqslant 4$. Если n четно, то $P(c) = 0 \Rightarrow P(-c) = 0$, поэтому $Q(c) = Q(-c) = 0$, т. е. $c^m + c = 1$ и $(-c)^m - c = 1$. Это невозможно при нечетном m:

$$(-c)^m - c = -(c^m + c) = -1.$$

При четном m получаем

$$(c^m + c = 1 \text{ и } c^m - c = 1) \Rightarrow c = 0 \text{ — противоречие.}$$

Значит, n нечетно, т. е. $n \geqslant 5$.

Покажем теперь, что $m < 2n$. Пусть $c = 1 - \varepsilon$, $\varepsilon \in (0; 1)$. Тогда $c^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2$, $c^n = 1 - c^2 = 2\varepsilon - \varepsilon^2$, $c^m = 1 - c = \varepsilon$. Если $m \geqslant 2n$, то

$$\varepsilon = 1 - c = c^m \leqslant c^{2n} = (2\varepsilon - \varepsilon^2)^2 \Leftrightarrow \varepsilon \leqslant \varepsilon^2(2 - \varepsilon)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1 \leqslant \varepsilon(2 - \varepsilon)^2 < 4\varepsilon \leqslant 1,$$

если $\varepsilon \leqslant \dfrac{1}{4}$. Значит, $\varepsilon > \dfrac{1}{4}$, но тогда

$$c < \frac{3}{4} \Rightarrow c^n + c^2 \leqslant c^5 + c^2 \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^5 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 < \left(\frac{3}{4}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 =$$
$$= \frac{27}{64} + \frac{9}{16} = \frac{63}{64} < 1 \text{ — противоречие.}$$

Следовательно, $m < 2n$, т. е. $m = n + k$, где $2 \leqslant k \leqslant n - 1$. Тогда

$$x^m + x - 1 = x^n x^k + x - 1 =$$
$$= x^k(x^n + x^2 - 1) + (1 - x)(x^k(1 + x) - 1).$$

Поэтому из делимости $Q(x)$ на $P(x)$ следует, что

$$(1 - x)(x^k(1 + x) - 1) \;\vdots\; (x^n + x^2 - 1).$$

Но многочлены $1 - x$ и $x^n + x^2 - 1$ взаимно просты, так как 1 не является корнем многочлена $x^n + x^2 - 1$. Значит,

$$(x^k(1 + x) - 1) \;\vdots\; (x^n + x^2 - 1),$$

откуда

$$\deg(x^k(1 + x) - 1) \geqslant \deg(x^n + x^2 - 1),$$

т. е.

$$k + 1 \geqslant n \Leftrightarrow k \geqslant n - 1.$$

Но $k \leqslant n - 1$, значит, $k = n - 1$. Получаем

$$(x^{n-1}(1 + x) - 1) \;\vdots\; (x^n + x^2 - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^n + x^{n-1} - 1) \;\vdots\; (x^n + x^2 - 1) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x^{n-1} - x^2) \;\vdots\; (x^n + x^2 - 1),$$

т. е. $n - 1 = 2$, $n = 3$ — противоречие.

Значит, $n = 3$, $m = 5$ — единственная подходящая пара.

02.4. **Ответ.** б) n — любое простое число.

Из равенства $\dfrac{n}{d_i} = d_{k+1-i}$ следует, что

$$D = d_1 d_2 + d_2 d_3 + \ldots + d_{k-1} d_k =$$
$$= \frac{n^2}{d_k d_{k-1}} + \ldots + \frac{n^2}{d_2 d_1} = n^2\left(\frac{1}{d_1 d_2} + \frac{1}{d_2 d_3} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1} d_k}\right).$$

а) Докажем, что $\frac{1}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1} d_k} < 1$, откуда и будет следовать неравенство $D < n^2$. Действительно, $d_i \geqslant d_{i-1} + 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow d_i \geqslant i$, где $i = 1, \ldots, k$, поэтому

$$\frac{1}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1} d_k} \leqslant \frac{1}{d_1(d_1+1)} + \frac{1}{d_2(d_2+1)} + \ldots +$$
$$+ \frac{1}{d_{k-1}(d_{k-1}+1)} \leqslant \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k-1)k} =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 1 - \frac{1}{k} < 1.$$

б) Если D — делитель n^2, то $\frac{n^2}{D} = m$, где $m \in \boldsymbol{N}$. Значит,

$$\frac{1}{d_1 d_2} + \ldots + \frac{1}{d_{k-1} d_k} = \frac{1}{m}.$$

Предположим, что $k > 2$, тогда $\frac{1}{m} > \frac{1}{d_1 d_2} = \frac{1}{d_2}$, значит, $m < d_2$. Но из пункта «а» следует, что $m > 1$, поэтому m содержит простой делитель p, т. е.

$$p \leqslant m < d_2 \text{ и } n^2 \vdots m \vdots p \Rightarrow n \vdots p \Rightarrow d_2 \leqslant p.$$

Но $d_2 > m \geqslant p$ — противоречие.

Итак, $k \leqslant 2$, но $n > 1$, значит, $k = 2$, т. е. n — простое ($d_1 = 1$, $d_2 = n$). Проверкой убеждаемся в том, что любое простое n подходит: $D = 1 \cdot n = n$ и $n^2 \vdots n$.

02.5. **Ответ.** $f(x) = 0$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $f(x) = x^2$.

В данное равенство

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz) \qquad (1)$$

подставим $x = y = z = t = 0$. Имеем $4(f(0))^2 = 2f(0)$, откуда $f(0) = 0$ или $f(0) = \frac{1}{2}$.

Пусть $f(0) = \frac{1}{2}$. В равенство (1) подставим $y = t = 0$, $x = z = a \in \boldsymbol{R}$. Имеем $2f(a) = 1$, т. е. $f(a) = \frac{1}{2}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$. Функция $f(x) \equiv \frac{1}{2}$ — один из ответов.

Пусть $f(0) = 0$. В равенство (1) подставим $z = t = 0$. Получим $f(x)f(y) = f(xy)$, т. е. функция f мультипликативна. Тогда из равенства (1) следует равенство

$$f(xy) + f(yz) + f(xt) + f(zt) =$$
$$= f(xy - zt) + f(xt + yz). \qquad (2)$$

Сделав в равенстве (2) замены $x \leftrightarrow z$, $y \leftrightarrow t$, получим

$$f(zt) + f(xt) + f(yz) + f(xy) = \\ = f(zt - xy) + f(yz + xt). \qquad (3)$$

Сравнивая равенства (2) и (3), получаем $f(xy - zt) = f(zt - xy)$. Но в виде $xy - zt = a$ можно представить любое число $a \in \boldsymbol{R}$ ($x = a$, $y = 1$, $z = 0$). Итак, $f(a) = f(-a)$, т. е. функция f четна.

Далее, из мультипликативности f имеем $f(x^2) = (f(x))^2 \geqslant 0$. Но в виде $a = x^2$ можно представить любое неотрицательное число a. Значит, $f(a) \geqslant 0$ при $a \geqslant 0$. Но $f(-a) = f(a) \Rightarrow f(x) \geqslant 0$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

Теперь в равенство (2) подставим $x = a$, $y = \sqrt{\frac{b}{a}}$, $z = \sqrt{ab}$, $t = 1$, где $a > 0$, $b \geqslant 0$. Тогда $xy = zt = \sqrt{ab}$, $xt = a$, $yz = b$, и получаем

$$f(a) + f(b) + 2f\left(\sqrt{ab}\right) = f(0) + f(a + b) = f(a + b),$$

так как $f(0) = 0$.

Из последнего равенства с учетом того, что

$$f(a) = \left(f\left(\sqrt{a}\right)\right)^2, \ f(b) = \left(f\left(\sqrt{b}\right)\right)^2, \ f\left(\sqrt{ab}\right) = f\left(\sqrt{a}\right) \cdot f\left(\sqrt{b}\right),$$

следует, что

$$\left(f\left(\sqrt{a}\right) + f\left(\sqrt{b}\right)\right)^2 = f(a + b),$$

т. е. в силу неотрицательности f

$$f\left(\sqrt{a}\right) + f\left(\sqrt{b}\right) = \sqrt{f(a + b)}.$$

Отсюда

$$\sqrt{f(a)} + \sqrt{f(b)} = \sqrt{f(a + b)},$$

так как

$$\left(\sqrt{f(a)}\right)^2 = f(a) = \left(f\left(\sqrt{a}\right)\right)^2.$$

Пусть $g(x) = \sqrt{f(x)}$, $x \geqslant 0$. Тогда $g(a) + g(b) = g(a + b)$, т. е. функция g аддитивна. С другой стороны,

$$g(xy) = \sqrt{f(xy)} = \sqrt{f(x)f(y)} = \sqrt{f(x)} \cdot \sqrt{f(y)} = g(x)g(y),$$

т. е. функция g мультипликативна. Таким образом, функция g аддитивна и мультипликативна. Выведем из этого, что либо $g \equiv 0$, либо $g(x) \equiv x$.

Итак, функция g удовлетворяет равенствам

$$g(x + y) = g(x) + g(y), \qquad (4)$$

$$g(xy) = g(x)g(y). \qquad (5)$$

В равенство (5) подставим $x = y = 1$. Получим $g(1) = (g(1))^2$, откуда $g(1) = 1$ или $g(1) = 0$.

Если $g(1) = 0$, то

$$g(x) = g(x \cdot 1) = g(x) \cdot g(1) = 0 \Rightarrow g(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv 0.$$

Если $g(1) = 1$, то из равенства (4) следует, что $g(m) = mg(1) = m$ при любом $m \in \boldsymbol{R}$. Кроме того,

$$m = g\left(n \cdot \frac{m}{n}\right) = ng\left(\frac{m}{n}\right) \Rightarrow g\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n},$$

т. е. $g(r) = r$ для любого $r \in \boldsymbol{Q}$, $r > 0$.

Из равенства (4) и неотрицательности $g(y)$ при $y \geqslant 0$ следует монотонность (возрастание) функции g. Но $g(x) = x$ при $r \in \boldsymbol{Q}$, $r > 0$. Значит, $g(x) \equiv x$ при $x \geqslant 0$. Действительно, пусть $g(x) \neq x$ при некотором $x > 0$. Возьмем число $r \in \boldsymbol{Q}$ между числами x и $g(x)$. Тогда $g(r) = r$, а пары (r, x) и $((g(r), g(x))$ упорядочены по-разному, что противоречит монотонности функции g.

Итак, если $g(1) = 1$, то $g(x) \equiv x$ при $x \geqslant 0$. Отсюда $f(x) \equiv x^2$ при $x \geqslant 0$. Но $f(x)$ — четная функция, следовательно, $f(x) = x^2$ при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

02.6. Заметим, что окружности не пересекаются и (поскольку $\sin x < x$ при $x > 0$) величина $\frac{1}{O_iO_j}$ меньше радианной меры угла KO_iO_j (рис. 20), где O_iK и O_iL — касательные к окружности Γ_j.

Будем обозначать через V_{ij} угол KO_iL, через W_{ij} объединение угла V_{ij} с вертикальным ему углом, через $\Phi(V_{ij})$ радианную меру угла V_{ij}, $\Phi(W_{ij}) = 2\Phi(V_{ij})$. Тогда

$$\frac{1}{O_iO_j} < \frac{1}{2}\Phi(V_{ij}) = \frac{1}{4}\Phi(W_{ij}).$$

Рассмотрим выпуклую оболочку центров данных окружностей. При этом три центра не могут лежать на одной прямой, так как в противном случае проходящая через них прямая пересекает три окружности. Следовательно, в выпуклой оболочке k вершин, где $k \geqslant 0$. Обозначим через P_1,

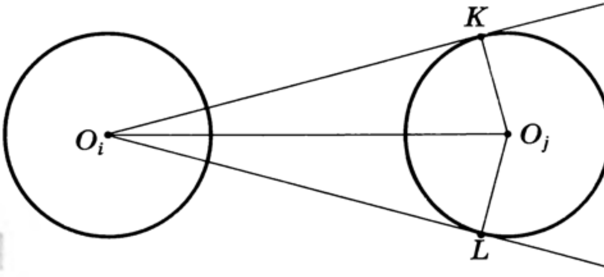

Рис. 20

$P_2, \ldots, P_k$ вершины выпуклой оболочки по порядку, например по часовой стрелке, а через $Q_{k+1}, \ldots, Q_n$ вершины, не вошедшие в выпуклую оболочку. Пусть $R = \{1, \ldots, k\}$, $S = \{k+1, \ldots, n\}$.

Предположим, что S не пусто, т. е. $k < n$. Выберем произвольно $l \in S$. Углы W_{lj}, $j \neq l$, пересекаются только в вершине Q_l, так как в противном случае прямая, проходящая через Q_l и общую точку этих углов, пересекает три окружности. Поэтому

$$\sum_{j \neq l} \Phi(W_{lj}) < 2\pi \Rightarrow \sum_{j \neq l} \frac{1}{Q_l Q_j} < \frac{1}{4} \sum_{j \neq l} \Phi(W_{lj}) < \frac{\pi}{2}.$$

Сложив эти неравенства по всем $l \in S$, получим

$$2 \sum_{\substack{i \neq j;\\ i, j \in S}} \frac{1}{Q_i Q_j} + \sum_{\substack{i \in S,\\ j \in R}} \frac{1}{Q_i P_j} < (n-k)\frac{\pi}{2}. \qquad (1)$$

Выберем теперь произвольно $l \in R$. Рассмотрим углы V_{lj}, $j \neq l$. Они все лежат внутри угла, образованного касательными из точки P_l к окружностям с центрами P_{l-1} и P_{l+1} (здесь и далее $P_0 = P_k$, $P_{k+1} = P_1$), лежащими вне выпуклой оболочки (рис. 21). Поэтому если обозначить углы $P_{l-1}P_lP_{l+1}$, $l \in R$, через α_l, то

$$\sum_{j \neq l} \Phi(V_{lj}) \leqslant \alpha_l + \frac{1}{2}(\Phi(V_{l(l-1)}) + \Phi(V_{l(l+1)})).$$

Отсюда

$$\sum_{j \neq l-1,\, l,\, l+1} \Phi(V_{lj}) + \frac{1}{2}(\Phi(V_{l(l-1)}) + \Phi(V_{l(l+1)})) \leqslant \alpha_l.$$

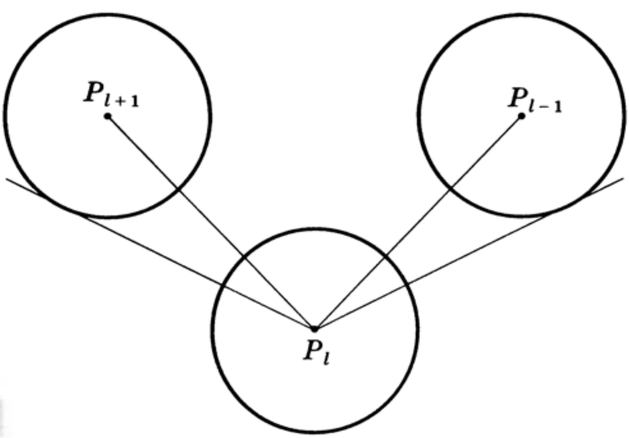

Рис. 21

Сложив эти неравенства по всем $l \in R$ и воспользовавшись равенством $\sum_{l=1}^{k} \alpha_l = \pi (k-2)$, получим

$$\sum_{l \in R} \Phi (V_{l(l+1)}) + 2 \sum_{\substack{m \neq l \pm 1; \\ m,\, l \in R}} \Phi (V_{lm}) + \sum_{\substack{l \in R, \\ t \in S}} \Phi (V_{lt}) \leqslant \pi (k-2).$$

Но $\frac{2}{O_i O_j} < \Phi (V_{ij})$, значит,

$$\sum_{l \in R} \frac{1}{P_l P_{l+1}} + 2 \sum_{\substack{m \neq l \pm 1; \\ m,\, l \in R}} \frac{1}{P_l P_m} + \sum_{\substack{l \in R, \\ t \in S}} \frac{1}{P_l Q_t} < \frac{\pi (k-2)}{2}. \qquad (2)$$

Оценим первую из сумм. Проведем общие внутренние касательные к окружностям с центрами P_{l-1}, P_l, P_{l+1}, как показано на рисунке 22. Пусть они пересекаются в точке W и пересекают отрезки $P_l P_{l-1}$ и $P_l P_{l+1}$ в точках V и U соответственно. Тогда $\angle UWV < \pi$, так как если $\angle UWV \geqslant \pi$, то найдется прямая, пересекающая все три окружности с центрами P_{l-1}, P_l и P_{l+1} (рис. 23). Итак, получаем, что

$$\angle WVP_l + \angle P_l UW + \alpha_l < \pi,$$

т. е.

$$\angle WVP_l + \angle WUP_l < \pi - \alpha_l.$$

Из равенства радиусов окружностей следует, что V — середина отрезка $P_l P_{l-1}$, поэтому

$$\sin \angle WVP_l = \frac{2}{P_l P_{l-1}} \Rightarrow \frac{1}{P_l P_{l-1}} = \frac{\sin \angle WVP_l}{2} < \frac{\angle WVP_l}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{P_l P_{l-1}} + \frac{1}{P_l P_{l+1}} \leqslant \frac{\angle WVP_l}{2} + \frac{\angle WUP_l}{2} < \frac{\pi - \alpha_l}{2}.$$

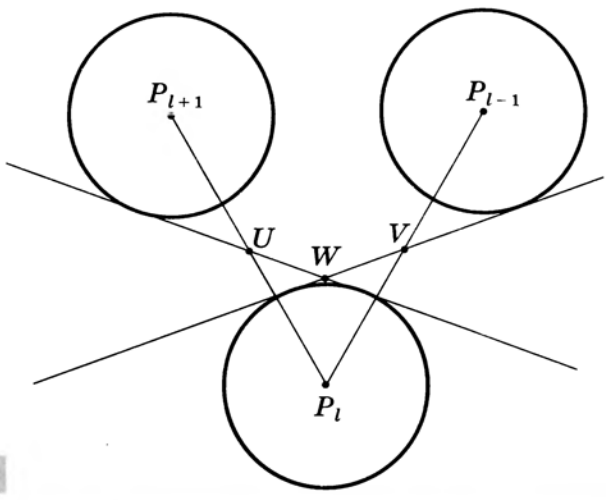

Рис. 22

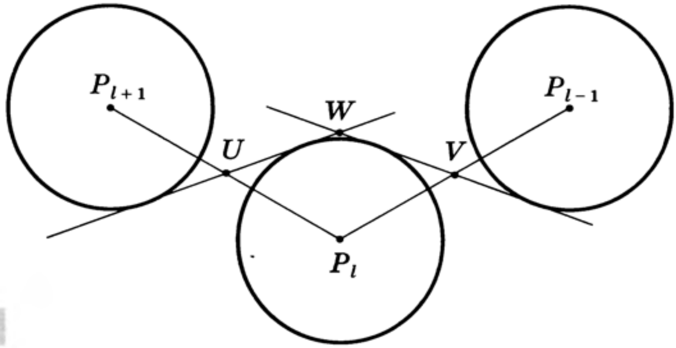

Рис. 23

Сложив полученные неравенства по всем $l \in R$, получим

$$2\sum_{l \in R} \frac{1}{P_l P_{l-1}} < \sum_{l \in R} \frac{\pi - \alpha_l}{2} = \pi,$$

так как $\sum\limits_{l=1}^{k} \alpha_l = (k-2)\pi$. Итак,

$$\sum_{l \in R} \frac{1}{P_l P_{l-1}} \leqslant \frac{\pi}{2}. \qquad (3)$$

Сложив неравенства (1), (2) и (3), получим

$$2\sum_{\substack{i \neq j;\\ i, j \in S}} \frac{1}{Q_i Q_j} + 2\sum_{\substack{i \in S,\\ j \in R}} \frac{1}{Q_i P_j} + 2\sum_{\substack{j \neq i \pm 1;\\ i, j \in R}} \frac{1}{P_i P_j} + 2\sum_{i \in R} \frac{1}{P_i P_{i-1}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(k-2)}{2} + \frac{\pi(n-k)}{2} = \frac{\pi}{2}(n-1).$$

Сумма в левой части полученного неравенства равна $2\sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{O_i O_j}$, поэтому $\sum\limits_{i \neq j} \frac{1}{O_i O_j} \leqslant \frac{\pi}{4}(n-1)$, что и требовалось доказать.

2003 год

03.1. Пусть D — множество разностей $x_k - x_l$, где $x_k \in A$, $x_l \in A$, $x_k \neq x_l$. Число элементов множества D не больше $101 \cdot 100 = 10100$. Пусть $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_m)$ — подмножество множества S, состоящее из наибольшего возможного числа m элементов с условием $t_i - t_j \notin D$ при $i \neq j$. Тогда для любого $t \in S \setminus T$ можно выбрать $t_i \in T$ и $d \in D$ такие, что $t - t_i = d$. Число пар (t_i, d) не больше, чем $10100m$. С другой стороны, оно должно быть не меньше, чем число элементов множества $S \setminus T$. Получаем $10100m \geqslant 1000000 - m$, откуда $m > 99$. Так как из равенства $x_k + t_i = x_l + t_j$ следует, что $t_i - t_j \in D$, то множества $A_i = \{x + t_i \mid x \in A\}$ попарно не пересекаются. Это означает, что $t_1, \ldots, t_{100}$ — искомые числа.

03.2. **Ответ.** $(k, 2k)$, $(8k^4 - k, 2k)$, $(2k, 1)$, $k \in N$.

Пусть $n = 2ab^2 - b^3 + 1$, тогда из условия следует, что $n \in N$ и $a^2 \vdots n$. Отсюда

$$2ab^2 \equiv b^3 - 1 \pmod{n} \Rightarrow 2a^2b^2 \equiv a(b^3 - 1) \pmod{n} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a(b^3 - 1) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow a(2b^3 - 2) \equiv 0 \pmod{n}.$$

Но $2ab^3 - (b^4 - b) \equiv 0 \pmod{n} \Rightarrow 2a \equiv b^4 - b \pmod{n}$.

Итак,

$$(b^4 - b - 2a) \vdots n. \qquad (1)$$

По условию $n = (2a - b)b^2 + 1 > 0$, откуда $2a - b \geqslant 0$.

I случай. $2a - b = 0$, что дает серию $(k, 2k)$.

II случай. $2a - b > 0$, т. е. $2a - b \geqslant 1$. Тогда из условия $a^2 \vdots n$ следует:

$$a^2 \geqslant n = (2a - b)b^2 + 1 \Rightarrow a^2 \geqslant b^2 + 1 \Rightarrow a > b.$$

Значит,

$$2a - b > a \Rightarrow n > ab^2 + 1 > ab^2 \Rightarrow a^2 > ab^2 \Rightarrow a > b^2.$$

Следовательно,

$$n = (2a - b)b^2 + 1 > (2b^2 - b)b^2 + 1 =$$
$$= 2b^4 - b^3 + 1 > b^4 > b^4 - b - 2a.$$

Тогда из утверждения (1) следует, что $b^4 - b - 2a \leqslant 0$. Случай $b^4 - b - 2a = 0$ дает серию $(8k^4 - k, 2k)$. Если же $b^4 - b - 2a < 0$, то из утверждения (1) получаем

$$-(b^4 - b - 2a) \geqslant n = 2ab^2 - b^3 + 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2a(1 - b^2) \geqslant b^4 - b^3 - b + 1 = (b - 1)(b^3 - 1).$$

При $b > 1$ имеем

$$2a(1 - b^2) < 0 < (b - 1)(b^3 - 1).$$

Значит, $b = 1$, что дает серию $(2k, 1)$.

03.3. Пусть диагонали AD, BE и FC шестиугольника $ABCDEF$ попарно пересекаются в точках P, Q, R (рис. 24), а точки M и N — середины сторон AB и DE соответственно. Предположим, что $\angle APB = \angle DPE \geqslant 60°$. Тогда P лежит внутри или на окружности ω, описанной около равностороннего треугольника ABX, построенного на стороне AB внутрь шестиугольника (рис. 25). Окружность ω находится внутри окружности Ω радиуса $MX = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ с центром M;

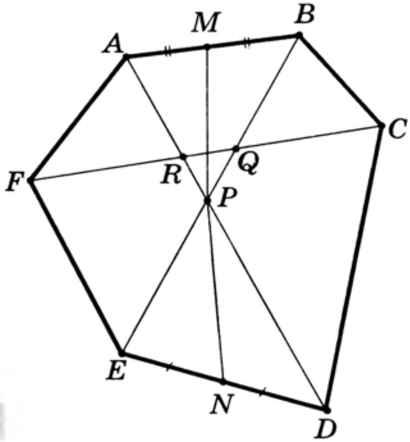

Рис. 24

окружности ω и Ω касаются внутренним образом в точке X. Отсюда следует, что $MP \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, причем равенство достигается, только если P совпадает с X. Аналогично $NP \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}DE$, причем равенство достигается, только если треугольник DPE правильный. Имеем

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(AB + DE) = MN \leqslant MP + NP \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}AB + \frac{\sqrt{3}}{2}DE,$$

откуда $MP = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$, $NP = \frac{\sqrt{3}}{2}DE$ и треугольники ABP и DEP правильные.

Рассуждая аналогично, получаем, что $\angle BQC = \angle EQF$ и $\angle CRD = \angle FRA$ и каждый из этих углов не может быть больше $60°$. Так как сумма $\angle APB + \angle BQC + \angle CRD = 180°$, то все углы между диагоналями AD, BE и FC равны по $60°$. В таком случае, как мы доказали, треугольники ABP, DEP и аналогично треугольники BCQ, CDR, EFQ и FAR правильные. Отсюда сразу следует утверждение задачи.

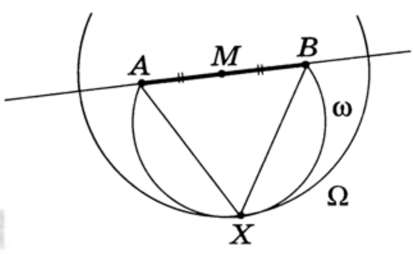

Рис. 25

03.4. Заметим, что точки C, D, P, Q лежат на одной окружности с диаметром CD, так как $\angle CQD = \angle CPD = 90°$ (рис. 26). Поэтому по теореме синусов $PQ = CD\sin\angle PCQ$. Аналогично

$$RQ = AD\sin\angle RAQ \Rightarrow \frac{PQ}{RQ} = \frac{CD\sin\angle PCQ}{AD\sin\angle RAQ}.$$

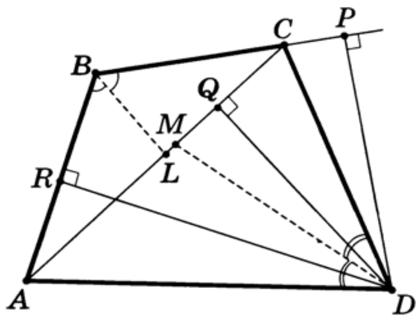

Рис. 26

Но $\sin\angle PCQ = \sin\angle BCA$, так как эти углы либо равны, либо в сумме дают $180°$. Аналогично

$$\sin\angle RAQ = \sin\angle BAC \Rightarrow \frac{\sin\angle PCQ}{\sin\angle RAQ} = \frac{\sin\angle BCA}{\sin\angle BAC} = \frac{AB}{BC}$$

по теореме синусов для треугольника BAC. Значит,

$$\frac{PQ}{RQ} = \frac{CD}{AD}\cdot\frac{AB}{BC},$$

откуда

$$PQ = RQ \Leftrightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}.$$

Пусть BL и DM — биссектрисы треугольников ABC и ADC соответственно. Тогда

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AL}{CL} \text{ и } \frac{AD}{CD} = \frac{AM}{CM}.$$

Значит,

$$PQ = RQ \Leftrightarrow L = M,$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Условие того, что четырехугольник $ABCD$ вписанный, как видно из приведенного решения, является лишним.

03.5. Доказываемое неравенство можно переписать в виде

$$4\left(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)\right)^2 \leqslant \frac{4(n^2-1)}{3}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j - x_i)^2. \qquad (1)$$

Пусть $x_{i+1} - x_i = y_i \geqslant 0$, тогда

$$x_j - x_i = (x_j - x_{j-1}) + (x_{j-1} - x_{j-2}) + \ldots + (x_{i+1} - x_i) = \\ = y_i + \ldots + y_{j-1}$$

и для $n + 1$ переменной $x_1, \ldots, x_{n+1}$ неравенство (1) примет вид

$$\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \sum_{k=i}^{j} y_k\right)^2 \leqslant \frac{n^2 + 2n}{3} \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \left(\sum_{k=i}^{j} y_k\right)^2. \qquad (2)$$

Левая часть неравенства (2) содержит y_m, если $i \leqslant m \leqslant j$, поэтому при фиксированном m в левой части неравенства (2) слагаемое y_m встречается $m(n - m + 1)$ раз, т. е. левая часть равна

$$\left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot i \cdot (n - i + 1)\right)^2.$$

Заменив каждое слагаемое $\left(\sum_{k=i}^{j} y_k\right)^2$ на $(j - i + 1)^2$ слагаемых вида $\left(\dfrac{\sum_{k=i}^{j} y_k}{j - i + 1}\right)^2$, в правой части неравенства (2) получим $l = \sum_{s=1}^{n} (n - s + 1)\, s^2$ слагаемых, так как число сумм $\sum_{k=i}^{j} y_k$, содержащих s слагаемых, равно $n - s + 1$. Можно показать, что $l = \dfrac{n(n+1)^2(n+2)}{12}$. Применим к сумме $A = a_1^2 + \ldots + a_l^2$ в правой части неравенства (2) неравенство $A \geqslant \dfrac{(a_1 + \ldots + a_l)^2}{l}$, получим

$$A \geqslant \frac{1}{l}\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j - i + 1)^2 \sum_{k=i}^{j} \frac{y_k}{j - i + 1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{l}\left(\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} (j - i + 1) \sum_{k=i}^{j} y_k\right)^2 = \frac{1}{l} B^2.$$

Заметим, что B при фиксированном m содержит $\dfrac{m(n - m + 1)(n + 1)}{2}$ слагаемых y_m. Значит,

$$\frac{n^2 + 2n}{3} A \geqslant \frac{n^2 + 2n}{3} \cdot \frac{1}{l} B^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} y_i \cdot i \cdot (n - i + 1)\right)^2,$$

т. е. неравенство доказано. Осталось заметить, что оно обращается в равенство тогда и только тогда, когда

$$a_1 = \ldots = a_l \Leftrightarrow y_1 = \ldots = y_n,$$

т. е. когда $x_1, \ldots, x_{n+1}$ образуют арифметическую прогрессию.

03.6. **Лемма 1.** Пусть $a \in \boldsymbol{N}$, $a \geqslant 2$, $k \in \boldsymbol{N}$, $l \in \boldsymbol{N}$, тогда

$$(a^k - 1, a^l - 1) = a^{(k, l)} - 1,$$

где (m, n) — наибольший общий делитель чисел m и n.

Доказательство. Докажем лемму индукцией по $k + l$. При $k + l = 2$ утверждение очевидно.

Пусть для всех $k \geqslant l$, таких, что $k + l \leqslant n$, утверждение леммы верно. Тогда при $k + l = n + 1$ выполняются равенства

$$(a^k - 1, a^l - 1) = (a^k - a^l, a^l - 1) = (a^l(a^{k-l} - 1), a^l - 1) =$$
$$= (a^{k-l} - 1, a^l - 1) = a^{(k-l, l)} - 1 = a^{(k, l)} - 1.$$

Лемма доказана.

Возьмем $M = \dfrac{p^p - 1}{p - 1} = p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + 1 \Rightarrow M \geqslant 2$, так как $p \geqslant 2$.

Лемма 2. Существует простой делитель s числа M, такой, что $s \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Доказательство. Предположим, что для любого простого делителя s числа M выполняется условие

$$s \equiv 1 \pmod{p^2}.$$

Пусть $M = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k$, где p_i — простые числа, тогда $p_i \equiv 1 \pmod{p^2} \Rightarrow M \equiv 1 \pmod{p^2}$ — противоречие, так как $M = 1 + p + p^2 \cdot A = 1 + p \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.

Лемма доказана.

Из леммы 2 следует, что число M имеет простой делитель q такой, что $(q - 1) \not\vdots\, p^2$. Докажем, что тогда q — искомое число. Из того, что $(p^p - 1) \vdots q$, следует $(p, q) = 1$, поэтому $(p^{q-1} - 1) \vdots q$ (малая теорема Ферма). Из леммы 1 имеем $(p^{(p, q-1)} - 1) \vdots q$. Число p простое, поэтому либо $(q - 1) \vdots p$, либо $(p, q - 1) = 1$, и тогда $(p - 1) \vdots q$, что невозможно, так как если $p \equiv 1 \pmod q$, то

$$M = p^{p-1} + \ldots + p + 1 \equiv 1 + \ldots + 1 = p \equiv 1 \pmod q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow M \not\vdots\, q.$$

Значит, $(q - 1) \vdots p$ и при этом $(q - 1) \not\vdots\, p^2$. Отсюда $q = 1 + pm$, $m \not\vdots\, p$. Предположим, что выбранное q не подходит. Тогда существует $n \in \boldsymbol{Z}$, такое, что

$$(n^p - p) \vdots q \Rightarrow (n, q) = 1,$$

так как $(p, q) = 1$. Отсюда по малой теореме Ферма

$(n^{q-1} - 1) \vdots q \Rightarrow (n^{pm} - 1) \vdots q \Rightarrow 1 \equiv n^{pm} \equiv (n^p)^m \equiv p^m \pmod{q}$, так как $n^p \equiv p \pmod{q}$. Значит, $(p^m - 1) \vdots q$. Но $(p^p - 1) \vdots q$, и по лемме 1

$$(p^{(m,\, p)} - 1) \vdots q, \text{ где } (m, p) = 1,$$

поэтому $(p - 1) \vdots q$, что невозможно, как было показано выше.

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{Z}$ получаем $(n^p - p) \not\vdots\, q$.

2004 год

04.1. Пусть AL — биссектриса треугольника ABC. Докажем, что окружности, описанные около треугольников BMR и CNR, пересекаются в точке L (рис. 27).

Заметим, что O — центр окружности, проходящей через точки B, M, N, C. Значит, треугольник MON равнобедренный ($OM = ON$) и биссектриса угла MON является серединным перпендикуляром к отрезку MN. Опишем окружность около треугольника AMN и обозначим через X середину той дуги MN, которая не содержит точку A. Отрезки MX и NX равны как хорды, стягивающие равные дуги, следовательно, точка X лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN. С другой стороны, из равенства дуг MX и NX следует равенство вписанных углов MAX и

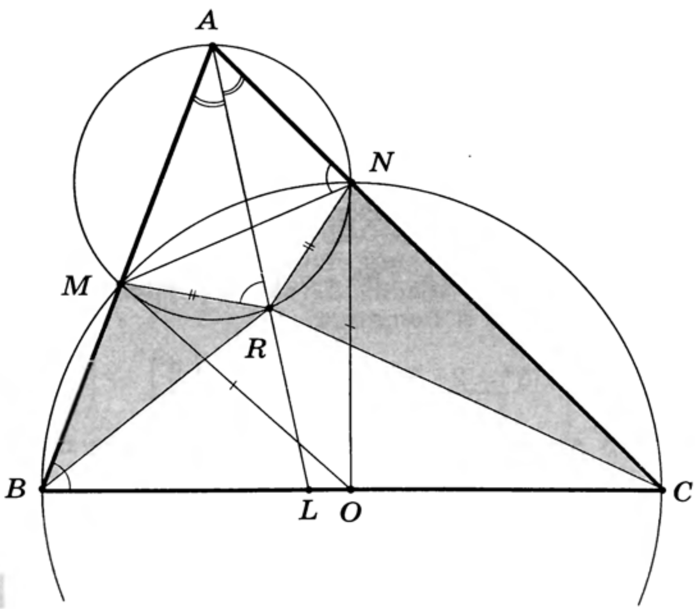

Рис. 27

NAX, поэтому точка X лежит на биссектрисе AL. Итак, мы получаем, что точка X лежит одновременно и на биссектрисе угла BAC, и на биссектрисе угла MON, т. е. точка X совпадает с точкой R.

Из того, что четырехугольники $BMNC$ и $AMRN$ вписанные, следуют равенства

$$180^\circ - \angle MRL = \angle ARM = \angle ANM = \angle ABC,$$

значит, точки B, M, R, L лежат на одной окружности.

Аналогично точки C, N, R, L также лежат на одной окружности.

04.2. **Ответ.** $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$, где $\alpha \in \boldsymbol{R}$, $\beta \in \boldsymbol{R}$.

В решении используем следующий факт: если многочлены $P(x)$ и $Q(x)$ таковы, что $P(t) = Q(t)$ для любого действительного t, то P и Q совпадают как многочлены (т. е. у них равны коэффициенты при соответствующих степенях x). Для доказательства рассмотрим разность $R(x) = P(x) - Q(x)$. Если бы многочлен $R(x)$ имел хотя бы один ненулевой коэффициент, то он имел бы конечное число корней — противоречие. Многочлен $P(x) = 0$, очевидно, удовлетворяет условию и присутствует в ответе. Пусть $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ($a_n \neq 0$) — ненулевой многочлен, удовлетворяющий условию. Подставим $a = t$, $b = c = 0$ в равенство из условия задачи (для таких a, b, c выполнено $ab + bc + ca = 0$). При $t = 0$ имеем $3P(0) = 2P(0)$, откуда $P(0) = a_0 = 0$. При любом действительном t получаем

$$P(t) + P(0) + P(-t) = 2P(t) \Rightarrow P(t) = P(-t).$$

Отсюда следует, что все коэффициенты $P(x)$ при нечетных степенях x равны 0, в частности n четно.

Далее, подставим $a = 3t$, $b = 6t$, $c = -2t$ (при этом $ab + bc + ca = (18 - 12 - 6)t^2 = 0$), получаем $P(-3t) + P(8t) + P(-5t) = 2P(7t)$. В равенстве $P(-3x) + P(8x) + P(-5x) = 2P(7x)$ приравняем коэффициенты при старшем члене x левой и правой частей:

$$a_n(-3)^n + a_n \cdot 8^n + a_n(-5)^n = 2a_n \cdot 7^n,$$

с учетом четности n получим

$$3^n + 8^n + 5^n = 2 \cdot 7^n, \text{ или } \left(\frac{3}{7}\right)^n + \left(\frac{8}{7}\right)^n + \left(\frac{5}{7}\right)^n = 2.$$

При $n \geqslant 8$ левая часть последнего равенства больше, чем

$$\left(\frac{8}{7}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{7}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{7} + \ldots > 1 + \frac{n}{7} > 2.$$

При $n = 6$ равенство $3^n + 8^n + 5^n = 2 \cdot 7^n$ невозможно, в чем легко убедиться и не прибегая к вычислениям, заметив, что числа 3^6, 8^6, 5^6 при делении на 7 дают остаток 1 (это следует, например, из малой теоремы Ферма), поэтому число $3^6 + 8^6 + 5^6$ при делении на 7 дает остаток 3.

Итак, остается случай $n \leqslant 4$, который приводит (так как $a_0 = 0$, $a_1 = a_3 = 0$) к многочлену вида $P(x) = \alpha x^4 + \beta x^2$.

Остается проверить ответ. Рассмотрим

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) - 2P(a+b+c) =$$
$$= \beta((a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 2(a+b+c)^2) +$$
$$+ \alpha((a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 - 2(a+b+c)^4).$$

Первая скобка равна $-4(ab + bc + ca) = 0$. Преобразуем вторую скобку с учетом равенства $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

Получим $(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 - 2(a^2+b^2+c^2)^2 = (a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4) + (b^4 - 4b^3c + 6b^2c^2 - 4bc^3 + c^4) + (c^4 - 4c^3a + 6c^2a^2 - 4ca^3 + a^4) - 2(a^4 + b^4 + c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - 4ab(a^2+b^2) - 4bc(b^2+c^2) - 4ca(c^2+a^2) = 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2a^2bc + 2b^2ca + 2c^2ab) - 4ab(a^2+b^2+c^2) - 4bc(a^2+b^2+c^2) - 4ca(a^2+b^2+c^2) = 2(ab+bc+ca)^2 - 4(ab+bc+ca)(a^2+b^2+c^2) = 0$.

04.3. **Ответ.** Прямоугольники $m \times n$, для которых $m \vdots 3$, $n \vdots 4$ (или $n \vdots 3$, $m \vdots 4$), и прямоугольники $m \times n$, для которых $m \vdots 12$, $n \neq 1, 2, 5$ (или $n \vdots 12$, $m \neq 1, 2, 5$).

Пусть прямоугольник $m \times n$ замощен крюками. Для каждого крюка A рассмотрим клетку, три стороны которой граничат с клетками крюка (рис. 28). Назовем такую клетку *выделенной* для крюка A. Она покрыта каким-то другим крюком $Б$. Так как крюк $Б$ не пересекается с крюком A, возможно 3 варианта его расположения (рис. 29), причем третий вариант отпадает, потому что на доске остается непокрытая клетка. В оставшихся вариантах крюк A покрывает выделенную клетку крюка $Б$. Следовательно, все крюки разбиваются на пары крюков, которые покрывают выделенные клетки друг друга. Каждая такая пара крюков образует фигуру из 12 клеток одного из двух видов — «кирпич» 4×3 или «зигзаг».

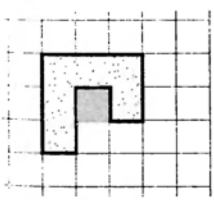

Рис. 28

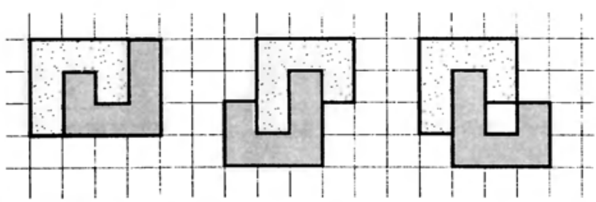

Рис. 29

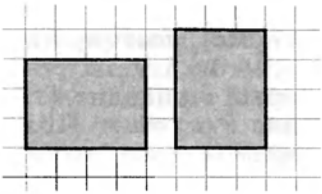

Рис. 30

Итак, прямоугольник $m \times n$ разбит на кирпичи и зигзаги из 12 клеток. В частности, отсюда следует, что mn делится на 12, т. е. одно из чисел m, n делится на 3.

Пусть для определенности $m \vdots 3$. Рассмотрим три возможных случая.

I случай. Пусть числа m и n четные, но не делятся на 4. Тогда общее количество $\left(\text{равное } \frac{mn}{12}\right)$ кирпичей и зигзагов нечетно. Кирпич может быть ориентирован двумя способами — горизонтально и вертикально, зигзаг может быть ориентирован четырьмя способами (два вертикальных и два горизонтальных) (рис. 30, 31). Закрасим в прямоугольнике $m \times n$ каждую четвертую вертикальную полосу (рис. 32). Общее количество закрашенных клеток четно, так как в каждой полосе их четное число.

Заметим, что в каждом вертикальном кирпиче и горизонтальном зигзаге 0, 2 или 4 закрашенные клетки, зна-

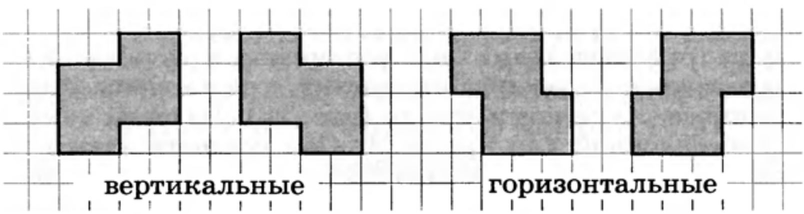

Рис. 31

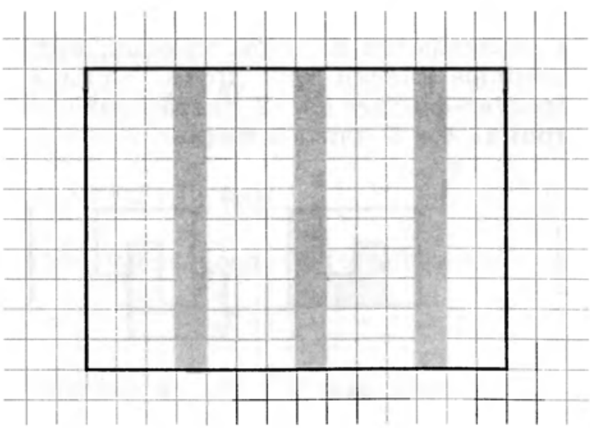

Рис. 32

чит, все вертикальные кирпичи и горизонтальные зигзаги накрывают четное число закрашенных клеток. Значит, все горизонтальные кирпичи и вертикальные зигзаги накрывают четное число закрашенных клеток. Но в каждом горизонтальном кирпиче или вертикальном зигзаге ровно 3 закрашенные клетки, поэтому суммарное количество горизонтальных кирпичей и вертикальных зигзагов четно. Рассматривая аналогичную раскраску горизонтальными полосами, докажем, что суммарное количество вертикальных кирпичей и горизонтальных зигзагов четно. Итак, мы получаем, что общее количество кирпичей и зигзагов четно — противоречие.

II случай. Пусть $n \vdots 4$. Тогда прямоугольник $m \times n$ разбивается на кирпичи.

III случай. Пусть $m \vdots 4$. Тогда $m \vdots 12$, т. е. $m = 12l$. Если n можно представить в виде $n = 3x + 4y$ с целыми неотрицательными x и y, то прямоугольник $m \times n$ разбивается на x прямоугольников $12l \times 3$ и y прямоугольников $12l \times 4$, каждый из которых разбивается на кирпичи. Представим в виде $3x + 4y$ все $n \neq 1, 2, 5$:

$$3 = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 0;\ 4 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 1;\ 8 = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2.$$

Все оставшиеся n получаются из чисел 3, 4, 8 прибавлением нескольких троек. Итак, если $n \neq 1, 2, 5$, то разбиение на крюки возможно.

В прямоугольники $m \times 1$ и $m \times 2$ невозможно поместить ни одного крюка. Наконец, предположим, что прямоугольник $m \times 5$ удалось замостить кирпичами и зигзагами. Но тогда две фигуры, покрывающие две угловые клетки в строке длины 5, обязательно перекрываются — противоречие.

04.4. Предположим противное: пусть при некоторых $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$ числа t_i, t_j, t_k не являются длинами сторон треугольника. Обозначим тройку t_i, t_j, t_k как a, b, c, где $a + b \leqslant c$.

Докажем для чисел $x \geqslant y \geqslant z > 0$ вспомогательное неравенство $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqslant \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$. После эквивалентных преобразований получим

$$\frac{x}{z} - \frac{y}{z} \geqslant \frac{z}{y} - \frac{z}{x},\quad \frac{x-y}{z} \geqslant \frac{z(x-y)}{xy}.$$

Домножая на общий знаменатель, получаем верное неравенство

$$xy(x-y) \geqslant z^2(x-y).$$

Неравенство $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqslant \frac{y}{z} + \frac{z}{y}$ доказано.

В частности, получаем

$$\frac{c}{a}+\frac{a}{c} \geqslant \frac{a+b}{a}+\frac{a}{a+b} \text{ и } \frac{c}{b}+\frac{b}{c} \geqslant \frac{a+b}{b}+\frac{b}{a+b}.$$

Как частный случай доказанного при $z = y$, получим известное неравенство $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2$ для положительных x и y. Имеем

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right) \geqslant$$

$$\geqslant 2+\left(\frac{a+b}{b}+\frac{b}{a+b}\right)+\left(\frac{a+b}{a}+\frac{a}{a+b}\right)=$$

$$=2+\left(\frac{a+b}{b}+\frac{a+b}{a}\right)+\left(\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\right)=$$

$$=2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\right)+\frac{a+b}{a+b} \geqslant 7.$$

(Фактически, мы решили задачу для $n = 3$.)

При раскрытии скобок в произведении

$$(t_1+t_2+\ldots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right)$$

получается n слагаемых вида $t_i \cdot \frac{1}{t_i}=1$ и $\frac{n(n-1)}{2}$ слагаемых вида $\left(\frac{t_k}{t_l}+\frac{t_l}{t_k}\right)$ для всевозможных $1 \leqslant k < l \leqslant n$. Каждое слагаемое вида $\left(\frac{t_k}{t_l}+\frac{t_l}{t_k}\right)$ не меньше 2, а кроме того, сумма трех слагаемых $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{c}{a}+\frac{a}{c}\right)$ не меньше $7 = 2 \cdot 3 + 1$. Значит, сумма всех слагаемых вида $\left(\frac{t_k}{t_l}+\frac{t_l}{t_k}\right)$ не меньше, чем удвоенное количество слагаемых плюс 1. Итак,

$$(t_1+t_2+\ldots+t_n)\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\ldots+\frac{1}{t_n}\right) \geqslant n+2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}+1=n^2+1,$$

что *противоречит* условию.

04.5. Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность (рис. 33). Продолжим отрезки BP и DP до пересечения с окружностью в точках D' и B' соответственно. Так как равные вписанные углы опираются на равные дуги, то

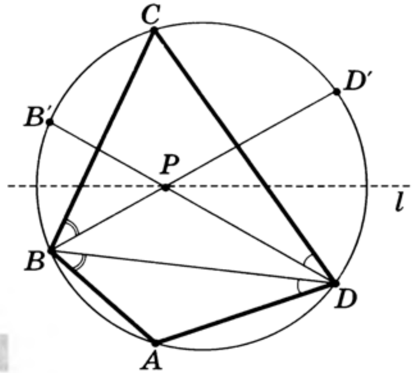

Рис. 33

равны дуги AB и CB', а также равны дуги AD и CD'. Следовательно, точки B и B', а также точки D и D' симметричны относительно серединного перпендикуляра l к отрезку AC. Значит, отрезки BD' и DB' симметричны относительно l, поэтому их точка пересечения P лежит на l, т. е. равноудалена от A и C.

Наоборот, пусть теперь дано, что $AP = CP$, т. е. P лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку AC (рис. 34). Предположим, что четырехугольник $ABCD$ не является вписанным. Тогда окружности ω_B и ω_D, описанные соответственно около треугольников ABC и ADC, различны. Пусть прямая BD пересекает окружность ω_B в точках B и D_1, а окружность ω_D в точках D и B_1.

Обозначим через B', D', B_1', D_1' образы точек B, D, B_1, D_1 соответственно при симметрии относительно l. Очевидно, что точки B', D', B_1', D_1' лежат на одной прямой, точки B' и D_1' лежат на окружности ω_B, а точки B_1' и D' лежат на окружности ω_D. Из симметрии следует, что дуги AD_1 и CD_1' окружности ω_B равны, поэтому $\angle ABD_1 = \angle CBD_1'$. Но по условию $\angle ABD_1 = \angle CBP$, поэтому BD_1' проходит через точку P. В силу симметрии $B'D_1$ проходит через точку P. Аналогично

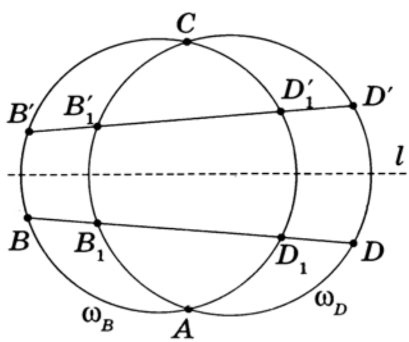

Рис. 34

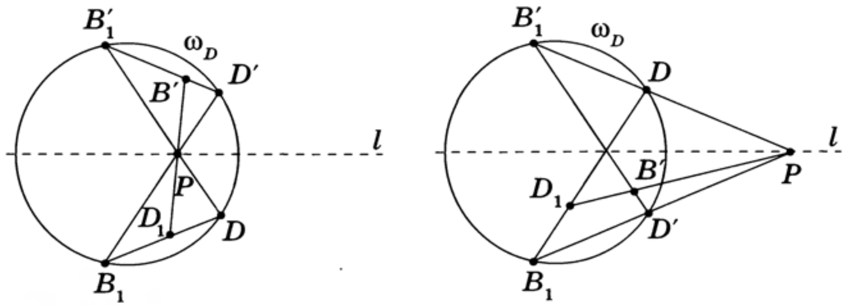

Рис. 35

доказываем, что прямые DB_1' и $D'B_1$ проходят через точку P. Отметим, что по условию прямые BP и BD различны, поэтому прямые BD и $B'D'$ не проходят через точку P.

Пусть $\angle ABC + \angle ADC < 180°$. Так как $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, то отрезок BD пересекается с отрезком AC. Отсюда следует, что точки B и B_1 лежат по одну сторону от прямой AC, а точки D и D_1 — по другую. Заметим, что $\angle AD_1C > \angle ADC$, поэтому точка D_1 лежит внутри окружности ω_D. Отсюда следует, что точка D_1 лежит на прямой BD между точками B и D. Аналогично точка B_1 тоже лежит между точками B и D. Итак, порядок следования точек на прямой — B, B_1, D_1, D, в частности, точка D_1 лежит на отрезке B_1D. В силу симметрии точка D_1' лежит на отрезке $B_1'D'$.

Углы B_1PD и $B_1'PD'$ в симметричных относительно l треугольниках B_1PD и $B_1'PD'$ либо вертикальные (если точка P лежит на отрезке DB_1'), либо совпадают (если точка P лежит на продолжении отрезка DB_1') (рис. 35). Так как точка D_1 лежит на отрезке DB_1, то в любом случае прямая PD_1 пересекает отрезок $D'B_1'$ (а не его продолжение). Получаем, что точка $B' = PD_1 \cap D'B_1'$ лежит на отрезке $D'B_1'$ — п р о т и в о р е ч и е.

Случай $\angle ABC + \angle ADC > 180°$ разбирается аналогично, лишь точки B и B_1, D и D_1, B' и B_1', D' и D_1' поменяются ролями.

04.6. **Ответ.** Все числа, не кратные 20.

Любое число, делящееся на 20, имеет последнюю цифру 0 и четную предпоследнюю цифру. Следовательно, полосатое число не может делиться на число n, кратное 20.

Докажем по шагам, что все остальные числа подходят.

Шаг 1. Существует нечетное k-значное полосатое число X_k (в качестве первой четной цифры допускается 0), делящееся на 5^k. Докажем индукцией по k. Положим $X_1 = 5$.

Пусть имеется k-значное полосатое число $X_k = 5^k m$. Чтобы получить число X_{k+1}, подберем подходящую цифру a и припишем ее слева к числу X_k, т. е. будем искать X_{k+1} в виде $\overline{aX_k} = 10^k a + X_k = 5^k(2^k a + m)$. Нам нужно, чтобы число $S_a = 2^k a + m$ делилось на 5. Кроме того, если k нечетно, то цифру a выберем четной (чтобы X_{k+1} было полосатым). Покажем, что это возможно. Числа 0, 2, 4, 6, 8 дают различные остатки от деления на 5, поэтому пять чисел S_0, S_2, S_4, S_6, S_8 дают различные остатки от деления на 5 (значит, среди этих остатков есть 0). В самом деле, если бы какие-то S_i и S_j $(i \neq j)$ давали одинаковый остаток от деления на 5, то их разность $S_i - S_j = 2^k(i - j)$ должна была бы делиться на 5, но это не так. Если же k четно, то искомую цифру a выберем нечетной. Аналогично доказываем, что это возможно, используя то, что числа 1, 3, 5, 7, 9 дают различные остатки от деления на 5.

Шаг 2. Существует k-значное полосатое число Y_k, делящееся на 2^k, причем если k четно, то число Y_k делится на 2^{k+1}, а если k нечетно, то число Y_k не делится на 2^{k+1}.

Докажем индукцией по k. $Y_1 = 2$. Пусть имеется k-значное число Y_k, удовлетворяющее данным условиям. Определим Y_{k+1}.

Пусть k нечетно, $k = 2t - 1$. Тогда $Y_{2t-1} = 2^{2t-1}m$, где m нечетно. Получим полосатое число $Y_{2t} = \overline{aY_{2t-1}}$, подобрав нечетную цифру a. Запишем

$$Y_{2t} = 10^{2t-1}a + Y_{2t-1} = 2^{2t-1}(5^{2t-1}a + m).$$

Для доказательства нам требуется, чтобы $5^{2t-1}a + m$ делилось на 4. Заметим, что 5 в любой степени дает остаток 1 от деления на 4, поэтому если $m \equiv 1 \pmod 4$, положим $a = 3$, а если $m \equiv 3 \pmod 4$, положим $a = 1$.

Пусть k четно, $k = 2t$. Тогда $Y_{2t} = 2^{2t+1}m$. Получим полосатое число $Y_{2t+1}\overline{aY_{2t}}$, подобрав четную цифру $a = 2b$. Имеем

$$Y_{2t+1} = 10^{2t}a + Y_{2t} = 2^{2t+1}(5^{2t}b + m).$$

Нам нужно, чтобы $5^{2t}b + m$ не делилось на 2. Для этого положим $b = 1$ (т. е. $a = 2$), если m нечетное, и $b = 2$ (т. е. $a = 4$), если m четное.

Шаг 3. Существует нечетное полосатое число, делящееся на $5^k p$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, где НОД$(p, 10) = 1$.

Пусть X — нечетное полосатое число из четного количества цифр (возможно, с первой цифрой 0), делящееся на 5^k (если $k = 0$, то положим $X = 01$, если k четно, то пусть $X = X_k$ из первого шага, если же k нечетно, то пусть

$X = X_{k+1}$ из первого шага). Нужное полосатое число Z, делящееся на $5^k p$, найдем в виде

$$Z = \overline{\underbrace{XX\ldots X}_{l+1}} = X(1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots + 10^{lk}),$$

где k — количество цифр в числе X. Достаточно доказать, что найдется l, для которого число

$$S_l = 1 + 10^k + 10^{2k} + \ldots + 10^{lk} = \frac{10^{(l+1)k} - 1}{10^k - 1}$$

делится на p.

Для доказательства воспользуемся *теоремой Эйлера*: если НОД$(a, b) = 1$, то $a^{\varphi(b)} - 1$ делится на b, где $\varphi(b)$ — количество натуральных чисел, меньших b и взаимно простых с b. Положим $l + 1 = \varphi((10^k - 1)p)$, тогда число $10^{(l+1)k} - 1$ делится на $10^{l+1} - 1$, а число $10^{l+1} - 1$ в силу теоремы Эйлера делится на $(10^k - 1)p$. (Можно обойтись и без помощи теоремы Эйлера: заметим, что найдутся такие различные $l_1 > l_2$, что S_{l_1} и S_{l_2} дают один и тот же остаток при делении на p. Тогда число

$$S_{l_1} - S_{l_2} = 10^{(l_2+l_1)k} + \ldots + 10^{l_1 k} = 10^{(l_2+l_1)k} S_{l_1 - l_2}$$

делится на p, т. е. $S_{l_1 - l_2}$ делится на p.)

Шаг 4. Существует полосатое число, делящееся на $2^k p$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), где НОД$(p, 10) = 1$.

Доказательство аналогично третьему шагу с использованием построенного на втором шаге полосатого числа, делящегося на 2^k.

Шаг 5. Существует полосатое число, делящееся на $2 \cdot 5^k p$, где НОД$(p, 10) = 1$.

Достаточно приписать 0 в конце нечетного полосатого числа, делящегося на 5^k, полученного на третьем шаге.

2005 год

05.1. Запишем векторное равенство

$$\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2B_1} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{B_2C_1} + \overrightarrow{C_1C_2} + \overrightarrow{C_2A_1} = \vec{0}.$$

Заметим, что сумма векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$ равна $\vec{0}$, так как, если последовательно отложить их от некоторой точки, получится равносторонний треугольник. Следовательно, сумма векторов $\overrightarrow{A_2B_1}$, $\overrightarrow{B_2C_1}$, $\overrightarrow{C_2A_1}$ также равна $\vec{0}$, поэтому если эти векторы последовательно отложить от некоторой точки, то получится треугольник, причем равносторонний, так как длины векторов равны. Следовательно, прямые A_2B_1, B_2C_1, C_2A_1 образуют правильный треугольник, откуда вытекает подобие треугольников AC_1B_2, BA_1C_2 и CB_1A_2 (рис. 36). Более того, эти треугольники рав-

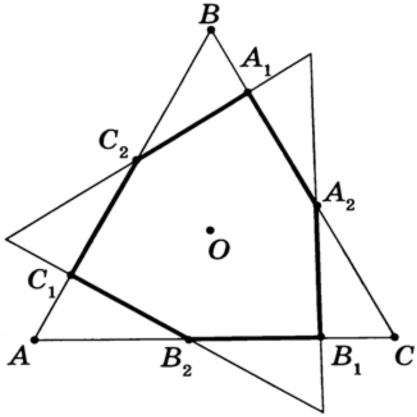

Рис. 36

ны, поскольку $A_2B_1 = B_2C_1 = C_2A_1$, и, значит, они совмещаются поворотом на угол $120°$ вокруг центра O треугольника ABC. Так как точки A_1, B_1, C_1 переходят одна в другую при повороте на $120°$ вокруг точки O, то треугольник $A_1B_1C_1$ правильный и O — его центр. Так как $B_1A_1 = C_1A_1$ и $B_1B_2 = C_1B_2$, то A_1B_2 — серединный перпендикуляр к B_1C_1, поэтому A_1B_2 проходит через O. Аналогично B_1C_2 и C_1A_2 проходят через O.

05.2. Если для пары номеров $m < n$ выполнено равенство $a_m = a_n$, то числа a_m и a_n при делении на n дают равные остатки — противоречие. Таким образом, в последовательности каждое целое число встречается не более одного раза. Предположим, что целое число N не встретилось в последовательности. Так как среди членов последовательности бесконечно много положительных и отрицательных чисел, то найдется такое t, что среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_t$ есть как большее N, так и меньшее N. Пусть X и Y соответственно наименьшее и наибольшее среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_t$; $X < N < Y$. Среди $(Y - X + 1)$ целых чисел промежутка $[X, Y]$ есть не больше чем $(Y - X)$ членов последовательности, так как N не встречается в последовательности. Значит, среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{Y-X+1}$ найдется число a_k, лежащее вне промежутка $[X, Y]$. Тогда либо $|a_k - X|$, либо $|a_k - Y|$ не меньше $Y - X + 1$. Пусть для определенности $s = |a_k - Y| \geqslant Y - X + 1$. Тогда среди чисел $a_1, a_2, \ldots, a_s$ нашлись два числа (a_k и Y), дающие равные остатки при делении на s, что противоречит условию.

Замечание. Из решения легко следует, что для каждого n множество первых n членов последовательности является множеством n последовательных целых чисел.

05.3. (Решение Ю. Борейко (Молдова) удостоено спецприза ММО.)

Заметим, что

$$\frac{1}{x^5+y^2+z^2}-\frac{1}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{(x^3-1)(y^2+z^2)}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)},$$

поэтому

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}-\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}=\frac{x^2(x^3-1)^2(y^2+z^2)}{x^3(x^5+y^2+z^2)(x^2+y^2+z^2)}\geqslant 0.$$

Значит,

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2}+\frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{y^5-y^2}{y^3(x^2+y^2+z^2)}+\frac{z^5-z^2}{z^3(x^2+y^2+z^2)}=$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}\right).$$

Но так как $\frac{1}{x}\leqslant yz$, $\frac{1}{y}\leqslant zx$, $\frac{1}{z}\leqslant xy$, то

$$x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}\geqslant x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=$$

$$=\frac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)\geqslant 0.$$

05.4. **Ответ.** 1.

Достаточно показать, что для любого простого числа p найдется такой номер n, что число a_n делится на p.

При $p=2$ положим $n=1$, тогда $a_1=10$ — делится на 2. При $p=3$ положим $n=2$, тогда $a_2=48$ — делится на 3.

При $p>3$ возьмем $n=p-2$. Согласно малой теореме Ферма, если натуральное a не делится на p, то a^{p-1} при делении на p дает остаток 1. Поэтому число

$$6a_n=6(2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1)=3\cdot 2^{p-1}+2\cdot 3^{p-1}+6^{p-1}-6$$

при делении на p дает остаток $3\cdot 1+2\cdot 1+1-6=0$. Итак, $6a_n$ делится на p, откуда a_n делится на p, так как p и 6 взаимно просты.

05.5. Пусть прямые AD и BC пересекаются в точке H; положим для определенности, что H лежит на лучах DA и CB (рис. 37). Пусть K — середина дуги окружности, описанной около треугольника BHD, не содержащей точку H; очевидно, $BK=DK$. Четырехугольник $BHDK$ — вписанный, поэтому $\angle KDA=\angle KBC$. Треугольники KDA и KBC равны по двум сторонам и углу между ними ($DA=BC$ по условию), поэтому $KA=KC$, $\angle AKD=\angle CKB$. Отсюда

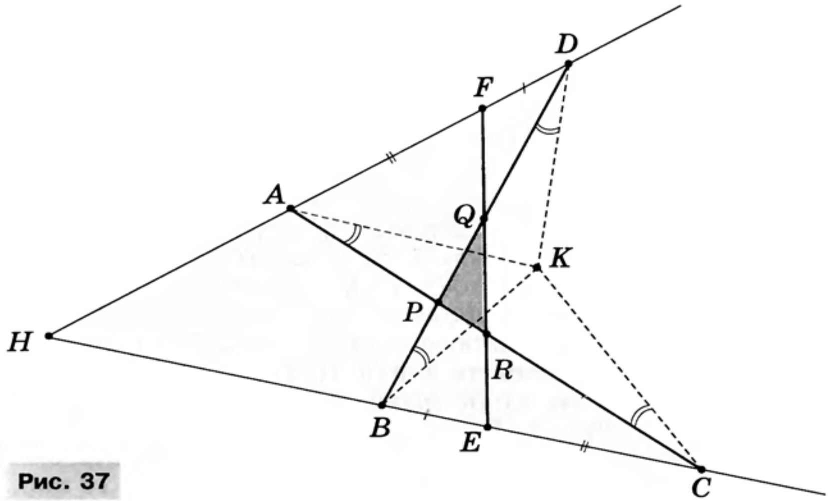

Рис. 37

$\angle AKC = \angle AKB + \angle CKB = \angle AKB + \angle AKD = \angle BKD$. В равнобедренных треугольниках AKC и BKD углы при вершинах равны, следовательно, и углы при основаниях равны, значит, $\angle KAP = \angle KDP$ и точки A, D, K, P лежат на одной окружности, отсюда $\angle(KP, AP) = \angle(KD, AD)$.

Предыдущие рассуждения останутся без изменений, если точки A, C, P заменить соответственно на F, E, Q. Отсюда вытекает, что точки F, D, K, Q лежат на одной окружности и $\angle(KQ, FQ) = \angle(KD, FD)$. Получаем, что

$$\angle(KP, RP) = \angle(KP, AP) = \angle(KD, AD) = \angle(KD, FD) = \\ = \angle(KQ, FQ) = \angle(KQ, RQ),$$

поэтому точки K, R, P, Q лежат на одной окружности. Итак, K — общая точка всевозможных окружностей, проходящих через точки P, Q, R.

З а м е ч а н и е 1. Из решения вытекает следующее описание искомой точки: точка K — центр поворота, переводящего точки A, F, D соответственно в точки C, E, B.

З а м е ч а н и е 2. Из решения следует, что K является *точкой Микеля* пяти прямых AD, BC, AC, BD, EF, т. е. лежит на окружности, описанной около треугольника, образованного любой тройкой из этих прямых.

05.6. Занумеруем всех участников олимпиады числами от 1 до n и представим результат олимпиады в виде таблицы, которая содержит n строк и 6 столбцов. На пересечении i-й строки и j-го столбца таблицы стоит плюс, если i-й участник решил задачу номер j. По условию нет строки с шестью плюсами. Для каждой из пар (j, k) столбцов, $1 \leqslant j < k \leqslant 6$, определим параметр $b_{j,k}$, равный количеству строк, на пересечении которых с j-м и k-м столбцами стоят плюсы. По условию $b_{j,k} > \frac{2}{5}n$, поэтому

$$b_{j,k} = \frac{2}{5}n + 1 - \left\{\frac{2}{5}n\right\} + a_{j,k},$$

где $a_{j,k}$ — целое неотрицательное число. Предположим, что утверждение задачи неверно, т. е. строк с пятью плюсами не более одной. Добавим, если возможно, в каждой строке столько плюсов, чтобы в $(n-1)$ строках стало по 4 плюса, а в оставшейся строке стало 5 плюсов (пусть, скажем, в этой строке нет плюса только в столбце номер q). При этом условие задачи не нарушится.

Сосчитаем теперь количество P пар плюсов, находящихся в одной строке. Суммируя по строкам, получаем $P = 6(n-1) + 10 = 6n + 4$, так как в строке с четырьмя плюсами 6 пар плюсов, а в строке с пятью плюсами 10 пар. Суммируя по всем парам столбцов, получаем, что

$$P = b_{1,2} + b_{1,3} + \ldots + b_{5,6} = 15\left(\frac{2}{5}n + 1 - \left\{\frac{2}{5}n\right\}\right) + a_{1,2} +$$

$$+ a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} = 6n + 15 - 15\left\{\frac{2}{5}n\right\} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6}.$$

Заметим, что дробная доля $\left\{\frac{2}{5}n\right\}$ может принимать значения $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$.

Если $\left\{\frac{2}{5}n\right\} \leqslant \frac{3}{5}$, то $P \geqslant 6n + 15 - 15 \cdot \frac{3}{5} = 6n + 6 > 6n + 4 = P$ — п р о т и в о р е ч и е.

Если же $\left\{\frac{2}{5}n\right\} = \frac{4}{5}$, то $n \equiv 2 \pmod 5$. Положим $n = 5l + 2$, тогда

$$P = 6n + 15 - 15 \cdot \frac{4}{5} + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} =$$

$$= 6n + 3 + a_{1,2} + a_{1,3} + \ldots + a_{5,6} = 6n + 4.$$

Значит, ровно одно из 15 чисел $a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{5,6}$ равно 1, а остальные равны 0.

Пусть для определенности $a_{1,2} = 1$, тогда $b_{1,2} = \frac{2}{5}n + 1 - \frac{4}{5} + 1 = 2l + 2$, а $b_{1,3} = b_{1,4} = \ldots = b_{5,6} = 2l + 1$.

Пусть в i-м столбце s_i плюсов. Обозначим через t_i количество пар плюсов, находящихся в одной строке, для которых один из плюсов содержится в i-м столбце. С одной стороны, t_i есть сумма тех пяти чисел $b_{j,\,k}$, для которых $i=j$ или $i=k$, т. е. $t_i = 5(2l+1) = 10l+5$ при $i \neq 1,\ 2$, и $t_1 = t_2 = 10l+6$. С другой стороны, суммируем t_i по строкам: каждая из s_i строк, содержащих плюс в i-м столбце, содержит 3 нужные пары, если всего в этой строке 4 плюса, и содержит 4 нужные пары, если всего в этой строке 5 плюсов. Таким образом, $t_q = 3s_q$ и $t_i = 3s_i + 1$ при $i \neq q$.

Итак, с одной стороны, среди чисел $t_1, t_2, \ldots, t_6$ два числа равны, а оставшиеся четыре числа на 1 меньше. С другой стороны, ровно одно из этих чисел делится на 3 — противоречие.

2006 год

06.1. Из условия вытекает, что

$$\angle ABC + \angle ACB = \angle PBA + \angle PCA + \angle PBC + \angle PCB = \\ = 2(\angle PBC + \angle PCB),$$

откуда

$$\angle BPC = 180^\circ - (\angle PBC + \angle PCB) = 180^\circ - \frac{\angle ABC + \angle ACB}{2} = \\ = 180^\circ - (\angle IBC + \angle ICB) = \angle BIC.$$

Поскольку точки P и I лежат в одной полуплоскости относительно BC, то точки B, I, P, C лежат на одной окружности (рис. 38).

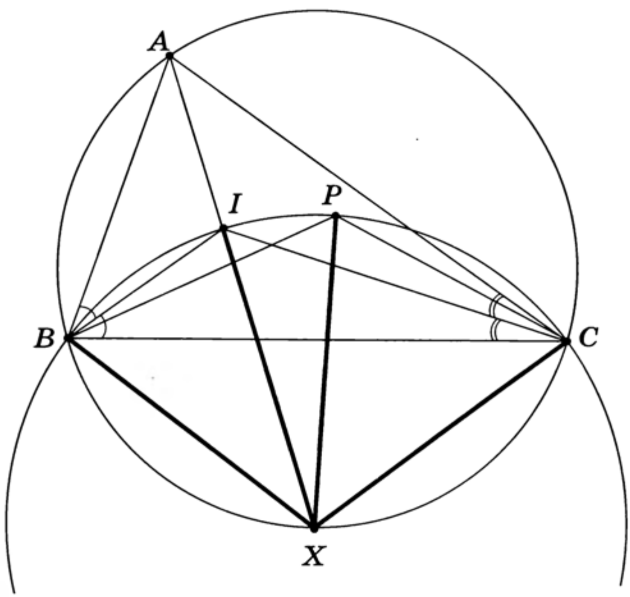

Рис. 38

Пусть X — точка пересечения AI с окружностью, описанной около треугольника ABC. Как известно, $XI = XB = XC$ (см., например, решение задачи 02.2). Значит, X — центр окружности, проходящей через B, I, C. На этой окружности также лежит точка P. Так как прямая AI проходит через центр этой окружности, то AI — минимальное из расстояний от точки A до точек этой окружности, причем $AP > AI$ в случае, если точка P не совпадает с I.

06.2. **Ответ.** 1003.

Пусть концы некоторой диагонали d разбивают границу многоугольника P на две части, содержащие соответственно k и $2006 - k$ сторон, где $k \leqslant 1003$. Число k назовем *длиной* диагонали d (сторону многоугольника P считаем диагональю длины 1). Таким образом, хорошие диагонали (или стороны) — это диагонали нечетной длины.

Рассмотрим разбиение многоугольника P на треугольники 2003 диагоналями. Треугольник из разбиения назовем *хорошим*, если он равнобедренный и имеет две стороны нечетной длины. В хорошем треугольнике есть две равные боковые стороны (каждая длины l) и основание, длина которого равна $2l$ или $2006 - 2l$, т. е. четна. Итак, в хорошем треугольнике боковые стороны имеют нечетную длину, а основание — четную длину. Оценим число хороших треугольников.

Лемма. Пусть диагональ d длины k из рассматриваемого разбиения делит многоугольник P на две части. Тогда в меньшей из частей имеется не более $\left[\frac{k}{2}\right]$ хороших треугольников. (*Меньшей* назовем часть, не содержащую центр многоугольника P. Если $k = 1003$, т. е. d проходит через центр, то меньшей объявим любую из двух частей. Если $k = 1$, то меньшая часть — отрезок.)

Доказательство. При $k = 1$ утверждение леммы очевидно — в меньшей части вообще нет треугольников. Применим индукцию по k, т. е. предположим, что лемма верна для диагоналей длины 1, 2, ..., $k - 1$, и рассмотрим меньшую часть Q для некоторой диагонали AB длины $k \geqslant 2$. В разбиении имеется треугольник ABC, лежащий в Q. Часть Q разбивается на треугольник ABC и меньшие части R и S для диагоналей AC и BC (рис. 39). Так как часть Q меньшая, то длины диагоналей AC и BC меньше k и дают в сумме k. Пусть длины диагоналей AC и BC равны a и b, где $a + b = k$. По предположению индукции в частях R и S соответственно не более $\left[\frac{a}{2}\right]$ и $\left[\frac{b}{2}\right]$ хороших треуголь-

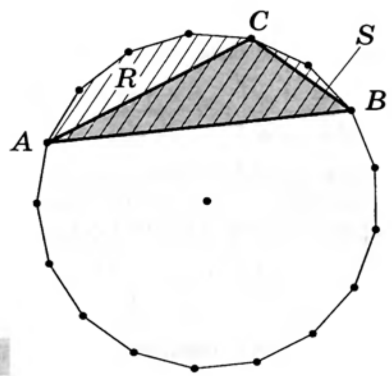

Рис. 39

ников. Если треугольник ABC не является хорошим, то в части Q хороших треугольников не больше чем

$$\left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right] \leqslant \left[\frac{a+b}{2}\right] = \left[\frac{k}{2}\right].$$

Если же треугольник ABC хороший, то его равными сторонами могут быть только AC и BC. Тогда $a = b = \frac{k}{2}$ нечетно, и в части Q хороших треугольников не больше чем

$$1 + \left[\frac{a}{2}\right] + \left[\frac{b}{2}\right] = 1 + \frac{a-1}{2} + \frac{b-1}{2} = \frac{k}{2} = \left[\frac{k}{2}\right].$$

Переход обоснован, и лемма доказана.

Рассмотрим в разбиении треугольник KLM, внутри или на границе которого содержится центр многоугольника P. Многоугольник разбит на треугольник KLM и меньшие части для диагоналей KL, LM, MK (рис. 40). Пусть длины диагоналей KL, LM, MK равны соответственно x, y, z, где $x + y + z = 2006$. Воспользуемся леммой. Если треуголь-

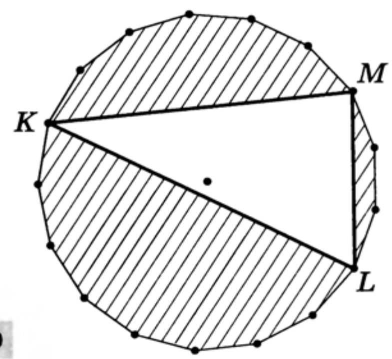

Рис. 40

ник KLM не является хорошим, то в разбиении P хороших треугольников не больше чем

$$\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{y}{2}\right]+\left[\frac{z}{2}\right]\leqslant\left[\frac{x+y+z}{2}\right]=1003.$$

Если же треугольник KLM хороший, то два из чисел x, y, z нечетны (пусть, скажем, x и y нечетны). Тогда в разбиении P хороших треугольников не больше чем

$$1+\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{y}{2}\right]+\left[\frac{z}{2}\right]=1+\frac{x-1}{2}+\frac{y-1}{2}+\frac{z}{2}=\frac{x+y+z}{2}=1003.$$

Приведем пример с 1003 хорошими треугольниками. Занумеруем вершины (подряд по часовой стрелке) числами 1, 2, ..., 2006 и соединим диагоналями попарно вершины 1 и 3, 3 и 5, ..., 2005 и 1. Эти диагонали отрезают 1003 хороших треугольника, а оставшийся 1003-угольник можно разбить на треугольники произвольно.

06.3. **Ответ.** $\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Заметим, что левую часть неравенства можно разложить на множители так:

$$|(b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c)|.$$

Это выражение симметрично относительно переменных a, b, c, поэтому положим для определенности, что $a\leqslant b\leqslant c$. Обозначим $s_1=(b-a)^2$, $s_2=(c-b)^2$, $s_3=(a-c)^2$, $s=(a+b+c)^2$, $k=a^2+b^2+c^2$. Легко видеть, что $s_1+s_2+s_3+s=3k$.

Заменим b на среднее арифметическое чисел a и c, т. е. рассмотрим тройку a', b', c', где $a'=a$, $b'=\frac{a+c}{2}$, $c'=c$. Очевидно, $s_3'=(a'-c')^2=s_3$. Кроме того, $s_1s_2\leqslant s_1's_2'$, поскольку

$$(b-a)(c-b)\leqslant\left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2=\left(\frac{c-a}{2}\right)^2=$$
$$=(b'-a')(c'-b'),$$

а также $s_1+s_2\geqslant s_1'+s_2'$, поскольку $(b-a)^2+(c-b)^2=(c-a)^2-2(b-a)(c-b)=(c'-a')^2-2(b-a)(c-b)\geqslant\geqslant(c'-a')^2-2(b'-a')(c'-b')=(b'-a')^2+(c'-b')^2$.

Теперь тройку чисел a', b', c' сдвинем на некоторое число x, т. е. рассмотрим тройку $a''=a'+x$, $b''=b'+x$, $c''=c'+x$. Ясно, что $s_1''=(b''-a'')^2=s_1'$, $s_2''=(c''-b'')^2=s_2'$, $s_3''=(c''-a'')^2=s_3'$. При фиксировании a', b', c' квадратичная функция $y=(a'+b'+c'+3x)^2$ принимает все неотрицательные значения, поэтому за счет выбора x добьемся, чтобы $s''=(a''+b''+c'')^2=(a'+b'+c'+3x)^2$ стало равным числу $3k-(s_1''+s_2''+s_3'')$ (число $3k-(s_1''+s_2''+s_3'')$ неотрицательно и даже не меньше s, так как

$$3k-(s_1''+s_2''+s_3'')=(s_1+s_2+s_3+s)-(s_1'+s_2'+s_3')=$$
$$=s+((s_1+s_2)-(s_1'+s_2'))).$$

У троек a, b, c и a'', b'', c'' совпадают суммы квадратов, так как

$$3(a^2+b^2+c^2)=3k=s_1''+s_2''+s_3''+s''=3(a''^2+b''^2+c''^2).$$

Но $s_1s_2 \leqslant s_1''s_2''$, $s_3=s_3''$, $s \leqslant s''$, значит, $s_1s_2s_3s \leqslant s_1''s_2''s_3''s''$, т. е. квадрат левой части исходного неравенства для тройки a, b, c не больше, чем для тройки a'', b'', c''. Это означает, что для поиска минимального M достаточно рассматривать только тройки $a \leqslant b \leqslant c$ с условием $b-a=c-b$.

Зафиксируем $k=a^2+b^2+c^2 \geqslant 0$. Пусть $s_1=(b-a)^2=$ $=s_2=(c-b)^2=t$, тогда $s_3=(c-a)^2=4t$, $s=(a+b+c)^2=$ $=3k-(s_1+s_2+s_3)=3k-6t$, отсюда квадрат левой части $F(t)=((b-a)(c-b)(a-c)(a+b+c))^2=12(kt^3-2t^4)$. Вычислив производную $F'(t)=12(3kt^2-8t^3)=12t^2(3k-8t)$, видим, что $F(t)$ возрастает при $t<\dfrac{3k}{8}$, убывает при $t>\dfrac{3k}{8}$ и имеет максимум при $t=\dfrac{3k}{8}$. Отсюда $F(t) \leqslant F\left(\dfrac{3k}{8}\right)=\dfrac{81}{512}k^4$, поэтому при $M=\sqrt{\dfrac{81}{512}}=\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$ исходное неравенство верно.

С другой стороны, при $a=\sqrt{2}-3$, $b=\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}+3$ имеем $k=24$, $t=9=\dfrac{3k}{8}$, и при $M=\dfrac{9\sqrt{2}}{32}$ исходное неравенство превращается в равенство.

06.4. **Ответ.** (0; –2), (0; 2), (4; –23), (4; 23).

Если $x<0$, то $1<1+2^x+2^{2x+1}<1+1+2=4$, поэтому решений нет.

При $x=0$, 1, 2 левая часть уравнения равна соответственно 4, 11, 37. Точный квадрат получается только при $x=0$, что дает пары (0; 2) и (0; –2).

Пусть $x \geqslant 3$. Положим $y \geqslant 0$ (пары (x, y) и $(x, -y)$ входят в множество решений одновременно). Если $y \leqslant 2^x$, то $y^2 \leqslant 2^{2x}<1+2^x+2^{2x+1}$, если же $y \geqslant 2^{x+1}$, то $y^2 \geqslant 2^{2x+2}=$ $=2^{2x+1}+2^{2x}+2^{2x}>1+2^x+2^{2x+1}$, поэтому возможно только $2^x<y<2^{x+1}$. Преобразуем уравнение к виду $(y-1)(y+1)=$ $=2^x(2^{x+1}+1)$. Числа $y-1$ и $y+1$ оба четные, причем одно из них не делится на 4, значит, другое делится на 2^{x-1} и не делится на 2^x, т. е. имеет вид $2^{x-1}(2k-1)$ для натурального k. При $k=1$ имеем $2^{x-1}(2k-1)=2^{x-1}<2^x$, а если

$k \geqslant 3$, то $2^{x-1}(2k-1) > 4 \cdot 2^{x-1} = 2^{x+1}$. Но по доказанному $2^x \leqslant y \pm 1 \leqslant 2^{x+1}$, значит, возможно только $k = 2$. Остается две возможности: либо $y - 1 = 3 \cdot 2^{x-1}$, либо $y + 1 = 3 \cdot 2^{x-1}$. Подставляя в исходное уравнение $y = 3 \cdot 2^{x-1} \pm 1$, получаем $1 + 2^x + 2^{2x+1} = 9 \cdot 2^{2x-2} \pm 6 \cdot 2^{x-1} + 1$, $2^x + 2^{2x+1} = 8 \cdot 2^{2x-2} + 2^{2x-2} \pm 3 \cdot 2^x$, $2^x = 2^{2x-2} \pm 3 \cdot 2^x$.

В одном случае (знак «+») получаем $2^{2x-2} + 2 \cdot 2^x = 0$, что невозможно, в другом случае (знак «–») $4 \cdot 2^x = 2^{2x-2}$, $2^{x+2} = 2^{2x-2}$, $x + 2 = 2x - 2$, $x = 4$ и $y = \pm 23$.

06.5. Нам понадобятся вспомогательные утверждения (леммы).

Лемма 1. Если $T(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, а y и z — различные числа, то $T(y) - T(z)$ делится на $y - z$.

Доказательство. Действительно, если

$$T(x) = a_l x^l + a_{l-1}x^{l-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

то

$$T(y) - T(z) = a_l(y^l - z^l) + a_{l-1}(y^{l-1} - z^{l-1}) + \ldots + a_1(y - z),$$

и каждое из слагаемых делится на $y - z$.

Лемма 2. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — различные числа, $l \geqslant 2$, и пусть $b_1, b_2, \ldots, b_l$ таковы, что для всех $1 \leqslant i < j \leqslant l$ выполнено равенство $|a_i - a_j| = |b_i - b_j|$. Тогда найдется такая линейная функция $f(x) = \pm x + c$, что $f(a_i) = b_i$ для всех $i = 1, \ldots, l$.

Доказательство. Предположим, что в равенстве $|a_i - a_j| = |b_i - b_j|$ для двух пар индексов (r, s) и (s, t) модуль раскрывается с разным знаком, т. е. пусть $a_r - a_s = b_r - b_s$ и $a_s - a_t = b_t - b_s$. Складывая, получаем $a_r - a_t = b_r + b_t - 2b_s$. Но $a_r - a_t = \pm(b_r - b_t)$, откуда $b_s = b_r$ или $b_s = b_t$ — противоречие.

Из доказанного вытекает, что если $a_1 - a_2 = b_1 - b_2$, то для $i = 3, 4, \ldots, l$ выполнено $a_1 - a_i = b_1 - b_i$, и далее, для всех $1 \leqslant i < j \leqslant l$ выполнено $a_i - a_j = b_i - b_j$, значит, можно взять $f(x) = x + (b_1 - a_1)$. Если же $a_1 - a_2 = b_2 - b_1$, то для $i = 3, 4, \ldots, l$ выполнено $a_1 - a_i = b_i - b_1$, и далее, для всех $1 \leqslant i < j \leqslant l$ выполнено $a_i - a_j = b_j - b_i$, и можно положить $f(x) = -x + (a_1 + b_1)$.

Леммы доказаны.

Перейдем к решению задачи. Обозначим $Q_l(x) = P(P(\ldots P(P(x))\ldots))$, где P применено l раз. Предположим, что для некоторого k найдутся $n + 1$ таких различных целых чисел $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$, что $Q_k(t_i) = t_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Тогда $t_i - t_j = Q_k(t_i) - Q_k(t_j)$ и согласно лемме 1

$$(t_i - t_j) \mathrel{\vdots} (Q_{k-1}(t_i) - Q_{k-1}(t_j)) \mathrel{\vdots} \ldots \mathrel{\vdots} (P(t_i) - P(t_j)) \mathrel{\vdots} (t_i - t_j).$$

Отсюда $|t_i - t_j| = |P(t_i) - P(t_j)|$, значит, по лемме 2 найдется такая линейная функция $f(x)$, что $f(t_i) = P(t_i)$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n + 1$. Но отсюда следует, что многочлен $P(x) - f(x)$ степени n имеет $n + 1$ корней $t_1, t_2, \ldots, t_{n+1}$ — противоречие.

06.6. В решении будет использовано понятие *суммы Минковского* двух выпуклых многоугольников и *неравенство Брунна — Минковского* (см., например: Васильев Н. Сложение фигур // Квант. — 1976. — № 4).

Пусть граница многоугольника P (при обходе против часовой стрелки) составлена из векторов $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_n}$, и при проектировании на прямую l_1, перпендикулярную $\overline{p_1}$, многоугольник P перейдет в отрезок длины h_1. Ясно, что h_1 равно полусумме длин проекций векторов $\overline{p_1}, \overline{p_2}, \ldots, \overline{p_n}$ на прямую l_1 (рис. 41) и $\frac{p_1 h_1}{2}$ — площадь, сопоставленная стороне p_1.

Пусть P' — многоугольник, полученный из P центральной симметрией; его граница (при обходе против часовой стрелки) составлена из векторов $\overline{p_1'} = -\overline{p_1}, \overline{p_2'} = -\overline{p_2}, \ldots, \overline{p_n'} = -\overline{p_n}$ (см. рис. 41). Рассмотрим сумму Минковского многоугольников P и P', т. е. многоугольник Q, граница которого составлена из векторов $\overline{p_1}, \overline{p_1'}, \overline{p_2}, \overline{p_2'}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{p_n'}$, взятых в таком порядке, чтобы многоугольник Q оказался выпуклым. В нем стороне p_1 (и стороне p_1') сопоставлена площадь $\frac{p_1 H_1}{2}$, где H_1 равно полусумме длин проекций векторов $\overline{p_1}, \overline{p_1'}, \overline{p_2}, \overline{p_2'}, \ldots, \overline{p_n}, \overline{p_n'}$ на прямую l_1, т. е. $H_1 = 2h_1$. Аналогично рассматривая все стороны, получаем, что сумма $A(P)$ площадей, соответствующих сторонам многоугольника P, в 4 раза меньше суммы $A(Q)$ площадей, соответствующих сторонам многоугольника Q:

$$A(Q) = \frac{p_1 H_1}{2} + \frac{p_1' H_1}{2} + \frac{p_2 H_2}{2} + \frac{p_2' H_2}{2} + \ldots + \frac{p_n H_n}{2} + \frac{p_n' H_n}{2} =$$
$$= 2p_1 h_1 + 2p_2 h_2 + \ldots + 2p_n h_n = 4A(P).$$

Многоугольник Q имеет центр симметрии O. Соединив O с вершинами, разобьем Q на треугольники. Из симметрии следует, что высота треугольника, отвечающего стороне p_1 (или p_1'), равна $\frac{H_1}{2}$. Складывая площади всех тре-

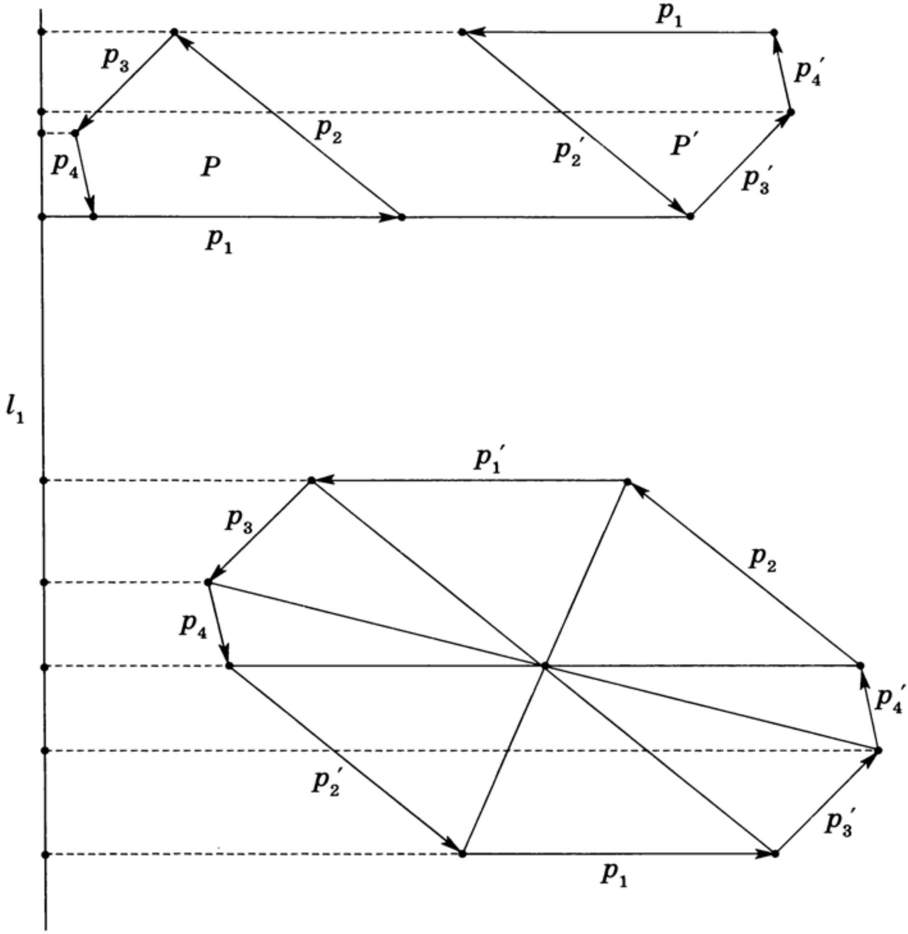

Рис. 41

угольников, получаем, что площадь $S(Q)$ многоугольника Q равна

$$\frac{p_1 H_1}{4} + \frac{p_1' H_1}{4} + \frac{p_2 H_2}{4} + \frac{p_2' H_2}{4} + \ldots + \frac{p_n H_n}{4} + \frac{p_n' H_n}{4} = \frac{A(Q)}{2}.$$

Для завершения решения достаточно установить, что $S(Q) \geqslant 4S(P)$. Но это неравенство получается из применения к многоугольникам P и P' неравенства Брунна — Минковского: если два выпуклых многоугольника имеют площади S_1 и S_2, а их сумма Минковского — площадь S, то

$$\sqrt{S} \geqslant \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}.$$

2007 год

07.1. а) Пусть d совпадает с числом d_l ($1 \leqslant l \leqslant n$). Найдем такие $k \in \{1, \ldots, l\}$, $m \in \{l+1, \ldots, n\}$, что $a_k = \max\{a_1, \ldots, a_l\}$, $a_m = \min\{a_l, \ldots, a_n\}$; тогда $d = a_k - a_m$. Предположим, что $|x_k - a_k| < \frac{d}{2}$ и $|x_m - a_m| < \frac{d}{2}$; тогда $(x_m - a_m) - (x_k - a_k) < d$.

Но с другой стороны,

$$(x_m - a_m) - (x_k - a_k) = (a_k - a_m) + (x_m - x_k) = \\ = d + (x_m - x_k),$$

что не меньше d, так как $m \geqslant k$. Полученное противоречие показывает, что

$$\max\{|x_k - a_k|, |x_m - a_m|\} \geqslant d.$$

б) Положим $x_i = \max\{a_1, \ldots, a_i\} - \frac{d}{2}$; легко видеть, что $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Докажем, что $|x_i - a_i| \leqslant \frac{d}{2}$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Из пункта «а» тогда будет следовать, что

$$\max\{|x_i - a_i| \mid 1 \leqslant i \leqslant n\} = \frac{d}{2}.$$

Предположим противное: пусть для какого-то l выполнено неравенство $|x_l - a_l| > \frac{d}{2}$.

С л у ч а й 1. Пусть $x_l - a_l > \frac{d}{2}$. Тогда

$$\max\{a_1, \ldots, a_l\} - \frac{d}{2} - a_l > \frac{d}{2} \Rightarrow d < \max\{a_1, \ldots, a_l\} - a_l \leqslant \\ \leqslant \max\{a_1, \ldots, a_l\} - \min\{a_l, \ldots, a_n\} = d_l.$$

П р о т и в о р е ч и е.

С л у ч а й 2. Пусть $x_l - a_l < -\frac{d}{2}$. Тогда

$$\max\{a_1, \ldots, a_l\} - \frac{d}{2} - a_l < -\frac{d}{2} \Rightarrow \max\{a_1, \ldots, a_l\} < a_l.$$

П р о т и в о р е ч и е.

07.2. Введем обозначения: $\angle CDE = \angle CBE = \varphi$ (четырехугольник $BCED$ — вписанный), $EG = EC = EF = x$ (радиусы окружности с центром E), $\angle CGE = \angle GCE = \alpha$, $\angle FCE = \angle CFE = \beta$ (рис. 42). Заметим, что $\triangle AFD \sim \triangle GFC$, так как $AD \parallel GC$, поэтому $\frac{AD}{GC} = \frac{FD}{FC} \Rightarrow \frac{BC}{GC} = \frac{FD}{FC}$. Далее, $\angle CEB = \alpha - \varphi > 0$ ($\angle GCE$ — внешний для треугольника CEB), поэтому по теореме синусов для треугольника CEB запишем

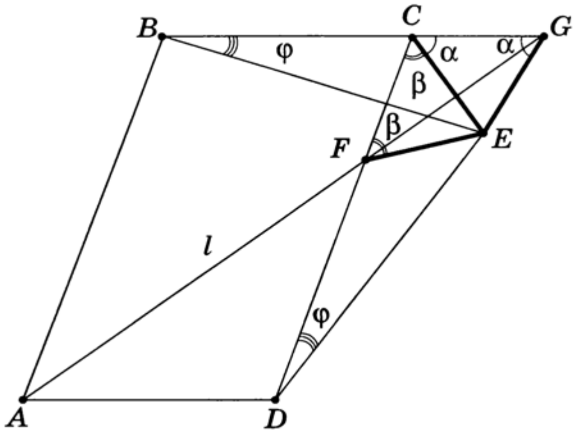

Рис. 42

$BC = \dfrac{x}{\sin\varphi} \cdot \sin(\alpha - \varphi)$. А из равнобедренного треугольника CEG запишем $CG = 2x\cos\alpha$. Аналогично из треугольника DEF следует, что $FD = \dfrac{x}{\sin\varphi} \cdot \sin(\beta - \varphi)$, а из треугольника CEF следует, что $CF = 2x\cos\beta$. Значит,

$$\frac{BC}{GC} = \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{2\cos\alpha\sin\varphi}, \quad \frac{FD}{FC} = \frac{\sin(\beta - \varphi)}{2\cos\beta\sin\varphi},$$

откуда $\dfrac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha} = \dfrac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos\beta}$. Но $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, поэтому $0 < \alpha - \varphi < \dfrac{\pi}{2}$, $0 < \beta - \varphi < \dfrac{\pi}{2}$. Если предположить, что $\alpha > \beta$, то $\cos\alpha < \cos\beta$ и $\sin(\alpha - \varphi) > \sin(\beta - \varphi)$, откуда

$$\frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos\alpha} > \frac{\sin(\beta - \varphi)}{\cos\beta}.$$

Аналогично предположение о том, что $\alpha < \beta$, сводится к противоречию. Значит, $\alpha = \beta$. Тогда треугольники CEG и CEF равны, откуда $CF = CG$, т. е. треугольник CFG — равнобедренный. Отсюда $\angle BAG = \angle CFG = \angle CGF = \angle DAG$, т. е. AD — биссектриса угла BAD.

07.3. Рассмотрим клику G наибольшего размера $|G| = 2n$.

Схема решения такова: мы распределим участников по двум комнатам, а затем будем переводить по одному из второй в первую, пока не достигнем требуемого результата. Через G_1, G_2 будем обозначать части клики G в первой и второй комнатах, а через k_1, k_2 — наибольшие размеры клик в этих комнатах.

В течение всего процесса будут выполняться два условия:

$$k_1 \leqslant k_2; \tag{1}$$

каждый человек в первой комнате дружит со всеми из G_2. (2)

Из условия (2) следует, что $k_1 = |G_1| = 2n - |G_2|$. Действительно, если бы в первой комнате нашлась клика размером больше $|G_1|$, то вместе с G_2 она бы образовала клику размером больше $2n$, что невозможно.

Приступим к реализации схемы. Сначала произвольно разобьем G на группы G_1, G_2 по n человек и поместим их в соответствующие комнаты. Добавим в первую комнату всех, кто дружит со всеми из G_2, всех остальных отправим во вторую. Очевидно, условия (1) и (2) выполнены ($k_2 \geqslant |G_2| = n = |G_1| = k_1$).

Пока $k_2 - k_1 \geqslant 2$, будем переводить в первую комнату любого из G_2 (если с самого начала $k_2 - k_1 < 2$, то этот этап не выполняем). При этом k_1 растет на 1, k_2 уменьшается не более чем на 1, поэтому $k_2 - k_1$ уменьшается, но остается неотрицательным. Очевидно, выполняется и условие (2). Наконец мы достигаем того, что $k_2 - k_1$ равно 0 или 1.

Если $k_2 - k_1 = 0$, то задача решена, поэтому пусть $k_2 - k_1 = 1$. Если во второй комнате есть клика K размера k_2 и $x \in G_2 \backslash K$, то переведем x в первую комнату. Число k_1 увеличится на 1, число k_2 не изменится, и задача решена.

В противном случае каждая клика K размера k_2 целиком содержит G_2. Но тогда $k_2 > k_1 \geqslant n \geqslant |G_2|$, и найдется $x \in K_2 \backslash G_2$. Очевидно, x дружит со всеми из G_2; переведем его в первую комнату. При этом k_1 не изменится, поскольку условие (2) выполнено, а G_2 не изменилось.

Если k_2 уменьшилось на 1, то задача решена. Иначе повторим эту же операцию. До бесконечности мы повторять ее не можем, значит, в какой-то момент k_2 уменьшится и станет равным k_1, что и требовалось.

07.4. Если точки P и Q совпадают, то P — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AC и BC, поэтому биссектриса CR угла BCA является серединным перпендикуляром к AB. Тогда равенство $S_{PRK} = S_{QRL}$ следует из симметрии треугольников относительно CR.

Пусть точки P и Q не совпадают. Прямые PK и LQ пересекаются в центре O окружности, описанной около треугольника ABC (рис. 43). Из подобных прямоугольных треугольников CLQ и CKP следует, что $PK \cdot CQ = QL \cdot CP$, $\angle CQL = \angle CPK$.

Далее, треугольник OPQ равнобедренный, поэтому точки P и Q симметричны относительно точки M, являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из центра O на

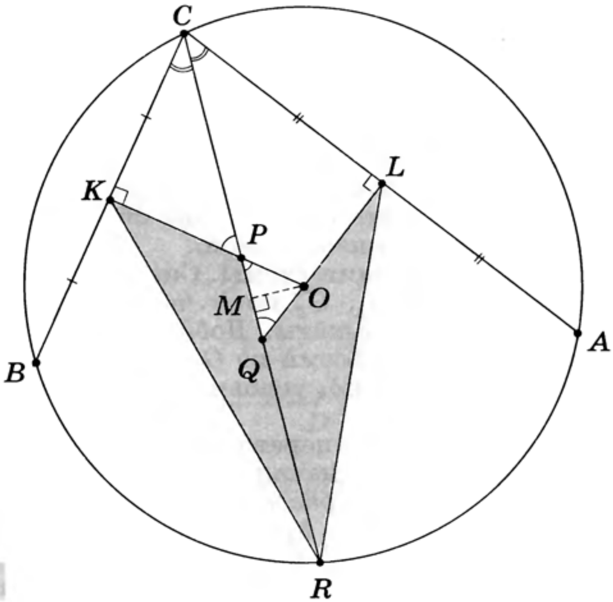

Рис. 43

CR. Точка M — середина отрезка CR, поэтому $CP = QR$, $CQ = PR$. Отношение $\frac{S_{PRK}}{S_{QRL}}$ площадей треугольников равно

$$\frac{PK \cdot PR \cdot \sin\angle RPK}{QL \cdot QR \cdot \sin\angle RQL} = \frac{PK \cdot CQ \cdot \sin\angle CPK}{QL \cdot CP \cdot \sin\angle CQL} = 1.$$

07.5. Если $(4a^2 - 1)^2$ делится на $4ab - 1$, то $(4a^2 - 1)^2 - 2(4a^2 - 1)(4ab - 1) + (4ab - 1)^2 = ((4a^2 - 1) - (4ab - 1))^2 = (4a)^2(a - b)^2$ делится на $4ab - 1$.

Поскольку числа $4ab - 1$ и $4a$ взаимно просты, получаем, что $(a - b)^2$ делится на $4ab - 1$, т. е.

$$(a - b)^2 = k(4ab - 1) \qquad (1)$$

для некоторого целого k. При $k = 0$ получаем $a = b$. Докажем, что при фиксированном $k > 0$ равенство (1) неразрешимо в натуральных a, b. Пусть это не так. Тогда рассмотрим все пары натуральных чисел (a, b), для которых выполнено равенство (1) (очевидно, для таких пар $a \neq b$), и выберем из них пару (a_0, b_0) с наименьшим $b = b_0$; в силу симметрии равенства (1) оно также выполнено для пары (b_0, a_0), поэтому $b_0 < a_0 = tb_0$ для некоторого действительного $t > 1$. Перепишем равенство (1) для $a = a_0$, $b = b_0$ в виде

$$a_0^2 - (2 + 4k)a_0b_0 + (b_0^2 + k) = 0. \qquad (2)$$

Из равенства (2) следует, что уравнение $x^2 - (2 + 4k)b_0x + (b_0^2 + k) = 0$ имеет целый корень $x_1 = a_0$, значит, оно имеет и второй целый корень, который в силу теоремы Виета равен $x_2 = \frac{b_0^2 + k}{a_0} > 0$. Пара (b_0, x_2) удовлетворяет равенству (1), поэтому $x_2 > b_0$ в силу выбора b_0. Получаем $\frac{b_0^2 + k}{a_0} > b_0$, откуда $k > b_0(a_0 - b_0) = b_0^2(t - 1)$.

Подставляя $a = tb_0$, $b = b_0$ в равенство (1), получаем

$$b_0^2(t-1)^2 = k(4tb_0^2 - 1) > b_0^2(t-1)(4tb_0^2 - 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t - 1 > 4tb_0^2 - 1 \Rightarrow 1 > 4b_0^2.$$

Противоречие.

07.6. **Ответ.** $3n$.

Примером $3n$ соответствующих плоскостей, объединение которых содержит данное множество S, могут служить плоскости, задаваемые уравнениями вида $x = 1$, $x = 2$, ..., $x = n$, $y = 1$, $y = 2$, ..., $y = n$, $z = 1$, $z = 2$, ..., $z = n$. Очевидно, что каждая точка множества S попадет хотя бы в одну из этих плоскостей, ибо имеет хотя бы одну ненулевую координату.

Теперь осталось показать, что объединением плоскостей, количество которых меньше $3n$, множество S покрыто быть не может.

Проведем доказательство от противного. Пусть множество S может быть покрыто объединением плоскостей, количество которых менее чем $3n$. Запишем уравнения этих плоскостей:

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0, \\ &a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &a_kx + b_ky + c_kz + d_k = 0. \end{aligned}$$

Здесь, во-первых, $k < 3n$ и, во-вторых, ни одно из чисел $d_1, d_2, \dots, d_k$ не равно 0, иначе соответствующая плоскость проходила бы через точку (0, 0, 0).

Перемножив левые части уравнений этих плоскостей, получим многочлен $Q(x, y, z)$ от трех переменных, обращающийся в нуль при подстановке вместо (x, y, z) координат любой точки множества S. Отметим, что $Q(0, 0, 0) = d_1 \cdot d_2 \cdot \dots \cdot d_k \neq 0$, а степень многочлена $Q(x, y, z)$ меньше $3n$.

Рассмотрим теперь многочлены $g_1(x) = x(x-1)\dots(x-n)$, $g_2(y) = y(y-1)\dots(y-n)$, $g_3(z) = z(z-1)\dots(z-n)$. Каждый из них обращается в нуль во всех точках множества S (эти многочлены можно рассматривать как многочлены трех переменных, степени вхождения двух из которых только нулевые, и в этом качестве подставлять в них координаты точек множества S).

Разделим с остатком многочлен $Q(x, y, z)$, рассмотренный как многочлен от x, на многочлен $g_1(x)$. Получим равенство $Q(x, y, z) = g_1(x) \cdot A_1(x, y, z) + Q_1(x, y, z)$. При этом, во-первых, степень вхождения переменной x в многочлен $Q_1(x, y, z)$ будет не больше n, во-вторых, $Q_1(x, y, z)$ обращается в нуль во всех точках множества S (поскольку во всех точках множества S обращаются в нуль многочлены $Q(x, y, z)$ и $g_1(x)$) и, в-третьих, $Q_1(x, y, z)$ не обращается в нуль при $x = y = z = 0$ (поскольку $Q(0, 0, 0) = Q_1(0, 0, 0)$).

Аналогично получим равенство

$$Q_1(x, y, z) = g_2(y) A_2(x, y, z) + Q_2(x, y, z),$$

где многочлен $Q_2(x, y, z)$ обращается в нуль во всех точках множества S, причем степень вхождения каждой из переменных x и y в многочлен $Q_2(x, y, z)$ не превосходит n и $Q_2(0, 0, 0) \neq 0$.

Наконец, получаем равенство

$$Q_2(x, y, z) = g_3(z) \cdot A_3(x, y, z) + T(x, y, z),$$

где многочлен $T(x, y, z)$ обращается в нуль во всех точках множества S и степень вхождения в многочлен $T(x, y, z)$ каждой из переменных x, y и z не превосходит n, причем $T(0, 0, 0) \neq 0$. Тем самым $T(x, y, z)$ не является тождественно нулевым многочленом.

Рассмотрим теперь одночлен $ax^s y^t z^u$ $(a \neq 0)$ наибольшей степени $s + t + u$ многочлена $T(x, y, z)$. Одно из чисел s, t, u должно быть строго меньше n, так как степень многочлена $T(x, y, z)$ не превосходит степени многочлена $Q(x, y, z)$, которая, в свою очередь, меньше $3n$. Не умаляя общности, пусть $s < n$.

Имеет место следующая теорема (см., например, статью «Combinatorial Nullstellen satz» в книге «Задачи Санкт-Петербургской олимпиады школьников по математике 2005 года»):

Теорема. Пусть $P(x, y, z)$ — ненулевой многочлен от трех переменных с вещественными коэффициентами, одночлен наибольшей степени которого имеет вид $ax^s y^t z^u$ $(a \neq 0)$. Пусть A, B, C — конечные множества вещественных чисел, причем в A содержится не менее $s + 1$ элементов, в B содержится не менее $t + 1$ элементов, в C содержится не менее $u + 1$ элементов. Тогда существуют числа $x_0 \in A$, $y_0 \in B$, $z_0 \in C$ такие, что $P(x_0; y_0; z_0) \neq 0$.

Применив указанную теорему к многочлену $T(x, y, z)$ и множествам

$$A = \{1, 2, \ldots, n\},\ B = \{0, 1, \ldots, n\},\ C = \{0, 1, \ldots, n\},$$

приходим к противоречию, поскольку в силу построения многочлена $T(x, y, z)$ он обращается в нуль, если одновременно $x \in A$, $y \in B$ и $z \in C$.

2008 год

08.1. Пусть A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA, AB соответственно. Пусть данные окружности с центрами в B_0 и C_0 пересекаются в точках A' и H (рис. 44). Так как $A'H \perp B_0C_0$, $B_0C_0 \parallel BC$ и $AH \perp BC$, то точка A' лежит на прямой AH. Далее, по теореме о произведении отрезков секущих запишем:

$$AB_1 \cdot AB_2 = AH \cdot AA' \text{ и } AC_1 \cdot AC_2 = AH \cdot AA',$$

откуда $AB_1 \cdot AB_2 = AC_1 \cdot AC_2$.

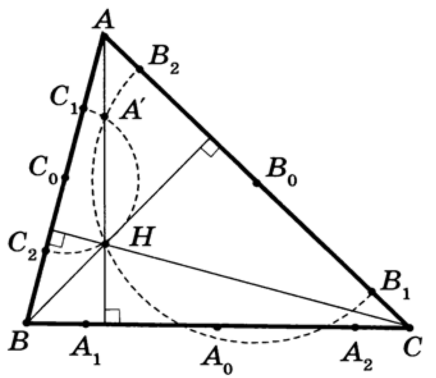

Рис. 44

Это означает, что точки B_1, B_2, C_1, C_2 лежат на одной окружности ω. Центр O окружности ω лежит на перпендикуляре к B_1B_2, проходящем через B_0, т. е. на серединном перпендикуляре к отрезку CA. Аналогично O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Отсюда следует, что O — это центр окружности, описанной около треугольника ABC.

Таким же образом докажем, что точки A_1, A_2, C_1, C_2 лежат на окружности ω′ с тем же центром O. Так как окружности ω и ω′ имеют один и тот же центр и проходят через точку A_1, то они совпадают. Это означает, что указанные в условии шесть точек лежат на одной окружности.

08.2. Сделаем замену:

$$\frac{x}{x-1} = a, \ \frac{y}{y-1} = b, \ \frac{z}{z-1} = c,$$

где a, b, c не равны 1. Заметим, что x, y, z однозначно выражаются через a, b, c:

$$x = \frac{a}{a-1}, \ y = \frac{b}{b-1}, \ z = \frac{c}{c-1}.$$

Условие $xyz = 1$ переписывается в виде

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc \Leftrightarrow a + b + c - 1 = ab + bc + ca \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2(a + b + c - 1) = (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 1 = (a + b + c)^2 - 2(a + b + c) + 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 1 = (a + b + c - 1)^2.$$

Отсюда вытекает нужное неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 1$.

Кроме того, из приведенных выкладок ясно, что если $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ и $a + b + c - 1 = ab + bc + ca$, то неравенство обращается в равенство при условии $a + b + c = 1$. Иначе говоря, условие обращения неравенства в равенство для чисел $a \neq 1$, $b \neq 1$, $c \neq 1$ эквивалентно системе

$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ ab + bc + ca = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 - a - b \\ a + b - a^2 - ab - b^2 = 0. \end{cases}$$

Положим $b = \lambda a$ и подставим в уравнение $a + b - a^2 - ab - b^2 = 0$. Получим $a(1 + \lambda - a(1 + \lambda + \lambda^2)) = 0$. Отсюда следует, что при любом λ тройка чисел

$$a = \frac{1+\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}, \ b = \frac{\lambda+\lambda^2}{1+\lambda+\lambda^2}, \ c = \frac{-\lambda}{1+\lambda+\lambda^2}$$

удовлетворяет системе. Если в качестве λ брать натуральные числа, то, как легко видеть, мы получаем бесконечное количество различных троек рациональных чисел a, b, c, отличных от 1. Соответственно этим тройкам чисел a, b, c соответствует бесконечное количество различных троек рациональных чисел x, y, z, удовлетворяющих условию.

08.3. Пусть $N > 20$ — натуральное число. Пусть p — простой делитель числа $(N!)^2 + 1$. Очевидно, что $p > N$. Пусть r — остаток от деления $N!$ на p. Положим $n = r$, если $r < \frac{p}{2}$, и $n = p - r$, если $r > \frac{p}{2}$. Тогда $n^2 + 1 \equiv (\pm r)^2 + 1 \equiv$ $\equiv (N!)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ и $n < \frac{p}{2}$.

Докажем, что число n удовлетворяет условию. Положим $n = \frac{p-x}{2}$, где $x > 0$ — нечетное число. Тогда $4(n^2 + 1) =$

$= (p-x)^2 + 4 = p^2 - 2px + x^2 + 4$ делится на p, а значит, $x^2 + 4$ делится на p. Отсюда $x^2 + 4 \geqslant p$, следовательно, $x \geqslant \sqrt{p-4}$, в частности, $x > \sqrt{20-4} = 4$. Имеем

$$2n + \sqrt{2n} = p - x + \sqrt{p-x} < p - x + \sqrt{p-4} \leqslant p,$$

что и требуется.

Наконец, заметим, что из приведенных рассуждений вытекает, что $n^2 + 1 \geqslant p > N$, поэтому $n > \sqrt{N-1}$, значит, натуральных чисел n с требуемым свойством бесконечно много.

08.4. **Ответ.** $f(x) = x$ и $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

Пусть $w = x = y = z = a > 0$. Тогда из исходного уравнения получаем $\dfrac{2(f(a))^2}{2f(a^2)} = \dfrac{a^2 + a^2}{a^2 + a^2} = 1$, откуда для всех $a > 0$ выполнено равенство

$$(f(a))^2 = f(a^2), \tag{1}$$

в частности, $(f(1))^2 = f(1)$ и $f(1) = 1$, так как $f(1) \neq 0$.

Далее, положим $w = x = a > 0$, $y = 1$, $z = a^2$:

$$\frac{2(f(a))^2}{f(a^4) + f(1)} = \frac{2a^2}{a^4 + 1}.$$

Согласно равенству (1) $f(a^4) = (f(a^2))^2 = (f(a))^4$, откуда $\dfrac{2(f(a))^2}{(f(a))^4 + 1} = \dfrac{2a^2}{a^4 + 1}$. Положив $t = f(a)$, имеем

$$\frac{2t^2}{t^4 + 1} = \frac{2a^2}{a^4 + 1} \Leftrightarrow t^2a^4 + t^2 = a^2t^4 + a^2 \Leftrightarrow (a^2t^2 - 1)(a^2 - t^2) = 0.$$

Так как $a > 0$ и $t > 0$, то для каждого $a > 0$ выполнены равенства $t = f(a) = a$ или $t = f(a) = \dfrac{1}{a}$.

Предположим, что нашлись положительные a и b, не равные 1 и такие, что $f(a) = a$, $f(b) = \dfrac{1}{b}$. Тогда, положив $w = a$, $x = b$, $y = ab$, $z = 1$, получим (с учетом равенства (1)) равенство

$$\frac{a^2 + \dfrac{1}{b^2}}{1 + (f(ab))^2} = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2b^2}. \tag{2}$$

Если $f(ab) = ab$, то из равенства (2) следует:

$$\frac{a^2 + \dfrac{1}{b^2}}{1 + a^2b^2} = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2b^2} \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} = b^2 \Rightarrow b^4 = 1 \Rightarrow b = 1,$$

что противоречит предположению.

Если же $f(ab) = \frac{1}{ab}$, то из равенства (2) следует:

$$\frac{a^2 + \frac{1}{b^2}}{1 + \frac{1}{a^2b^2}} = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2b^2} \Rightarrow \frac{a^2b^2}{b^2} = \frac{a^2 + b^2}{1 + a^2b^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^4b^2 + a^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow b = 0 \text{ или } a^4 = 1,$$

что противоречит предположению.

Таким образом, либо для всех $x > 0$ выполнено равенство $f(x) = x$, либо для всех $x > 0$ выполнено равенство $f(x) = \frac{1}{x}$. Непосредственная подстановка показывает, что функции $f(x) = x$ и $f(x) = \frac{1}{x}$ подходят.

08.5. **Ответ.** 2^{k-n}.

По условию M равно количеству последовательностей $X = x_1x_2...x_k$, в которых каждый символ x_i равен одному из чисел 1, 2, ..., n и каждое из чисел 1, 2, ..., n встречается нечетное число раз (такие последовательности назовем последовательностями I типа).

Число N равно количеству последовательностей $Y = y_1y_2...y_k$, в которых каждый y_i равен одному из чисел 1, 2, ..., $2n$, причем каждое из чисел 1, 2, ..., n встречается нечетное число раз, а каждое из чисел $n + 1$, $n + 2$, ..., $2n$ встречается четное число раз (такие последовательности назовем последовательностями II типа).

Каждой последовательности $A = a_1a_2...a_k$ II типа поставим в соответствие последовательность $B = b_1b_2...b_k$, в которой $b_i = a_i$, если $a_i \leqslant n$, и $b_i = a_i - n$, если $a_i > n$. Ясно, что определенная таким образом последовательность B — последовательность I типа.

Далее мы установим, что каждая последовательность I типа поставлена в соответствие ровно 2^{k-n} последовательностям II типа — этим завершится решение.

Для этого посчитаем число способов восстановить последовательность A II типа по соответствующей последовательности B I типа. Пусть число i встречается в последовательности B ровно l_i раз (l_i — нечетные числа, и $l_1 + l_2 + ... + l_n = k$). Тогда в последовательности A по сравнению с B четное количество чисел 1 заменено на $n + 1$; количество вариантов такой замены равно $\frac{2^{l_1}}{2} = 2^{l_1 - 1}$ (поскольку количество всех подмножеств множества из l_1 элементов равно 2^{l_1}, все подмножества можно разбить на пары так, что в каждую пару входит подмножество вместе со своим дополнением и в каждой паре ровно в одном из двух подмножеств четное число элементов). Аналогично имеется 2^{l_2-1} вариантов замены чисел 2 на $n+2$ и т. д., 2^{l_n-1} вариантов такой замены n на $2n$. Замены производятся независимо; таким образом, по последовательности B последовательность A восстанавливается $2^{l_1-1}\cdot 2^{l_2-1}\cdot \ldots \cdot 2^{l_n-1} = 2^{l_1+l_2+\ldots+l_n-n} = 2^{k-n}$ способами.

08.6. Пусть K, L, M, N — точки касания окружности ω с прямыми AB, BC, CD, DA соответственно. Пусть окружности ω_1 и ω_2 касаются отрезка AC в точках P и Q соответственно. Пусть ω_3 и ω_4 — вневписанные окружности треугольников ABC и ADC, касающиеся отрезка AC в точках Q_1 и P_1 соответственно (рис. 45).

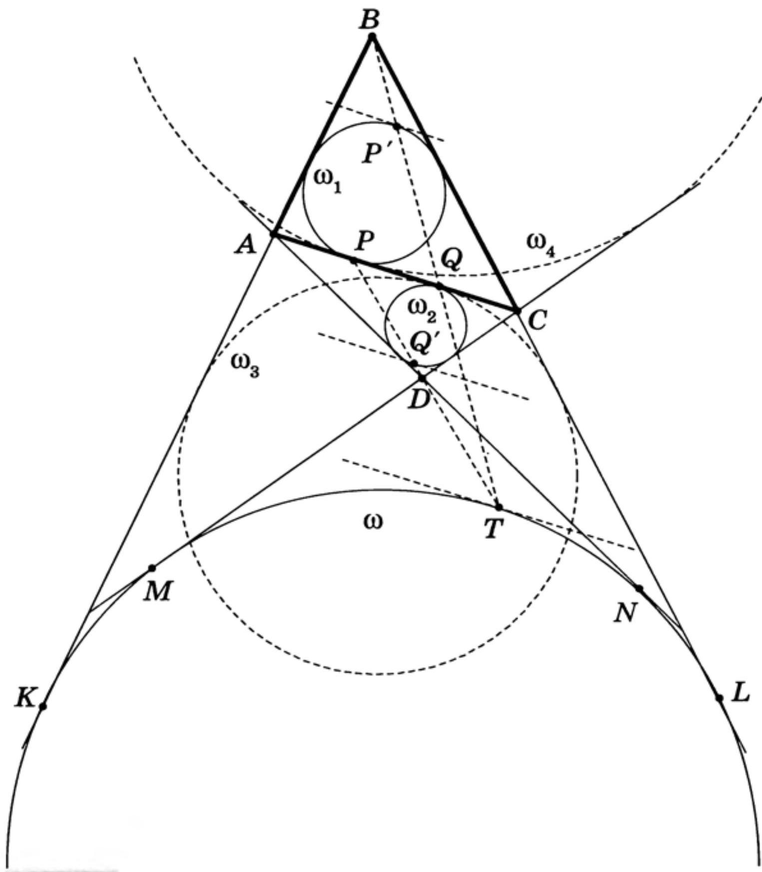

Рис. 45

Из условия $AB \neq BC$ вытекает, что точки P и Q_1 не совпадают. Из равенства отрезков касательных имеем

$$AB + AD = BK - AK + AN - DN = BK - DN =$$
$$= BL - DM = BL - CL + CM - DM = CB + CD.$$

Так как $AP = \dfrac{AC + AB - BC}{2}$ и $AP_1 = \dfrac{AC + CD - AD}{2}$, получаем $AP = AP_1$, и поэтому $P = P_1$. Аналогично $Q = Q_1$.

Пусть TT', PP', QQ' — диаметры соответственно окружностей ω, ω_1, ω_2, проведенные перпендикулярно прямой AC (пусть точки T и T' обозначены так, что T ближе к прямой AC, чем T'). Касательные к окружностям ω, ω_1, ω_2, проведенные через точки T, P', Q' соответственно, параллельны прямой AC. Окружности ω, ω_1, ω_3 гомотетичны с центром B, поэтому соответственные точки T, P', Q этих окружностей лежат на прямой, проходящей через точку B, т. е. точки B, P', Q, T лежат на одной прямой. Также, поскольку окружности ω, ω_2 и ω_4 гомотетичны с центром D, точки D, P, Q', T лежат на одной прямой. Из доказанного следует, что существует гомотетия h с центром T, переводящая точку Q в точку P'. Заметим, что $QQ' \parallel P'P$, а прямая PQ' проходит через точку T и отлична от прямой $P'Q$, поэтому под действием гомотетии h отрезок QQ' переходит в отрезок $P'P$. Гомотетия h переводит окружность ω_2, построенную на отрезке QQ' как на диаметре, в окружность, построенную на отрезке $P'P$ как на диаметре, т. е. в окружность ω_1. Тогда центр T гомотетии h принадлежит общим внешним касательным окружностей ω_1 и ω_2. Таким образом, точка T на окружности ω и является точкой пересечения общих внешних касательных к окружностям ω_1 и ω_2.

Список обозначений

$\Rightarrow$ — следовательно

$\Leftrightarrow$ — равносильный переход

$\boldsymbol{R}$ — множество действительных чисел

$\boldsymbol{Q}$ — множество рациональных чисел

$\boldsymbol{Z}$ — множество целых чисел

$\boldsymbol{N}$ — множество натуральных чисел

$\boldsymbol{P}$ — множество простых чисел

$\varnothing$ — пустое множество

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A

$a \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A

$\{a \in A \mid X\}$ — подмножество элементов a множества A, удовлетворяющих условию X

$|A|$ — количество элементов конечного множества A

$B \subset A$ — множество B является подмножеством множества A

$A \cup B$ — объединение множеств A и B

$A \cap B$ — пересечение множеств A и B

$A \setminus B$ — разность множеств A и B (т. е. множество, содержащее все такие элементы множества A, которые не принадлежат множеству B)

$f\colon A \to B$ — функция f, определенная на множестве A, значения которой принадлежат множеству B

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ — сумма чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$\prod\limits_{i=1}^{n} a_i$ — произведение чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$[x]$ — целая часть действительного числа x, т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x

$\{x\}$ — дробная часть действительного числа x; $\{x\} = x - [x]$

$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — наибольшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — наименьшее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$

$a \,\vdots\, b$ или $b \mid a$ — a делится на b (или b делит a)

$a \not\vdots\, b$ — a не делится на b

$a \equiv b \pmod{n}$ — a сравнимо с b по модулю n (т. е. целые числа a и b дают равные остатки при делении на n)

НОД(a, b) (или (a, b)) — наибольший общий делитель чисел a и b

$\overline{a_1 a_2 \ldots a_n}$ — десятичная запись числа ($a_1, a_2, \ldots, a_n$ — цифры)

$\triangle ABC$ — треугольник ABC

$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$ — треугольник ABC подобен треугольнику $A'B'C'$

$\angle ABC$ — угол ABC

$a \parallel b$ — прямая a параллельна прямой b

$a \perp b$ — прямая a перпендикулярна прямой b

$\angle(a, b)$ — ориентированный угол между прямыми a и b, т. е. угол от прямой a до прямой b, отсчитываемый против часовой стрелки

$\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}$ или $\overline{a}$, $\overline{AB}$ — векторы

$\breve{AC}$ ($\overset{\frown}{ABC}$) — величина дуги AC (величина дуги AC, на которой лежит точка B)

$S(M)$ или S_M — площадь многоугольника M

$n!$ — n-факториал, произведение n первых натуральных чисел, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$

C_n^k — число сочетаний из n по k, т. е. количество k-элементных подмножеств n-элементного множества, $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$

$\deg f$ — степень многочлена f

Рекомендуемая литература

Международные математические олимпиады (1959—1996 гг.)

Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. — М.: Просвещение, 1976.

Международные математические олимпиады / Сост. Фомин А. А., Кузнецов Г. М. — М.: Дрофа, 1998.

Статьи о международных олимпиадах в журнале «Квант»

XXXIX Международная математическая олимпиада. — Квант. — 1999. — № 2. — С. 49.

XL Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2000. — № 2. — С. 46—47.

XLI Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2001. — № 2. — С. 48—49.

XLII Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2002. — № 2. — С. 44—46.

XLIII Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2003. — № 2. — С. 46—50.

XLIV Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2004. — № 2. — С. 48—51.

XLV Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2005. — № 2. — С. 49—53.

XLVI Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2006. — № 2. — С. 49—51.

XLVII Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2007. — № 2. — С. 48—51.

XLVIII Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2008. — № 2. — С. 49—51.

XLIX Международная математическая олимпиада. — Квант. — 2008. — № 6. — С. 39—41.

Содержание

Учебное издание

Серия «Пять колец»

Агаханов Назар Хангельдыевич
Кожевников Павел Александрович
Терешин Дмитрий Александрович

МАТЕМАТИКА
МЕЖДУНАРОДНЫЕ ОЛИМПИАДЫ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редактор *Л. Н. Белоновская*
Младшие редакторы *Е. А. Андреенкова, Е. В. Трошко*
Художники *О. П. Богомолова, И. В. Калинина*
Художественный редактор *О. П. Богомолова*
Компьютерная графика *И. В. Губиной*
Технический редактор и верстальщик *А. Г. Хуторовская*
Корректоры *А. К. Райхчин, И. П. Ткаченко*

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 25.08.09. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бумага писчая. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 5,93. Тираж 3000 экз. Заказ № 23484 (К-Sm).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение».
127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат».
214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.