МЕТОДЫ И ТЕОРІИ

ДЛЯ РѢШЕНІЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХЪ ЗАДАЧЪ НА ПОСТРОЕНІЕ,

ПРИЛОЖЕННЫЕ БОЛѢЕ ЧѢМЪ КЪ 400 ЗАДАЧАМЪ.

Д-ра Юліуса Петерсена,

доцента Политехнической школы въ Копенгагенѣ, члена Королевской Датской академіи наукъ.

Съ разрѣшенія автора

перевелъ

Ө. П. Крутиковъ,

преподаватель Олонецкой гимназіи.

МОСКВА.
Типографія Э. Лисснера и Ю. Романа,
Воздвиженка, Крестовоздвиж. пер., д. Лисснера.
1892.

Дозволено цензурою. Москва, 26-го мая 1892 года.

Предисловіе ко второму русскому переводу*).

Сочиненіе Ю. Петерсена «Методы и теоріи», въ настоящее время переведенное на многіе европейскіе языки, давно уже хорошо извѣстно и оцѣнено по достоинству какъ на Западѣ, такъ и у насъ.

Усвоивъ себѣ взглядъ**), что рѣшеніе геометрическихъ задачъ на построеніе не можетъ быть достояніемъ только исключительныхъ, особенно одаренныхъ натуръ, что, напротивъ того, оно должно быть доступно и всякому среднему ученику, авторъ даетъ ему почву и руководящія нити для рѣшенія задачъ на построеніе (авторъ скромно называетъ свое сочиненіе попыткою научить учащихся, какъ слѣдуетъ приниматься за рѣшеніе геом. задач. на построеніе). Начавъ съ изложенія общеизвѣстныхъ методовъ (методъ пересѣченія геометрическихъ мѣстъ приписывается школѣ Платона), авторъ строго-логическимъ путемъ доходитъ

*) Первый русскій переводъ, М. С. Аксенова, подъ ред. А. П. Грузинцева, изданный въ Харьковѣ въ 1883 г., въ настоящее время въ продажѣ не имѣется.

**) Естественнымъ послѣдствіемъ такого взгляда, раздѣляемаго лучшими педагогами, является требованіе систематически подобранныхъ правилъ для рѣшенія геом. задачъ на построеніе. Послушаемъ, что говоритъ объ этомъ Брокманъ: «Если не вѣрно положеніе, что только ученики съ выдающимися способностями успѣваютъ въ рѣшеніи геом. задачъ на построеніе, то должны существовать средства и пути, помощью которыхъ и всякій средній ученикъ могъ бы съ успѣхомъ испытать свои силы надъ рѣшеніемъ такой задачи». Brokmann, Materialien zu Dreiecksconstructionen. Ein pädagogischer Excurs. S. 84.

до изложенія болѣе современныхъ методовъ преобразованія фигуръ, въ которыхъ примѣненіе теоріи вращенія къ геометрическимъ цѣлямъ всецѣло принадлежитъ ему и которое, вмѣстѣ съ теоріею перемѣщенія фигуръ (гл. II и III), составляетъ лучшее украшеніе его книги Стоитъ только вникнуть въ анализъ блестящихъ рѣшеній знаменитыхъ по своей трудности задачъ Кастильона (200, 201), Аполлонія Пергамскаго (403) и Мальфатти (404), чтобы убѣдиться въ плодотворности изложенныхъ авторомъ методовъ.

Въ заключеніе авторъ позаботился дать указанія и пріемы, позволяющіе въ большинствѣ случаевъ узнать, рѣшается ли та или другая задача циркулемъ и линейкою. Выдвигая вездѣ на первый планъ методы, для самостоятельнаго примѣненія которыхъ дано большое количество хорошо подобранныхъ задачъ, и отнявъ такимъ образомъ у рѣшеній геом. задачъ на построеніе характеръ счастливой случайности, подчинивъ ихъ въ то же время строго научной дисциплинѣ, авторъ вмѣстѣ съ тѣмъ пополнилъ давно чувствовавшійся пробѣлъ въ преподаваніи планиметріи. Въ этомъ отношеніи сочиненіе Ю. Петерсена оказало немаловажную услугу западно-европейскимъ школамъ.

Это-то значеніе книги г. Петерсена, въ связи съ желаніемъ распространить изложенные имъ методы въ большемъ кругу читателей и тѣмъ принести посильную помощь учащемуся юношеству, побудило насъ къ изданію въ русскомъ переводѣ «Методовъ и теорій», на что мы еще въ 1886 г. получили письменное разрѣшеніе автора. Незнакомые съ датскимъ языкомъ — языкомъ оригинала, — мы для нашего перевода пользовались вторымъ изданіемъ нѣмецкаго перевода (R. v. Fischer-Benzon), а также и французскимъ (O. Chemin);

неточности послѣдняго заставили насъ свѣрить нашъ переводъ еще и съ двумя англійскими (лондонскаго и нью-іоркскаго изданія). Это знакомство съ нѣсколькими переводами одного и того же сочиненія, въ особенности съ нѣмецкимъ его переводомъ, въ которомъ авторъ принималъ личное участіе, позволило намъ, надѣемся, сохранить какъ характеръ изложенія г. Петерсена, такъ и особенности его сжатаго языка. Сдѣланныя нами немногія примѣчанія, смѣемъ думать, не окажутся лишними.

Такъ какъ ученіе о радикальной оси въ нашихъ школахъ не излагается, между тѣмъ, безъ знанія этой статьи, рѣшенія многихъ задачъ въ книгѣ г. Петерсена покажутся непонятными, то мы, по совѣту опытныхъ педагоговъ, приложили къ переводу нашу статью о радикальной оси, напечатанную во II томѣ «Журнала элементарной математики» профессора Ермакова.

Ѳ. Крутиковъ.

Г. Петрозаводскъ.
15 мая 1892 г.

Предисловіе автора.

За нѣсколько вѣковъ до Рождества Христова геометрія стояла уже на высокой степени развитія. А такъ какъ въ то время алгебра не достигла еще той высоты, которая дала ей впослѣдствіи возможность оказать геометріи столь существенныя услуги то древніе математики должны были ограничиваться въ своихъ изысканіяхъ чисто геометрическими методами; естественно поэтому, что рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе должны были играть въ ихъ твореніяхъ значительную роль. И хотя позднѣйшіе математики, вплоть до нашего времени, не переставали интересоваться этою отраслью знанія, тѣмъ не менѣе развитіе средствъ для рѣшенія сюда относящихся задачъ было незначительное Такъ, напримѣръ, Аполлоній могъ бы рѣшить задачу Мальфатти такъ же хорошо, какъ и Штейнеръ, если бы она была ему извѣстна.

Поэтому многіе смотрятъ на рѣшенія геометрическихъ задачъ на построеніе какъ на нѣкотораго рода загадки, справиться съ которыми удается только единичнымъ, отъ природы особенно одареннымъ, лицамъ. Вслѣдствіе такого взгляда геометрическія задачи на построеніе вошли только отчасти въ систему школьнаго преподаванія, тогда какъ именно въ школахъ и должно быть ихъ настоящее мѣсто, ибо ни однѣ задачи не содѣйствуютъ такъ развитію въ ученикахъ наблюдательности и правильности мышленія. представляя въ то же время для нихъ и наибольшую привлекательность, какъ геом. на построеніе.

Настоящая книга есть опытъ научить учащихся, какъ слѣдуетъ приниматься за рѣшеніе задачъ на построеніе. Она составилась такимъ образомъ, что, рѣшивъ большое число задачъ, изъ которыхъ многія оригинальны, бо́льшая же часть взята изъ многочисленныхъ сборниковъ, я старался найти идею рѣшенія и анализировать ходъ мыслей, ведущихъ къ этой идеѣ, чтобы такимъ образомъ прійти къ болѣе или менѣе общимъ методамъ. Отсюда слѣдуетъ, что я не всегда могъ пользоваться рѣшеніями другихъ авторовъ, такъ какъ только въ рѣдкихъ случаяхъ можно усмотрѣть въ нихъ путь, которымъ авторы дошли до своихъ рѣшеній. Впрочемъ само собою разумѣется. что нѣкоторыя изъ моихъ рѣшеній, въ особенности болѣе простыхъ задачъ, часто совпадаютъ съ рѣшеніями другихъ авторовъ. Весьма возможно также, что рѣшенія нѣкоторыхъ задачъ другихъ авторовъ покажутся легче моихъ рѣшеній; на это я долженъ замѣтить, что я всегда предпочиталъ рѣшеніе, идея котораго проще и яснѣе, всякому другому, имѣющему къ тому же зачастую характеръ счастливой случайности, предпочиталъ даже и тогда, когда практическое выполненіе послѣднихъ было можетъ быть и легче.

Такъ какъ моя цѣль дать *методы*, то я ограничился только указаніями рѣшеній, предоставляя ихъ полное развитіе и изслѣдованіе читателю или преподавателю. Въ книгѣ помѣщено немного чертежей, такъ какъ всякая фигура легче усвоивается и становится яснѣе, когда учащійся видитъ процессъ ея возникновенія. И вообще я желалъ бы, чтобы моя книга была не только *прочитана*, но и самостоятельно *изучена*.

Мои «Методы и теоріи» появились въ первый разъ въ 1866 г. на датскомъ языкѣ; съ тѣхъ поръ книга моя подверглась всестороннему испытанію и, смѣю думать, вполнѣ его выдержала. Есть не мало доказательствъ, что мой трудъ имѣлъ значительное вліяніе на изученіе геометріи не только въ Даніи, но и въ обоихъ скандинавскихъ государствахъ. Въ виду этого я и рѣшаюсь предложить его вниманію бо́льшаго круга читателей*), надѣясь, что онъ и тамъ окажется полезнымъ частью какъ подспорье при преподаваніи элементарной геометріи, частью какъ средство подготовленія къ изученію новѣйшей геометріи.

Юліусъ Петерсенъ.

Копенгагенъ 1879.

*) Это предисловіе написано авторомъ для нѣмецкаго перевода «Методовъ и теорій», сдѣланнаго R Fischer-Benzon'омъ при участіи автора.

Примѣч. переводчика.

ОПЕЧАТКИ.

Стран.:	*Строка:*	*Напечатано:*	*Должно быть:*
17	21 сверху, въ задачѣ № 73	$AD=DC$	$AD=AC$
18	16 снизу, въ задачѣ № 87	$\angle BBC=\frac{1}{2}(B-C)$	$\angle DBC=\frac{1}{2}(B-C)$
66	1 сверху	O_1	O
81	8 сверху, два раза напечатано центръ вмѣсто центры		
—	23 сверху	d	b

ВВЕДЕНІЕ.

Геометрическія предложенія представляются подъ двумя различными формами: съ одной стороны они выражаютъ, что нѣкоторая геометрическая фигура, построенная извѣстнымъ, напередъ заданнымъ образомъ, должна удовлетворять извѣстнымъ условіямъ; съ другой стороны они требуютъ, чтобы фигура была начерчена (построена) такъ, чтобы она удовлетворяла извѣстнымъ даннымъ условіямъ. Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ *теорему,* во второмъ — *задачу на построеніе.* Такъ какъ задачи на построеніе рѣшаются графически, т.-е. чертежомъ, то для выполненія рѣшеній необходимо прибѣгать къ нѣкоторымъ чертежнымъ инструментамъ; обыкновенно употребляются: линейка — для проведенія прямой между двумя данными точками, и циркуль, служащій для проведенія круга изъ даннаго центра и даннымъ радіусомъ. Всякое другое рѣшеніе будетъ составнымъ изъ этихъ двухъ основныхъ операцій.

Вслѣдствіе такого ограниченія оказывается, что многія, повидимому даже простыя, задачи для насъ нерѣшимы (трисекція угла, квадратура круга и проч.); можно доказать вообще, что послѣднее обстоятельство встрѣчается въ задачахъ, рѣшенія которыхъ путемъ вычисленій не могутъ быть приведены къ уравненіямъ первой и второй степени.

Геометрическая задача бываетъ *излишне опредѣленною,* когда для искомой фигуры имѣется большее число условій, чѣмъ необходимо для ея опредѣленія; задача бываетъ *опредѣленною,* когда она имѣетъ конечное число рѣшеній, и *неопредѣленною,* когда число рѣшеній ея безконечно велико.

Для рѣшенія опредѣленной задачи требуется:

произвести построеніе,

доказать его правильность,

изслѣдовать его, т.-е. опредѣлить предѣлы, между которыми должны находиться данныя величины задачи, чтобы она допускала 0, 1, 2 и т. д. рѣшеній.

Изъ числа неопредѣленныхъ задачъ особый интересъ представляютъ тѣ, которыя обращаются въ опредѣленныя отъ присоединенія *одного* лишь добавочнаго условія. Хотя неопредѣленная задача и имѣетъ безчисленное множество рѣшеній, однакожъ не всякая фигура можетъ ей удовлетворить; напротивъ того, всѣ ея рѣшенія группируются извѣстнымъ образомъ, обусловливаемымъ данными задачи. Такъ, точка вполнѣ опредѣлена, когда она должна удовлетворять двумъ даннымъ условіямъ; если же дано только одно изъ нихъ, то точка дѣлается неопредѣленною, но всѣ точки, удовлетворяющія этому одному условію, лежатъ на одной прямой или кривой. Такая прямая или кривая линія называется *геометрическимъ мѣстомъ* точекъ, удовлетворяющимъ данному условію. То же самое относится и къ какой-нибудь фигурѣ, для опредѣленія которой недостаетъ одного условія, ибо, говоря вообще, всякая точка такой фигуры не будетъ опредѣленною, такъ что каждая изъ нихъ будетъ имѣть свое геометрическое мѣсто.

Вполнѣ общій способъ для рѣшенія геометрическихъ задачъ даетъ аналитическая геометрія; но, само собою разумѣется, примѣненіе какого-нибудь одного метода къ разнообразнѣйшимъ задачамъ требуетъ весьма часто и окольныхъ путей. Такъ, въ аналитической геометріи разсматриваются разстоянія точки отъ двухъ осей, между тѣмъ какъ самыя оси зачастую не имѣютъ никакого отношенія къ задачѣ. Сверхъ того, при примѣненіи этого метода, приходится часто ограничиваться однимъ механическимъ вычисленіемъ, такъ какъ не всегда бываетъ возможно прослѣдить за геометрическимъ значеніемъ полученныхъ уравненій; къ тому же послѣднія становятся иногда до того сложными, — и въ этомъ заключается, можетъ быть, главный упрекъ, который можно сдѣлать этому методу, — что рѣшеніе ихъ дѣлается практически невозможнымъ. Вслѣдствіе такихъ трудностей, представляемыхъ прямымъ примѣненіемъ Декартовой геометріи, въ послѣднее время было дано множество спеціальныхъ методовъ (помощью различныхъ системъ координатъ и проч.), дающихъ для отдѣльныхъ задачъ болѣе естественныя и изящныя рѣшенія, но трудности при этомъ не уничтожаются, а переносятся на выборъ метода. Такимъ образомъ образовался переходъ отъ алгебраическихъ пріемовъ къ пріемамъ чисто геометрическимъ. Помощью послѣднихъ стараются рѣшить задачу тѣмъ, что путемъ геометрическимъ изслѣдуютъ тѣ связи и соотношенія, которыя существуютъ между данными и искомыми частями фигуры; для облегченія же этого изслѣдованія начинаютъ обыкновенно съ того, что *вычерчиваютъ фигуру,* представляющую искомое рѣшеніе, а затѣмъ остается изслѣдовать ее помощью извѣстныхъ теоремъ геометріи.

Если при этомъ окажется (что бываетъ обыкновенно во множествѣ болѣе простыхъ задачъ), что все рѣшеніе зависитъ отъ отысканія одной только неизвѣстной точки, то самый методъ рѣшенія вытекаетъ непосредственно изъ сказаннаго выше и можетъ быть формулированъ такъ:

Разсматриваютъ каждое изъ двухъ условій, которымъ должна удовлетворять искомая точка, отдѣльно; каждому изъ условій соотвѣтствуетъ тогда свое геометрическое мѣсто, и если послѣднія суть прямыя или круги, то задача рѣшена, ибо, такъ какъ искомая точка должна одновременно принадлежать тому и другому геометрическому мѣсту, она должна быть въ точкѣ ихъ пересѣченія.

Если найденныя геометрическія мѣста суть двѣ прямыя, то задача имѣетъ одно рѣшеніе; она можетъ сдѣлаться невозможною только тогда, когда прямыя параллельны. Если же геометрическія мѣста представляютъ два круга или кругъ и прямую, то задача имѣетъ два рѣшенія, когда геометрическія мѣста пересѣкаются, одно — когда они касаются, и становится невозможною, когда одно изъ геометрическихъ мѣстъ находится внѣ другого (т.-е. когда они не пересѣкаются и не касаются). Слѣдуетъ замѣтить, что между послѣднимъ случаемъ невозможности и вышеупомянутымъ существуетъ качественное различіе, а именно: въ первомъ случаѣ невозможность обусловливается предѣльнымъ положеніемъ точки пересѣченія геометрическихъ мѣстъ (параллельныхъ прямыхъ), во второмъ-же — точка пересѣченія вовсе не существуетъ.

Когда геометрическія мѣста суть иныя кривыя, тогда они не могутъ быть непосредственно употреблены для построеній; въ такихъ случаяхъ слѣдуетъ разсматривать задачу съ другихъ сторонъ, съ цѣлью отыскать другіе пріемы рѣшенія. Надо однакожъ замѣтить, что если точка опредѣляется прямою и коническимъ сѣченіемъ, то построеніе ея можетъ быть произведено помощью прямой и круга, тогда какъ построеніе точки не можетъ быть сдѣлано (условленными нами средствами), когда она опредѣляется двумя, независимыми другъ отъ друга, коническими сѣченіями.

Пріемъ, указанный нами для рѣшенія простѣйшихъ задачъ, можетъ быть распространенъ и на болѣе сложныя; тогда должно слѣдовать такому правилу:

Разсматриваютъ одно изъ условій, данныхъ для опредѣленія искомой фигуры, какъ не существующее и отыскиваютъ затѣмъ геометрическія мѣста для точекъ теперь уже неопредѣленной фигуры.

Изъ вышеизложеннаго легко усмотрѣть, какъ важно знаніе многихъ геометрическихъ мѣстъ въ томъ случаѣ, когда они суть прямыя или круги. Поэтому въ первой главѣ мы помѣстили важнѣйшія изъ геометрическихъ мѣстъ вмѣстѣ съ подробнымъ изслѣдованіемъ вышеприведенныхъ главнѣйшихъ правилъ.

Когда же непосредственное примѣненіе геометрическихъ мѣстъ невозможно, тогда слѣдуетъ руководствоваться слѣдующимъ главнымъ правиломъ:

Начерченную фигуру преобразовываютъ въ другую, въ которой связь между данными частями и искомыми была бы проще и удобнѣе для построенія. Подробности этого правила будутъ изложены во второй главѣ.

Для краткости, въ послѣдующемъ, будемъ обозначать треугольникъ чрезъ ABC, длины его сторонъ буквами a, b и c; высоту его, соотвѣтствующую сторонѣ a, обозначимъ чрезъ h_a, соотвѣтствующую той же сторонѣ медіану — чрезъ m_a; длину прямой, дѣлящей $\angle A$ пополамъ, — чрезъ w_a. Буква r будетъ означать радіусъ описаннаго около треугольника круга, ρ — радіусъ вписаннаго въ немъ круга; ρ_a, ρ_b и ρ_c — радіусы внѣвписанныхъ круговъ (кругъ радіуса ρ_a касается стороны a и продолженій сторонъ b и c). Когда будемъ говорить о четыреугольникѣ $ABCD$, то вершины его слѣдуетъ представить себѣ въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ здѣсь написаны; наконецъ $\angle(a, b)$ будетъ означать уголъ, образуемый прямыми a и b.

ГЛАВА I.

Геометрическія мѣста.

А. Геометрическія мѣста точекъ.

a. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, имѣющихъ данное разстояніе отъ данной точки, есть кругъ, центръ котораго находится въ данной точкѣ, а радіусъ равенъ данному разстоянію.*

Слѣд. I. Геометрическое мѣсто крайнихъ точекъ равныхъ
2399 прямыхъ, касательныхъ къ одному и тому же кругу, есть кругъ, концентрическій съ даннымъ.

Слѣд. II. Геометрическое мѣсто точекъ, обладающихъ свойствомъ, что каждая пара касательныхъ, проведенныхъ изъ нихъ къ данному кругу, заключаетъ одинъ и тотъ же уголъ, есть кругъ, концентрическій съ даннымъ.

Слѣд. III. Геометрическое мѣсто центровъ всѣхъ круговъ даннаго радіуса, касающихся даннаго круга, состоитъ изъ двухъ круговъ, концентрическихъ съ даннымъ и радіусы которыхъ равны соотвѣтственно суммѣ и разности данныхъ радіусовъ.

2398 **b.** *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, имѣющихъ данное разстояніе отъ данной прямой, состоитъ изъ двухъ прямыхъ, параллельныхъ данной и находящихся отъ нея въ разстояніи, равномъ данному.*

Слѣд. I. Геометрическое мѣсто вершинъ равновеликихъ треугольниковъ, имѣющихъ общее основаніе, есть прямая, параллельная основанію, потому что эти треугольники имѣютъ одну и ту же высоту.

c. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ точекъ, есть прямая, перпендикулярная къ прямой, соединяющей данныя точки и проходящая чрезъ средину ея.*

d. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, равноотстоящихъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ, состоитъ изъ двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ, дѣлящихъ углы между данными прямыми пополамъ.*

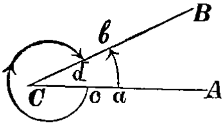
e. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ такихъ, что прямыя, соединяющія ихъ съ крайними точками прямой данной длины, образуютъ данный уголъ, есть дуга круга, хорда которой равна данной прямой.* Здѣсь дугу круга называютъ *вмѣщающею* данный уголъ, а про хорду говорятъ, что изъ всѣхъ точекъ дуги она *видна* подъ даннымъ угломъ.

Если одна изъ точекъ дуги обладаетъ упомянутымъ свойствомъ, то и всѣ ея точки имѣютъ то же свойство, такъ какъ всѣ углы суть углы, вписанные въ одну и ту же дугу. Если провести прямую, касательную къ кругу въ одной изъ конечныхъ точекъ хорды, то она образуетъ съ хордою уголъ, равный данному, ибо оба угла измѣряются одною и тою же дугою. Отсюда слѣдуетъ такое построеніе: чрезъ одну изъ крайнихъ точекъ хорды проведемъ прямую, составляющую съ хордою данный уголъ; это есть касательная; перпендикуляръ къ послѣдней въ точкѣ касанія долженъ пройти чрезъ центръ, который находится также и на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины хорды.

Когда данный уголъ прямой, то дуга круга есть полуокружность.

Примѣчаніе. Если неизвѣстно, съ которой стороны данной прямой должна находиться искомая точка, то слѣдуетъ построить двѣ дуги, вмѣщающія данный уголъ, по одной на каждой сторонѣ прямой; тогда двѣ другія дуги круга вмѣщаютъ уголъ дополнительный даннаго. Если мы имѣемъ дѣло не съ угломъ, заключающимся *между* двумя прямыми, но съ угломъ, простирающимся *отъ* одной прямой *до* другой, и если послѣднему придать знакъ, принимая одно изъ направленій отсчитыванія угла*) за положительное, то геометрическое мѣсто будетъ полный кругъ.

*) Извѣстно, что угломъ, составляемымъ двумя прямыми, называется или часть



пространства, заключающаяся между CA и CB и отсчитываемая по направленію стрѣлки ab, или же часть пространства, заключающаяся между CA и CB и отсчитываемая по направленію стрѣлки cd.

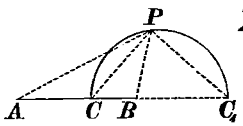
Прим. переводч.

Если данныя точки суть A и B, то уголъ отъ прямой, проходящей чрезъ A, до прямой, проходящей чрезъ B, равенъ углу отъ касательной въ A до AB.

Слѣд. I. Геометрическое мѣсто срединъ всѣхъ хордъ, проходящихъ чрезъ данную точку, есть кругъ, потому что прямыя, соединяющія средины хордъ съ центромъ круга и съ данною точкою, образуютъ прямой уголъ. 2443 (12)

Слѣд. II. Впишемъ въ кругъ треугольники ABC, имѣющіе общую сторону AB, и въ треугольники впишемъ круги; тогда геометрическое мѣсто центровъ послѣднихъ есть дуга круга, имѣющая хордою прямую AB, а центромъ — средину дуги AB. Другая же часть круга есть геометрическое мѣсто центровъ внѣвписанныхъ круговъ. Дѣйствительно, изъ каждаго изъ искомыхъ центровъ прямая AB видна подъ углами, соотвѣтственно равными $\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}C$ и $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}C$, а изъ средины дуги AB она видна подъ угломъ $\pi - C$.

f. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ находятся въ данномъ отношеніи $m:n$, есть окружность круга.* 2444 (24)



Пусть A и B данныя точки, P одна изъ искомыхъ; прямыми PC и PC_1 раздѣлимъ $\angle APB$ и смежный съ нимъ пополамъ, тогда

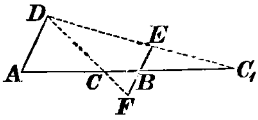
$$\frac{AC}{CB}=\frac{AC_1}{BC_1}=\frac{m}{n};\quad \angle CPC_1=\frac{\pi}{2}.$$

Слѣдовательно точки C и C_1 дѣлятъ прямую AB внутренно и внѣшне въ данномъ отношеніи, и положеніе ихъ отъ перемѣны точки P не мѣняется. Такъ какъ отрѣзокъ CC_1 виденъ изъ точки P подъ прямымъ угломъ, то геометрическое мѣсто точекъ P (см. **e**) есть кругъ діаметра CC_1.

Точки C и C_1 дѣлятъ, какъ принято называть, прямую AB гармонически въ отношеніи $m:n$, а потому задача сводится на слѣдующую:

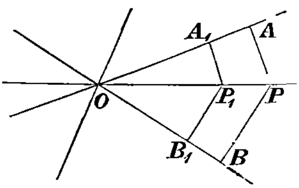
Раздѣлить данную прямую гармонически въ данномъ отношеніи.

Построеніе произведено на прилагаемомъ чертежѣ: параллельныя прямыя AD и BE взяты въ данномъ отношеніи; BF равна BE, а потому DF и DE пересѣкаютъ AB въ искомыхъ точкахъ.



c есть частный случай **f**, если положить $m = n$.

g. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ находятся въ данномъ отношеніи $m : n$, состоитъ изъ двухъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ точку пересѣченія данныхъ.*



Пусть даны прямыя OA и OB. Если точка P имѣетъ указанное свойство, то и всякая точка прямой OP обладаетъ тѣмъ же свойствомъ; возьмемъ, напримѣръ, точку P_1, тогда

$$\frac{OP_1}{OP} = \frac{A_1P_1}{AP} = \frac{B_1P_1}{BP}$$

или

$$\frac{A_1P_1}{B_1P_1} = \frac{AP}{BP}.$$

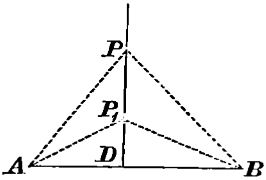
Отсюда видно, что искомую прямую можно построить, какъ только будетъ извѣстна одна изъ ея точекъ; такую точку легко найти помощью **b**, взявъ оба разстоянія ея въ данномъ отношеніи. Другую прямую, находящуюся въ дополнительномъ къ AOB углѣ, проведемъ такимъ же образомъ. Эти четыре прямыя, проходящія чрезъ O, образуютъ *гармоническій пучокъ,* ибо всякая ихъ пересѣкающая прямая дѣлится ими гармонически.

Когда $m = n$, тогда **d** есть частный случай **g**.

Слѣд. Даны двѣ прямыя AB и CD; требуется найти точку P такъ, чтобы $\triangle PAB$ и $\triangle PCD$ находились въ данномъ отношеніи. Геометрическое мѣсто P есть то же, что и въ предыдущемъ, потому что высоты находятся въ постоянномъ отношеніи.

h. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, квадраты разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ имѣютъ постоянную разность a^2, есть прямая перпендикулярная къ прямой, соединяющей данныя точки.*

Данныя точки суть A и B, P одна изъ искомыхъ и PD перпендикуляръ на AB; тогда всякая точка P_1 прямой PD должна имѣть означенное свойство, потому что



$$\overline{AP_1}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{P_1D}^2 ; \ \overline{BP_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{P_1D}^2$$

откуда $\overline{P_1B}^2 - \overline{P_1A}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$

также и $\overline{PB}^2 - \overline{PA}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{AD}^2$

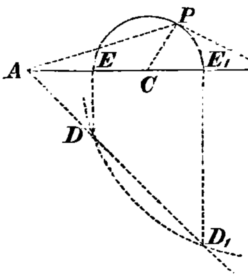
Построимъ произвольный прямоугольный треугольникъ, одинъ изъ катетовъ котораго есть a и, принявъ A и B за центры, радіусами, равными соотвѣтственно гипотенузѣ и другому катету, опишемъ окружности; искомая прямая проходитъ чрезъ точки пересѣченія этихъ окружностей. Другой катетъ треугольника долженъ быть взятъ достаточно большимъ, чтобы окружности могли встрѣтиться. Здѣсь предполагается, что P удалена отъ B дальше, чѣмъ отъ A.

Слѣд. I. Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, изъ которыхъ можно провести равныя касательныя къ двумъ кругамъ (степени которыхъ относительно двухъ круговъ равны), есть прямая, перпендикулярная къ линіи центровъ (радикальная ось, прямая равныхъ степеней относительно круговъ). Въ самомъ дѣлѣ, не трудно видѣть, что разстоянія точекъ отъ центровъ круговъ должны быть таковы, чтобы разность квадратовъ этихъ разстояній была равна разности квадратовъ радіусовъ. Если круги пересѣкаются, то радикальная ось проходитъ чрезъ точки пересѣченія. Три радикальныя оси трехъ круговъ проходятъ чрезъ одну точку, такъ называемый *радикальный центръ*. Отсюда легко построить радикальную ось двухъ непересѣкающихся круговъ — стоитъ только провести окружность, которая пересѣкла бы оба данные круга.

Слѣд. II. Геометрическое мѣсто центровъ круговъ, пересѣкающихъ два данные круга соотвѣтственно по ихъ діаметрамъ, есть прямая, перпендикулярная къ линіи центровъ и отстоящая отъ центра одного круга на разстояніе, равное разстоянію радикальной оси отъ центра другого.

Слѣд. III. Геометрическое мѣсто центровъ всѣхъ круговъ, пересѣкающихъ два данные круга ортогонально (т.-е. такъ, что касательныя, проведенныя къ пересѣкающимся кругамъ въ точкахъ пересѣченія, образуютъ прямой уголъ), есть радикальная ось.

i. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, сумма квадратовъ разстояній которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ равна постоянной величинѣ a^2, есть кругъ, центръ котораго находится въ срединѣ прямой, соединяющей данныя точки.*



Пусть A и B данныя точки, P одна изъ искомыхъ. Проведя медіану PC, получимъ, какъ извѣстно

$$\overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\,\overline{PC}^2 + \frac{1}{2}\overline{AB}^2$$

или
$$\overline{PC}^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{4}\overline{AB}^2$$

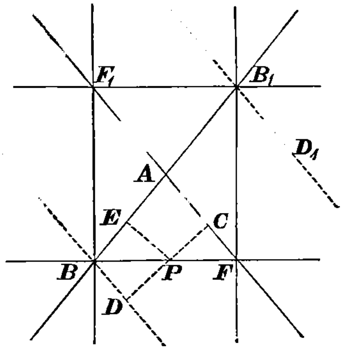
т.-е. искомая точка находится въ постоянномъ разстояніи отъ C. Чтобы опредѣлить на AB точки, чрезъ которыя проходитъ кругъ, построимъ при A уголъ $BAD = 45^0$; изъ B радіусомъ a опишемъ дугу, встрѣчающую AD въ точкахъ D и D_1. Основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ на AB изъ D и D_1, т.-е. точки E и E_1, будутъ искомыя, потому что

$$a^2 = \overline{DE}^2 + \overline{EB}^2 \text{ и } a^2 = \overline{D_1E_1}^2 + \overline{E_1B}^2, \text{ но}$$

$$DE = AE \text{ и } D_1E_1 = AE_1$$

k. *Геометрическое мѣсто всѣхъ точекъ, которыхъ разстоянія отъ двухъ данныхъ прямыхъ имѣютъ данную сумму или разность, есть система четырехъ прямыхъ.*

Пусть данныя прямыя будутъ AB и AC, P одна изъ искомыхъ точекъ, слѣдовательно $PC + PE = a$. Сдѣлаемъ $PD = PE$, тогда геометрическое мѣсто D состоитъ изъ двухъ прямыхъ, параллельныхъ AC и находящихся отъ нея въ разстояніи a; пусть эти прямыя будутъ BD и B_1D_1. Такъ какъ искомыя точки должны находиться въ равномъ разстояніи отъ AE и одной изъ этихъ прямыхъ, то онѣ будутъ лежать на одной изъ четырехъ прямыхъ, дѣлящихъ углы при B и B_1 пополамъ. Такимъ же образомъ рѣшается задача, когда разность разстоянiй есть a; въ самомъ дѣлѣ, изъ чертежа видно, что четыре ограниченныхъ отрѣзка BF, FB_1, B_1F_1 и F_1B соотвѣтствуютъ случаю, когда сумма разстоянiй есть a, тогда какъ неограниченныя продолженiя ихъ относятся къ случаю разности.



Примѣчанiе. Если согласимся считать CP какъ положительное или отрицательное, смотря по тому, находится ли P съ одной стороны данной прямой AF, или съ другой; если согласимся, далѣе, считать и EP положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, по какую сторону прямой AB находится точка P, то геометрическое мѣсто будетъ безконечная прямая, ибо для четырехъ прямыхъ будемъ имѣть соотвѣтственно

$$CP + EP = a; \qquad CP - EP = a$$

$$-CP + EP = a; \quad -CP - EP = a$$

Помощью этихъ геометрическихъ мѣстъ легко рѣшить слѣдующiя задачи; для этого каждое изъ двухъ условiй, которымъ подвержена искомая точка, должно разсматривать независимо одно отъ другого; получимъ такимъ образомъ два геометрическихъ мѣста, точка пересѣченiя которыхъ и опредѣлитъ искомую точку.

Примѣры.

1. Опредѣлить точку, равноотстоящую отъ трехъ данныхъ точекъ (c).

2401 2. Опредѣлить точку, равноотстоящую отъ трехъ данныхъ прямыхъ (d).

2402 3. По тремъ даннымъ сторонамъ построить треугольникъ (a).

Даннымъ радiусомъ описать кругъ:

2406 4. проходящiй чрезъ двѣ данныя точки (a), 215 5. проходящій чрезъ данную точку и касающійся данной прямой (a и b),

2407 6. проходящій чрезъ данную точку и касающійся даннаго круга (a),

2408 7. касающійся двухъ данныхъ прямыхъ (b),

8. касающійся данной прямой и даннаго круга (a и b),

2409 9. касающійся двухъ данныхъ круговъ (a).

2410 10. По a, h_a и m_a построить треугольникъ (a и b).

2411 11. Къ данному кругу провести касательную, отъ которой данная прямая отсѣкала бы данный отрѣзокъ (a, слѣд. I).

61 12. Построить кругъ, проходящій чрезъ данную точку и касающійся данной прямой или даннаго круга въ данной точкѣ (c).

2412 13. На окружности даннаго круга опредѣлить точку, которая находилась бы въ данномъ разстояніи отъ данной прямой (b).

2413 14. Опредѣлить на данной прямой точку, равноотстоящую отъ двухъ данныхъ точекъ (c)

15. Построить кругъ, который касался бы двухъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ и проходилъ чрезъ данную точку (d и a).

2414 16. Изъ данной точки провести къ кругу касательную (e).

Построить треугольникъ по:

21 17. A, a и h_a (e и b),

2415 18. A, a и m_a (e и a).

2416 19. Опредѣлить точку, изъ которой два данныхъ отрѣзка видны подъ данными углами (задача Потено) (e).

2417 20. Построить четыреугольникъ, который можетъ быть вписанъ въ кругъ (вписываемый четыреугольникъ), по углу, прилежащей сторонѣ и обѣимъ діагоналямъ (e и a).

21. Построить точку, которой разстоянія отъ трехъ данныхъ прямыхъ находились бы между собою въ данныхъ отношеніяхъ (g).

22. Опредѣлить въ треугольникѣ точку такую, чтобы разстоянія ея отъ трехъ вершинъ находились между собою въ данныхъ отношеніяхъ (f).

23. Чрезъ данную точку къ данному кругу провести сѣкущую такъ, чтобы разстоянія точекъ встрѣчи ея съ кругомъ отъ данной прямой имѣли данную сумму.

Опредѣляемъ средину хорды (e, слѣд. I и b).

2418 24. Опредѣлить такую точку, чтобы проведенныя изъ нея къ двумъ даннымъ кругамъ касательныя имѣли данныя длины (a, слѣд. I).

2419 25. Опредѣлить точку, изъ которой данные два круга были бы видны подъ данными углами (a, слѣд. II).

2420 26. Въ данный треугольникъ вписать равнобедренный треугольникъ данной высоты такъ, чтобы основаніе его было параллельно одной изъ сторонъ даннаго треугольника (b и c).

27. Описать кругъ, центръ котораго находился бы на данной прямой и окружность котораго имѣла бы данныя разстоянія отъ двухъ данныхъ прямыхъ (k).

2421 28. Построить треугольникъ по A, w_a и ρ (d, b и 16).

29. Построить вписываемый четыреугольникъ по AB, BC, AC и углу между діагоналями (3 и 1).

30. Опредѣлить такую точку, чтобы проведенныя отъ нея къ тремъ даннымъ кругамъ касательныя имѣли одинаковую длину (h, слѣд. I).

31. Построить треугольникъ по A, a и b^2+c^2 (e и i).

32. Въ данномъ треугольникѣ опредѣлить такую точку, чтобы прямыя, соединяющія ее съ вершинами, раздѣлили треугольникъ на три равновеликія части.

Пусть данный треугольникъ есть ABC, искомая точка O. Если $\triangle AOB$ и $\triangle AOC$ равновелики, то геометрическое мѣсто точки O есть прямая, проходящая чрезъ A. Такъ какъ медіана дѣлитъ треугольникъ на двѣ равновеликія части, то средина BC есть одна изъ точекъ геометрическаго мѣста, а потому геометрическое мѣсто есть сама медіана. Искомая точка есть, слѣдовательно, пересѣченіе медіанъ.

33. Въ данный треугольникъ вписать другой, двѣ стороны котораго даны, такъ, чтобы одна изъ его вершинъ упала въ данную точку (a).

34. Построить кругъ, касающійся внутренно трехъ данныхъ равныхъ круговъ (1).

35. Построить треугольникъ по a, h_b и h_c (e и a).

36. Опредѣлить точку, когда извѣстны разстояніе ея отъ вершины даннаго угла и отношеніе ея разстояній отъ сторонъ угла (a и g).

Построить треугольникъ по:

37. a, A и b^2-c^2 (e и h).

38. a, h_a и b^2+c^2 (**b** и **i**).

39. Построить прямоугольный треугольникъ, если даны: высота его, соотвѣтствующая гипотенузѣ, двѣ точки на гипотенузѣ и по точкѣ на каждомъ изъ катетовъ (**b** и **e**).

40. Около равносторонняго треугольника описать квадратъ такъ, чтобы обѣ фигуры имѣли общую вершину.

Опредѣляемъ противолежащую вершину квадрата (**e** и **c**).

41. Построить треугольникъ по a, A и ρ (**e**, слѣд. II).

42. Данную прямую раздѣлить на два отрѣзка такъ, чтобы средняя геометрическая отрѣзковъ имѣла данную длину (**e** и **b**).

43. Данъ прямоугольный треугольникъ; требуется построить кругъ, касающійся гипотенузы, проходящій чрезъ вершину прямого угла и имѣющій центръ на одномъ изъ катетовъ (**d**).

44. Даны двѣ параллельныя прямыя и на одной изъ нихъ точка A; дана еще произвольная точка O. Чрезъ послѣднюю требуется провести прямую, которая пересѣкала бы параллельную, проходящую чрезъ A въ точкѣ X, другую параллельную въ точкѣ Y такъ, чтобы $AX=AY$.

Опредѣляемъ средину XY.

45. Опредѣлить точку, изъ которой три отрѣзка AB, BC и CD данной прямой были бы видны подъ равными углами (**f**).

46. Опредѣлить въ треугольникѣ точку, изъ которой три стороны кажутся одинаковой длины (видны подъ равными углами) (**e**).

47. Опредѣлить точку, изъ которой три данные круга кажутся равными.

Разстоянія искомой точки отъ центровъ круговъ пропорціональны радіусамъ послѣднихъ, а потому точка опредѣляется помощью **f**.

48. Построить треугольникъ по a, h_a и $b:c$ (**b** и **f**).

49. Найти въ данномъ четыреугольникѣ точку, разстоянія которой отъ двухъ противоположныхъ сторонъ имѣли бы данную сумму, а разстоянія ея отъ двухъ другихъ сторонъ находились бы въ данномъ отношеніи.

50. Опредѣлить на данной окружности точку, сумма разстояній которой отъ двухъ данныхъ прямыхъ была бы наименьшая (**k**).

51. Построить кругъ, пересѣкающій три данные круга подъ прямымъ угломъ (**h**, слѣд. III).

52. Построить кругъ, пересѣкающій три данные круга по діаметрамъ (**h**, слѣд. II).

53. Въ данный кругъ вписать прямоугольный треугольникъ так, чтобы каждый катетъ проходилъ соотвѣтственно чрезъ данныя точки (**e**). 13 13

54. Въ данный кругъ вписать прямоугольный треугольникъ, если извѣстны одинъ изъ острыхъ угловъ и точка на одномъ изъ катетовъ (**e**). 2522 13

55. На одномъ и томъ же діаметрѣ круглаго бильярда поставлены два шара; по какому направленію слѣдуетъ ударить одинъ изъ нихъ, чтобы послѣ отраженія отъ борта онъ встрѣтилъ другой? (**f**).

Въ предыдущихъ задачахъ можно было прямо примѣнять геометрическія мѣста, потому что требовалось или непосредственное опредѣленіе точки, или же по роду задачи было видно, что она рѣшается нахожденіемъ такой точки. Но если это обстоятельство не имѣетъ мѣста, то должно примѣнять слѣдующія правила:

Въ построеніе вводятъ данные элементы. Напримѣръ, если дана сумма двухъ прямыхъ, то недостаточно, чтобы эти прямыя входили въ построеніе каждая въ отдѣльности, но необходимо ввести и самую данную сумму ихъ; дѣлается это обыкновенно такъ, что одна изъ конечныхъ точекъ данной длины помѣщается въ данную точку.

Построеніе подвергаютъ тщательному изслѣдованію съ цѣлью обнаружить такія линіи и углы, которые, не будучи заданы непосредственно, легко могутъ быть построены помощью данныхъ элементовъ.

Затѣмъ отыскиваютъ такую часть строющейся фигуры, которая сама по себѣ была бы опредѣлена данными элементами и которая, будучи начерчена, могла бы служить исходною точкою для опредѣленія остальной части фигуры. При этомъ можетъ быть выборъ между нѣсколькими частями фигуры; обыкновенно выбираютъ такую, которая давала бы въ чертежѣ бо́льшую часть искомой фигуры. Особенно часто употребляется принципъ *разысканія треугольниковъ,* три элемента которыхъ извѣстны.

Чтобы ввести стороны треугольника или суммы и разности ихъ, употребляются нерѣдко четыре, касающихся сторонъ треугольника, круга. На каждой сторонѣ треугольника находятся по двѣ вершины и по четыре точки касанія; разстоянія между каждыми двумя изъ нихъ могутъ быть легко выражены въ сторонахъ треугольника. Замѣтимъ въ особенности слѣдующія величины: если s есть полупериметръ треугольника, то

a) вписанный кругъ опредѣляетъ на сторонахъ отрѣзки, равные $s-a$, $s-b$ и $s-c$;

b) разстояніе вершины A отъ точекъ касанія круга радіуса ρ_a со сторонами b и c есть s; разстояніе этихъ точекъ касанія отъ точки касанія вписаннаго круга есть a;

c) вписанный кругъ и одинъ изъ внѣвписанныхъ касаются стороны a въ точкахъ, равно удаленныхъ отъ вершинъ B и C, взаимное разстояніе которыхъ есть $b-c$ или $c-b$.

Примѣры.

56. Построить четыреугольникъ по AB, BC, AC, BD и $\angle D$.

$\triangle ABC$ строится непосредственно; затѣмъ опредѣляемъ D (**а** и **е**).

57. По $\angle A$, $\angle ABD$, AC и BD построить вписываемый четыреугольникъ. Построимъ $\triangle ABD$; опредѣляемъ такимъ образомъ описанный кругъ, а точку C получимъ помощью **а**.

2422 58. Построить параллелограммъ по AB, AC и AD.

2423 59. Построить треугольникъ по A, h_a и w_a.

Треугольникъ, котораго стороны суть h_a и w_a, строится непосредственно.

2424 60. Построить треугольникъ по h_a, m_a и r.

Чертимъ треугольникъ, котораго стороны суть h_a и m_a и опредѣляемъ затѣмъ, помощью **а** и **с**, центръ описаннаго круга.

2425 61. Построить треугольникъ по a, r и h_b.

Построивъ треугольникъ, котораго стороны суть a и h_b, опредѣляемъ центръ описаннаго круга по **а**.

2426 62. Построить треугольникъ по B, a и ϱ.

63. Начертить треугольникъ по a, $b+c$ и h_b.

2427 64. По одной сторонѣ и обѣимъ діагоналямъ построить параллелограммъ.

65. Построить треугольникъ по h_a и m_a, если $a=2b$.

66. Построить четыреугольникъ по AC, $\angle CAB$, $\angle ACD$, CD и DB.

Чертимъ $\triangle ADC$ и опредѣляемъ затѣмъ B.

2428 67. Чрезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую двѣ стороны даннаго треугольника такъ, чтобы эти точки пересѣченія и концы третьей стороны находились на одной и той же окружности.

Построить треугольникъ по:

2429 68. a, h_b и m_a.

2430 69. h_a, m_a и b.

2431 70. h_a, h_b и B.

71. h_a, m_a и $a:b$.

72. h_a, B и C.

2494(14) 73. Построить треугольникъ по a, A и $b+c$.

Введемъ въ чертежъ $b+c$, продолживъ AC за точку A на длину $AD=c$*), и соединимъ D съ B; $\triangle CDB$, какъ легко видѣть, можетъ быть построенъ непосредственно, потому что $\angle D=\frac{1}{2}A$; точку A опредѣляемъ затѣмъ помощью c.

Вмѣстѣ съ тѣмъ мы видимъ, что если BC есть нѣкоторая данная хорда и если продолжить хорду BA до D на длину $AD=DC$, то геометрическое мѣсто D есть кругъ, центръ котораго находится въ срединѣ дуги BC.

74. Построить треугольникъ по A, b и $a-c$. 2493(14)

Продолжимъ c за A на длину $a-c$.

75. Данную дугу раздѣлить на двѣ части такъ, чтобы сумма соотвѣтствующихъ имъ хордъ была наибольшая.

76. Построить треугольникъ по A, $b+c$ и h_b+DC, гдѣ D есть основаніе h_b.

---

*) Для избѣжанія недоразумѣній напомнимъ читателямъ, что авторъ рекомендуетъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ держаться пріема, извѣстнаго еще со временъ Эвклида, а именно: предположивъ данную задачу рѣшенною, изслѣдовать ее съ цѣлью обнаружить нѣкоторыя нужныя для построенія соотношенія и положенія элементовъ. Такъ, предположивъ что эта задача рѣшена, мы увидимъ, что одно изъ геом. мѣстъ вершины B есть прямая, проходящая чрезъ D и составляющая съ $CD=b+c$ уголъ, равный $\frac{A}{2}$. Вмѣстѣ съ тѣмъ станетъ понятнымъ требованіе: «продолжить AC за точку A на длину $AD=c$», съ перваго взгляда кажущееся невозможнымъ, ибо длина c не дана.

Примѣч. переводч.

77. Построить треугольникъ по a, $b+c$ и $B-C$.

78. Построить треугольникъ по a, A и $b-c$.

79. Около даннаго квадрата описать другой данный квадратъ (73).

80. Около даннаго правильнаго многоугольника описать другой данный правильный многоугольникъ того же числа сторонъ.

81. Построить четыреугольникъ по $AB, BC, BD, \angle A$ и $\angle B$.

82. Построить четыреугольникъ по $AB, AC, \angle A, \angle D$ и $\angle C$.

83. Построить вписываемый четыреугольникъ по r, AC, BD и $AB \pm BC$.

Начертимъ сперва кругъ, внесемъ AC и опредѣляемъ B (73); затѣмъ опредѣляемъ D.

84. Построить вписываемый четыреугольникъ по AB, BC, AC и $CD \pm DA$.

85. Построить четыреугольникъ по AB, CD, AC, $\angle BAC$ и $\angle ABD$.

86. Построить вписываемый четыреугольникъ по $AB \pm BC$, DA, BD и $\angle A$.

87. Построить треугольникъ по a, $b-c$ и $B-C$.

Проведемъ BD такъ, чтобы $AD=AB$; тогда $DC=b-c$. Не трудно видѣть, что $\angle BBC=\frac{1}{2}(B-C)$; слѣдовательно $\triangle BDC$ легко построить, а точку A опредѣлимъ помощью c.

88. Построить треугольникъ по c, w_a и $B-C$.

Треугольникъ, котораго стороны суть c и w_a, можетъ быть легко построенъ, потому что $\angle(w_a, a)=90^0-\frac{1}{2}(B-C)$.

89. Построить трапецію по даннымъ діагоналямъ, одной изъ параллельныхъ сторонъ и одному углу.

90. Дана прямая, на ней дана точка A и внѣ ея точка P. Опредѣлить на этой прямой точку X такъ, чтобы $AX+XP=m$, гдѣ m дано. (AX слѣдуетъ взять со знакомъ).

На данной прямой отъ точки A откладываемъ m; X опредѣляется тогда помощью c.

91. Даны двѣ точки A и B и прямая, проходящая чрезъ B; на этой прямой, въ равномъ разстояніи отъ B, опредѣлить двѣ точки X и Y такъ, чтобы XY была видна изъ A подъ даннымъ угломъ.

Продолжимъ AB до C такъ, чтобы $BC = AB$.

92. Даны двѣ параллельныя прямыя, на одной изъ нихъ дана точка A, на другой точка B и между параллельными дана точка O.

Чрезъ O провести прямую, встрѣчающую данныя параллельныя въ точкахъ X и Y такъ, чтобы AX и BY (взятыя со знаками) составили данную сумму.

Искомая прямая проходитъ чрезъ средину AC, когда $YC = AX$.

93. Построить треугольникъ по a, A и $CD \cdot b$, гдѣ D есть основаніе h_b.

Основаніе h_a легко опредѣлить.

94. Построить треугольникъ по B, $c - a$ и разности отрѣзковъ, на которые h_b дѣлитъ b.

Нанесемъ данныя разности AD и AE на AB и AC, тогда $\angle AED$ будетъ извѣстенъ ($BE = BD = BC$).

95. Даны три точки A, B, C и прямая, проходящая чрезъ A. Чрезъ точки A и B провести кругъ, пересѣкающій данную прямую въ точкѣ D такъ, чтобы DC была касательная.

$\angle BDC = \angle BAD$, а потому легко найти D.

96. Построить треугольникъ по r, h_a и $B - C$.

Уголъ между h_a и радіусомъ, идущимъ къ вершинѣ A, извѣстенъ.

97. Въ $\triangle ABC$ провести XY параллельно BC такъ, чтобы 1523
$XY = XB + YC$. (172)

Искомая прямая проходитъ чрезъ центръ вписаннаго круга.

98. Построить треугольникъ по $B - C$ и w_a, если притомъ дано отношеніе $\dfrac{b + c}{a}$.

99. Въ параллелограммѣ провести прямую AX чрезъ точку X стороны CD такъ, чтобы $AX = AB + XD$.

Отнявъ отъ прямой AX прямую AB, конецъ разности упадетъ на BD.

100. Въ треугольникѣ ABC даны: AB по длинѣ и направленію, уголъ A и точка D, въ которой діаметръ, проходящій чрезъ C, пересѣкаетъ AB; требуется построить описанный около треугольника кругъ.

BD видна изъ центра круга подъ извѣстнымъ угломъ.

101. Въ треугольникѣ, въ которомъ AD дѣлитъ уголъ A пополамъ, извѣстны AD, $AB-BD$ и $AC-CD$. Построить этотъ треугольникъ.

На BC нанесемъ BA и CA такъ, чтобы DA_1 и DA_2 были данныя разности; тогда кругъ, проходящій чрезъ A, A_1 и A_2, будетъ концентрическій съ кругомъ, вписаннымъ въ искомый треугольникъ, и будетъ имѣть извѣстный діаметръ.

1524(75) 102. Построить четыреугольникъ, когда извѣстны проекціи точки встрѣчи діагоналей на четыре стороны.

Извѣстенъ уголъ между двумя перпендикулярами, возставленными къ двумъ противолежащимъ сторонамъ.

2525(69) 103. На одной изъ сторонъ прямого угла даны точки A и B. Найти на другой сторонѣ такую точку X, чтобы $\angle AXB = 2\angle ABX$.

Опредѣляемъ средину XY, гдѣ Y есть точка на XB и $AX=AY$.

51(40) 104. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы отъ даннаго угла она отрѣзала треугольникъ даннаго периметра.

Одинъ изъ внѣвписанныхъ круговъ треугольника можно построить.

105. Построить треугольникъ по A, w_a и $a+b+c$.

106. Построить треугольникъ по A, ρ и $a+b+c$.

107. Построить треугольникъ по A, r и $a+b+c$.

Такъ какъ a извѣстна, то задача сводится на 73 или 137.

108. Построить треугольникъ по ρ, ρ_a и w_a.

h_a опредѣляется по ρ и ρ_a.

109. Построить треугольникъ по ρ, ρ_a и $b-c$.

$b-c$ есть разстояніе между двумя точками касанія.

110. Построить треугольникъ по a, ρ и $b+c$.

s и a извѣстны и опредѣляютъ двѣ точки касанія и одну вершину.

111. Построить треугольникъ по a, ρ и $b-c$.

112. Построить треугольникъ по h_a, ρ и $a+b+c$.

Извѣстно a.

113. Построить треугольникъ по a, ρ_b и ρ_c.

Извѣстенъ отрѣзокъ, заключающійся между точками касанія обоихъ круговъ.

114. Построить треугольникъ по ρ_a, ρ_b и $a+b$.

Разстояніе точекъ касанія обоихъ круговъ извѣстно.

115. Построить треугольникъ по ρ_b, ρ_c и $B-C$.

Извѣстенъ уголъ между BC и линіею центровъ обоихъ круговъ.

116. Построить треугольникъ по a, $b+c$ и w_a.

Такъ какъ центры вписаннаго и внѣвписаннаго круговъ и точки пересѣченія ихъ общихъ касательныхъ суть гармоническія точки, то и проекціи послѣднихъ на AB также гармоническія точки. Изъ этихъ четырехъ точекъ три извѣстны, и потому легко опредѣлить и четвертую.

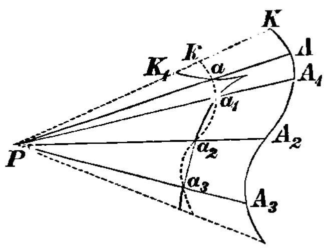
Эту задачу можно рѣшить проще, построивъ w_a и опредѣляя B и C на основаніи того свойства, что разстоянія этихъ точекъ отъ концовъ w_a имѣютъ извѣстное отношеніе, равное $(b+c):a$.

Умноженіе кривыхъ.

Если изъ точки P проведемъ къ произвольной точкѣ A на данной кривой K прямую и эту прямую въ точкѣ a раздѣлимъ такъ, чтобы

$$Pa:PA=m:n,$$

то геометрическое мѣсто точки a есть кривая k, подобная данной кривой.



Такія кривыя, какъ K и k, называются подобными и подобно расположенными одна относительно другой; P называется ихъ центромъ подобія, а прямыя, проходящія чрезъ P,— радіусами подобія. Соотвѣтственными (гомологическими) точками кривыхъ называются такія, которыя лежатъ на одномъ радіусѣ подобія; соотвѣтственными прямыми — такія, которыя соединяютъ соотвѣтственныя точки. Понятіе о подобіи можетъ быть обобщено, ибо всякая точка плоскости можетъ быть разсматриваема, какъ принадлежащая одной изъ системъ, имѣющая, слѣдовательно, соотвѣтственную точку въ другой системѣ; центръ подобія есть тогда та точка плоскости, которая, разсматриваемая какъ принадлежащая къ одной системѣ, совпадаетъ съ своею соотвѣтственною въ другой системѣ. Такъ какъ теорія подобія излагается въ большинствѣ курсовъ геометріи, то мы ограничимся здѣсь приведеніемъ слѣдующихъ теоремъ:

Прямой или кругу соотвѣтствуетъ прямая или кругъ.

Всѣ соотвѣтственныя линіи параллельны.

Всѣ соотвѣтственные углы равны.

Всѣ соотвѣтственныя линіи находятся въ отношеніи $m:n$; поэтому и сами фигуры называются подобными въ этомъ же отношеніи.

Если отложить Pa на продолженіи PA по другую сторону P, то приведенныя теоремы имѣютъ также мѣсто.

Въ этомъ случаѣ говорятъ, что системы обратно подобны.

Два произвольные круга могутъ быть разсматриваемы какъ прямо, такъ и обратно подобно-расположенные; центры подобія называются тогда внѣшнимъ и внутреннимъ центрами подобія обоихъ круговъ.

На основаніи изложеннаго можно рѣшить одну общую задачу, имѣющую весьма частое приложеніе.

Чрезъ точку P провести прямую, встрѣчающую двѣ данныя кривыя K и K' въ точкахъ A и a такъ, чтобы PA и Pa находились въ данномъ отношеніи $m:n$.

Принявъ данную точку за центръ подобія, начертимъ кривую k, подобно расположенную относительно K въ отношеніи $m:n$; она пересѣчетъ K' въ искомой точкѣ. Число рѣшеній задачи равно числу точекъ пересѣченія кривыхъ K' и k. Всякій разъ, когда данныя кривыя составлены изъ прямыхъ и круговыхъ дугъ, задача эта рѣшается помощью линейки и циркуля.

Если данная точка P должна находиться по одну сторону точекъ A и a ($m:n$ положительное), кривая k строится въ прямомъ подобіи съ K; если же она должна лежать между точками A и a ($m:n$ отрицательное), то чертимъ k въ обратномъ подобіи съ K.

Построеніе кривой, подобной и подобно расположенной относительно другой данной кривой въ отношеніи $m:n$, я называю для краткости *умноженіемъ* данной кривой на $\pm\frac{m}{n}$ относительно центра подобія; при чемъ знакъ $+$ относится къ положенію прямого подобія, а знакъ — къ положенію обратнаго подобія.

Когда требуется умножить прямую, то, такъ какъ направленіе ея при этомъ не измѣняется, достаточно умножить одну изъ ея точекъ.

Чтобы умножить кругъ, слѣдуетъ умножить центръ и радіусъ, или же центръ и одну изъ точекъ окружности.

Примѣры.

117. Чрезъ данную точку O провести прямую, пересѣкающую двѣ данныя прямыя такъ, чтобы разстоянія точекъ пересѣченія отъ O относились между собою, какъ $m:n$.

Принявъ O за центръ подобія, умножаемъ одну изъ данныхъ прямыхъ на $\pm\frac{m}{n}$; проводимъ затѣмъ прямую чрезъ O и чрезъ точку пересѣченія полученной прямой съ другою изъ данныхъ.

118. Въ данномъ кругѣ, чрезъ данную внутри его точку O провести хорду такъ, чтобы она въ точкѣ O раздѣлилась въ отношеніи $m:n$.

Принявъ O за центръ подобія. умножимъ кругъ на $-\frac{m}{n}$; искомыя прямыя пройдутъ тогда чрезъ точки пересѣченія новаго круга съ даннымъ. Если данная точка находится внѣ круга, то послѣдній слѣдуетъ умножить на $\frac{m}{n}$ или на $\frac{n}{m}$.

Если же внѣшній относительно круга отрѣзокъ долженъ относиться къ хордѣ какъ $m:n$, то умножаемъ на $\frac{m}{m+n}$ или на $\frac{m+n}{m}$.

119. Чрезъ O, одну изъ точекъ пересѣченія двухъ круговъ, провести прямую такъ, чтобы оба круга отсѣкали на ней равныя хорды.

Умножаемъ одинъ изъ круговъ на -1, принявъ O за центръ подобія.

120. Вписать въ данный четыреугольникъ параллелограммъ такъ, чтобы средина его совпала съ данною точкою.

121. Построить треугольникъ по a, b и m_c.

Построимъ $m_c = CE$ и изъ C, какъ изъ центра, опишемъ дуги радіусами a и b; одну изъ нихъ умножаемъ на -1, принявъ E за центръ подобія. Рѣшеніе задачи можно бы начать построеніемъ одной изъ данныхъ сторонъ; тогда слѣдовало бы умножить одну изъ дугъ на $\frac{1}{2}$ или другую на 2. Послѣднее построеніе легче перваго, но требуетъ большаго мѣста.

122. Построить треугольникъ по a, A и m_b.

Опишемъ на a дугу, вмѣщающую $\angle A$. Изъ B радіусомъ m_b опишемъ также дугу и умножимъ ее на 2 или первую дугу на $\frac{1}{2}$, принявъ C за центръ подобія.

123. Чрезъ данную на окружности точку провести хорду, которая другою данною хордою раздѣлилась бы пополамъ.

Принявъ данную точку за центръ подобія, умножимъ данную хорду на 2, или кругъ на $\frac{1}{2}$.

124. Пересѣчь прямою два концентрическіе круга такъ, чтобы меньшая хорда была равна половинѣ большей.

125. Построить треугольникъ по a, $\frac{b}{c}$ и m_c.

126. Построить треугольникъ по углу и двумъ медіанамъ.

1210(19) 127. Построить треугольникъ по тремъ его медіанамъ.

Приводится къ 121, потому что медіаны дѣлятъ другъ друга въ отношеніи $1:2$.

128. Для построенія треугольника даны: его центръ тяжести (пересѣченіе медіанъ), одна вершина и двѣ кривыя (прямыя или круги), на которыхъ должны находиться двѣ другія вершины.

129. Построить треугольникъ по a, m_b и $\angle(m_a, b)$.

130. Построить треугольникъ по b, m_b и $\angle(m_a, a)$.

131. Построить вписываемый четыреугольникъ по $\angle A$, DB, $\angle ACB$ и отношенію отрѣзковъ діагонали AC.

132. Построить параллелограмъ, котораго двѣ противолежащія вершины лежали бы на данныхъ точкахъ, а двѣ другія на данной окружности.

133. Въ треугольникѣ изъ A провести къ BC прямую AD, которая была бы среднею пропорціональною для BD и DC.

Воспользуемся описаннымъ кругомъ.

134. Построить треугольникъ по a, b и w_c. 6415 (19)

135. Построить треугольникъ по A, b и $\angle(m_a, a)$.

136. Въ данномъ треугольникѣ чрезъ A провести прямую такъ, чтобы отрѣзки ея отъ A до проекцій B и C на ней имѣли данное отношеніе.

137. Къ двумъ кругамъ провести общія касательныя. 386 (18)

Два круга суть фигуры подобныя и имѣютъ два центра подобія, лежащіе на линіи центровъ; прямая, соединяющая конечныя точки двухъ параллельныхъ радіусовъ, проходитъ чрезъ внѣшній или внутренній центръ подобія, смотря по тому одного ли или различнаго направленія параллельные радіусы. Касательная изъ центра подобія къ одному изъ круговъ касается также и другого.

138. Даны точка O и два круга; къ каждому изъ круговъ провести по касательной такъ, чтобы онѣ были параллельны и чтобы разстоянія ихъ отъ O находились въ данномъ отношеніи.

Умноженіемъ одного изъ круговъ относительно O задача сводится на 137.

139. Построить треугольникъ по A, m_b и $\angle(a, m_c)$.

140. На окружности круга даны точки A и B. Опредѣлить на той же окружности точку X такъ, чтобы XA и XB пересѣкали данный діаметръ въ точкахъ Y и Z, разстоянія которыхъ отъ центра находились бы въ данномъ отношеніи.

Умножимъ AX относительно центра круга такъ, чтобы X совпала съ Y, тогда A упадетъ въ извѣстную точку A_1 и $\angle A_1ZB$ будетъ извѣстенъ.

141. Начертить треугольникъ, если извѣстно положеніе трехъ точекъ, дѣлящихъ три его стороны въ данныхъ отношеніяхъ.

Пусть ABC есть искомый треугольникъ; D, E и F — данныя точки; $BD : DA = m : n$, $AF : FC = p : q$, $CE : EB = r : s$ — данныя отношенія.

Принявъ D за центръ подобія, умножимъ BD на $-\frac{n}{m}$; тогда D остается на мѣстѣ, а B упадетъ въ неизвѣстную точку A. Умножимъ затѣмъ DA на $-\frac{q}{p}$ относительно F, то A упадетъ въ C, а D помѣстится въ извѣстную точку D_1; умножимъ потомъ D_1C на $-\frac{s}{r}$ относительно E, то C упадетъ въ B, а D_1

въ новую извѣстную точку D_2. А такъ какъ направленіе прямой отъ ея умноженія не мѣняется, то BD_2 должна быть параллельна DB, такъ что D_1D_2 совпадаетъ съ AB. Чтобы получить сторону BC, повторимъ то же построеніе въ обратномъ порядкѣ, начиная съ точки E.

То же построеніе примѣняется къ любому многоугольнику. Особеннаго вниманія заслуживаетъ случай, когда даны средины всѣхъ сторонъ, число которыхъ четное; задача тогда неопредѣленная или невозможная. (Mathematisk Tidsskrift for 1862, pag. 159.)

142. Даны четыре концентрическіе круга; провести прямую, пересѣкающую ихъ соотвѣтственно въ точкахъ A, B, C и D такъ, чтобы $AB = CD$.

Означимъ чрезъ (AB) степень точки окружности круга A относительно круга B, и если наша прямая пересѣкаетъ круги во второй разъ въ точкахъ A_1, B_1, C_1 и D_1, то должно быть $(AD) = AD \,.\, AD_1$; $(BC) = BC \,.\, BC_1$ и $AD_1 = BC_1$, слѣдовательно

$$AD : BC = (AD) : (BC).$$

Это отношеніе не трудно построить, проведя двѣ прямыя такъ, чтобы отрѣзокъ одной прямой, заключающійся между кругами A и B, былъ равенъ отрѣзку другой прямой, заключающемуся между кругами B и C. Такимъ образомъ намъ будетъ извѣстно отношеніе $AB : BC$, а искомую прямую можно провести чрезъ произвольную точку A.

143. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ даны AB, BC, CD и AC. приведя AB въ нѣкоторое опредѣленное положеніе, найти геометрическое мѣсто

α) вершины D,

β) средины діагонали BD,

γ) средины прямой, соединяющей средины діагоналей.

144. Въ кругѣ, центръ котораго есть O, проведены неподвижный діаметръ AOB и хорда BC, продолженная до D такъ, что $CD = BC$.

Найти геометрическое мѣсто точки встрѣчи OD и AC.

145. Найти геометрическое мѣсто точки, симметричной съ постоянной точкой A относительно прямой, обращающейся вокругъ другой постоянной точки B.

Методъ подобія.

Методъ, которому мы слѣдовали при умноженіи кривыхъ, заключается въ другомъ, болѣе общемъ, такъ называемомъ методѣ подобія. *Послѣдній употребляется въ тѣхъ случаяхъ когда, отбросивъ одно изъ данныхъ условій, получается система подобныхъ (и подобно расположенныхъ) фигуръ.* До сихъ поръ мы занимались разыскиваніемъ такихъ частей искомой фигуры, которыя могли быть непосредственно опредѣляемы, теперь же станемъ *разыскивать такія части ея, которыхъ видъ (форма) извѣстенъ.*

Главнѣйшіе случаи, въ которыхъ методъ подобія примѣняется, слѣдующіе:

а) *Одно изъ данныхъ задачи есть длина, остальныя же — углы и отношенія.*

Не обращая вниманія на данную длину, построимъ фигуру, которая содержала бы данные углы и данныя отношенія, выбравъ для этого длину одной изъ линій фигуры совершенно произвольно. Получимъ такимъ образомъ фигуру, подобную искомой; сама же искомая получится введеніемъ въ построеніе данной длины.

146. Построить треугольникъ по даннымъ двумъ угламъ и прямой (медіанѣ, высотѣ, периметру и проч.).

Построимъ какой-нибудь треугольникъ, котораго углы были бы равны даннымъ; затѣмъ строимъ другой, подобный первому и содержащій данную прямую.

147. Построить треугольникъ по A, a и $b:c$.

Всякій треугольникъ, въ которомъ одинъ уголъ есть A и заключающія его стороны находятся въ данномъ отношеніи, подобенъ искомому.

148. Построить квадратъ по данной разности діагонали и стороны.

149. Построить треугольникъ по A, b и $a:c$.

150. Данъ центральный уголъ ACB; провести къ кругу касательную такъ, чтобы точкою касанія и точками пересѣченія ея съ сторонами угла она раздѣлилась въ данномъ отношеніи.

Начнемъ съ проведенія касательной, длину которой выбираемъ произвольно, и отыщемъ центръ круга. Полученная фигура будетъ имѣть требуемый видъ; требуемую же величину она получитъ, если примемъ центръ круга за центръ подобія.

151. Построить треугольникъ, когда извѣстны A, h_a и отношеніе между отрѣзками, образуемыми h_a на a.

152. По тремъ даннымъ высотамъ построить треугольникъ.

Извѣстно отношеніе сторонъ. Изъ произвольной точки къ произвольному кругу проведемъ три сѣкущія такъ, чтобы внѣшніе ихъ отрѣзки были равны даннымъ высотамъ; тогда другіе отрѣзки сѣкущихъ относятся между собою какъ стороны искомаго треугольника.

153. Въ полукругъ требуется вписать четыреугольникъ подобный данному такъ, чтобы двѣ его вершины находились на діаметрѣ, а двѣ другія на окружности.

Начертимъ полукругъ, описанный около даннаго четыреугольника; полученная фигура подобна искомой.

b) Въ предыдущихъ задачахъ положеніе искомой фигуры было безразлично; *но если она должна имѣть опредѣленное положеніе относительно нѣкоторыхъ данныхъ линій или точекъ, то слѣдуетъ отбросить такое условіе, чтобы получилась система не только подобныхъ, но и подобнымъ образомъ расположенныхъ фигуръ.* Тогда геометрическія мѣста всѣхъ точекъ фигуры будутъ прямыя, проходящія чрезъ центръ подобія; искомая фигура опредѣляется тогда тѣмъ, что построивъ сперва какую-нибудь фигуру системы, строимъ затѣмъ фигуру подобно расположенную съ нею и заключающую притомъ отброшенное условіе. Обыкновенно отбрасывается одно изъ слѣдующихъ условій: что *одна изъ линій фигуры должна имѣть опредѣленную длину,* или что *на данной линіи должна находиться нѣкоторая точка,* или же что *нѣкоторая линія должна проходить чрезъ данную точку.*

154. Въ данный треугольникъ ABC вписать другой abc такъ, чтобы стороны его были параллельны даннымъ прямымъ.

Отбросивъ условіе, что a должна упасть на BC, прочія требованія будутъ удовлетворены системою подобныхъ треугольниковъ, центръ подобія которыхъ есть A. Начертимъ одинъ изъ этихъ треугольниковъ, напримѣръ $a_1b_1c_1$, то Aa_1 пересѣчетъ сторону BC въ точкѣ a.

155. Въ данный треугольникъ, секторъ или сегментъ вписать квадратъ.

156. Въ данный треугольникъ вписать параллелограммъ, подобный данному.

157. Чрезъ данную точку провести прямую, образующую съ двумя данными прямыми равные углы.

158. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы три данныя прямыя, сходящіяся въ одной точкѣ, отсѣкали на ней два отрѣзка, находящіеся въ данномъ отношеніи.

Вмѣсто данной точки возьмемъ произвольную точку на одной изъ данныхъ прямыхъ (117).

159. Чрезъ данную точку провести прямую, отсѣкающую на сторонахъ даннаго угла отрѣзки, находящіеся въ данномъ отношеніи.

160. Въ треугольникѣ провести прямую параллельно одной изъ сторонъ такъ, чтобы отрѣзокъ ея между двумя другими сторонами находился въ данномъ отношеніи съ однимъ изъ отрѣзковъ, образуемыхъ ею на этихъ сторонахъ.

161. Провести прямую въ данномъ направленіи такъ, чтобы стороны двухъ данныхъ угловъ образовали на ней два отрѣзка, находящіеся въ данномъ отношеніи.

Пусть данные углы BAC и DEF, X— искомая точка на EF; если отбросимъ условіе EF, то X опишетъ прямую, проходящую чрезъ ту точку на DE, которая лежитъ на прямой, проходящей въ данномъ направленіи чрезъ A.

162. Построить равнобедренный треугольникъ по высотѣ и медіанѣ, соотвѣтствующимъ одной изъ равныхъ сторонъ.

Легко построить треугольникъ, котораго стороны равны даннымъ прямымъ; тогда будемъ знать видъ треугольника, въ которомъ данная медіана есть одна изъ сторонъ, а вершина равнобедреннаго треугольника есть вершина, противолежащая этой сторонѣ.

163. Даны точка A на окружности и хорда BC. Провести хорду AD, пересѣкающую BC въ точкѣ E такъ, чтобы DE и DC находились въ данномъ отношеніи.

Извѣстенъ видъ треугольника CED; начертимъ треугольникъ ему подобный, принявъ C за центръ подобія.

164. Въ кругѣ даны два радіуса; провести хорду, которая раздѣлилась бы ими на три равныя части.

165. Въ четыреугольникъ вписать ромбъ, стороны котораго были бы параллельны діагоналямъ четыреугольника.

166. Въ данный треугольникъ вписать треугольникъ XYZ, если извѣстны: направленіе YZ, точка на BC, въ которую должна упасть X, и отношеніе $XY:XZ$.

Отбросимъ BC (но не ту прямую, которая идетъ отъ A чрезъ данную на BC точку) и примемъ A за центръ подобія.

167. Провести прямую даннаго направленія такъ, чтобы она раздѣлила двѣ противолежащія стороны четыреугольника въ равномъ отношеніи (154).

168. Въ треугольникѣ провести прямую параллельно одной изъ сторонъ такъ, чтобы отрѣзокъ ея былъ среднею пропорціональною между отрѣзками, на которые она дѣлитъ одну изъ другихъ сторонъ.

169. Даны точки B и двѣ параллельныя прямыя, изъ которыхъ одна проходитъ чрезъ A. Чрезъ A и B провести двѣ другія параллельныя, которыя вмѣстѣ съ данными образовали бы: 1) ромбъ; 2) параллелограммъ даннаго периметра; 3) параллелограмъ съ даннымъ отношеніемъ сторонъ.

170. Въ треугольникъ вписать ромбъ такъ, чтобы одинъ изъ угловъ его совпалъ съ угломъ треугольника.

171. Вписать въ кругъ равнобедренный треугольникъ, если извѣстна сумма высоты и основанія.

Пусть $\triangle ABC$ искомый; введемъ въ построеніе данную сумму, продолживъ высоту BD до E; тогда $DE=2AD$, такъ что видъ $\triangle ADE$ будетъ извѣстенъ. Затѣмъ легко рѣшить задачу, принявъ E за центръ подобія.

172. Вписать въ треугольникъ прямоугольникъ даннаго периметра.

Введемъ въ построеніе данный полупериметръ.

173. Въ треугольникъ вписать другой треугольникъ такъ, чтобы одна изъ вершинъ его A упала бы въ данную точку на одной изъ сторонъ даннаго треугольника, если притомъ извѣстенъ $\angle A$ и извѣстно, что сторона, противолежащая этому углу, должна быть параллельна нѣкоторой данной прямой.

174. Въ треугольникъ вписать параллелограммъ, стороны котораго должны находиться въ данномъ отношеніи такъ, чтобы одна изъ сторонъ его лежала на BC, а одна изъ вершинъ упала въ данную точку.

175. На одной изъ сторонъ даннаго треугольника опредѣлить такую точку, чтобы прямыя, проведенныя изъ нея по

даннымъ направленіямъ до двухъ другихъ сторонъ, имѣли данную сумму.

176. Даны точка B и двѣ паралленыя прямыя AX и CY. Чрезъ точку B провести прямую, встрѣчающую данныя параллельныя въ точкахъ X и Y такъ, чтобы AX и AY находились въ данномъ отношеніи.

Отбросимъ на время точку B; выберемъ на AX вмѣсто X произвольную точку X_1 и опредѣлимъ на AY точку Y_1, соотвѣтствующую Y.

177. Даны уголъ и точка. Чрезъ послѣднюю провести прямую XY, пересѣкающую стороны даннаго угла въ точкахъ X и Y такъ, чтобы разстояніе вершины угла отъ XY находилось въ данномъ отношеніи съ XZ, которая имѣетъ данное направленіе и соединяетъ X съ точкою Z на другой сторонѣ угла.

Отбросивъ данную точку, выберемъ на AX произвольную точку X_1, вмѣсто X.

178. Въ треугольникѣ ABC провести прямую даннаго направленія, пересѣкающую AB въ X, BC въ Y такъ, чтобы AX и CY находились въ данномъ отношеніи.

Извѣстенъ видъ $AXYC$; принявъ A за центръ подобія, выберемъ B вмѣсто X.

179. Треугольникъ ABC разсѣчь сѣкущею XY такъ, чтобы $BX = XY = YC$. 34/[illegible]

Извѣстенъ видъ $BXYC$.

Къ этой задачѣ можно привести такую: построить треугольникъ по A, $a+b$ и $a+c$. 64/6/22]

180. Въ треугольникѣ ABC провести сѣкущую XY параллельно BC такъ, чтобы между XY, XB и YC существовало данное однородное соотношеніе (напр. $\overline{XY}^2 = XB \cdot YC$; $\overline{XY}^2 = \overline{XB}^2 + \overline{YC}^2$ и т. д.).

181. Начертить кругъ, проходящій чрезъ данную точку A и касающійся двухъ данныхъ прямыхъ, пересѣкающихся въ O.

Если принять O за центръ подобія, то всякій кругъ, касающійся обѣихъ прямыхъ, расположенъ подобно относительно искомаго, а потому прямая OA встрѣчаетъ начерченный кругъ въ точкѣ, соотвѣтствующей точкѣ A въ искомомъ кругѣ. Двумъ точкамъ пересѣченія соотвѣтствуютъ поэтому два рѣшенія; для нахожденія центровъ искомыхъ круговъ, проведемъ въ начерченномъ кругѣ радіусы къ точкамъ пересѣченія и изъ A прямыя, параллельныя этимъ радіусамъ.

182. На данной прямой опредѣлить точку, равноотстоящую отъ данной точки и другой данной прямой. (Пересѣченіе прямой съ параболою.)

Отбросивъ данную точку, примемъ точку встрѣчи данныхъ прямыхъ за центръ подобія. Эта задача есть въ сущности та же, что и предыдущая.

183. Найти на данной прямой точку, разстоянія которой отъ данной точки и другой данной прямой находились бы въ данномъ отношеніи. (Пересѣченіе прямой съ коническимъ сѣченіемъ, опредѣляемымъ фокусомъ, директрисою и экцентрицитетомъ.)

Вмѣсто перпендикуляра, опущеннаго изъ искомой точки на данную прямую, можно взять прямую, составляющую съ данною прямою данный уголъ; рѣшеніе отъ этого существенно не измѣнится.

184. Начертить кругъ по слѣдующимъ условіямъ: центръ его долженъ находиться на данной прямой; онъ долженъ проходить чрезъ данную точку и данная прямая должна отсѣкать отъ него дугу, соотвѣтствующую данному центральному углу.

112(16) 185. Начертить кругъ, проходящій чрезъ двѣ данныя точки и касающійся данной прямой.

186. Въ треугольникѣ ABC провести прямую даннаго направленія, встрѣчающую AB въ X и BC въ Y такъ, чтобы XY и YA имѣли данную сумму.

187. Построить треугольникъ по a, B и $b-h_a$.

Продолжимъ h_a за a на данную длину $b-h_a$. (182)

188. Построить треугольникъ по A, $a-c$ и h_b+CD, гдѣ D есть основаніе h_b.

Продолжить CD до E такъ, чтобы $DE=h_b$, и BA до F такъ, чтобы $AF=a-c$. Какъ легко видѣть, можно построить CE, $\angle CEB=45^0$ и провести чрезъ F параллельную къ CE. Затѣмъ опредѣляемъ B. (183)

189. Построить треугольникъ по a, A и $b+nc$, гдѣ n есть данное число.

190. Построить треугольникъ по A, $b+c$ и $a+c$.

Продолжимъ b за A на длину c до D, продолжимъ еще c за B на длину a. Затѣмъ отложимъ CD, проведемъ DB и опредѣляемъ B*).

191. Вписать въ данный треугольникъ ABC полукругъ, касающійся BC въ точкѣ P и концы діаметра котораго находились бы на двухъ другихъ сторонахъ.

Умноженіемъ AB или AC на -1 относительно P задача сводится къ 173.

Обратныя фигуры.

Пусть нѣкоторая прямая вращается вокругъ неподвижной точки P (центръ обратности) и въ то же время подвижная точка A этой прямой пробѣгаетъ по данной кривой K. Если на нашей прямой возьмемъ точку A_1 такъ, чтобы $PA.PA_1=I$, гдѣ I (степень обратности) есть величина постоянная, то A_1 опишетъ нѣкоторую кривую K_1. Одна изъ кривыхъ K и K_1 называется *обратною* другой (преобразованною помощью взаимныхъ радіусовъ векторовъ); A и A_1 называются *соотвѣтствующими* точками.

Кривая, обратная прямой, есть кругъ, проходящій чрезъ центръ обратности.

---

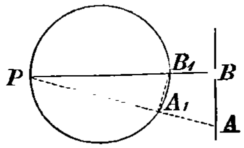
*) Пояснимъ это не вполнѣ понятное рѣшеніе.

Первая часть его есть указаніе на пріемъ изслѣдованія рѣшенной задачи (см. примѣч. къ задачѣ 73); вторая — есть намекъ на рѣшеніе предложенной задачи на основаніи данныхъ, обнаруженныхъ изслѣдованіемъ (см. предисловіе автора).

Изслѣдованіе покажетъ, что 1) проведя подъ угломъ $\frac{A}{2}$ прямую чрезъ D (одинъ конецъ прямой $b+c$, другой конецъ которой есть вершина C искомаго треугольника), получимъ геом. мѣсто вершины B; 2) построивъ на DC уголъ A, отложивъ на другой его сторонѣ $AE=a+c$ и проведя чрезъ E параллельную къ CD, получимъ геом. мѣсто точки E, которое встрѣчаетъ первое геом. мѣсто въ точкѣ F подъ угломъ $\frac{A}{2}$; 3) треуг. EBC долженъ быть равнобедренный. А потому, принявъ F за центръ подобія, опредѣляемъ на геом. мѣстѣ вершины B точку B такую, чтобы $AB=BE=EF$.

Примѣч. переводч.

Пусть PB есть перпендикуляръ на данную прямую, B_1 точка, соотвѣтствующая B, A и A_1 пара другихъ соотвѣтствующихъ точекъ. Изъ равенства



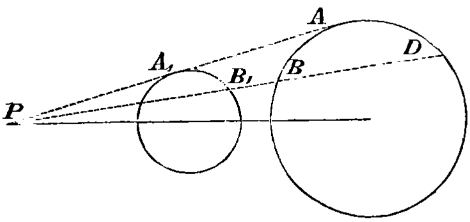
$$PA.PA_1 = PB.PB_1$$

слѣдуетъ, что треугольники BPA и A_1PB_1 подобны; такъ что $\angle PA_1B_1 = \frac{\pi}{2}$. Поэтому геометрическое мѣсто A_1 есть кругъ діаметра PB_1.

Если данная прямая проходитъ чрезъ центръ обратности, то она сама есть своя обратная кривая.

Въ то время какъ A_1 пробѣгаетъ по окружности, A описываетъ прямую, а потому *кривая, обратная круга, проходящаго чрезъ центръ обратности, есть прямая.*

Обратная кривая круга, не проходящаго чрезъ центръ обратности, есть кругъ; центръ обратности есть одинъ изъ центровъ подобія обоихъ круговъ.



Пусть будутъ B и B_1 двѣ соотвѣтствующія точки, D вторая точка пересѣченія круга съ прямой PB; тогда оба произведенія $PB.PB_1$ и $PB.PD$ будутъ постоянныя, а потому и отношеніе $PB_1 : PD$ постоянное. Слѣдовательно, геометрическое мѣсто B_1 получится, если умножимъ геометрическое мѣсто D (данный кругъ) относительно P на это постоянное. Итакъ, искомое геометрическое мѣсто есть кругъ. Если степень обратности равна степени P относительно даннаго круга, то послѣдній есть своя обратная кривая.

Мы доказали, что B и B_1 описываютъ одновременно окружности; изъ этого не слѣдуетъ однакоже, чтобы онѣ проходили одновременно подобныя дуги; напротивъ того, подобныя и подобно расположенныя дуги пробѣгаются точками B_1 и D.

На основаніи вышеизложеннаго можно рѣшить слѣдующую общую задачу.

Чрезъ данную точку P провести прямую такъ, чтобы двѣ данныя кривыя K и K_1, отсѣкали на ней два отрѣзка PX и и PY, имѣющіе данное произведеніе.

Если отбросимъ на время K_1, то геометрическое мѣсто Y будетъ кривая, обратная кривой K, имѣющая центромъ обратности точку P и степенью обратности данное произведеніе; точка Y опредѣляется тогда пересѣченіемъ этой кривой съ K_1. Если данныя кривыя состоятъ изъ прямыхъ и круговыхъ дугъ, то задача рѣшается помощью линейки и циркуля.

192. Чрезъ данную точку P провести прямую, встрѣчающую стороны даннаго угла въ точкахъ A и B такъ, чтобы $PA.PB=a^2$, гдѣ a есть данная длина.

193. Данъ кругъ, одинъ изъ діаметровъ его и точка P; чрезъ P провести прямую, встрѣчающую кругъ въ X и діаметръ въ Y, такъ, чтобы $PX.PY=a^2$.

194. Чрезъ одну изъ точекъ встрѣчи двухъ круговъ провести прямую такъ, чтобы отрѣзанныя на ней обоими кругами хорды имѣли данное произведеніе.

195. Построить треугольникъ ABC, если извѣстны: сторона вписаннаго квадрата, двѣ вершины котораго лежатъ на BC, $\angle A$ и произведеніе отрѣзковъ, на которые AB дѣлится вершиною квадрата.

196. Построить треугольникъ по a, A и $BD.BA$, гдѣ D есть основаніе h_c.

Во многихъ случаяхъ, когда требуется произвести построеніе или дать доказательство, методъ обратности примѣняется съ успѣхомъ, потому что обратныя фигуры часто проще данныхъ. Особеннаго вниманія заслуживаютъ слѣдующія соотношенія, существующія между двумя обратными фигурами:

a) *Если двѣ кривыя пересѣкаются или касаются въ точкѣ A, то ихъ обратныя кривыя пересѣкаются или касаются въ соотвѣтствующей точкѣ A_1.* Дѣйствительно, если A находится одновременно на обѣихъ кривыхъ, то A_1 должна находиться на обѣихъ обратныхъ кривыхъ, и если двѣ точки пересѣченія кривыхъ совпадаютъ въъ A, то и соотвѣтствующія имъ совпадаютъ въ A_1.

Если A совпадаетъ съ центромъ обратности, то теорема не имѣетъ мѣста, потому что центръ обратности соотвѣтствуетъ, вообще говоря, не одной какой-нибудь точкѣ, а безконечно удаленной прямой.

b. *Если двѣ кривыя пересѣкаются въ A подъ нѣкоторымъ угломъ (угломъ между касательными), то и обратныя кривыя пересѣкаются въ A_1 подъ тѣмъ же угломъ* (но съ обратнымъ знакомъ, если уголъ отмѣренъ опредѣленно отъ одной изъ данныхъ кривыхъ до другой).

Легко видѣть, что эта теорема остается въ силѣ (фиг. на стр. 34) и тогда, когда одна кривая есть кругъ, а другая есть прямая, проходящая чрезъ центръ обратности. Она же имѣетъ мѣсто и для двухъ какихъ-либо круговъ, потому что прямая, проведенная чрезъ A къ центру обратности, проходитъ чрезъ A_1. На основаніи этого легко доказать, что теорема справедлива для какихъ-либо кривыхъ, потому что онѣ пересѣкаются въ A подъ тѣмъ же угломъ, какъ и два круга, касающіеся каждый одной изъ кривыхъ въ точкѣ A.

Приложенія.

197. Построить кругъ, проходящій чрезъ данную точку P и касающійся двухъ данныхъ круговъ.

Помощью метода обратности, принимая точку P за центръ обратности, задача приводится къ проведенію общей касательной къ двумъ даннымъ кругамъ. Степень обратности можетъ быть выбрана такъ, чтобы одинъ изъ данныхъ круговъ не измѣнялся.

198. Доказать, что всякій кругъ, проходящій чрезъ точки пересѣченія двухъ данныхъ круговъ, пересѣкаетъ систему круговъ, касающихся данныхъ (въ томъ числѣ и общую касательную), подъ равными углами.

Эта теорема получается помощью метода обратности изъ слѣдующей: всякая сѣкущая, проходящая чрезъ центръ подобія системы подобно расположенныхъ круговъ, пересѣкаетъ ихъ подъ равными углами.

199. Построить кругъ, касающійся трехъ данныхъ круговъ, проходящихъ чрезъ одну и ту же точку.

200. Въ данный кругъ вписать четыреугольникъ такъ, чтобы стороны его проходили соотвѣтственно чрезъ данныя точки.

Пусть стороны AB, BC, CD и DA проходятъ соотвѣтственно чрезъ точки a, b, c и d. Примемъ эти точки за центры обратности, а за степени обратности примемъ соотвѣтственно степень каждой точки относительно круга. Тогда A, послѣ четырехъ послѣдовательныхъ обращеній относительно a, b, c и d, упадетъ снова въ A. Пусть P есть такая точка, которая послѣ трехъ обращеній относительно a, b и c упадетъ въ d; такую точку можно найти, произведя послѣдовательныя обращенія точки d относительно c, b и a. Всякій кругъ, или прямая, проходящій чрезъ P, преобразовывается помощью обращенія относительно a, b и c въ кругъ проходящій чрезъ d и, слѣдовательно, обращеніемъ относительно d переходитъ въ прямую. Поэтому прямая PA переходитъ послѣ четырехъ обращеній въ нѣкоторую прямую P_1A, гдѣ P_1 есть точка, получаемая послѣдовательными обращеніями a относительно b, c и d. А такъ какъ уголъ между PA и кругомъ, послѣ четырехъ обращеній, не мѣняется ни по величинѣ, ни по знаку, такъ же какъ и кругъ, то прямыя PA и P_1A должны составлять одну и ту же прямую. Отсюда такое рѣшеніе предложенной задачи: помощью обращенія a относительно b, c и d опредѣляемъ P_1 и помощью обращенія d относительно c, b и a опредѣляемъ P; прямая PP_1 встрѣчаетъ кругъ въ A.

Это рѣшеніе легко распространяется на всякую фигуру съ четнымъ числомъ сторонъ.

201. Вписать въ кругъ треугольникъ ABC такъ, чтобы каждая сторона его проходила соотвѣтственно чрезъ данныя точки (a, b, c).

Поступаемъ такъ же, какъ и въ предыдущей задачѣ, произведя только три обращенія вмѣсто четырехъ; вслѣдствіе этого прямыя PA и P_1A не образуютъ уже одной прямой, потому что углы, которые онѣ составляютъ съ кругомъ, имѣютъ обратные знаки. Произведемъ обращеніе относительно a, b и c одной изъ точекъ пересѣченія прямой Pa съ кругомъ; пусть полученная точка есть Q. Послѣ обращенія прямыя aP и PA преобразовываются въ прямыя QP_1 и P_1A, которыя составляютъ между собою тотъ же уголъ, что и первыя. Эти углы одного знака (легко видѣть почему, если прослѣдить за обращеніями: прямыя соотвѣтствуютъ другъ другу подвое, но ихъ точки пересѣченія не соотвѣтственны), а потому наши четыре прямыя образуютъ четыреугольникъ, составленный изъ хордъ, такъ что A опредѣляется кругомъ, проходящимъ чрезъ P и P_1, и точкою пересѣченія aP и P_1Q.

Это рѣшеніе распространяется на всякій многоугольникъ съ нечетнымъ числомъ сторонъ*).

Геометрическія мѣста вообще.

Сверхъ указанныхъ выше геометрическихъ мѣстъ существуетъ еще множество другихъ, часто примѣняемыхъ; но отдѣльное изученіе ихъ потребовало бы слишкомъ много времени. А потому во всякой задачѣ, въ которой изложенныя выше геометрическія мѣста не могутъ найти примѣненія, надо стараться отыскать такіе прямыя и круги, которые были бы геометрическими мѣстами точекъ искомой фигуры. Тщательно выполненный чертежъ можетъ служить въ этихъ случаяхъ вспомогательнымъ средствомъ, правда, мало научнымъ, но зато весьма практичнымъ.

Часто встрѣчается и такой пріемъ: если фигуру требуется начертить въ извѣстномъ, опредѣленномъ положеніи, то можно, отбросивъ одно изъ условій, которымъ фигура подвержена, вычертить ее въ положеніи отчасти произвольномъ и привести затѣмъ въ надлежащее положеніе или параллельнымъ передвиженіемъ, или вращеніемъ около нѣкоторой точки. Геометрическія мѣста точекъ фигуры будутъ тогда соотвѣтственно параллельныя прямыя или концентрическіе круги.

Примѣры.

202. Начертить даннымъ радіусомъ кругъ такъ, чтобы центръ его лежалъ на данной прямой и чтобы онъ отъ другой данной прямой отсѣкалъ хорду данной длины.

Начертимъ въ произвольномъ положеніи кругъ такъ, чтобы онъ отрѣзалъ на данной прямой данную хорду; заставляя, затѣмъ, центръ его описать прямую, параллельную данной, приведемъ его въ требуемое положеніе.

---

*) Задачи 200 и 201 въ общемъ видѣ извѣстны подъ именемъ задачи Кастильона (Castillon). *Прим. переводч.*

203. Начертить кругъ даннаго радіуса такъ, чтобы центръ его находился на данной окружности и чтобы онъ пересѣкалъ другой данный кругъ по хордѣ данной длины.

204. Даннымъ радіусомъ описать кругъ, проходящій чрезъ данную точку и пересѣкающій данную прямую по данной хордѣ.

205. Построить треугольникъ, равный данному, такъ, чтобы одна его сторона находилась на данной прямой, а противолежащая ей вершина — на другой данной прямой.

206. Въ данный сегментъ вписать треугольникъ, равный данному.

207. Даннымъ радіусомъ описать кругъ, пересѣкающій двѣ данныя прямыя или два данные круга по даннымъ хордамъ.

208. Провести къ кругу касательную, отъ которой двѣ данныя параллельныя прямыя или два данные концентрическіе круга отсѣкали бы отрѣзокъ данной длины.

209. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы отрѣзокъ ея, заключающійся между двумя данными концентрическими окружностями, былъ виденъ изъ ихъ центра подъ даннымъ угломъ.

210. Даны два круга; опредѣлить такую точку, чтобы касательныя изъ нея къ обоимъ кругамъ заключали данный уголъ и чтобы одна изъ нихъ имѣла данную длину.

Проведемъ касательную данной длины такъ, чтобы она касалась одного изъ круговъ въ произвольной точкѣ и въ концѣ ея построимъ данный уголъ. Затѣмъ вращаемъ второй кругъ вокругъ центра перваго такъ, чтобы онъ касался проведенной второй прямой и, наконецъ, приведемъ его вмѣстѣ съ касательною въ прежнее положеніе.

211. Начертить кругъ, касающійся двухъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ и проходящій чрезъ данную точку.

212. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы данныя двѣ пары параллельныхъ прямыхъ отсѣкали на ней равные отрѣзки.

Прямая должна быть параллельна діагонали параллелограмма, образуемаго двумя парами параллельныхъ.

213. Данными радіусами начертить два круга такъ, чтобы одинъ изъ нихъ пересѣкалъ одну изъ данныхъ прямыхъ по данной хордѣ, другой — другую прямую по другой данной хордѣ;

въ то же время круги должны касаться одинъ другого, и общая касательная въ точкѣ касанія должна имѣть данное направленіе.

214. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, одна сторона котораго дана, такъ, чтобы соотвѣтствующая этой сторонѣ медіана проходила чрезъ данную точку и имѣла данную длину.

215. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, если даны одна сторона его и медіана, соотвѣтствующая одной изъ другихъ сторонъ, и если притомъ точка пересѣченія медіанъ должна находиться на данномъ діаметрѣ.

216. Въ данномъ кругѣ провести хорду данной длины такъ, чтобы даннымъ діаметромъ она раздѣлилась въ данномъ отношеніи.

217. Въ данный четыреугольникъ вписать параллелограммъ, стороны котораго имѣли бы данныя направленія.

Отбросимъ на время одну изъ сторонъ четыреугольника; тогда свободная вершина (т.-е. вершина, долженствующая находиться на отброшенной сторонѣ) параллелограмма опишетъ прямую.

218. Чрезъ данную точку провести прямую, пересѣкающую три данныя прямыя, такъ, чтобы три точки пересѣченія вмѣстѣ съ данною были гармоническія.

Отбросимъ одну изъ данныхъ прямыхъ; тогда свободная точка (т.-е. та, которая должна находиться на отброшенной прямой) опишетъ прямую, проходящую чрезъ точки пересѣченія двухъ другихъ.

219. Построить треугольникъ по w_a, B и разстоянію C отъ w_a.

Начертимъ w_a и чрезъ точку A проведемъ къ ней перпендикуляръ; тогда задача сведется на предыдущую, въ которой одна изъ данныхъ прямыхъ замѣнена дугою, вмѣщающею $\angle A$.

B. Геометрическія мѣста линій.

Прямая, какъ и точка, опредѣляется вполнѣ двумя условіями: какъ и точка, она опредѣляется однимъ условіемъ только отчасти, ибо всегда можно найти такую кривую, которой должны касаться всѣ прямыя, удовлетворяющія этому одному условію. Такую кривую, по аналогіи, можно назвать геометрическимъ мѣстомъ прямыхъ; въ частныхъ случаяхъ она есть точка, такъ что всѣ прямыя, имѣющія требуемое свойство, проходятъ чрезъ нее. За исключеніемъ этого случая мы разсмотримъ здѣсь только тѣ, въ которыхъ наша кривая есть кругъ.

Итакъ, если можно опредѣлить два геометрическія мѣста для линій, то задача сводится на одну изъ слѣдующихъ:

1. Чрезъ двѣ данныя точки провести прямую.

2. Изъ данной точки провести къ кругу касательную. (16).

3. Къ двумъ кругамъ провести общія касательныя. (137).

Приведемъ главнѣйшія геометрическія мѣста линій.

l. *Геометрическое мѣсто всѣхъ равныхъ хордъ одного и того же круга есть кругъ, концентрическій съ даннымъ.*

Проведемъ въ кругѣ хорду данной длины и опишемъ концентрическій кругъ, касающійся этой хорды.

m. *Геометрическое мѣсто линій, разстоянія которыхъ отъ двухъ неподвижныхъ точекъ находятся въ данномъ отношеніи, есть точка, дѣлящая разстояніе между данными точками въ томъ же отношеніи.*

Разстоянія должно брать съ соотвѣтствующими знаками.

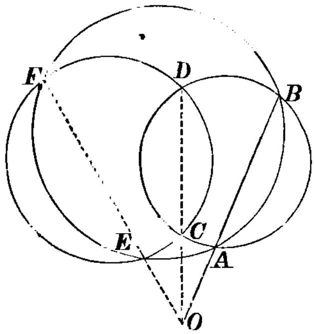
n. *Геометрическое мѣсто линій, разстоянія которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ имѣютъ данную сумму, есть кругъ, центръ котораго находится въ срединѣ прямой, соединяющей данныя точки.*

Если *разность разстояній* равна данной прямой, то геометрическое мѣсто состоитъ изъ двухъ безконечно удаленныхъ точекъ, и линіи образуютъ двѣ системы параллельныхъ, направленіе которыхъ опредѣляется касательными, проведенными изъ одной изъ данныхъ точекъ къ кругу, описанному изъ другой, какъ изъ центра, радіусомъ, равнымъ данной прямой.

Примѣчаніе. Разстоянія взяты со знаками. Если разстояніе отъ одной изъ двухъ точекъ, заранѣе опредѣленной, берется со знакомъ минусъ, то геометрическое мѣсто состоитъ только изъ одной изъ безконечно удаленныхъ точекъ.

o. *Начертимъ въ кругѣ вписанные углы, опирающіеся на одну и ту же дугу и раздѣлимъ каждый изъ угловъ прямыми, проведенными чрезъ ихъ вершины, пополамъ, то геометрическое мѣсто такихъ прямыхъ есть средина данной дуги.*

p. *Проведемъ чрезъ двѣ данныя точки круги, пересѣкающіе данный кругъ (или касающіеся его); геометрическое мѣсто* *общихъ хордъ есть точка, лежащая на прямой, проходящей чрезъ данныя точки.*



Данныя точки пусть будутъ A и B и пусть произвольно чрезъ нихъ проведенный кругъ пересѣкаетъ данный въ C и D. Тогда прямая CD встрѣтитъ AB въ искомомъ геометрическомъ мѣстѣ O, ибо если другой произвольный кругъ, проходящій также чрезъ A и B, встрѣчается съ даннымъ въ точкахъ E и F, то прямыя FE, DC и BA будутъ радикальныя оси трехъ круговъ; а такъ какъ онѣ встрѣчаются въ одной точкѣ, то EF проходитъ чрезъ O.

Примѣры.

220. Чрезъ данную точку провести прямую, которую данный кругъ пересѣкалъ бы по хордѣ данной длины.

Задача сводится помощью I къ 16.

221. Провести прямую, пересѣкаемую двумя данными кругами по даннымъ хордамъ.

222. Провести прямую, пересѣкающую данную прямую въ X и данный кругъ въ Y и Z, такъ, чтобы XY и YZ имѣли данныя длины.

Приводится помощью I къ 11.

223. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, подобный данному, такъ, чтобы одна изъ его сторонъ проходила чрезъ данную точку.

224. Въ данномъ кругѣ провести хорду данной длины и даннаго направленія.

225. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, котораго одна сторона была бы равна и параллельна данной прямой и въ которомъ бисекторъ угла, противолежащаго этой сторонѣ, долженъ проходить чрезъ данную точку.

Одну сторону легко построить (1), тогда будутъ извѣстны двѣ точки бисектора противолежащаго угла.

226. Въ данный кругъ вписать треугольникъ, если извѣстны: направленіе одной изъ его сторонъ, бисекторъ противолежащаго ей угла и точка на бисекторѣ.

Данное направленіе стороны опредѣляетъ средину соотвѣтствующей дуги и вмѣстѣ съ тѣмъ опредѣляется и биссекторъ противолежащаго угла.

227. Чрезъ данную точку провести прямую, разстояніе которой отъ данной точки было бы равно суммѣ разстояній ея отъ двухъ другихъ данныхъ точекъ.

228. На данной окружности даны точки A и B; требуется чрезъ данную точку P провести прямую, пересѣкающую данный кругъ въ точкахъ X и Y, такъ, чтобы AX и BY составляли данный уголъ (220).

229. Данную дугу круга раздѣлить на двѣ части, хорды которыхъ находились бы въ данномъ отношеніи.

Уголъ, образуемый искомыми хордами, дѣлится пополамъ прямою, дѣлящею хорду данной дуги въ данномъ отношеніи и проходящею чрезъ средину дуги, дополняющей данную до полной окружности.

230. Чрезъ данную точку провести прямую, которая проходила бы чрезъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ, на чертежѣ не встрѣчающихся.

Между данными прямыми проведемъ имъ параллельныя, одну изъ нихъ чрезъ данную точку; искомая прямая дѣлитъ послѣднія въ томъ же отношеніи.

231. Построить треугольникъ, если извѣстны части на которыя прямая AD дѣлитъ $\angle A$ и сторону a.

Начертивъ описанный кругъ съ хордою a, будемъ знать двѣ точки AD (о).

232. Построить треугольникъ по h_a, w_a и m_a.

Легко построить прямоугольные треугольники, опредѣляемые тремя данными прямыми; тогда будутъ извѣстны A и прямая, на которой находится a; остается опредѣлить точки B и C. Онѣ получатся, если построимъ кругъ, описанный около искомаго треугольника; дѣйствительно, если продолжимъ w_a и къ срединѣ a возставимъ перпендикуляръ, то эти прямыя должны встрѣтиться въ срединѣ дуги, соотвѣтствующей a. Найдя эту точку, легко начертить кругъ.

233. Провести къ кругу касательную, разстоянія которой отъ двухъ данныхъ точекъ составляли бы данную сумму.

234. Данъ четыреугольникъ $ABCD$; требуется пересѣчь его прямою, которая находилась бы въ равномъ разстояніи отъ A и

C и въ равномъ разстояніи отъ B и D. (Равныя разстоянія, но противоположныя, должны быть взяты съ обратными знаками.)

235. Въ данный кругъ вписать четыреугольникъ $ABCD$, если даны: діагональ AC, уголъ между діагоналями и если притомъ извѣстно, что въ искомый четыреугольникъ можетъ быть вписанъ кругъ.

Проведемъ въ данномъ кругѣ хорду, равную діагонали AC: тогда будетъ извѣстно направленіе BD, а слѣдовательно и средины соотвѣтствующихъ ей дугъ. Затѣмъ проведемъ бисекторы угловъ A и C, которые должны встрѣтиться въ центрѣ круга, вписаннаго въ четыреугольникъ. Бисекторы угловъ B и D должны проходить чрезъ этотъ центръ и средины дугъ, соотвѣтствующихъ AC; построивъ эти прямыя, опредѣлимъ B и C.

12+24 236. Построить квадратъ, стороны котораго должны проходить соотвѣтственно чрезъ четыре точки A, B, C и D.

На AB и CD, какъ на діаметрахъ, опишемъ два круга, которые суть геометрическія мѣста двухъ вершинъ квадрата; такъ какъ діагональ квадрата дѣлитъ его углы пополамъ, то она должна проходить чрезъ средины обѣихъ полуокружностей и, слѣдовательно, можетъ быть непосредственно построена; она опредѣляетъ двѣ вершины квадрата; остальныя опредѣлить легко.

237. Построить четыреугольникъ, подобный данному, такъ, чтобы каждая сторона его проходила чрезъ одну изъ данныхъ четырехъ точекъ.

Эта задача есть нетрудное обобщеніе предыдущей и рѣшается аналогичнымъ образомъ, такъ какъ діагонали четыреугольника дѣлятъ углы его на извѣстныя части.

4772 238. Чрезъ двѣ данныя точки провести кругъ, касающійся даннаго круга.

Проведемъ чрезъ данныя точки A и B произвольный кругъ, пересѣкающій данный; общая хорда этихъ круговъ встрѣчаетъ AB въ точкѣ, которая должна находиться на общей касательной къ искомому и данному кругамъ. Построивъ эту касательную, найдемъ точку касанія обоихъ круговъ, а затѣмъ легко и искомый центръ.

Эту задачу можно выразить еще и такъ:

Данъ кругъ и двѣ точки A и B; на окружности круга опредѣлить точку X такъ, чтобы XA и XB пересѣкали кругъ въ двухъ точкахъ, соединяющая которыя прямая была бы параллельна AB.

239. Чрезъ двѣ данныя точки провести кругъ, пересѣкающій данный кругъ по данной хордѣ.

240. Построить четыреугольникъ, составленный изъ хордъ, если извѣстны CA, BD, $\angle A$ и $\angle ACB$.

Начертивъ BD, опредѣляемъ точку A помощью **е** и **о**.

241. Чрезъ двѣ данныя точки провести кругъ, пересѣкающій данный кругъ, такъ, чтобы общая хорда касалась другого даннаго круга.

242. Чрезъ двѣ данныя точки провести кругъ, пересѣкающій данный кругъ, такъ, чтобы разстоянія общей хорды отъ двухъ данныхъ точекъ находились въ данномъ отношеніи.

243. Построить треугольникъ, равный данному, такъ, чтобы двѣ изъ его сторонъ проходили чрезъ данныя точки и чтобы бисекторъ угла, образуемаго этими сторонами, касался даннаго круга.

244. Даны двѣ параллельныя прямыя и на одной изъ нихъ точка A, на другой точка B; провести чрезъ данную точку P прямую, встрѣчающую параллельныя въ точкахъ X и Y, такъ, чтобы AX и BY имѣли данное отношеніе.

245. Даны кругъ и три точки A, B и C; чрезъ A и B провести двѣ хорды ZX и VY такъ, чтобы XY и ZV проходили чрезъ точку C.

ГЛАВА II.

Преобразованіе фигуръ.

Условія примѣнимости изложенныхъ въ предыдущей главѣ методовъ заключаются въ томъ, чтобы въ вычерчиваемой фигурѣ данные элементы входили въ возможно простыхъ взаимныхъ соотношеніяхъ и, главнымъ образомъ, чтобы они имѣли *достаточно близкое положеніе одинъ отъ другого,* ибо часто, благодаря этому обстоятельству, удается сразу начертить бóльшую часть искомой фигуры, такъ что вся задача сводится на построеніе одной точки или одной линіи. Если упомянутыя условія не имѣютъ мѣста, то нельзя непосредственно примѣнять геометрическія мѣста; въ этихъ случаяхъ слѣдуетъ держаться другого принципа, непосредственно вытекающаго изъ вышеизложеннаго и который послужитъ намъ основаніемъ дальнѣйшаго анализа. Онъ состоитъ въ томъ, что *вмѣсто искомой фигуры строятъ другую, въ которой данные элементы были бы собраны (расположены) такимъ образомъ, что построеніе можетъ быть произведено.* Построивъ такую фигуру, вообще уже легко перейти отъ нея къ искомой; методы, служащіе для такого преобразованія, слѣдующіе:

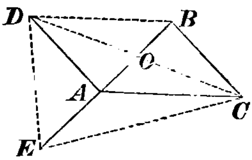
A. *Параллельное передвиженіе,*
B. *Переложеніе* и
C. *Вращеніе.*

A. Параллельное передвиженіе.

Этотъ методъ употребляется, чтобы приблизить одни изъ данныхъ элементовъ къ другимъ, перенося нѣкоторыя линіи фигуры въ новыя положенія, параллельныя первоначальнымъ.

Въ частности этотъ методъ можетъ быть нерѣдко примѣняемъ, когда извѣстны двѣ линіи фигуры и уголъ между ними, такъ какъ, передвинувъ одну изъ линій такъ, чтобы одинъ конецъ ея совпалъ съ концомъ другой, получимъ треугольникъ, который построить легко. Въ многоугольникѣ можно сблизить элементы, перенося стороны параллельно самимъ себѣ такъ, чтобы всѣ онѣ проходили чрезъ одну и ту же точку; эти прямыя могутъ быть начерчены въ такомъ направленіи, чтобы углы, образуемые ими между собою, были равны внѣшнимъ угламъ многоугольника, сумма которыхъ, какъ извѣстно, равна четыремъ прямымъ угламъ. Соединивъ концы этихъ прямыхъ, получимъ новый многоугольникъ, построеніе котораго зачастую гораздо легче построенія первоначальнаго. Слѣдующіе частные случаи объяснятъ сказанное точнѣе.

Треугольникъ. Изъ треугольника ABC передвиженіемъ получается треугольникъ CDE; $AE = AB$ и $DB = AC$. Тогда прямыя, выходящія изъ A, суть стороны первоначальнаго треугольника, а углы при A его внѣшніе углы. Такъ какъ $DC = 2CO$, то стороны новаго треугольника равны удвоеннымъ медіанамъ первоначальнаго, и, обратно, A есть точка встрѣчи медіанъ новаго треугольника. Такъ какъ разстоянія точекъ D и B отъ AC равны, то высоты треугольника ABC равны высотамъ треугольниковъ, имѣющихъ общую вершину въ A. Такъ какъ при параллельномъ передвиженіи углы не мѣняются, то всѣ углы, образуемые между собою сторонами, высотами и медіанами даннаго треугольника, встрѣтятся также и въ новой фигурѣ. По равенству треугольниковъ DAC и ABC, площадь треугольника DEC въ три раза больше площади ABC. Во всѣхъ случаяхъ, когда $\triangle DEC$ или одинъ изъ маленькихъ могутъ быть начерчены, легко перейти отъ нихъ снова къ $\triangle ABC$.



Примѣры.

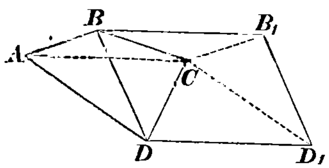
246. По тремъ медіанамъ построить треугольникъ. 1210
Построивъ DEC, опредѣляемъ A и B.

247. Построить треугольникъ по m_c, h_a и h_b.
Начертимъ DOC (35) и проведемъ $OB = OA$.

Построить треугольникъ по

248. h_a, m_a и m_b.
249. h_a, m_b и h_c.
250. h_a, m_b и m_c.
251. A, h_a и m_a.
252. h_a, m_a и $h_c : b$.
253. A, h_a и m_b.
254. m_a, m_c и $\angle(m_b, a)$.
255. m_a, h_a и h_b.
256. h_a, h_b и $\angle(m_a, b)$.
257. h_a, a и $\angle(m_a, c)$.
258. h_a, $b+c$ и $h_b : h_c$.

Четыреугольникъ. Въ четыреугольникѣ можно передвинуть AB и AD въ CB_1 и CD_1; въ образовавшемся такимъ образомъ параллелограммѣ BB_1D_1D содержатся въ простой связи многіе элементы четыреугольника, а именно:



прямыя, выходящія изъ C, суть стороны четыреугольника;

углы, лежащіе вокругъ C, суть углы четыреугольника;

стороны параллелограмма равны діагоналямъ четыреугольника;

углы параллелограмма равны угламъ между діагоналями четыреугольника;

углы между прямыми, выходящими изъ C, и сторонами параллелограмма равны угламъ между діагоналями и сторонами четыреугольника;

площадь параллелограмма вдвое больше площади четыреугольника;

діагонали параллелограмма вдвое больше прямыхъ, соединяющихъ въ четыреугольникѣ средины противолежащихъ сторонъ; въ этомъ легко убѣдиться, разсматривая параллелограммъ, происходящій отъ послѣдовательнаго соединенія срединъ сторонъ четыреугольника.

Итакъ, въ преобразованномъ параллелограммѣ встрѣчаются всѣ элементы, обыкновенно разсматриваемые въ четыреугольникѣ.

Передвиженіе оказывается особенно полезнымъ, когда извѣстны діагонали и углы между ними; въ этихъ случаяхъ параллелограммъ можетъ быть непосредственно построенъ, и задача сводится на опредѣленіе точки C. Для опредѣленія же этой точки имѣются два геометрическія мѣста, какъ только извѣстны два изъ вышепоименованныхъ элементовъ или нѣкоторая зависимость между нѣсколькими изъ нихъ (напр. отношеніе двухъ сторонъ, сумма или разность ихъ квадратовъ и т. д.). Многочисленный отдѣлъ задачъ, которыя рѣшаются этимъ методомъ безъ особеннаго труда, увеличивается еще, если принять во вниманіе, что въ четыреугольникѣ двѣ противолежащія стороны могутъ быть разсматриваемы какъ діагонали, а діагонали — какъ стороны; дѣйствительно, при помощи этого можно рѣшить всѣ соотвѣтствующія задачи, въ которыхъ вмѣсто діагоналей и ихъ угловъ даны двѣ противолежащія стороны и углы между ними.

Чтобы лучше понять этотъ методъ, покажемъ приложеніе его къ нѣкоторымъ задачамъ.

Примѣры.

259. Построить трапецію по четыремъ сторонамъ ея. 12 i 8

Передвинемъ одну изъ непараллельныхъ сторонъ до другой; получимъ треугольникъ, котораго всѣ три стороны извѣстны.

260. Въ кругѣ проведены двѣ хорды AB и CD. Опредѣлить на окружности такую точку X, чтобы прямыя XA и XB отрѣзали отъ хорды CD часть FG, равную данной длинѣ. 55 11

Передвинемъ FG такъ, чтобы F упала въ A; тогда G упадетъ въ точку H, которую опредѣлить легко. Затѣмъ опредѣляемъ точку G помощью е, такъ какъ $\angle G = \angle X$ (какъ вписанные въ одну и ту же дугу AB).

261. Построить четыреугольникъ по четыремъ сторонамъ и прямой EF, соединяющей средины AB и CD. 24 88

Чтобы собрать данные элементы, передвигаемъ BC и AD пока онѣ не примутъ положенія EC_1 и ED_1; тогда C_1, F и D_1 лежатъ на одной прямой, потому что треугольникъ C_1CF и D_1DF равны и расположены подобно. Теперь мы можемъ построить $\triangle C_1ED_1$ (121); затѣмъ опредѣляемъ C и D. Изъ построенія видно, что уголъ между противолежащими сторонами, $\angle C_1ED_1$, не зависитъ отъ длины двухъ другихъ сторонъ.

Построеніе можно произвести также и помощью вышепоказаннаго общаго передвиженія.

262. Чрезъ одну изъ точекъ пересѣченія двухъ круговъ провести прямую такъ, чтобы оба круга отсѣкали на ней хорды, имѣющія данную разность. (Хорды слѣдуетъ взять со знаками, считая отъ точки пересѣченія.)

Проекція линіи центровъ на искомую прямую равна половинѣ данной разности. Если передвинемъ проекцію такъ, чтобы одинъ конецъ ея упалъ въ одинъ изъ центровъ, то она вмѣстѣ съ линіею центровъ образуетъ прямоугольный треугольникъ, который можетъ быть непосредственно построенъ. Искомая прямая будетъ тогда параллельна одной изъ сторонъ его.

Если дана сумма хордъ, то ее можно ввести въ построеніе, умноживъ одинъ изъ круговъ на —1 относительно взятой точки пересѣченія круговъ; подставимъ затѣмъ этотъ новый кругъ на мѣсто даннаго и произведемъ указанное построеніе.

263. Построить прямоугольникъ, одна сторона котораго дана, такъ, чтобы каждая сторона его проходила чрезъ данную точку (262).

264. Въ данномъ треугольникѣ ABC отъ точки X на AB къ точкѣ Y на BC провести прямую такъ, чтобы XY имѣла данную длину и чтобы $AX:CY=p:q$.

Передвинемъ XY въ положеніе AY_1; тогда можно опредѣлить точку Y_1, такъ какъ извѣстны разстояніе ея отъ A и видъ (форма) треугольника Y_1YC.

5510 265. Провести въ данномъ направленіи прямую, встрѣчающую два данные круга, такъ, чтобы образуемыя ею хорды имѣли данную сумму или разность.

Передвигаемъ одинъ изъ круговъ въ данномъ направленіи до тѣхъ поръ, пока онъ не пересѣчетъ другой кругъ по искомой
5513 прямой; въ этомъ положеніи центръ его опредѣляется легко.

266. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы она пересѣкалась двумя данными кругами по равнымъ хордамъ.

Передвигаемъ одинъ изъ круговъ такъ, чтобы равныя хорды совпали; центръ его въ этомъ положеніи опредѣляется тѣмъ, что изъ него данная линія центровъ видна подъ прямымъ угломъ и что разстояніе его отъ данной точки извѣстно; дѣйствительно, касательная, проведенная къ этому кругу изъ данной точки, равна касательной, проведенной изъ той же точки къ неподвижному кругу.

267. Въ двухъ данныхъ кругахъ, центры которыхъ суть A и B, провести два параллельные радіуса AX и BY, которые были бы видны изъ данной точки P подъ равными углами.

Передвинемъ треугольникъ AXP на разстояніе, равное и параллельное линіи центровъ, умножая его въ то же время на отношеніе радіусовъ, такъ что AX и BY совпадутъ. Точка P приметъ тогда новое положеніе P_1, которое легко опредѣлить, такъ какъ BP_1 извѣстна по длинѣ и направленію. Такъ какъ $\angle YP_1B = \angle XPA$, то точки P, P_1, B и Y должны находиться на одной окружности, чѣмъ и опредѣляется Y.

268. Построить параллелограммъ по сторонамъ и углу между діагоналями.

Передвинемъ одну изъ діагоналей такъ, чтобы конецъ ея упалъ въ конецъ другой діагонали; тогда можно построить треугольникъ, потому что діагонали равны его сторонамъ (18).

269. Построить трапецію по діагоналямъ, прямой, соединяющей средины непараллельныхъ сторонъ, и одному изъ угловъ. Такимъ же пріемомъ, какъ и въ предыдущей задачѣ, эта задача сводится на 3.

270. Въ какомъ случаѣ при общемъ передвиженіи четыреугольника точка C упадетъ на одну изъ діагоналей параллелограмма?

Помощью параллельнаго передвиженія можно рѣшить слѣдующую общую, часто встрѣчающуюся задачу:

Между двумя данными кривыми провести прямую, равную и параллельную данной прямой.

Передвинемъ одну кривую на длину, равную и параллельную данной прямой; тогда она должна встрѣтить другую кривую въ точкѣ, чрезъ которую должно провести искомую прямую. Эта задача рѣшается всегда помощью циркуля и линейки, какъ только данныя кривыя состоятъ изъ прямыхъ и круговыхъ дугъ.

271. Провести прямую, равную и параллельную данной, такъ, чтобы она помѣстилась между двумя данными окружностями. 5507

272. Провести въ треугольникѣ сѣкущую данной длины такъ, чтобы она была параллельна одной изъ сторонъ.

273. Въ кругѣ провести хорду, которая была бы равна и параллельна данной прямой.

274. Двѣ извѣстныя точки видны съ корабля подъ даннымъ угломъ; послѣ того какъ корабль подвинулся на данную длину и по данному направленію, тѣ же точки видны подъ другимъ даннымъ угломъ.

Опредѣлить мѣсто корабля.

Проведеніемъ чрезъ данныя точки дугъ, вмѣщающихъ данные углы, задача сводится на 271.

Когда имѣемъ дѣло съ кругами, касающимися другихъ круговъ или прямыхъ, тогда употребляется часто особый родъ параллельнаго передвиженія, а именно: представимъ себѣ, что радіусъ одного круга уменьшается до нуля, такъ что кругъ приводится къ своему центру и въ то же время касающіеся его прямыя и круги участвуютъ въ его движеніи (т.-е. остаются касательными), сохраняя первыя свои направленія, вторые свои центры. Этимъ путемъ удается нерѣдко привести данную задачу къ болѣе простой, въ которой одинъ кругъ замѣняется точкою, а прочія условія остаются тѣ же.

275. Провести къ двумъ кругамъ общія касательныя.

Заставимъ меньшій кругъ уменьшаться до точки такъ, чтобы въ то же время касательныя участвовали въ его движеніи; тогда другой, продолжая быть касательнымъ къ касательнымъ, будетъ имѣть радіусомъ сумму или разность данныхъ радіусовъ, смотря по тому проводятся ли внутреннія или внѣшнія касательныя. Такимъ образомъ задача приводится къ 16.

2509(22) 276. Построить кругъ, касающійся двухъ данныхъ прямыхъ и даннаго круга.

Уменьшеніемъ даннаго круга до его центра приводимъ задачу къ 181. Искомый кругъ можетъ касаться даннаго двоякимъ образомъ, которымъ соотвѣтствуетъ передвиженіе касательныхъ по противоположнымъ направленіямъ.

277. Построить кругъ, касающійся даннаго круга и данной прямой, послѣдней въ данной на ней точкѣ. 2474

278. Построить кругъ, касающійся двухъ данныхъ круговъ и одного изъ нихъ въ данной точкѣ. 1508 (8)

Различные примѣры на параллельное передвиженіе.

279. Построить четыреугольникъ по четыремъ сторонамъ и углу между двумя противолежащими сторонами. 2425

280. Построить четыреугольникъ по діагоналямъ, углу между ними и двумъ противолежащимъ угламъ.

281. Построить трапецію по діагоналямъ, углу между ними и суммѣ или разности двухъ смежныхъ сторонъ.

282. Построить треугольникъ по m_a, $\angle(m_b, m_c)$ и площади.

283. Въ треугольникѣ ABC, прямоугольномъ при B, провести сѣкущую XY данной длины такъ, чтобы $\overline{AX}^2 + \overline{XY}^2 + \overline{YC}^2$ было равно данному квадрату.

Точка Y (см. 264) опредѣляется по **а**.

284. Построить вписываемый четыреугольникъ по діагоналямъ, углу между ними и углу между одною изъ діагоналей и стороною.

285. Построить четыреугольникъ по діагоналямъ, углу между ними, отношенію двухъ смежныхъ сторонъ и углу между двумя другими смежными сторонами.

286. Описать около даннаго треугольника возможно большій равносторонній треугольникъ. 2510 (20)

287. Построить четыреугольникъ по двумъ противолежащимъ угламъ, площади его и обѣимъ прямымъ, соединяющимъ средины двухъ противоположныхъ сторонъ.

Уголъ между двумя данными прямыми опредѣляется этими прямыми и площадью. Затѣмъ примѣняется общее передвиженіе четыреугольника.

288. Построить четыреугольникъ $ABCD$ по AB, CD, $\angle BAC$, $\angle ACD$ и $\angle BDA$.

289. Построить четыреугольникъ по двумъ противолежащимъ сторонамъ и всѣмъ угламъ. 5312 (13)

290. Построить трапецію по діагоналямъ, углу между ними и одной сторонѣ.

2486 291. Построить четыреугольникъ по тремъ сторонамъ и угламъ при четвертой.

292. Построить четыреугольникъ $ABCD$ по AB, CD, AC, $\angle ABD$ и $\angle BDC$.

293. Построить четыреугольникъ по $\angle BCA$, $\angle CAD$, діагоналямъ и углу между ними.

294. Даны: двѣ параллельныя прямыя L и M, третья прямая N и точка P; чрезъ P провести прямую, встрѣчающую данныя соотвѣтственно въ точкахъ A, B и C, такъ, чтобы AB и CP находились въ данномъ отношеніи.

Передвинемъ AB и CP въ положенія A_1Q и QP_1, гдѣ Q есть точка встрѣчи M и N, и опредѣлимъ P_1.

295. Въ треугольникѣ $AXBYC$ провести XY по данному направленію такъ, чтобы AX и YC имѣли данную сумму.

296. Построить трапецію по діагоналямъ и непараллельнымъ сторонамъ (142).

297. Рѣшить задачи 169, если A есть произвольная точка.

298. Построить четыреугольникъ по діагоналямъ, двумъ противолежащимъ сторонамъ и углу между ними.

299. Построить четыреугольникъ по прямой, соединяющей средины двухъ противолежащихъ сторонъ, діагоналямъ, отношенію двухъ противолежащихъ сторонъ и суммѣ квадратовъ двухъ другихъ сторонъ.

Строимъ параллелограммъ, такъ какъ извѣстны его стороны и одна діагональ.

300. Построить четыреугольникъ по четыремъ сторонамъ и прямой, соединяющей средины діагоналей.

Аналогична предыдущей или 261.

301. Построить треугольникъ по двумъ медіанамъ и углу между третьею медіаною и соотвѣтствующею ей стороною.

1229 302. Построить трапецію по параллельнымъ сторонамъ и діагоналямъ.

303. Въ данный кругъ вписать трапецію, зная ея высоту и разность параллельныхъ сторонъ.

304. Построить четыреугольникъ по двумъ противолежащимъ сторонамъ, прямой, дѣлящей двѣ другія стороны въ данномъ отношеніи, углу между послѣдними и ихъ отношенію.

Аналогична 261.

305. Построить трапецію по діагоналямъ, прямой, соединяющей средины діагоналей, и прямой, соединяющей средины двухъ противолежащихъ сторонъ.

306. Вписать въ кругъ трапецію, если извѣстны высота ея и сумма параллельныхъ сторонъ.

Трапецію можно расположить такъ, чтобы произвольно взятый діаметръ раздѣлилъ ее на симметричныя части. Средина одной изъ непараллельныхъ сторонъ должна находиться на извѣстной прямой, параллельной этому діаметру. Теперь можно опредѣлить основаніе высоты, проведенной изъ конца одной изъ непараллельныхъ сторонъ. (271 и 336).

307. На данной прямой AB помѣстить прямую CD данной длины такъ, чтобы C и D раздѣлили AB гармонически.

На AB, какъ на хордѣ, опишемъ произвольный кругъ и проведемъ, предположивъ задачу рѣшенною, изъ точекъ C и D къ срединамъ обѣихъ на AB построенныхъ дугъ прямыя CE и DF. Эти прямыя взаимно перпендикулярны и встрѣчаются на окружности. Передвинемъ CD до EG, тогда FG видна изъ D подъ прямымъ угломъ.

Если M есть средина AB, то намъ будутъ извѣстны произведеніе и разность MC и MD; помощью этихъ данныхъ также легко рѣшить задачу.

308. Даны двѣ точки A и B и между ними двѣ параллельныя прямыя. Между послѣдними провести въ данномъ направленіи прямую MN такъ, чтобы сумма $AM+MN+NB$ была наименьшая.

309. Чрезъ данную точку P провести прямую такъ, чтобы разстоянія ея AX и BY отъ двухъ данныхъ точекъ A и B имѣли данное произведеніе.

Передвинемъ BY до AY_1, тогда геометрическое мѣсто точки Y_1 есть прямая, а геометрическое мѣсто точки X есть кругъ, описанный около AP какъ діаметрѣ; передвинемъ эту послѣднюю на длину AB и мы получимъ тогда прямую и кругъ, которые суть геометрическія мѣста точки Y.

310. Изъ данной точки P приведена прямая PA къ точкѣ A на данной кривой и изъ другой данной точки L проведена прямая LB параллельно PA такъ, что $LB:PA=m:n$. Опредѣлить геометрическое мѣсто точки B.

B. Переложеніе.

Этимъ методомъ, какъ и предыдущимъ, пользуются для того, чтобы придать даннымъ элементамъ положеніе, удобное для построенія. Онъ состоитъ въ томъ, что нѣкоторая часть фигуры приводится въ новое положеніе, съ цѣлью:

1) *Собрать данные элементы вмѣстѣ.*

311. Въ данный кругъ вписать четыреугольникъ $ABCD$, въ которомъ извѣстны величины двухъ противолежащихъ сторонъ AB и CD и отношеніе двухъ другихъ сторонъ.

Переложимъ треугольникъ ABC такъ, чтобы A упала въ C и C упала въ A, тогда B, какъ и раньше, должна находиться на окружности. Этимъ мы достигли того, что данные элементы заняли теперь удобное положеніе, ибо мы знаемъ теперь двѣ смежныя стороны и отношеніе двухъ другихъ; а потому мы можемъ начертить обѣ данныя стороны и затѣмъ опредѣлить четвертую вершину. (229).

Остается только привести треугольникъ ABC въ его первоначальное положеніе.

312. Построить четыреугольникъ $ABCD$, въ который можетъ быть вписанъ кругъ, по AD, AB, $\angle D$ и $\angle B$.

Повернемъ ADC около равнодѣлящей $\angle A$; тогда D и C упадутъ въ D_1 и C_1, а D_1C_1 останется касательною. Теперь мы можемъ построить треугольникъ, котораго одна сторона есть BD_1, потому что извѣстны эта сторона и прилежащіе къ ней два угла. Затѣмъ уже не трудно провести кругъ, такъ какъ онъ долженъ касаться трехъ сторонъ этого треугольника.

2) *Ввести данные элементы въ построеніе фигуры.*

313. Построить треугольникъ по a, b и $A - B$.

Переложимъ треугольникъ такъ, чтобы A упала въ B и B упала въ A; тогда можно построить треугольникъ, котораго стороны суть a и b, а уголъ между ними есть $A - B$.

314. Построить треугольникъ по a, h_a и $B - C$.

Введемъ въ построеніе $B - C$, переложивъ треугольникъ такъ, чтобы B совмѣстилась съ C, C съ B и A съ нѣкоторою точкою A_1. Теперь мы можемъ начертить параллелограммъ, одна діагональ котораго есть AA_1 и третья вершина есть B, потому что проходящая чрезъ B діагональ видна изъ A подъ извѣстнымъ угломъ.

315. Построить треугольникъ по $b.c$, m_a и $B-C$.

Переложеніемъ треугольника въ положеніе BA_1C, извѣстная площадь треугольника A_1BA сдѣлается равною площади равнобедреннаго треугольника, боковыя стороны котораго суть m_a.

3) *Совмѣстить равныя линіи или углы.*

Этимъ пріемомъ пользуются чаще всего, когда равновеликіе элементы неизвѣстны, и тогда методъ служитъ нѣкоторымъ образомъ для ихъ исключенія. Къ этому же пріему прибѣгаютъ въ тѣхъ случаяхъ, когда извѣстно отношеніе двухъ неравныхъ линій; тогда, чтобы совмѣстить одну съ другою, увеличиваютъ одну часть фигуры въ данномъ отношеніи, производя въ то же время надъ ней переложеніе.

316. Построить вписываемый четыреугольникъ $ABCD$ по его сторонамъ.

Умноживъ стороны треугольника ABC на $AD:AB$, переложимъ его въ положеніе ADC_1, въ которомъ DC_1 и DC образуютъ одну прямую. Теперь можно построить треугольникъ CAC_1, такъ какъ извѣстны отношенія $CA : C_1A$ и CD, DC_1 и DA.

317. Вписать въ кругъ треугольникъ, если извѣстны средины трехъ дугъ, стягиваемыхъ сторонами.

Пусть ABC есть искомый треугольникъ, γ — средина AB, β — средина AC и α — средина BC. Повернемъ A около діаметра, проходящаго чрезъ γ, затѣмъ послѣдовательно около діаметровъ, проходящихъ чрезъ α и β; точка A упадетъ тогда въ ту же точку A, между тѣмъ какъ какая-нибудь другая точка окружности, находящаяся въ извѣстномъ разстояніи отъ A, послѣ такой же операціи будетъ находиться хотя и въ томъ же разстояніи отъ A, но только съ противоположной стороны. Такимъ образомъ, можно опредѣлить A, начавъ упомянутое переложеніе съ произвольной точки, ибо A должна находиться въ срединѣ обоихъ положеній этой произвольной точки.

Эту задачу можно распространить на n-угольникъ и легко видѣть, что она будетъ неопредѣленная или невозможная для четнаго n и опредѣленная для n нечетнаго.

318. Дана прямая и на ней точка A; чрезъ центръ O даннаго круга провести прямую, встрѣчающую окружность въ Y и данную прямую въ X, такъ, чтобы XY и XA находились въ данномъ отношеніи.

Приведемъ XY, увеличивая ее, въ положеніе совмѣстимости съ XA; тогда O упадетъ въ извѣстную точку O_1 и AY будетъ параллельна O_1O.

319. Построить четыреугольникъ $ABCD$ по AB, AD, $\angle B$, $\angle D$ и отношенію $BC : CD$.

Примѣняемъ то же переложеніе, что и въ 316.

4) *Образовать симметричную фигуру такъ, чтобы искомая точка находилась на оси симметріи.*

320. На данной прямой опредѣлить точку, которая находилась бы въ равныхъ разстояніяхъ отъ данной точки на той же прямой и отъ другой данной прямой.

Въ данной точкѣ возставимъ перпендикуляръ и раздѣлимъ уголъ между послѣднимъ и другою данною прямою пополамъ.

321. Построить кругъ, касающійся данной прямой въ данной точкѣ и пересѣкающей данный кругъ подъ даннымъ угломъ.

Переложимъ данный кругъ такъ, чтобы онъ пересѣкалъ данную прямую въ данной точкѣ подъ даннымъ угломъ; тогда ось симметріи должна проходить чрезъ центръ искомаго круга.

5) *Привести нѣкоторую часть фигуры въ такое положеніе, чтобы двѣ неизвѣстныя точки совпали, въ то время какъ двѣ прямыя, проходящія чрезъ эти точки, образовали между собою извѣстный уголъ и каждая изъ нихъ содержала бы по извѣстной точкѣ.* Тогда можно построить кругъ, проходящій чрезъ точку пересѣченія обѣихъ прямыхъ.

322. Даны два круга и на окружности одного изъ нихъ двѣ точки A и B; найти на этой окружности точку X такую, что если AX и BX встрѣчаютъ другой кругъ соотвѣтственно въ точкахъ M и N, хорда MN имѣла бы данную длину.

Если O есть центръ второго круга, то $\angle MON$ извѣстенъ: повернувъ MA на этотъ уголъ около O, точка M упадетъ въ N и A упадетъ въ извѣстную точку A_1. Такъ какъ MA и NB образуютъ между собою извѣстный уголъ, то будетъ извѣстенъ уголъ BNA_1 и тогда опредѣлится точка N.

Различные примѣры на переложеніе.

323. Въ данный кругъ вписать четыреугольникъ, когда извѣстны двѣ противолежащія стороны и сумма двухъ другихъ сторонъ.

324. Построить треугольникъ по A, h_a и m_a.

Переложимъ треугольникъ такъ, чтобы B упала въ C и C въ B, а A упала въ A_1 съ противоположной стороны. Теперь можно построить AA_1 и опредѣлить затѣмъ B.

325. Около круга описать треугольникъ такъ, чтобы его три вершины лежали на трехъ данныхъ прямыхъ, проходящихъ чрезъ центръ.

Аналогична съ 317.

326. Построить ромбъ такъ, чтобы двѣ его стороны лежали на данныхъ параллельныхъ прямыхъ, а двѣ другія проходили соотвѣтственно чрезъ точки A и B.

Переложимъ ромбъ такъ, чтобы двѣ другія его стороны легли на данныя параллельныя, тогда AB займетъ новое положеніе, направленіе котораго извѣстно; уголъ между этимъ направленіемъ и AB опредѣляетъ уголъ ромба.

327. Построить треугольникъ, если даны: основаніе, разность угловъ при основаніи и извѣстно, что вершина должна лежать на данной прямой.

Переложимъ треугольникъ какъ въ 313 и примѣнимъ методъ подобія.

328. Въ треугольникѣ проведена прямая отъ вершины до данной точки основанія; опредѣлить на этой прямой точку, изъ которой отрѣзки основанія были бы видны подъ равными углами.

329. Въ треугольникѣ ABC сторона AC раздѣлена на отрѣзки AD и DC; найти на AB точку X, изъ которой AD и DC были бы видны подъ равными углами

Можно на AB опредѣлить точку, симметричную съ C, принявъ DX за ось симметріи.

330. Чрезъ вершину B треугольника провести такую прямую, чтобы опущенные на нее перпендикуляры AP и CQ образовали два треугольника ABP и CBQ, площади которыхъ имѣли бы данное отношеніе.

Приведемъ ABP, измѣняя въ то же время его величину, въ положеніе CBP_1 и около BC, какъ діаметрѣ, опишемъ кругъ; тогда хорда P_1Q имѣетъ извѣстную длину и дѣлится прямою BC въ извѣстномъ отношеніи.

331. Построить треугольникъ по m_a, b^2-c^2 и $\angle(a, m_a)$.

332. По четыремъ сторонамъ построить четыреугольникъ такъ, чтобы одна изъ діагоналей дѣлила одинъ изъ угловъ четыреугольника пополамъ.

333. Даны два круга съ центрами въ A и B; построить кругъ, проходящій чрезъ A и B и пересѣкающій данные круги соотвѣтственно въ точкахъ X и Y (по разныя стороны прямой AB), такъ, чтобы сумма угловъ ABY и BAX равнялась данному углу.

Приведемъ треугольникъ ABY въ положеніе BAY_1 такъ, чтобы $\angle XAY_1$ былъ равенъ данному.

334. Построить треугольникъ по A, ρ и $c-b$.

Пусть O есть центръ вписаннаго круга; тогда въ треугольникѣ BOC извѣстны три элемента, а именно: $\angle O$, высота OF и разстояніе точки F отъ средины BC.

335. Построить треугольникъ по ρ, $c-b$ и $C-B$.

Начертимъ тотъ же треугольникъ, какъ и въ предыдущей задачѣ.

Вращеніе около оси

есть частный случай переложенія; но оно примѣняется такъ часто, что заслуживаетъ особеннаго вниманія. Этимъ пріемомъ стараются достигнуть тѣхъ же выгодъ, какъ и помощью переложенія; онъ состоитъ въ томъ, что вращаютъ нѣкоторую часть фигуры около нѣкоторой прямой такъ, чтобы оба положенія ея (первоначальное и послѣ вращенія) были симметричны относительно этой прямой.

Такимъ пріемомъ можно легко рѣшить, напримѣръ, слѣдующую общую задачу:

336. *Провести прямую перпендикулярно къ данной прямой такъ, чтобы двѣ данныя кривыя отсѣкали на ней равные отрѣзки.*

Принявъ данную прямую за ось, вращаемъ около нея одну изъ кривыхъ, которая пересѣчетъ тогда другую кривую въ искомыхъ точкахъ.

337. Построить квадратъ такъ, чтобы двѣ противолежащія вершины упали на данную прямую, а двѣ другія на двѣ данныя окружности (336).

338. На данной прямой опредѣлить точку X такъ, чтобы прямыя, соединяющія ее съ двумя данными точками A и B,

лежащими по одну сторону данной прямой, образовали съ послѣднею равные углы.

Вращаемъ одну изъ данныхъ точекъ A около данной прямой такъ, чтобы она пришла въ положеніе A_1; тогда BXA_1 есть прямая.

Примѣчаніе. Эта задача встрѣчается часто въ природѣ, ибо упругое тѣло, ударяющееся въ плоскость, лучъ свѣта, встрѣчающій зеркало, волна, ударяющаяся въ плоскость, и т. д. отражаются такъ, что уголъ отраженія равенъ углу паденія. Представимъ себѣ, напримѣръ, что A есть свѣтящаяся точка, а данная прямая — разрѣзъ зеркала; задача состоитъ тогда въ томъ, чтобы найти путь, по которому лучъ долженъ падать, чтобы послѣ отраженія встрѣтить B. Такъ какъ весь путь, пройденный лучомъ, равенъ прямой BA_1, между тѣмъ какъ для всякой другой точки, напримѣръ X, онъ былъ бы равенъ ломаной между тѣми же точками, то ясно, что *лучъ свѣта описываетъ свою траэкторію кратчайшимъ путемъ.*

Если бы лучъ свѣта падалъ не въ точку X, а въ другую, то онъ все-таки былъ бы отраженъ такъ, какъ будто онъ выходитъ изъ A_1; такъ что въ такихъ задачахъ можно себѣ представить, что прямая не существуетъ, если замѣнить точку A точкою A_1.

339. На бильярдѣ, имѣющемъ форму n-угольника, стоятъ два шара M и N; ударить шаромъ M въ сторону AB такъ, чтобы онъ отразился къ сторонѣ BC и, коснувшись затѣмъ по порядку остальныхъ сторонъ, ударилъ бы шаръ N.

Вращеніемъ около AB приведемъ M въ положеніе M_1 и, замѣнивъ первую точку второю, представимъ себѣ AB какъ не существующую; продолжаемъ такимъ образомъ до тѣхъ поръ, пока не приведемъ нашу задачу къ предыдущей. Такимъ путемъ опредѣляемъ прежде всего искомую точку на послѣдней сторовѣ и по этой точкѣ легко находимъ остальныя. Если одна изъ послѣдовательно получаемыхъ точекъ упадетъ на продолженіе соотвѣтствующей стороны, то задача невозможна.

340. Въ данный многоугольникъ вписать другой многоугольникъ, который имѣлъ бы наименьшій периметръ.

Двѣ смежныя стороны искомаго многоугольника должны образовать равные углу съ тою стороною даннаго, на которой находится точка ихъ пересѣченія; въ противномъ случаѣ искомый периметръ не былъ бы наименьшимъ, ибо, давъ тогда точкѣ пересѣченія надлежащее положеніе, онъ могъ бы быть уменьшенъ.

Такимъ образомъ, мы видимъ, что наша задача сходственна съ предыдущей и рѣшается аналогичнымъ путемъ.

Можно начать рѣшеніе съ искомой точки на одной изъ сторонъ; но такъ какъ намъ неизвѣстно положеніе точки на ней, то вращаемъ всю сторону послѣдовательно около остальныхъ. Такимъ образомъ, всѣ стороны искомой фигуры расположатся одна за другою въ одну прямую, которая равна ихъ суммѣ и крайніе отрѣзки которой суть именно тѣ стороны искомаго многоугольника, которыя встрѣчаются на той сторонѣ даннаго, съ которой мы начали вращеніе. Такъ какъ одна изъ нихъ перемѣщалась во все время вращенія вмѣстѣ со вращаемою, то уголъ между ними не измѣнился, а потому задача приводится къ слѣдующей:

Между двумя прямыми равной длины провести третью такъ, чтобы она образовала съ данными равные углы и отсѣкала бы отъ нихъ равные отрѣзки, считая послѣдніе отъ опредѣленной конечной точки прямыхъ.

Когда равные углы суть углы на-крестъ лежащіе, то задача очевидно неопредѣленная въ случаѣ параллельности прямыхъ и невозможная въ случаѣ ихъ непараллельности. Этотъ случай представляется, когда число сторонъ даннаго многоугольника четное; напротивъ того, когда число сторонъ нечетное, задача всегда возможна, если къ числу вписанныхъ многоугольниковъ будемъ причислять и такіе, вершины которыхъ приходятся на продолженіи сторонъ даннаго многоугольника.

341. Построить многоугольникъ, когда извѣстны по положенію перпендикуляры, возставленные изъ срединъ сторонъ.

Пусть A есть одна изъ искомыхъ вершинъ, B произвольная точка; вслѣдствіе вращенія прямой AB послѣдовательно около каждаго перпендикуляра, A упадетъ въ свое первоначальное положеніе A, тогда какъ B займетъ новое положеніе B_1; и такъ какъ всякая линія сохраняетъ во все время вращенія свою длину, то должно быть $BA = B_1A$. На основаніи этого легко рѣшить задачу: взявъ произвольную точку B, опредѣляемъ B_1; тогда A должна находиться на перпендикулярѣ, возставленномъ изъ средины BB_1. Взявъ такимъ же образомъ другую произвольную точку, опредѣлимъ A вполнѣ. Изслѣдованіе схоже съ изслѣдованіемъ въ 340.

342. Построить многоугольникъ, когда извѣстны по положенію бисекторы угловъ.

Рѣшеніе такое же, какъ и предыдущее.

343. Къ двумъ даннымъ кругамъ провести касательныя, встрѣчающіяся на данной прямой и образующія съ нею равные углы.

Аналогична съ 338 и приводится къ 137.

344. На данной прямой опредѣлить точку X, разстоянія которой отъ двухъ данныхъ точекъ A и B составляли бы данную сумму. 5089

Введемъ въ построеніе данную сумму, продолживъ AX до B_1 такъ, чтобы $XB_1 = XB$; точка X будетъ тогда центръ круга, проходящаго чрезъ данную точку B и касающагося извѣстнаго круга, котораго радіусъ есть AB_1, а центръ точка A. Принимая во вниманіе, что искомый кругъ долженъ проходить въ то же время чрезъ точку, получаемую отъ вращенія B около данной прямой, приведемъ задачу къ 238.

345. Опредѣлить на данной прямой такую точку, чтобы разность разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ была равна данной длинѣ.

Рѣшеніе подобно рѣшенію предыдущей задачи.

Примѣчаніе. Послѣднія двѣ задачи могутъ быть выражены еще и такъ:

Найти точки пересѣченія данной прямой съ коническимъ сѣченіемъ, въ которомъ даны главная ось и фокусы. Слѣдовательно, эта задача можетъ быть всегда рѣшена помощью циркуля и линейки; но если вмѣсто данной прямой взять какой-нибудь кругъ, то рѣшеніе задачи циркулемъ и линейкою уже невозможно.

346. Въ треугольникѣ ABC прямая AD дѣлитъ уголъ A пополамъ; найти на ней такую точку M, чтобы разность угловъ DMC и DMB была наибольшая.

Вращеніемъ AB около бисектора задача сводится на 185.

347. Два круга проходятъ соотвѣтственно чрезъ точки A и B; найти на ихъ радикальной оси такую точку P, чтобы прямая,

соединяющая двѣ точки (Q и R), въ которыхъ PA и PB пересѣкаютъ круги во второй разъ, была перпендикулярна къ радикальной оси.

Вращаемъ кругъ, проходящій чрезъ A около радикальной оси; тогда A упадетъ въ A_1, Q въ Q_1. Такъ какъ около четыреугольниковъ $QABR$ и Q_1A_1BR могутъ быть описаны круги, то кругъ AA_1B проходитъ чрезъ P.

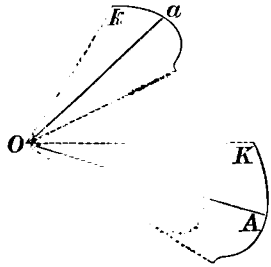
5041 348. Дана прямая PQ и по одну сторону ея двѣ точки A и B; опредѣлить на данной прямой точку X такъ, чтобы $\angle BXQ = 2\angle AXP$.

Вращеніемъ AX около PQ приводимъ первую въ положеніе A_1X и опредѣляемъ проекцію точки B на A_1X.

ГЛАВА III.

Теорія вращенія.

1. Если изъ данной точки O проведемъ прямыя къ точкамъ на данной кривой k и повернемъ эти прямыя около точки O на уголъ v, увеличивая ихъ въ то же время въ данномъ отношеніи f, то геометрическое мѣсто концовъ, такимъ образомъ перемѣщенныхъ и увеличенныхъ прямыхъ есть новая кривая K. Послѣдняя должна быть подобна данной, ибо происхожденіе ея мы можемъ представить себѣ еще и такъ: произведемъ, во-первыхъ, одно только вращеніе данной кривой; отъ этого измѣнится только ея положеніе; во-вторыхъ, умножимъ ее затѣмъ на f относительно точки O. Всякая точка a кривой k вращеніемъ своимъ опредѣляетъ точку A кривой K; такія двѣ точки называются соотвѣтственными (гомологическими). Соотвѣтственными прямыми называются прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки, а соотвѣтственными углами — углы, составленные соотвѣтственными прямыми. Назовемъ точку O центромъ вращенія, v — угломъ вращенія и f — отношеніемъ вращенія. Для всякихъ двухъ соотвѣтственныхъ точекъ A и a треугольникъ AOa сохраняетъ свой видъ (форму), потому что $\angle aOA = v$ и $\frac{AO}{aO} = f$ суть величины постоянныя. Поэтому, мы можемъ сказать, что кривая K описана одною изъ вершинъ треугольника AOa, который, сохраняя свой видъ, вращается около другой своей вершины O въ то время какъ третья вершина пробѣгаетъ по данной кривой k. Будемъ называть умноженіемъ кривой на f_v



относительно точки O, вращеніе ея вокругъ O, при углѣ вращенія, равномъ v, и отношеніи вращенія, равномъ f.

2. Всякая точка на плоскости можетъ быть разсматриваема какъ принадлежащая какой-нибудь системѣ, а потому она имѣетъ свою соотвѣтственную точку въ другой системѣ. Разсматривая съ этой точки зрѣнія центръ вращенія, мы замѣтимъ, что онъ есть своя собственная гомологическая точка, т.-е. точка, сама себѣ соотвѣтствующая, и въ силу этого свойства онъ можетъ быть названъ двойною точкою системъ. Мы можемъ себѣ также представить, что вся плоскость вращается около O такъ, что одна изъ ея точекъ пробѣгаетъ по данной кривой, и если при этомъ вся система точекъ плоскости сохраняетъ во время движенія свою форму, то и всякая другая точка опишетъ кривую, подобную данной.

3. Какъ только извѣстны центръ, уголъ и отношеніе вращенія, можно вращать всякую систему, состоящую изъ прямыхъ и круговыхъ дугъ, употребляя только линейку и циркуль. Такъ, точку a вращаемъ около O, принявъ уголъ aOA за уголъ вращенія и дѣлая $OA = f.Oa$. Для вращенія прямой производимъ вращеніе одной изъ ея точекъ, проведемъ затѣмъ чрезъ вновь полученную точку (соотвѣтственную первоначальной) прямую такъ, чтобы уголъ между послѣднею и радіусомъ-векторомъ, соединяющимъ эту точку съ центромъ вращенія, былъ равенъ углу между данною прямою и радіусомъ-векторомъ, идущимъ отъ центра къ первоначальной точкѣ. Для вращенія круга достаточно произвести вращеніе его центра и одной изъ точекъ окружности.

4. На основаніи вышеизложеннаго можно рѣшить слѣдующую общую задачу:

Помѣстить треугольникъ, подобный данному, такъ, чтобы одна изъ его вершинъ упала въ данную точку, а двѣ другія лежали бы на двухъ данныхъ кривыхъ.

Принявъ данную точку за центръ вращенія, произведемъ вращеніе одной изъ кривыхъ такъ, чтобы уголъ вращенія былъ равенъ тому углу треугольника, вершина котораго должна находиться въ данной точкѣ O, и чтобы отношеніе вращенія было равно отношенію сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ. Полученная такимъ образомъ новая кривая пересѣчетъ другую данную въ точкахъ, на которыя должна упасть вторая вершина треугольника; третья вершина получится, если построимъ при O данный уголъ.

Если вмѣсто формы треугольника намъ извѣстны его уголъ, вершина котораго должна лежать въ данной точкѣ, и произведеніе сторонъ, заключающихъ этотъ уголъ, то задача рѣшается подобнымъ же образомъ съ тѣмъ только различіемъ, что вмѣсто вращенія кривой, подобной одной изъ данныхъ, производимъ вращеніе ея обратной кривой.

Примѣры.

349. Начертить равносторонній треугольникъ такъ, чтобы вершины его находились на трехъ данныхъ параллельныхъ прямыхъ. 6009 (6)

Одну изъ вершинъ помѣщаемъ въ произвольную точку на одной изъ прямыхъ; эта точка будетъ центромъ вращенія; $v = 60^0$, $f = 1$.

350. Помѣстить равносторонній треугольникъ такъ, чтобы вершины его лежали на трехъ данныхъ концентрическихъ окружностяхъ. 6020

351. Въ параллелограммъ вписать равнобедренный треугольникъ съ однимъ даннымъ угломъ такъ, чтобы вершина его находилась въ одной изъ вершинъ параллелограмма. 6122 (16)

352. Въ данный треугольникъ вписать другой, подобный нѣкоторому данному, такъ, чтобы одна изъ вершинъ его упала въ данную точку на одной изъ сторонъ перваго.

353. Въ данный круговой сегментъ вписать треугольникъ, подобный данному, такъ, чтобы одна изъ его вершинъ упала въ данную точку на хордѣ.

354. Провести въ данномъ кругѣ хорду, длина которой находилась бы въ данныхъ отношеніяхъ къ разстояніямъ концовъ ея отъ данной точки.

355. Въ параллелограммъ вписать прямоугольникъ, если данъ уголъ между діагоналями послѣдняго. 6013

Средины обоихъ четыреугольниковъ должны совпасть.

356. Въ параллелограммъ вписать ромбъ, если извѣстно отношеніе діагоналей послѣдняго.

357. Вписать въ квадратъ равносторонній треугольникъ.

358. Данъ кругъ и двѣ точки A и B; провести касательную такъ, чтобы разстояніе ея отъ A и разстояніе опущеннаго на нее изъ B перпендикуляра отъ той же точки A находились въ данномъ отношеніи.

Вращеніемъ около A приведемъ B на касательную.

359. Въ данный параллелограммъ вписать ромбъ данной площади.

360. Даны двѣ точки A и B и двѣ прямыя, встрѣчающіяся въ C; провести чрезъ A и B двѣ прямыя, заключающія данный уголъ и встрѣчающія данныя прямыя соотвѣтственно въ X и Y, такъ, чтобы AX и BY находились въ данномъ отношеніи.

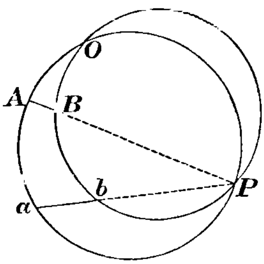
Параллельнымъ передвиженіемъ приведемъ AX и BY въ положенія A_1C и B_1C.

361. Построить треугольникъ по h_a, $B—C$ и $b.c$.

362. Чрезъ данную точку A провести два круга, пересѣкающіеся подъ угломъ v; дано отношеніе ихъ радіусовъ, равное f, и извѣстно, что каждый изъ круговъ долженъ касаться соотвѣтственно одной изъ данныхъ прямыхъ.

Умноженіемъ одной изъ данныхъ прямыхъ на f_v относительно A задача приводится къ 181.

5. Даны двѣ подобныя фигуры; если элементы въ каждой изъ нихъ слѣдуютъ въ одномъ и томъ же круговомъ порядкѣ (въ послѣдующемъ будемъ всегда предполагать, что это обстоятельство имѣетъ мѣсто въ подобныхъ фигурахъ), то такія фигуры имѣютъ всегда центръ вращенія, т.-е. такую точку, около которой можно вращать одну изъ фигуръ такъ, чтобы она покрыла другую. Отношеніе вращенія при этомъ извѣстно, такъ какъ оно равно отношенію двухъ какихъ-нибудь соотвѣтственныхъ линій; также извѣстенъ и уголъ вращенія, ибо онъ равенъ углу между двумя произвольными, соотвѣтственными линіями. Чтобы опредѣлить центръ вращенія можно бы воспользоваться извѣстнымъ отношеніемъ разстояній его отъ пары соотвѣтственныхъ точекъ, но мы предпочитаемъ слѣдующее болѣе простое построеніе. Пусть A и a, B и b будутъ двѣ пары соотвѣтственныхъ точекъ; тогда уголъ между соотвѣтственными прямыми AB и ab есть



уголъ вращенія; но уголъ вращенія есть также уголъ, образуемый прямыми, соединяющими двѣ соотвѣтственныя точки съ центромъ вращенія; а потому *центръ вращенія находится на той же окружности, на которой лежатъ точка пересѣченія двухъ соотвѣтственныхъ линій и двѣ соотвѣтственныя точки на нихъ.*

Центръ вращенія двухъ соотвѣтственныхъ линій въ двухъ подобныхъ фигурахъ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и центръ вращенія самихъ фигуръ, ибо если вращать одну изъ линій такъ, чтобы она покрыла другую, то одна изъ фигуръ необходимо покроетъ другую.

Центръ вращенія двухъ безконечныхъ прямыхъ, разсматриваемыхъ какъ подобныя фигуры, есть совершенно неопредѣленная точка; если приме́мъ на прямыхъ двѣ точки за соотвѣтственныя, то получимъ кругъ, какъ геометрическое мѣсто центра вращенія; если даны еще двѣ соотвѣтственныя точки или, что все равно, дано отношеніе вращенія, тогда центръ вращенія будетъ вполнѣ опредѣленъ, и въ этомъ случаѣ существуетъ только одинъ центръ вращенія, потому что круги встрѣчаются во второй разъ въ точкѣ пересѣченія прямыхъ.

Для двухъ круговъ центръ вращенія неопредѣленный, потому что всякія двѣ изъ точекъ окружностей могутъ быть разсматриваемы какъ соотвѣтственныя, и такъ какъ разстоянія центра вращенія отъ центровъ круговъ пропорціональны ихъ радіусамъ, то геометрическое мѣсто центра вращенія есть кругъ, дѣлящій линію центровъ гармонически въ отношеніи, равномъ отношенію радіусовъ (это есть кругъ, проходящій чрезъ центръ подобія данныхъ круговъ и имѣющій свой центръ на линіи центровъ данныхъ). Если же выберемъ двѣ точки окружностей за соотвѣтственныя, то центръ вращенія будетъ опредѣленный и найдется легче всего помощью двухъ соотвѣтственныхъ радіусовъ, — соотвѣтственныхъ потому, что центры суть всегда гомологическія точки.

6. *Центръ вращенія двухъ противолежащихъ сторонъ четыреугольника есть также центръ вращенія двухъ другихъ его сторонъ.*

Пусть O есть центръ вращенія для BA и CD; тогда $\triangle AOB \infty \triangle DOC$, и легко показать, что $\triangle AOD \infty \triangle BOC$; откуда слѣдуетъ, что O есть центръ вращенія для AD и BC.

Въ первомъ случаѣ соотвѣтственныя точки суть B и C, A и D, а во второмъ — B и A, C и D.

Такимъ же образомъ увидимъ, что центръ вращенія для AB и CD есть также центръ вращенія для AC и BD.

Продолжимъ противолежащія стороны до встрѣчи; тогда круги, которыми опредѣляется центръ вращенія, будутъ круги описанные около четырехъ треугольниковъ, образовавшихся въ фигурѣ. Этими же кругами слѣдуетъ воспользоваться для опредѣленія центра вращенія двухъ какихъ-нибудь отрѣзковъ четыреугольника, не встрѣчающихся въ его вершинахъ; отсюда такая теорема:

Въ полномъ четыреугольникѣ круги, описанные около четырехъ треугольниковъ, получаемыхъ послѣдовательнымъ отбрасываніемъ одной изъ его сторонъ, проходятъ всѣ чрезъ одну точку, которая есть центръ вращенія двухъ какихъ-нибудь отрѣзковъ четыреугольника, не встрѣчающихся въ его вершинахъ.

7. *Если раздѣлить въ одномъ и томъ же отношеніи прямыя, соединяющія соотвѣтственныя точки подобныхъ кривыхъ, то геометрическое мѣсто точекъ дѣленія есть кривая, подобная даннымъ, и двѣ какія-нибудь изъ такихъ кривыхъ имѣютъ тотъ же центръ вращенія, что и данныя.*

Пусть A и a соотвѣтственныя точки и пусть прямая Aa въ точкѣ P дѣлится въ данномъ отношеніи. Если O есть центръ вращенія, то видъ треугольника AOa долженъ быть постоянный; то же относится и къ треугольнику AOP и, слѣдовательно, точка P опишетъ кривую, подобную даннымъ, когда треугольникъ вращается около O.

Слѣдствіе. Если проведемъ въ четыреугольникѣ системы линій, дѣлящихъ каждую пару противолежащихъ сторонъ въ одномъ и томъ же отношеніи, то всѣ линіи одной и той же системы раздѣлятся сами въ томъ же отношеніи.

Приложенія.

363. Даны двѣ прямыя и на каждой изъ нихъ дана точка, A и B; дана еще точка P. Провести чрезъ P прямую, встрѣчающую данныя прямыя въ X и Y такъ, чтобы отрѣзки AX и BY находились въ данномъ отношеніи.

Принявъ A и B, X и Y за соотвѣтственныя точки, опредѣлимъ центръ вращенія O данныхъ прямыхъ; тогда данное отношеніе есть отношеніе вращенія. Такъ какъ $\triangle OXY \infty \triangle OAB$, то прямая OP видна изъ точки X подъ извѣстнымъ угломъ и, слѣдовательно, X легко опредѣлить.

Примѣчаніе. Эта задача предложена и рѣшена Аполлоніемъ въ его сочиненіи „De sectione rationis"; само сочиненіе утеряно, но Галлей возстановилъ его по сохранившемуся арабскому переводу.

364. Чрезъ данную точку провести прямую, встрѣчающую двѣ данныя подобныя кривыя въ соотвѣтственныхъ точкахъ.

Эта задача есть упрощенное обобщеніе предыдущей и рѣшается такъ же, какъ и та.

365. Даны двѣ прямыя и на каждой изъ нихъ точка, A и B; дана еще точка P. Провести чрезъ P прямую, пересѣкающую данныя прямыя въ X и Y такъ, чтобы отрѣзки AX и BY имѣли данную сумму.

Отложимъ на одной изъ прямыхъ часть BD, равную данной суммѣ; тогда $AX = YD$, и задача приводится къ 363.

366. Чрезъ данную точку P провести прямую, которая, вмѣстѣ съ двумя другими данными прямыми, образовала бы треугольникъ данной площади.

Пусть A есть точка пересѣченія данныхъ прямыхъ; данную площадь представимъ треугольникомъ, одна сторона котораго есть AP, а другая лежитъ на одной изъ данныхъ прямыхъ. Искомую прямую слѣдуетъ провести тогда такъ, чтобы площадь, которую должно прибавить къ этому треугольнику, равнялась площади отрѣзаемой части. А такъ какъ эти площади суть треугольники, высоты которыхъ извѣстны (разстоянія точки P отъ данныхъ прямыхъ), то и отношеніе основаній ихъ также извѣстно и потому задача сводится къ 363.

Примѣчаніе. Задача эта принадлежитъ также Аполлонію и изложена въ его сочиненіи „De sectione spatii", которое затеряно, но отчасти возстановлено Галлеемъ.

367. Даны двѣ окружности круга и на одной изъ нихъ точка A, на другой B. Опредѣлить на окружностяхъ соотвѣтственно точки X и Y такъ, чтобы дуги AX и BY были подобны и XY имѣла бы данную длину.

Принявъ A и B за соотвѣтственныя точки, опредѣлимъ центръ вращенія круговъ; X и Y будутъ тогда также соотвѣтственныя, а потому треугольники ABO и XYO подобны.

Въ этой задачѣ заключается задача 262, гдѣ вторая точка пересѣченія круговъ есть центръ вращенія.

368. Построить прямоугольникъ такъ, чтобы на каждой изъ сторонъ его находилось по одной изъ четырехъ данныхъ точекъ и діагональ котораго имѣла бы данную длину.

Начертивъ два круга, которые суть геометрическія мѣста двухъ противоположныхъ вершинъ прямоугольника, приведемъ задачу къ предыдущей.

369. Даны двѣ прямыя AB и CD; чрезъ пересѣченіе ихъ провести кругъ, пересѣкающій AB въ X, CD въ Y такъ. чтобы $AX:CY$ и $XB:YD$ были равны даннымъ отношеніямъ.

Кругъ долженъ проходить чрезъ центръ вращенія AX и CY, а также и чрезъ центръ вращенія XB и YD.

370. Чрезъ двѣ данныя точки A и B провести двѣ прямыя, заключающія данный уголъ v и встрѣчающія данную прямую и данный кругъ соотвѣтственно въ точкахъ X и Y, такъ, чтобы $AX:BY$ было равно данному отношенію $1:k$.

Умножаемъ данную прямую на k_v относительно центра вращенія прямыхъ AX и BY.

371. Даны точка A и двѣ прямыя BC и DE; опредѣлить на этихъ прямыхъ соотвѣтственно точки X и Y такъ, чтобы BX и DY находились между собою въ данномъ отношеніи, а $\angle XAY$ былъ равенъ данному углу.

Повернемъ BX такъ, чтобы она совпала съ DY; тогда A упадетъ въ извѣстную точку A_1, и уголъ AYA_1 будетъ извѣстенъ.

372. Построить четыреугольникъ $ABCD$ такъ, чтобы B и C легли въ данныя точки, а A и D на данныя прямыя, если притомъ дано $B-C$ и отношеніе $BA:CD$.

Упрощается помощью переложенія (4).

373. Чрезъ S, одну изъ точекъ пересѣченія двухъ круговъ, провести двѣ прямыя ASa и BSb (A и B точки одной окружности, a и b — другой), заключающія данный уголъ, такъ, чтобы треугольники ASB и aSb были равновелики.

Точка пересѣченія круговъ есть центръ вращенія для Aa и Bb, слѣдовательно и для AB и ab. Станемъ вращать AB такъ, чтобы она совпала съ ab, то S упадетъ въ извѣстную точку S_1; ab имѣетъ извѣстную длину, а разстоянія ея отъ S и S_1 находятся въ извѣстномъ отношеніи.

Болѣе простое рѣшеніе этой задачи получится, если примемъ во вниманіе, что перпендикуляры, возставленные къ S къ обѣимъ хордамъ, встрѣчаютъ линію центровъ въ равныхъ разстояніяхъ отъ ея средины.

374. Даны два круга и на одномъ изъ нихъ точка A, на другомъ точка B; провести чрезъ A и B кругъ, пересѣкающій данные круги въ X и Y, такъ, чтобы дуги AX и BY были подобны.

Принявъ A и B за соотвѣтственныя точки, опредѣляемъ центръ вращенія данныхъ круговъ; такъ какъ AX и BY соотвѣтственныя прямыя, то онѣ пересѣкаются на окружности круга ABO; но онѣ встрѣчаются также и на радикальной оси данныхъ круговъ.

375. Соединивъ прямыми средины сторонъ треугольника, получимъ треугольникъ, подобный данному. Легко видѣть, что уголъ вращенія для этихъ треугольниковъ равенъ 180^0, а отношеніе вращенія равно $^1/_2$. Центръ вращенія дѣлитъ, слѣдовательно, всякую прямую, соединяющую двѣ соотвѣтственныя точки, въ отношеніи, равномъ отношенію вращенія, и такъ какъ медіаны треугольника удовлетворяютъ этому условію, то центръ вращенія находится въ пересѣченіи медіанъ. Далѣе, такъ какъ точки пересѣченія высотъ суть соотвѣтственныя точки и такъ какъ такая точка во внутреннемъ треугольникѣ есть центръ круга, описаннаго около внѣшняго треугольника, то во всякомъ треугольникѣ точка пересѣченія высотъ, точка пересѣченія медіанъ и центръ описаннаго круга находятся на одной прямой, отрѣзки которой, заключающіеся между этими тремя точками, относятся между собою, какъ $1:2$.

376. Данъ кругъ, точки O и P и уголъ v; прямая, проходящая чрезъ P, встрѣчаетъ кругъ въ A и B. Опредѣлить геометрическое мѣсто такой точки X, чтобы $\angle OBX = \angle OAX = v$.

Кругъ $AOXB$ встрѣчаетъ OP въ двухъ постоянныхъ точкахъ; поэтому онъ движется вокругъ O, какъ центра вращенія, такимъ образомъ, что центръ его проходитъ по прямой. Поэтому и X опишетъ прямую. Если O есть центръ даннаго круга и $v = 90^0$, то X опишетъ поляру точки P.

8. Если имѣемъ три подобныя системы A, B и C и если нѣкоторая точка O есть центръ вращенія для A и B и въ то же время и для B и C, то она должна быть центромъ вращенія

также и для A и C. Эта точка есть, слѣдовательно, общій центръ вращенія трехъ системъ. Естественно, что и какое угодно число подобныхъ системъ можетъ имѣть общій центръ вращенія.

Соединимъ три соотвѣтственныя точки a, b и c трехъ системъ съ центромъ вращенія O, то отношенія этихъ прямыхъ, а также и углы, образуемые ими, постоянны; слѣдовательно и видъ треугольника abc также постоянный. По этой причинѣ назовемъ его *основнымъ треугольникомъ*. Такимъ же образомъ увидимъ, что нѣсколькимъ подобнымъ фигурамъ, имѣющимъ общій центръ вращенія, соотвѣтствуетъ нѣкоторый основной многоугольникъ постояннаго вида; если онъ вращается около центра вращенія такъ, что одна изъ его вершинъ описываетъ одну изъ фигуръ, то прочія вершины опишутъ остальныя фигуры, и всякая другая точка плоскости, разсматриваемая какъ принадлежащая основному многоугольнику, начертитъ фигуру, подобную прочимъ. Такъ какъ при вращеніи основной многоугольникъ занимаетъ послѣдовательно всѣ свои положенія на плоскости, то центръ вращенія данныхъ фигуръ есть вмѣстѣ съ тѣмъ и центръ вращенія основного многоугольника во всѣхъ его положеніяхъ.

9. Для двухъ прямыхъ, на которыхъ даны двѣ точки какъ соотвѣтственныя, центръ вращенія долженъ находиться на окружности круга, проходящаго чрезъ данныя точки и точку пересѣченія прямыхъ; слѣдовательно для трехъ прямыхъ, на которыхъ даны три точки какъ соотвѣтственныя, центръ вращенія опредѣляется пересѣченіемъ двухъ такихъ круговъ, а третій кругъ долженъ проходить чрезъ ту же точку. Соединивъ эти три точки, получимъ основной треугольникъ, который, по произвольности выбранныхъ точекъ, можетъ имѣть и произвольный видъ, и различнымъ основнымъ треугольникамъ соотвѣтствуютъ и различные центры вращенія. Для даннаго основного треугольника легко найти соотвѣтствующій ему центръ вращенія; для этого на трехъ прямыхъ слѣдуетъ построить треугольникъ, подобный данному (какъ, напримѣръ, въ задачѣ 154), опредѣляя такимъ образомъ три соотвѣтственныя точки.

Если всѣ три прямыя проходятъ чрезъ одну точку O, то послѣдняя есть центръ вращенія для всякаго основного треугольника, такъ что всѣ треугольники, подобные данному основному, будутъ подобно расположены, и центромъ подобія ихъ будетъ точка O. Но есть частный случай, когда центръ вращенія неопредѣленный, а именно: когда вершины A и B треугольника пробѣгаютъ прямыя AO и BO и если при этомъ $\angle C = \angle AOB$, то C опишетъ прямую, проходящую чрезъ O.

10. По **5**, центръ вращенія двухъ круговъ есть неопредѣленная точка, и потому мы можемъ найти общій центръ вращенія трехъ круговъ; а такъ какъ эта точка опредѣляется пересѣченіемъ двухъ круговъ (см. **6**), то получатся два рѣшенія, и то и другое одинаково возможныя; это суть двѣ точки, разстоянія которыхъ отъ центровъ пропорціональны радіусамъ.

Принявъ одну изъ этихъ точекъ за центръ вращенія круговъ, легко опредѣлить уголъ вращенія, потому что центры круговъ суть соотвѣтственныя точки, и прямыя, соединяющія ихъ съ центромъ вращенія, соотвѣтственныя прямыя. Треугольникъ, вершины котораго находятся въ центрахъ трехъ круговъ, есть основной треугольникъ, и всякій другой треугольникъ, получаемый соединеніемъ трехъ соотвѣтственныхъ точекъ, подобенъ ему.

11. *Если многоугольникъ, подобный данному, движется такъ, что три изъ его точекъ описываютъ прямыя (не проходящія чрезъ одну и ту же точку), то и всякая другая его точка опишетъ также прямую.*

Треугольникъ, получаемый соединеніемъ этихъ трехъ точекъ, имѣетъ постоянный видъ и если принять его за основной, то можно опредѣлить центръ вращенія трехъ прямыхъ, по которымъ происходитъ движеніе данныхъ точекъ. По **8**, эта точка есть также центръ вращенія для всѣхъ положеній основного треугольника, слѣдовательно и для всѣхъ положеній многогоугольника, которому этотъ треугольникъ принадлежитъ. А такъ какъ движеніе даннаго многоугольника состоитъ во вращеніи около постоянной точки, то всѣ его точки описываютъ подобныя кривыя, въ разсматриваемомъ случаѣ прямыя.

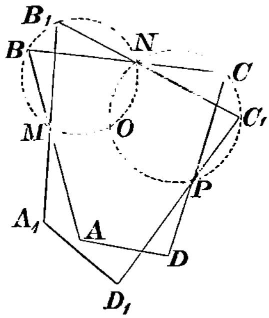
Если всѣ три прямыя проходятъ чрезъ одну и ту же точку, то, какъ было показано въ **9**, можетъ встрѣтиться случай, когда наша теорема не будетъ имѣть мѣста.

Эту теорему легко обобщить, ибо многоугольникъ можетъ двигаться такимъ образомъ, что три изъ его точекъ описываютъ подобныя кривыя, имѣющія общій центръ вращенія. Очевидно, что во время движенія эти три точки должны постоянно совпадать съ тремя соотвѣтственными точками на кривыхъ, и треугольникъ, ими опредѣляемый, долженъ быть основнымъ треугольникомъ кривыхъ. Если это такъ, то, такъ же, какъ и выше, мы увидимъ, что всякая другая точка многоугольника должна описывать кривую, подобную даннымъ. Легко замѣтить, что число условій здѣсь больше, чѣмъ бы слѣдовало для опредѣленія движенія; поэтому постараемся освободиться отъ излишнихъ, разсматривая только тотъ случай, когда данныя кривыя суть круги, ибо только этотъ случай и можетъ насъ здѣсь интересовать. Рѣшимъ въ особенности вопросъ, имѣетъ ли въ этомъ случаѣ мѣсто та же теорема, какъ и для прямыхъ, а именно: что основной треугольникъ, совпадая постоянно своими вершинами съ тремя соотвѣтственными точками, можетъ двигаться (скользить) только по тремъ окружностямъ.

Мы видѣли, что тремъ кругамъ соотвѣтствуютъ два общіе центра вращенія; основной же треугольникъ долженъ оставаться тотъ же, который бы изъ центровъ мы ни разсматривали, потому что три центра круговъ суть въ томъ и другомъ случаѣ соотвѣтственныя точки, а основной треугольникъ получается, если соединимъ прямыми три такія точки. Разсмотримъ теперь точку A на одной изъ окружностей; ей соотвѣтствуютъ гомологическія точки B и C на двухъ другихъ окружностяхъ (или b и c, смотря по тому, который изъ центровъ вращенія взять). Слѣдовательно, если одна изъ вершинъ основного треугольника совпадаетъ съ точкою A, то онъ можетъ имѣть два положенія: ABC или Abc; легко доказать, что другія положенія онъ занимать не можетъ. Дѣйствительно, рѣшая эту задачу общимъ способомъ, т.-е. построивъ основной треугольникъ такъ, чтобы одна изъ его вершинъ находилась въ точкѣ A, а двѣ другія на двухъ данныхъ окружностяхъ, мы, на основаніи показаннаго выше построенія въ общей задачѣ, получимъ только два рѣшенія, которыя должны быть совершенно тождественными съ только что полученными. Слѣдовательно, *основной треугольникъ мо-*

жетъ двигаться (скользить) только по тремъ окружностямъ, при чемъ вершины его остаются во все время движенія соотвѣтственными точками; но само движеніе можетъ совершаться двоякимъ образомъ.

12. *Если многоугольникъ, подобный данному, вращается такимъ образомъ, что три изъ его прямыхъ (не встрѣчающіяся въ одной точкѣ) проходятъ каждая чрезъ неподвижную точку, то и всякая другая, къ фигурѣ принадлежащая, прямая пройдетъ также чрезъ неподвижную точку.*



Пусть прямыя AB, BC и CD проходятъ соотвѣтственно чрезъ неподвижныя точки M. N и P; докажемъ, что и четвертая прямая DA должна проходить также чрезъ неподвижную точку. Прежде всего замѣтимъ, что всѣ положенія многоугольника должны имѣть общій центръ вращенія. Въ самомъ дѣлѣ, чтобы отыскать центръ вращенія для двухъ положеній многоугольника, $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, должно, согласно **5**, построить кругъ, проходящій чрезъ соотвѣтственныя точки B и B_1, а также чрезъ M, точку пересѣченія соотвѣтственныхъ линій; онъ же долженъ проходить еще и чрезъ N. Легко построить этотъ кругъ, ибо онъ долженъ проходить чрезъ точки M и N и вмѣщать извѣстный уголъ B. Такъ какъ центръ вращенія O, сверхъ этой окружности, долженъ находиться еще и на другой, такимъ же образомъ проведенной чрезъ точки N и P, то онъ есть неподвижная точка. Слѣдовательно, кругъ, проходящій чрезъ O, P и D, долженъ проходить также и чрезъ D_1, равно какъ и чрезъ точку пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ AD и A_1D_1 для всякаго положенія послѣдней линіи, а потому эта точка пересѣченія есть неподвижная точка. Эта теорема допускаетъ также обобщеніе, которое мы, съ цѣлью разсмотрѣть вопросъ съ различныхъ точекъ зрѣнія, докажемъ другимъ образомъ.

13. Пусть многоугольникъ, подобный данному, вращается около неподвижнаго центра. Движеніе многоугольника мы опредѣляли до сихъ поръ тѣмъ, что нѣкоторая точка его описываетъ данную кривую; но можно опредѣлить движеніе еще и тѣмъ, что нѣкоторая сторона многоугольника должна во все время движенія касаться (обертывать, производить) данной кривой. Тогда и всякая другая прямая многоугольника должна также постоянно касаться кривой, подобной данной.

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что AB, оставаясь постоянно касательною къ данной кривой, занимаетъ послѣдовательно положенія AB, A_1B_1, A_2B_2 и т. д., и пусть другая прямая BC того же многоугольника занимаетъ въ то же время соотвѣтствующія положенія BC, B_1C_1, B_2C_2 и т. д.; тогда вращеніемъ около неподвижной точки одна изъ этихъ системъ прямыхъ покроетъ другую, если за уголъ вращенія принять постоянный уголъ между двумя другъ другу соотвѣтствующими прямыми, а за отношеніе вращенія принять постоянное отношеніе разстояній двухъ такихъ прямыхъ отъ центра вращенія. Слѣдовательно, фигуры образуемыя каждою системою прямыхъ, подобны, и такъ какъ это обстоятельство не зависитъ отъ числа ихъ положеній, то оно останется въ силѣ и тогда, когда число положеній сдѣлается безконечнымъ, т.-е. когда подобныя фигуры суть огибаемыя кривыя.

Легко видѣть, что данная точка есть также и общій центръ вращенія произведенныхъ (огибаемыхъ) кривыхъ, такъ какъ уголъ вращенія равенъ углу между производящими прямыми и отношеніе вращенія равно отношенію разстояній этихъ прямыхъ отъ центра вращенія. Возьмемъ нашъ многоугольникъ въ опредѣленномъ положеніи, то всѣ его стороны должны касаться произведенныхъ кривыхъ въ соотвѣтственныхъ точкахъ, а потому онѣ сами суть соотвѣтственныя линіи кривыхъ. Система другихъ какихъ-нибудь сотвѣтственныхъ прямыхъ въ этихъ кривыхъ образуетъ, понятно, многоугольникъ подобный данному; этотъ многоугольникъ имѣетъ значеніе, вполнѣ соотвѣтствующее значенію основного многоугольника, и по этой причинѣ назовемъ его *основнымъ многоугольникомъ второго рода*. Между обоими основными многоугольниками существуетъ тѣсная связь, а именно: основной многоугольникъ перваго рода можетъ быть вписываемъ въ многоугольникъ второго рода и остается постоянно вписаннымъ, когда одинъ изъ многоугольниковъ вращается около неподвижной точки такъ, что одна изъ вершинъ вписаннаго находится постоянно на соотвѣтствующей сторонѣ описаннаго.

Разсмотрѣнное здѣсь движеніе многоугольника можетъ быть опредѣлено и другими способами; но мы приведемъ только тотъ случай, когда оно опредѣляется условіемъ, чтобы три стороны многоугольника скользили по тремъ подобнымъ кривымъ. Для того, чтобы движеніе могло быть такое же, какъ выше разсмотрѣнное, эти три кривыя должны имѣть общій центръ вращенія и три стороны многоугольника должны постоянно касаться кривыхъ въ трехъ соотвѣтственныхъ точкахъ. Такъ какъ для опредѣленія движенія этого совершенно достаточно, то оно должно быть такое же, какъ выше изложенное и должно, слѣдовательно, состоять въ томъ, что многоугольникъ вращается около центра вращенія кривыхъ и въ то же время всякая его прямая производитъ кривую, подобную даннымъ; треугольникъ, составленный тремя сторонами многоугольника, скользящими по данныхъ кривымъ, будетъ для послѣднихъ основнымъ треугольникомъ второго рода. Теорема **12** есть частный случай этой послѣдней, если замѣнить въ ней кривыя точками.

14. Если мы опредѣлимъ центръ вращенія двухъ круговъ, принявъ двѣ точки A и a за соотвѣтственныя, то касательныя въ этихъ точкахъ образуютъ уголъ, положеніемъ точекъ опредѣленный, который сохраняетъ свою величину, когда A и a проходятъ подобныя дуги. Обратно, когда данъ уголъ, можно опредѣлить пару соотвѣтственныхъ точекъ и соотвѣтствующій имъ центръ вращенія; дѣйствительно, любыя двѣ касательныя, образующія между собою данный уголъ, касаются круговъ въ соотвѣтственныхъ точкахъ. (Два рѣшенія.)

15. *Вращеніе около данной точки можетъ быть всегда замѣнено вращеніемъ около произвольной точки и параллельнымъ передвиженіемъ,* при чемъ отношеніе и уголъ вращенія не измѣняются, а величина параллельнаго передвиженія зависитъ только отъ этихъ величинъ и положенія центра вращенія.

Отъ вращенія около новой точки фигура, вслѣдствіе неизмѣняемости отношенія вращенія, получаетъ требуемую величину и всѣ линіи ея, по неизмѣняемости угла вращенія, получаютъ должныя направленія. Параллельное передвиженіе опредѣляется, слѣдовательно, по величинѣ и направленію прямою, соединяющею два положенія произвольной точки кривой, въ которыя она приводится обоими вращеніями.

Пусть данный центръ вращенія есть O, новый O_1. Вращеніемъ около O точка O_1, которую можно разсматривать какъ принадлежащую данной кривой, переносится въ новую точку O_2; при вращеніи же около O_1 она остается на мѣстѣ; прямая O_1O_2 опредѣляетъ, слѣдовательно, параллельное передвиженіе. Итакъ, *параллельное передвиженіе опредѣляется прямою, которую пробѣгаетъ новый центръ вращенія, вращаясь около даннаго центра.* Обратно, параллельное передвиженіе и вращеніе могутъ быть всегда замѣнены однимъ вращеніемъ около новой точки, которую на основаніи вышеизложеннаго легко опредѣлить.

16. *Порядокъ слѣдованія двухъ вращеній одного за другимъ можетъ быть измѣненъ, если присоединить параллельное передвиженіе.*

Въ самомъ дѣлѣ, какой бы порядокъ слѣдованія мы ни выбрали, каждая линія системы вращается на уголъ, равный суммѣ данныхъ угловъ вращенія, и умножается на произведеніе данныхъ отношеній вращенія. Обѣ полученныя фигуры должны имѣть поэтому одинаковую величину и соотвѣтственныя ихъ стороны одинаковое направленіе, а потому параллельнымъ передвиженіемъ одна изъ нихъ можетъ быть приведена въ совпаденіе съ другою.

Пусть оба центра вращенія будутъ точки A и B и разсмотримъ точку A; при вращеніи около A она останется на мѣстѣ, а вращеніемъ около B перенесется въ нѣкоторую точку C. Если же произведемъ вращеніе сперва около B, то A упадетъ въ C, а затѣмъ вращеніемъ около A помѣстится въ D. Прямая CD или DC есть, слѣдовательно, величина параллельнаго передвиженія, которое должно присоединить, если требуется измѣнить порядокъ слѣдованія двухъ вращеній.

17. *Два вращенія могутъ быть соединены въ одно.*

Положимъ что вращенія совершаются около точекъ A и B. Изъ элементовъ вращенія, долженствующаго замѣнить данныя, неизвѣстенъ только центръ вращенія C. Такъ какъ отъ вращенія около A точка A остается на мѣстѣ, а вращеніемъ около B переносится въ точку A_1, то C должно опредѣлить по условіямъ, чтобы $\angle ACA_1$ былъ равенъ суммѣ двухъ данныхъ угловъ вращенія и чтобы отношеніе $CA_1 : CA$ было равно произведенію отношеній двухъ данныхъ вращеній. Слѣдовательно, данные углы и отношенія вращеній опредѣляютъ углы и отношенія сторонъ треугольника, вершины котораго находятся въ трехъ центрахъ вращенія. Замѣтимъ, что если двѣ изъ этихъ точекъ совпадаютъ, то совпадаютъ всѣ три, какъ было показано выше, и если данные углы вращенія равны нулю, то три центра вращенія лежатъ на одной прямой. Въ этомъ случаѣ центръ вращенія суть центръ подобія фигуръ, попарно подобно расположенныхъ. Ниже теорема эта будетъ доказана другимъ образомъ.

18. Мы показали, какъ помощью вращенія и метода обратности получаются такія системы точекъ, въ которыхъ каждой точкѣ одной системы соотвѣтствуетъ точка въ другой системѣ и каждому кругу первой системы соотвѣтствуетъ кругъ во второй (подъ кругомъ подразумѣвается также и прямая); затѣмъ мы показали, какъ, благодаря именно этому соотношенію, выдвигается значеніе для элементарной геометріи метода преобразованія фигуръ. Въ виду этого значенія полагаемъ не безполезнымъ изслѣдовать, нѣтъ ли еще и другихъ преобразованій, въ которыхъ точкѣ соотвѣтствуетъ точка и кругу кругъ, считая всѣ точки плоскости принадлежащими къ двумъ системамъ. Пусть A, B и C будутъ три произвольныя точки одной системы, и a, d, c соотвѣтствующія имъ точки въ другой системѣ. Пусть далѣе M будетъ точка первой системы, не лежащая на окружности круга, проходящаго чрезъ A, B и C. Двумъ кругамъ ABM и BCM соотвѣтствуютъ во второй системѣ круги abm и bcm, и, слѣдовательно, m должна соотвѣтствовать M. Отсюда видно, что зависимость между обѣими системами вполнѣ опредѣлена тремя парами точекъ. Впишемъ теперь въ кругъ ABC треугольникъ $a_1b_1c_1 \infty abc$ такъ, чтобы Aa_1, Bb_1 и Cc_1 пересѣкались въ одной точкѣ O. Эту задачу рѣшить легко, такъ какъ углы при O извѣстны. Отсюда слѣдуетъ, что помощью метода обратности можно изъ системы ABC образовать систему $a_1b_1c_1$, подобную системѣ abc, которую, въ свою очередь, помощью вращенія (и въ случаѣ надобности вращенія около оси) можно преобразовать въ систему abc.

Такимъ образомъ, мы доказали, что *двѣ системы, въ которыхъ точкѣ соотвѣтствуетъ точка и кругу кругъ, могутъ* *быть всегда преобразованы одна въ другую помощью вращенія и обращенія.*

19. Изъ доказанныхъ въ теоріи вращенія теоремъ методами высшей геометріи могутъ быть выведены новыя, болѣе общія теоремы; но такъ какъ эти приложенія не входятъ въ планъ этого сочиненія, то мы ограничимся однимъ примѣромъ. Въ **11** было доказано, что если прямая движется такъ, что отношеніе отрѣзковъ ab и bc, образуемыхъ на ней тремя неподвижными прямыми, постоянно, то она вращается около неподвижнаго центра вращенія; откуда слѣдуетъ, что всякая точка этой прямой, опредѣляемая отношеніемъ, въ которомъ она (точка) дѣлитъ какой-нибудь отрѣзокъ, напримѣръ ab, описываетъ также прямую. Эти отношенія могутъ быть выражены ангармоническими отношеніями, если принять во вниманіе точку пересѣченія движущейся прямой съ прямою на безконечности. Въ такомъ видѣ теорема выражаетъ слѣдующее проективное свойство:

Если подвижная прямая встрѣчаетъ четыре неподвижныя прямыя въ точкахъ, ангармоническое отношеніе которыхъ постоянно, то всякая точка ея (опредѣляемая посредствомъ ангармоническихъ отношеній) *описываетъ прямую.*

Если двѣ изъ неподвижныхъ прямыхъ проходятъ чрезъ безконечно удаленыя круговыя точки, то получимъ теорему:

Если въ данномъ углѣ ABC съ неподвижною вершиною A точки B и C пробѣгаютъ по неподвижнымъ прямымъ, то всякая точка D на прямой BC (опредѣляемая угломъ BAD) *опишетъ прямую.*

Приложенія.

377. Въ данный треугольникъ ABC вписать треугольникъ, равный другому данному треугольнику.

Согласно **9**, система подобныхъ треугольниковъ, вписанныхъ въ данный, имѣетъ общій центръ вращенія. Поэтому впишемъ въ данный треугольникъ другой треугольникъ, который имѣлъ бы требуемый видъ (т.-е. подобный второму изъ данныхъ), и, принявъ его за основной треугольникъ, опредѣлимъ центръ вращенія; вращеніемъ этого треугольника получимъ требуемый. Легче всего произвести это построеніе слѣдующимъ образомъ:

умножимъ построенный нами основной треугольникъ относительно центра вращенія такъ, чтобы онъ пріобрѣлъ требуемую величину и станемъ вращать его затѣмъ около той же точки до тѣхъ поръ, пока вершины его не упадутъ на стороны даннаго.

378. Въ данный четыреугольникъ вписать четыреугольникъ, который былъ бы подобенъ другому данному.

Построимъ четыреугольникъ, подобный второму данному. такъ, чтобы три его вершины находились на сторонахъ перваго даннаго и опредѣляемъ затѣмъ центръ вращенія, какъ въ предыдущей задачѣ. Остается теперь повернуть этотъ четыреугольникъ около центра вращенія такъ, чтобы его четвертая вершина упала на четвертую сторону. Эта вершина описываетъ при вращеніи прямую **(11)**, которую легко построить: повтореніемъ того же построенія можно найти еще одну точку этой прямой; или же ее можно получить еще и вращеніемъ одной стороны даннаго четыреугольника около найденнаго центра вращенія. Употребляя первое построеніе, нѣтъ надобности находить центръ вращенія.

379. Данныя четыре прямыя пересѣчь пятою такъ, чтобы образовавшіеся на послѣдней три отрѣзка находились между собою въ данномъ отношеніи.

Эта задача есть частный случай предыдущей, такъ какъ искомая прямая можетъ быть разсматриваема какъ четыреугольникъ извѣстнаго вида.

Примѣчаніе. Послѣднія три задачи находятся въ первой книгѣ «Principia mathematica philosophiae naturalis» Ньютона.

380. Въ данный треугольникъ вписать треугольникъ, подобный другому данному, такъ, чтобы онъ имѣлъ наименьшую площадь.

381. По даннымъ угламъ и периметру построить параллелограммъ такъ, чтобы каждая сторона его проходила соотвѣтственно чрезъ данныя точки.

Положимъ, что стороны AB, BC, CD и DA проходятъ соотвѣтственно чрезъ данныя точки P, Q, R и S и пусть T есть пересѣченіе круговъ SAP и PBQ; тогда T есть центръ вращенія для AB и произвольной прямой A_1PB_1, проведенной между обѣими окружностями; слѣдовательно $AT : AB = A_1T : A_1B_1$.

Если V есть пересѣченіе круговъ PAS и SDR, то такимъ же образомъ найдемъ отношеніе $AV : AD$ и тогда легко опредѣлить A. (189.)

382. На данныхъ трехъ окружностяхъ помѣстить треугольникъ, равный такому треугольнику, вершины котораго суть центры данныхъ окружностей.

Отыщемъ общій центръ вращенія трехъ круговъ; такъ какъ центры ихъ суть соотвѣтственныя точки, то данный треугольникъ есть основной, и, слѣдовательно, найденный центръ вращенія долженъ быть центромъ вращенія для него и для искомаго треугольника. Послѣдній получается вращеніемъ даннаго такъ, чтобы одна изъ его вершинъ упала на окружность. Данное отношеніе вращенія равно здѣсь 1, но и для другого отношенія задача рѣшается подобнымъ же образомъ.

383. Построить треугольникъ, равный данному, такъ, чтобы каждая изъ его сторонъ проходила соотвѣтственно чрезъ данныя точки.

Легко построить треугольникъ, подобный данному, и стороны котораго проходили бы чрезъ данныя точки; примемъ стороны этого треугольника за подобныя кривыя и его самого за основной треугольникъ второго рода; опредѣливъ затѣмъ центръ вращенія, умножимъ построенный треугольникъ такъ, чтобы онъ получилъ требуемую величину. Такъ какъ отношеніе вращенія для полученнаго такимъ образомъ и для искомаго треугольниковъ равно единицѣ, то двѣ соотвѣтственныя стороны должны находиться въ равныхъ разстояніяхъ отъ центра вращенія, а потому одна изъ искомыхъ прямыхъ опредѣляется условіемъ, что она должна касаться извѣстнаго круга и проходить чрезъ данную точку.

384. Построить четыреугольникъ, подобный данному, такъ, чтобы каждая его сторона проходила чрезъ одну изъ четырехъ данныхъ точекъ.

Начертимъ произвольный четыреугольникъ, подобный данному, такъ, чтобы три изъ его сторонъ проходили чрезъ три изъ данныхъ точекъ и опредѣлимъ центръ вращенія, какъ въ предыдущей задачѣ. Затѣмъ вращаемъ этотъ четыреугольникъ такъ, чтобы четвертая сторона проходила чрезъ четвертую точку; это легко сдѣлать, такъ какъ сверхъ данной точки эта прямая содержитъ еще одну неподвижную точку, которая можетъ быть опредѣлена двоякимъ образомъ. (Схожа съ 378.)

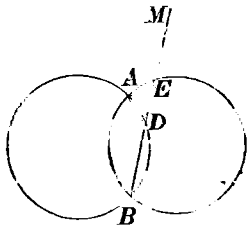
385. Около треугольника ABC описанъ кругъ; изъ точки O на окружности къ каждой сторонѣ треугольника проведены прямыя, образующія съ соотвѣтственной стороной одинъ и тотъ же уголъ. Доказать, что точки пересѣченія этихъ прямыхъ съ соотвѣтствующими сторонами треугольника лежатъ на одной прямой*)

Примемъ вершины A и B и надлежащимъ образомъ выбранную точку на AB за соотвѣтственныя на трехъ сторонахъ; то O будетъ центромъ вращенія, а точки пересѣченія, о которыхъ идетъ рѣчь. будутъ соотвѣтственныя. Онѣ находятся на одной прямой, потому что основной треугольникъ есть прямая.

386. Центры трехъ круговъ находятся въ трехъ вершинахъ B, C и D параллелограмма. Построить параллелограммъ, въ которомъ даны углы, такъ, чтобы одна изъ его вершинъ упала въ четвертую вершину перваго параллелограмма, а остальныя вершины находились бы на трехъ упомянутыхъ окружностяхъ.

Умножимъ кругъ C на $\frac{1}{2}$ относительно A и получимъ новый кругъ, основной треугольникъ котораго и круговъ B и D есть прямая, оба отрѣзка которой равны между собою. Поэтому діагональ B_1D_1 искомаго параллелограмма пересѣкаетъ эти три круга въ соотвѣтственныхъ точкахъ и видна изъ A подъ даннымъ угломъ. Вращая затѣмъ BB_1 такъ, чтобы она совпала съ DD_1, приведемъ A въ извѣстную точку A_1, и $\angle AD_1A_1$ будетъ также извѣстенъ.

387. Опредѣлить геометрическое мѣсто точекъ, касательныя изъ которыхъ къ двумъ даннымъ кругамъ находятся въ данномъ отношеніи.



Пусть круги пересѣкаются въ A и B и пусть M есть одна изъ искомыхъ точекъ; прямая MB пересѣкаетъ оба круга въ D и E, и, вслѣдствіе даннаго условія. отношеніе $MD \cdot MB$ къ $ME \cdot MB$, слѣдовательно и MD къ ME, есть величина постоянная. Такъ какъ притомъ углы въ треугольникѣ ADE постоянны, то вся фигура $ADEM$ имѣетъ постоянный видъ (форму), и если она вращается около A такъ,

*) Прямая Симпсона. *Примѣч. перев.*

что D и E описываютъ окружности, то и M должна описать также окружность. Такъ какъ A есть общій центръ вращенія послѣдняго круга и данныхъ, то онъ, такъ же какъ и данные, долженъ проходить чрезъ A. DEM представляетъ основной треугольникъ, и такъ какъ треугольникъ, получаемый. если соединить три центра круговъ, подобенъ ему, то всѣ три центра должны находиться на одной прямой. Разстоянія искомаго центра отъ данныхъ относятся между собою какъ MD къ ME; послѣднее же равно квадрату даннаго.

388. Къ двумъ даннымъ кругамъ провести двѣ касательныя, образующія между собою данный уголъ, такъ, чтобы прямая, соединяющая точки касанія обѣихъ касательныхъ, проходила чрезъ данную точку. Помощью **14** задача сводится къ 364.

389. Къ двумъ даннымъ кругамъ провести двѣ касательныя, образующія между собою данный уголъ, такъ, чтобы прямая, соединяющая точки касанія, имѣла данное направленіе.

Эта задача есть частый случай предыдущей, если предположить, что данная въ послѣдней точка находится на безконечности.

390. Въ треугольникъ вписать треугольникъ, подобный нѣкоторому данному, такъ, чтобы одна его сторона проходила чрезъ данную точку.

Опредѣлимъ на данныхъ сторонахъ три соотвѣтственныя точки, принявъ искомый треугольникъ за основной. Тогда задача приводится къ 364.

391. Въ треугольникъ вписать треугольникъ, подобный нѣкоторому данному, такъ, чтобы его центръ тяжести упалъ на одну изъ медіанъ даннаго треугольника.

Впишемъ въ треугольникъ два произвольные треугольника, подобные данному: прямая, соединяющая центръ тяжести этихъ треугольниковъ, пересѣчетъ выбранную медіану въ искомой точкѣ. Теперь легко опредѣлить вершины искомаго треугольника, потому что система трехъ вершинъ образуетъ на одной изъ сторонъ даннаго треугольника отрѣзки, которые относятся между собою такъ же, какъ отрѣзки, образуемые тремя центрами тяжести на прямой, ихъ соединяющей.

392. Въ треугольникъ вписать другой треугольникъ такъ, чтобы двѣ изъ его сторонъ имѣли данныя направленія, а третья данную длину.

Пусть abc будетъ вписанный треугольникъ и bc данная сторона. Кругъ, описанный около abc. встрѣчаетъ сторону, на которую должна упасть a въ двухъ точкахъ, а именно въ a и въ другой точкѣ d. Теперь извѣстны всѣ стороны треугольника dbc.

393. Построить три круга, если дано: точка, изъ которой круги кажутся одинаковой величины, по точкѣ на каждой окружности, отношеніе между радіусами и углы, подъ которыми изъ данной точки видны разстоянія между центрами.

Извѣстны общій центръ вращенія трехъ круговъ, отношенія и углы вращенія; поэтому можно вращеніемъ привести двѣ изъ данныхъ точекъ на ту окружность, на которой находится третья точка. и тогда мы будемъ знать три точки на ней.

394. Даны два круга, встрѣчающіеся въ A и B, и даны еще двѣ точки P и R. Провести въ каждомъ кругѣ по хордѣ такъ, чтобы онѣ проходили соотвѣтственно чрезъ данныя точки и чтобы прямыя. соединяющія ихъ концы, проходили чрезъ A.

Разсмотримъ обѣ хорды какъ подобныя фигуры, то B есть центръ вращенія какъ для нихъ, такъ и для круговъ. Уголъ и отношеніе вращенія извѣстны, а потому вращеніемъ мы можемъ помѣстить одну изъ данныхъ точекъ на хорду, проходящую чрезъ другую точку; тогда будемъ знать двѣ точки этой хорды.

395. X есть центръ вращенія для AB и CY, гдѣ A, B и C данныя точки; какую кривую опишетъ X, когда Y пробѣгаетъ по данной кривой?

Параллельнымъ передвиженіемъ приведемъ треугольникъ BAX въ положеніе B_1CX_1. Изъ подобія треугольниковъ B_1CX_1 и YCX видно, что B_1Y и CX_1 имѣютъ постоянное произведеніе и вращаются по противоположнымъ направленіямъ съ равною угловою скоростью, а потому точки X и Y опишутъ обратныя кривыя.

396. Землемѣръ видитъ на мѣстности три точки A, B и C; соотвѣтствующія имъ точки a, b и c нанесены на мензулѣ. Опредѣлить на послѣдней точку, соотвѣтствующую на мѣстности точкѣ стоянія землемѣра.

Искомая точка есть центръ вращенія для треугольниковъ ABC и abc. Если помощью алидады проведемъ чрезъ a, b и c прямыя, продолженія которыхъ должны бы были проходить соотвѣтственно чрезъ A, B и C, то получимъ такъ называемый треугольникъ ошибокъ; пусть онъ будетъ $\alpha\beta\gamma$, гдѣ γ есть точка пересѣченія прямыхъ, проходящихъ чрезъ a и b и т. д. По причинѣ большихъ разстояній точекъ A, B и C углы α, β и γ, при малыхъ измѣненіяхъ въ положеніи мензулы, можно разсматривать какъ постоянные. Искомая точка есть, слѣдовательно, точка пересѣченія круговъ $a\gamma b$ и $a\gamma c$. Но круги эти для построенія не пригодны, потому что точное вычерчиваніе ихъ довольно затруднительно, притомъ же центры ихъ находятся нерѣдко внѣ мензулы. Если же возьмемъ обратныя фигуры круговъ, принимая a за центръ обратности и $a\beta \,.\, a\gamma$ за степень ея, то искомая точка преобразуется въ точку пересѣченія двухъ прямыхъ, проходящихъ соотвѣтственно чрезъ β и γ и образующихъ съ $\beta\gamma$ соотвѣтственно углы $ab\gamma$ и $ac\beta$. Отсюда такое построеніе: построимъ $\angle \beta\gamma O_1 = \beta ca$ и $\angle \gamma\beta O_1 = \gamma ba$ (принимая во вниманіе направленія, по которымъ углы описаны) и опредѣлимъ такимъ образомъ O_1. Затѣмъ вращаемъ мензулу такъ, чтобы $O_1 a$ сдѣлалась линіею визированія къ точкѣ A: тогда треугольники ABC и abc расположатся подобно, и треугольникъ ошибокъ приведется на искомую точку.

ПРИБАВЛЕНІЯ.

О пересѣченіи круговыхъ дугъ.

Изъ предыдущаго мы могли неоднократно усмотрѣть, какое важное значеніе имѣетъ тщательное изслѣдованіе фигуры для того, чтобы открыть простѣйшія соотношенія, существующія между ея частями, въ особенности же между ея углами. Такое изслѣдованіе производится обыкновенно помощью теоремъ, выражающихъ зависимость между углами и круговыми дугами, и другихъ элементарныхъ теоремъ подобнаго же рода; но если фигуры довольно сложныя, то изъ-за большого числа встрѣчающихся въ нихъ угловъ отыскиваніе простѣйшихъ зависимостей часто весьма затруднительно. Поэтому было бы цѣлесообразно найти такое средство, которое могло бы облегчить подобныя изслѣдованія. Такое средство найдется, если станемъ изучать свойства угловъ, образуемыхъ круговыми дугами, тѣмъ болѣе, что это изученіе можетъ во многихъ случаяхъ уяснить соотношенія между частями фигуръ. Я не намѣренъ дать здѣсь подробное изложеніе этого вопроса, но приведу только нѣкоторыя теоремы, примѣняемость которыхъ на практикѣ бываетъ часто удобна.

1. *Въ многоугольникѣ, ограниченномъ круговыми дугами, сумма сторонъ, увеличенная суммою дополнительныхъ угловъ многоугольника, равна четыремъ прямымъ угламъ.*

Въ самомъ дѣлѣ, представимъ себѣ, что нѣкоторая прямая вращается вокругъ этого многоугольника слѣдующимъ образомъ: начиная отъ нѣкоторой вершины, она во время движенія остается все время касательной къ прилежащей сторонѣ до тѣхъ поръ, пока не достигнетъ слѣдующей вершины; повернувшись около послѣдней, она сдѣлается касательной къ слѣдующей сторонѣ, и движеніе ея такимъ образомъ будетъ продолжаться далѣе, пока она не возвратится въ свое первоначальное положеніе. При такомъ движеніи прямая опишетъ послѣдовательно углы, равные: одни — сторонамъ многоугольника, другіе — дополнительнымъ его угламъ, и такъ какъ она совершила полный оборотъ, то сумма описанныхъ ею угловъ равна четыремъ прямымъ угламъ.

Для простоты мы предположили, что наша прямая вернулась въ свое первоначальное положеніе, совершивъ только *одинъ* полный оборотъ; но для невыпуклыхъ многоугольниковъ она можетъ сдѣлать нѣсколько полныхъ оборотовъ (или ни одного) прежде чѣмъ вернуться въ свое первоначальное положеніе, такъ что искомая сумма угловъ можетъ быть равна всякому кратному четырехъ прямыхъ угловъ.

Для общности этой теоремы углы и дуги должны быть взяты со знаками, соотвѣтствующими направленіямъ вращенія около нихъ прямой.

2. *Въ треугольникѣ сумма угловъ, уменьшенная суммою сторонъ, равна двумъ прямымъ угламъ. Если же стороны проходятъ чрезъ одну и ту же точку* (которая не есть однакожъ одна изъ вершинъ треугольника), *то сумма угловъ равна двумъ прямымъ угламъ, а сумма сторонъ есть нуль.*

Послѣднее легко доказать, если вмѣсто угловъ треугольника возьмемъ углы, имъ равные и построенные въ общей точкѣ пересѣченія сторонъ.

3. *Въ двухъ-угольникѣ оба угла равны между собою и каждый изъ нихъ равенъ полусуммѣ сторонъ.*

4. *Вписанный уголъ равенъ полусуммѣ изъ своихъ сторонъ и дуги, на которую онъ опирается.*

Если продолжимъ стороны угла такъ, чтобы образовался двухъ-угольникъ, то вписанный уголъ измѣряется полусуммою сторонъ этого двухъ-угольника; но сумма продолженій сторонъ равна дугѣ, на которую опирается вписанный уголъ (2). Эта дуга должна быть взята съ тѣмъ или другимъ знакомъ, смотря по тому, къ которому изъ треугольниковъ, на которые двухъ-угольникъ раздѣленъ, она принадлежитъ.

5. *Если изъ двухъ паръ круговъ точки пересѣченія одной пары находятся каждая на окружности одного изъ круговъ другой* *пары, то оба круга каждой пары пересѣкаются подъ равными углами* (2).

6. *Во вписанномъ четыреугольникѣ сумма двухъ противоположныхъ угловъ равна суммѣ двухъ другихъ. Если всѣ четыре стороны проходятъ чрезъ одну точку, то равныя суммы противолежащихъ угловъ равны каждая двумъ прямымъ угламъ, а сумма сторонъ равна нулю* (4).

7. *Если въ четыреугольникѣ сумма двухъ противолежащихъ угловъ равна суммѣ двухъ другихъ, то четыреугольникъ вписываемый.*

Дѣйствительно, изъ 1 слѣдуетъ, что сумма двухъ противолежащихъ угловъ, уменьшенная полусуммою сторонъ, равна двумъ прямымъ угламъ, а это есть сумма противолежащихъ угловъ въ прямолинейномъ четыреугольникѣ, вершины котораго совпадаютъ съ вершинами даннаго.

8. *Если два круга касаются двухъ другихъ одинаковымъ образомъ, то четыре точки касанія лежатъ на одной окружности* (7).

9. *Всякій кругъ, проходящій чрезъ точки пересѣченія двухъ неподвижныхъ круговъ, пересѣкаетъ систему круговъ, касающихся неподвижныхъ круговъ одинаковымъ образомъ, подъ равными углами.*

Эту теорему мы уже доказали раньше помощью обратныхъ фигуръ (198); здѣсь мы приведемъ прямое доказательство, имѣющее мѣсто и въ томъ случаѣ, когда неподвижные круги не пересѣкаются. Въ этомъ случаѣ, подъ кругомъ, проходящимъ чрезъ точки пересѣченія двухъ непересѣкающихся круговъ, будемъ понимать такой кругъ, который съ данными имѣетъ общую радикальную ось.

За одинъ изъ круговъ можетъ быть принята общая касательная; пусть она касается неподвижныхъ круговъ S_1 и S_2 въ точкахъ A и B, въ то время, какъ другой кругъ S касается тѣхъ же круговъ въ C и D. Пусть, далѣе, точка пересѣченія круга, проходящаго чрезъ точки пересѣченія неподвижныхъ круговъ, съ общею касательною есть E, а съ кругомъ S точка F. Прямыя AC и BD встрѣчаются на кругѣ S въ точкѣ O, касательная въ которой параллельна общей касательной.

Такъ какъ A, C, D и B лежатъ на одной окружности, то степени точки O относительно круговъ S_1 и S_2 равны; а потому O имѣетъ ту же степень относительно круговъ ACF, EF

и BDF и должна, слѣдовательно, находиться на радикальной оси каждыхъ двухъ изъ этихъ трехъ круговъ. Такъ какъ эти три круга имѣютъ общую точку F, то OF есть ихъ радикальная ось; слѣдовательно, они имѣютъ еще одну общую точку пересѣченія, лежащую на OF. Изъ того, что три круга имѣютъ двѣ общія точки, слѣдуетъ, что центры ихъ лежатъ на одной прямой. Такъ какъ ACF и BDF проходятъ чрезъ точки касанія, то каждый изъ нихъ пересѣкаетъ общую касательную и касательную въ F подъ равными углами, и, слѣдовательно, центры ихъ находятся на прямой, дѣлящей уголъ между обѣими касательными пополамъ. А такъ какъ центръ круга EF лежитъ на той же прямой, то онъ пересѣкаетъ общую касательную и касательную въ F или кругъ S подъ равными углами.

Системы круговъ.

Изъ условій, могущихъ служить для опредѣленія круга, особеннаго вниманія заслуживаютъ: 1) кругъ долженъ проходить чрезъ данную точку; 2) онъ долженъ касаться данной прямой и 3) онъ долженъ касаться даннаго круга. Группа задачъ на построеніе круга по этимъ условіямъ была нами рѣшена за исключеніемъ четырехъ задачъ. Но прежде чѣмъ приступимъ къ рѣшенію этихъ четырехъ и другихъ сходственныхъ задачъ, приведемъ двѣ теоремы, которыя придется примѣнить.

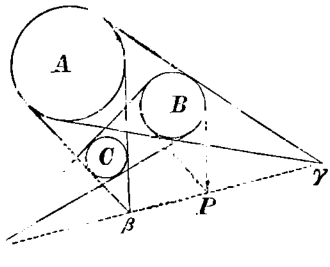
10. *Если нѣкоторый кругъ касается двухъ другихъ круговъ въ A и B, то прямая AB проходитъ чрезъ одинъ изъ центровъ подобія обоихъ вторыхъ круговъ.*

Пусть AB встрѣчаетъ кругъ, проходящій чрезъ B во второй разъ въ точкѣ b. Легко видѣть, что радіусъ, идущій къ b, параллеленъ радіусу другого круга, идущему къ A. Слѣдовательно A и b суть сходственныя точки въ обоихъ кругахъ, а потому Ab проходитъ чрезъ центръ ихъ подобія.

Если кругъ касается обоихъ круговъ одинаковымъ образомъ, т.-е. обоихъ внутренно или обоихъ наружно, то прямая Ab проходитъ чрезъ внѣшній центръ подобія; если же онъ касается обоихъ круговъ различнымъ образомъ, то она проходитъ чрезъ внутренній центръ подобія.

Если O есть центръ подобія, то оба круга суть обратныя кривыя, имѣющія центромъ обратности точку O, а потому произведеніе $OA \cdot OB$ есть постоянная величина.

11. *Три внѣшнихъ центра подобія каждыхъ двухъ изъ трехъ данныхъ круговъ лежатъ на одной прямой.*



Пусть A, B и C суть центры данныхъ круговъ; γ — центръ подобія круговъ A и B; β — круговъ A и C и α — круговъ B и C. Проведемъ къ кругу B двѣ касательныя, параллельныя общимъ касательнымъ круговъ A и C; пусть онѣ пересѣкаются въ P. Разсматривая круги A и B, точки β и P будутъ сходственныя и находятся, слѣдовательно, на одной прямой съ центромъ подобія γ. Разсматривая же круги B и C, точки β и P будутъ также сходственныя и потому лежатъ на одной прямой съ α. Отсюда слѣдуетъ, что α, β и γ находятся на одной прямой.

Слѣд. I. Такимъ же образомъ увидимъ, что прямая, соединяющая внутренніе центры подобія двухъ паръ круговъ, проходитъ чрезъ внѣшній центръ подобія третьей пары.

Слѣд. II. Вышеизложенная теорема имѣетъ также мѣсто для трехъ произвольныхъ кривыхъ, изъ которыхъ каждыя двѣ расположены подобно одна относительно другой; ибо къ тремъ кривымъ можно присоединить три сходственныхъ круга, центры подобія которыхъ суть также центры подобія кривыхъ, а потому теорема, справедливая для круговъ, справедлива также и для кривыхъ.

Примѣры.

397. Построить кругъ, касающійся двухъ данныхъ круговъ, такъ, чтобы прямая, соединяющая точки касанія, проходила чрезъ даннную точку.

398. Построить кругъ, касающійся двухъ данныхъ круговъ одинаковымъ образомъ, такъ, чтобы онъ отсѣкалъ отъ данной прямой, проходящей чрезъ внѣшній центръ подобія данныхъ круговъ, хорду данной длины.

399. Даны два круга A и B и точки D, E и F. Требуется провести чрезъ D кругъ C такъ, чтобы радикальная ось круговъ A и C проходила чрезъ E, а радикальная ось круговъ B и C — чрезъ точку F.

400. Въ четыреугольникѣ $ABCD$ сторона AB неподвижна и отношенія между отрѣзками діагоналей постоянны; опредѣлить геометрическое мѣсто CD.

Пусть діагонали пересѣкаются въ O и пусть

$$AO : OC = m : n; \ BO : OD = p : q$$

и предположимъ, что точка O — она произвольная — описываетъ нѣкоторую кривую K. Умноживъ эту кривую относительно A на $\frac{m+n}{m}$ и относительно B на $\frac{p+q}{p}$, получимъ кривыя описываемыя въ то же время точками C и D. Эти кривыя подобны въ отношеніи $\frac{p(m+n)}{m(p+q)}$ и ихъ центръ подобія есть лежащая на прямой AB точка M (**11**, слѣдствіе II). Такъ какъ C и D сходственныя точки, то прямая CD проходитъ чрезъ M, потому что отношеніе $MC : MD$ равно вышеприведенному. Такимъ же образомъ увидимъ, что отношеніе $MB : MA$ постоянно, такъ что M есть неподвижная точка и, слѣдовательно, она есть геометрическое мѣсто CD.

401. Построить кругъ, касающійся двухъ данныхъ круговъ и проходящій чрезъ данную точку.

Извѣстна степень центра подобія данныхъ круговъ относительно искомаго круга; слѣдовательно, можно опредѣлить еще одну точку послѣдняго, и задача приведется къ 238.

402. Построить кругъ, проходящій чрезъ данную точку и касающійся данной прямой и даннаго круга.

Эта задача есть частный случай предыдущей, потому что данную прямую можно принять за кругъ безконечно большого радіуса.

403. Построить кругъ, касающійся трехъ данныхъ круговъ.

Посредствомъ метода, показаннаго въ статьѣ о параллельномъ передвиженіи (см. стран. 52), эта задача приводится къ 401.

Она можетъ быть рѣшена еще и пріемомъ, весьма схожимъ съ тѣмъ, который былъ примѣненъ въ задачѣ 201. Тогда треугольникъ, который слѣдуетъ построить, есть именно тотъ, вершины котораго должны быть въ искомыхъ точкахъ касанія; стороны этого треугольника проходятъ чрезъ три изъ центровъ подобія данныхъ круговъ и если примемъ эти точки за центръ обратности и возьмемъ такія степени обратности, чтобы каждые два круга послѣ обращенія замѣнились одинъ другимъ, то каждый кругъ, послѣ трехъ обращеній, займетъ свое первоначальное положеніе. Нѣтъ, стало-быть, существенной разности между этою задачею и раньше рѣшенною.

Но самое простое и вмѣстѣ съ тѣмъ самое изящное получается, если примѣнимъ слѣдующую теорему: радикальная ось двухъ круговъ пересѣкаетъ третій кругъ, касательный къ двумъ первымъ, и одну изъ общихъ касательныхъ подъ равными углами. Дѣйствительно, отсюда слѣдуетъ, что касательныя къ искомому кругу въ точкахъ встрѣчи его съ радикальными осями данныхъ круговъ параллельны тѣмъ изъ общихъ касательныхъ къ послѣднимъ, которыя принадлежатъ къ той же системѣ касающихся круговъ, что и разсматриваемый. (Внѣшнія общія касательныя двухъ круговъ принадлежатъ къ той системѣ круговъ, которые касаются данныхъ одинаковымъ образомъ.) Пусть данные круги будутъ A, B и C. Разсматривая искомый кругъ и кругъ A какъ подобно расположенные съ центромъ подобія въ точкѣ касанія, то радикальныя оси круговъ A и B и круговъ A и C суть прямыя, сходственныя съ прямыми, изъ которыхъ одна соединяетъ точки касанія круга A съ общими касательными круговъ A и B, а другая соединяетъ точки касанія круга A съ общими касательными круговъ A и C. Эти двѣ прямыя пересѣкаются, слѣдовательно, въ точкѣ, сходственной съ радикальнымъ центромъ данныхъ круговъ, а потому прямая, соединяющая эти двѣ точки, проходитъ чрезъ искомую точку касанія*).

*) Эта знаменитая древняя задача носитъ названіе задачи Аполлонія Пергамскаго (у нѣмецкихъ авторовъ: Das Apollonische Tactionsproblem); она была рѣшена въ разныя времена нѣсколько разъ и надъ нею потрудились, между прочимъ, и такіе геніальные математики какъ Декартъ, Ньютонъ и Ферма (послѣдній обобщилъ ее въ такую: провести шаръ, касающійся трехъ данныхъ шаровъ, которыхъ величины и положенія извѣстны). Изъ всѣхъ этихъ рѣшеній наиболѣе простое дано въ 1814 г. французскимъ математикомъ Жергономъ (Gergonne),

Остальныя задачи, въ которыхъ кругъ опредѣляется тремя вышеупомянутыми условіями, могутъ быть всѣ разсматриваемы какъ частный случай этой задачи.

404. Въ данный треугольникъ ABC вписать три круга S_a, S_b и S_c такъ, чтобы каждый изъ нихъ касался двухъ другихъ и двухъ сторонъ треугольника.

Эта знаменитая задача рѣшена въ первый разъ италіанскимъ математикомъ Мальфатти († 1807); онъ вычислилъ радіусы искомыхъ круговъ и нашелъ для нихъ выраженія, которыя легко могутъ быть построены. Въ 1826 году Штейнеръ показалъ, что каждая изъ общихъ касательныхъ, проведенныхъ чрезъ точку касанія каждыхъ двухъ изъ искомыхъ круговъ, касается*) въ то же время двухъ изъ тѣхъ трехъ круговъ, которые могутъ быть вписаны въ треугольники, образуемые сторонами и бисекторами угловъ даннаго треугольника; эта теорема даетъ непосредственно простое построеніе. Штейнеръ не доказалъ однакожъ этой теоремы: онъ указалъ только, что она можетъ быть получена изъ цѣлаго ряда теоремъ, относящихся къ центрамъ подобія, радикальнымъ осямъ, радикальнымъ кругамъ и проч., которыя онъ въ то же время и далъ. Полное же доказательство, вполнѣ согласное съ указаніями Штейнера, дано въ первый разъ въ 1874 году Шрётеромъ, который прибѣгалъ однакожъ къ довольно сложнымъ обращеніямъ.

Здѣсь мы покажемъ построеніе Штейнера на основаніи элементарныхъ теоремъ.

который притомъ показалъ, что эта задача допускаетъ, вообще говоря, восемь рѣшеній. Подробности рѣшенія Жергона можно найти въ сочиненіяхъ: Chasles, Traité de géométrie supérieure, p. 543; Catalan, Théorèmes et problèmes de géom. élémentaire. 6 edit., p. 206; Rouché et de Comberousse, Traité de géométrie, 6 edit. P. I, p. 281, и въ нѣкоторыхъ другихъ. Но простѣйшимъ и дѣйствительно изящнымъ рѣшеніемъ слѣдуетъ признать предлагаемое здѣсь г. Петерсеномъ.

Замѣтимъ еще, что эта задача можетъ быть обобщена въ такую планиметрическую: построить кругъ, пересѣкающій три данные круга соотвѣтственно подъ данными углами. Это обобщеніе сдѣлано Miquel'емъ; рѣшеніе см. у Rouché et de Comberousse, P. 1, p. 288, а также «Вѣстникъ опытной физики» № 107, статья г. Котельникова. *Прим. переводч.*

*) Касается внутренно. *Прим. переводч.*

Означимъ точки касанія со сторонами треугольника такъ, чтобы, идя по контуру треугольника, встрѣчать послѣдовательно точки A, c_1, c_2; B, a_1, a_2; C, b_1, b_2 и пусть круги S_a и S_b касаются въ точкѣ γ, круги S_a и S_c въ β и S_b и S_c въ α. Кругъ, касающійся S_a и S_c въ β и проходящій чрезъ c_2, пересѣкаетъ AC въ точкѣ D и образуетъ съ AB и AC равные углы (9). Касательныя къ нему въ точкахъ c_2 и D пересѣкаются, слѣдовательно, на бисекторѣ $\angle A$ и образуютъ съ двумя сторонами треугольника вписываемый четыреугольникъ, такъ что дуга c_2D равна углу A. Кругъ $c_2\alpha\beta$ проходитъ также чрезъ c_1; пусть онъ пересѣкается съ кругомъ βDb_2 въ точкѣ E. Такъ какъ $\angle c_1Eb_2 = \angle c_1c_2\beta + \angle b_2D\beta = 180^\circ - \frac{1}{2}A$, то центръ круга c_1Eb_2 находится въ A. Кругъ $c_1c_2\alpha\beta$ пересѣкаетъ AB, AE и касательную въ c_2 по равнымъ хордамъ, потому что $Ac_1 = AE$ и кругъ пересѣкаетъ AB и $D\beta c_2$ подъ равными углами. Такимъ же образомъ убѣдимся, что кругъ $E\beta Db_2$ пересѣкаетъ AE и касательную въ D по равнымъ хордамъ. Пусть касательныя въ c_2 и D встрѣчаются въ F и пересѣкаютъ AE соотвѣтственно въ G и H. Изъ равенствъ $c_2F = DF$, $c_2G = EG$ и $DH = EH$ слѣдуетъ, что одна изъ сторонъ треугольника GFH равна суммѣ двухъ другихъ; поэтому точки G и H должны совпасть съ F, такъ что AEF дѣлитъ уголъ A пополамъ. Слѣдовательно кругъ $c_1c_2\alpha\beta$ пересѣкаетъ AB, AE и касательныя въ α и β подъ равными углами, а потому можно построить кругъ концентрическій этому, касающійся этихъ четырехъ прямыхъ.

Такимъ же образомъ докажемъ, что этотъ кругъ касается бисектора угла B и вмѣстѣ съ тѣмъ докажемъ теорему Штейнера.

Если станемъ разсматривать также и круги, касающіеся продолженій сторонъ, то будемъ имѣть другія рѣшенія задачи, которыя получаются изъ приведеннаго помощью простыхъ измѣненій.

Если въ этой задачѣ вмѣсто сторонъ треугольника взять три круга, то можно разсматривать обратную фигуру, получаемую если принять одну изъ точекъ пересѣченія двухъ какихъ-нибудь изъ круговъ за центръ обратности. Тогда легко доказать, что доказанная выше теорема распространяется и на этотъ случай, если вмѣсто бисекторовъ угловъ возьмемъ круги, дѣлящіе углы между каждыми двумя изъ данныхъ круговъ пополамъ (радикальные круги), и если замѣнимъ касательную въ β соотвѣтствующимъ ей въ обратной фигурѣ кругомъ и т. д.

О возможности рѣшенія данной задачи циркулемъ и линейкою.

Можетъ случиться, что какая-нибудь задача не рѣшается; причина этого можетъ заключаться либо въ томъ, что для ея рѣшенія употребленъ невѣрный пріемъ, либо въ томъ, что сама задача принадлежитъ къ числу такихъ, которыя не могутъ быть рѣшены помощью циркуля и линейки. Въ послѣдующемъ мы дадимъ средства опредѣлить, въ большинствѣ случаевъ, причины неразрѣшимости задачи.

Если задача можетъ быть рѣшена, то рѣшеніе ея, какъ бы сложно оно ни было, должно состоять изъ слѣдующихъ двухъ операцій: проведенія прямой чрезъ двѣ данныя точки и построенія круга по даннымъ радіусу и центру. Всякая же точка опредѣляется или пересѣченіемъ двухъ прямыхъ, или пересѣченіемъ прямой съ кругомъ, или же пересѣченіемъ двухъ круговъ. Представимъ теперь себѣ, что помощью формулъ и методовъ аналитической геомеріи мы, по мѣрѣ построенія точекъ, вычислили ихъ координаты, то все вычисленіе заключается въ рѣшеніи уравненій первой и второй степеней. Слѣдовательно, всякую построеніемъ опредѣленную величину можно выразить помощью данныхъ такъ, что найденныя величины не содержатъ другихъ ирраціональностей, кромѣ квадратныхъ корней; а такъ какъ, съ другой стороны, всякое такое выраженіе можетъ быть построено, то *условіе, необходимое и достаточное для возможности рѣшенія задачи помощью циркуля и линейки, заключается въ томъ, чтобы искомыя величины могли быть выражены въ данныхъ раціонально и квадратными корнями.*

Изслѣдованіе уравненій, которыя могутъ быть рѣшены помощью квадратныхъ корней, можно найти въ сочиненіяхъ автора: „Om Ligninger, der kunne loses ved Kvadratrod“ и „Theorie der algebraischen Gleichungen“. Kopenhagen, Andr. Fred. Host & Sohn. 1878. Chap. VII. Въ нихъ доказаны слѣдующія теоремы:

1. *За исключеніемъ коническихъ сѣченій нѣтъ ни одной кривой, точки пересѣченія которой съ какою-нибудь прямою могутъ быть построены помощью циркуля и линейки.*

2. *За исключеніемъ коническихъ сѣченій нѣтъ ни одной кривой, къ которой можно бы было провести изъ нѣкоторой точки касательныя помощью циркуля и линейки.*

3. *Если въ пучкѣ лучей точки пересѣченія какого-нибудь луча съ нѣкоторою кривою, не проходящею чрезъ вершину пучка, могутъ быть найдены помощью циркуля и линейки, то порядокъ этой кривой есть нѣкоторая степень 2 и въ пучкѣ должно быть, по крайней мѣрѣ, два луча, которыхъ точки пересѣченія съ кривою попарно совпадаютъ.*

Изъ этихъ теоремъ помощью преобразованій можно вывести новыя, а также распространить изслѣдованія на другія системы линій, сверхъ пучковъ лучей, на системы круговъ и проч. Что касается этихъ обобщеній, то отсылаемъ къ вышеупомянутымъ сочиненіямъ, здѣсь же приведемъ только слѣдующую теорему:

4. *Кромѣ круга и прямой нѣтъ другихъ кривыхъ, которыхъ точки пересѣченія съ произвольнымъ кругомъ могутъ быть опредѣлены помощью циркуля и линейки.*

Эту теорему, помощью метода обратности, легко вывести изъ первой изъ вышеупомянутыхъ теоремъ, такъ какъ кругъ и прямая единственныя кривыя, которыхъ обратныя кривыя, при всякомъ центрѣ обратности, суть коническія сѣченія.

Этихъ теоремъ въ большинствѣ случаевъ достаточно.

Допустимъ, напримѣръ, что въ задачѣ дана линія, положеніе которой совершенно произвольно, и что нѣкоторая точка X искомой фигуры должна упасть на эту линію. Если отбросимъ послѣднее условіе, то X будетъ имѣть геометрическое мѣсто, которое, на основаніи первой изъ вышеприведенныхъ теоремъ, должно быть коническое сѣченіе, если задача можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкою. Подобнымъ же образомъ примѣняется и вторая теорема, если искомая фигура содержитъ точку, положеніе которой произвольно.

Разсматривая особенно первый случай, мы увидимъ, что изъ предыдущихъ изложеній вытекаетъ родъ общаго графическаго метода рѣшенія задачъ. Отбросимъ линію и построимъ двѣ произвольныя фигуры, удовлетворяющія однакожъ прочимъ условіямъ; тогда получимъ два положенія точки X, которыя пусть будутъ X_1 и X_2. Прямая X_1X_2 пересѣкаетъ отброшенную линію въ нѣкоторой точкѣ, которая и будетъ искомою, если геометрическое мѣсто X есть прямая. Если же полученная точка не есть искомая, то пробуемъ дальше и получаемъ точку X_3. Если затѣмъ кругъ $X_1X_2X_3$ не пересѣкаетъ отброшенной линіи въ искомыхъ точкахъ, то двумя другими пробами опредѣлимъ еще двѣ точки X_4 и X_5. Тогда точки пересѣченія отброшенной линіи съ коническимъ сѣченіемъ, проходящимъ чрезъ эти пять точекъ, могутъ быть опредѣлены помощью циркуля и линейки. Если же и эти точки не будутъ искомыя, то задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкою. Во второмъ случаѣ примѣняется аналогичный пріемъ.

Когда задача рѣшена циркулемъ и линейкою, то на основаніи вышеизложенныхъ теоремъ можно заключить, что геометрическія мѣста извѣстныхъ точекъ суть коническія сѣченія; затѣмъ уже вообще не трудно будетъ различить какія это коническія сѣченія — круги или прямыя.

Приложенія.

405. Чрезъ данную точку провести прямую такъ, чтобы стороны даннаго угла отсѣкали на ней отрѣзокъ данной длины.

Отбросимъ на время одну сторону угла, тогда геометрическое мѣсто точки, сдѣлавшейся отъ этого свободною, есть конхоида. Такъ какъ положеніе отброшенной прямой совершенно произвольное и отъ конхоиды не зависитъ, то задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкою. Для нѣкоторыхъ положеній точки (напримѣръ, когда она находится на бисекторѣ угла) прямая можетъ занять такое особенное положеніе относительно конхоиды, что задача можетъ быть рѣшена.

406. Изъ двухъ постоянныхъ точекъ проведены прямыя къ произвольной точкѣ окружности даннаго круга. Доказать, что геометрическое мѣсто прямой, соединяющей двѣ другія точки пересѣченія проведенныхъ прямыхъ съ окружностью, есть коническое сѣченіе.

Эта теорема слѣдуетъ изъ того, что задача 201 можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкою.

407. Данный треугольникъ помѣстить такъ, чтобы каждая изъ его вершинъ находилась на одной изъ трехъ данныхъ окружностей круга.

Задача не можетъ быть рѣшена, ибо, отбросивъ одинъ изъ круговъ, освободившаяся отъ этого вершина опишетъ геометрическое мѣсто, которое не можетъ быть ни кругомъ, ни прямою. Въ частномъ случаѣ, когда оба круга суть прямыя и когда треугольникъ есть также прямая, геометрическое мѣсто, какъ легко видѣть, есть эллипсъ.

408. Построить треугольникъ по a, c и $B-C$.

Построимъ BC и проведемъ изъ B двѣ прямыя такъ, чтобы одна изъ нихъ составляла съ BC уголъ, равный половинѣ даннаго, а вторая была бы перпендикулярна къ первой; тогда задача приводится къ слѣдующей: чрезъ C провести прямую, отъ которой стороны прямого угла отсѣкали бы часть, равную $2c$. Такъ какъ эта задача есть частный случай 405, то изслѣдуемъ ее особенно. Отбросивъ данную точку, прямая $2c$, скользя по сторонамъ прямого угла, произведетъ гипоциклоиду. А такъ какъ a и данный уголъ могутъ быть измѣнены такъ, что C получитъ произвольное положеніе, при чемъ гипоциклоида не измѣнится, то задача не можетъ быть рѣшена помощью циркуля и линейки.

409. Данный уголъ раздѣлить на три равныя части.

Эту задачу легко превратить въ такую: чрезъ данную на окружности круга точку A провести прямую, встрѣчающую окружность въ точкѣ X и произвольно данный діаметръ въ точкѣ Y, такъ, чтобы XY была равна радіусу*). Если отбросимъ діаметръ, то геометрическое мѣсто точки Y есть кривая четвертаго порядка**), имѣющая двойныя точки въ безконечно удаленныхъ мнимыхъ круговыхъ точкахъ и въ точкѣ A

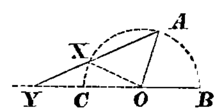
---

*) Пусть AOB есть данный уголъ, O — центръ произвольнаго круга, BC — одинъ изъ его діаметровъ и пусть чрезъ A проведена сѣкущая такъ, что XY равна радіусу. Тогда

$\angle AOB = \angle A + \angle Y$; $\angle A = \angle AXO$

$\angle AXO = \angle Y + \angle XOY = 2\angle Y$ ибо $YX = XO$

слѣд. $\angle AOB = 3\angle Y$, откуда $\angle Y = \frac{\angle AOB}{3}$.



Примѣч. переводч.

**) Это есть конхоида. *Примѣч. переводч.*

и проходящая чрезъ центръ круга. Такъ какъ діаметры образуетъ пучокъ, вершина котораго не есть особенная точка кривой, то необходимое условіе для рѣшенія задачи состоитъ въ томъ, чтобы порядокъ кривой былъ на единицу больше нѣкоторой степени 2. (См. вышеупомянутыя сочиненія.) Поэтому задача не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкою.

Такимъ образомъ, мы доказали не возможность рѣшенія циркулемъ и линейкою этой знаменитой древней задачи; но нельзя сказать того же о другой, не менѣе знаменитой, задачѣ, извѣстной подъ именемъ квадратуры круга. Въ послѣдней задача сводится къ тому, чтобы доказать, что π не можетъ быть выражено квадратными корнями; до сихъ поръ однакожъ никому не удалось еще доказать это предложеніе*).

410. Даны точка P и два круга; провести чрезъ P прямую и по касательной къ каждому кругу такъ, чтобы P и обѣ точки касанія были срединами сторонъ треугольника, образуемаго этими тремя прямыми.

Пусть X и Y будутъ точки касанія. Треугольникъ XYP слѣдуетъ построить такъ, чтобы высоты изъ X и Y проходили чрезъ центры круговъ. Вращаемъ около P кругъ, проходящій чрезъ X, такъ, чтобы онъ упалъ на кругъ, проходящій чрезъ Y; тогда X упадетъ въ точку X_1, такъ что PY и PX_1 образуютъ равные углы съ прямою, соединяющею P съ центромъ круга. Радіусъ, проходящій чрезъ X_1, образуетъ съ PY извѣстный уголъ, ибо до вращенія онъ былъ перпендикуляренъ къ PY, а затѣмъ онъ былъ вращаемъ на извѣстный уголъ. Если теперь постараемся построить треугольникъ PX_1O, гдѣ O есть центръ круга, то задача приводится къ 408 и потому не можетъ быть рѣшена циркулемъ и линейкою.

---

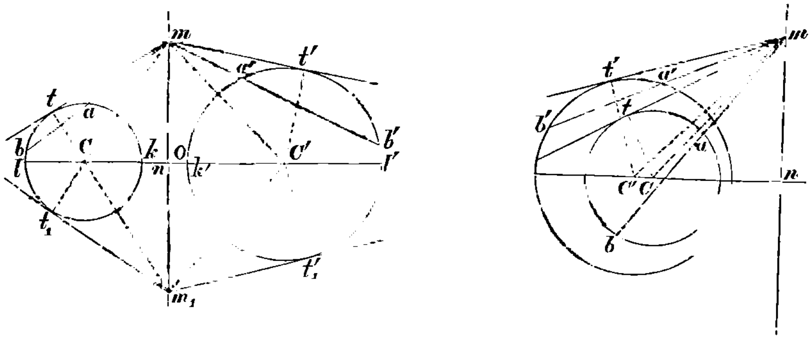
*) Линдеманъ доказалъ, что π не можетъ быть корнемъ алгебраическаго уравненія съ раціональными коэфиціентами. См. Rouché et de Comberousse, Traité de géométrie, 6 edit, p. 421. Note II: Sur l'impossibilite de la quadrature du cercle. *Примѣч. перев.*

О РАДИКАЛЬНОЙ ОСИ.

Ѳ. П. Крутикова.

Если имѣемъ на плоскости два непересѣкающіеся круга, то на той же плоскости можно всегда найти такую точку, что отрѣзки касательныхъ, проведенныхъ изъ нея къ обоимъ кругамъ, будутъ равны. Пусть m есть такая точка (фиг. 1), т.-е. пусть

Фиг. 1.



$$mt = mt'. \tag{1}$$

Докажемъ, что точка m не единственная, имѣющая вышеупомянутое свойство (1), и что такихъ точекъ множество. Замѣтимъ, во-первыхъ, что разность квадратовъ разстояній точки m отъ центровъ C и C' равна разности квадратовъ радіусовъ; это видно изъ треугольниковъ mCt и $mC't'$:

$$\overline{mC}^2 = \overline{mt}^2 + r^2,$$

$$\overline{mC'}^2 = \overline{mt'}^2 + r'^2,$$

откуда, въ силу равенства (1),

$$\overline{mC'}^2 - \overline{mC}^2 = r'^2 - r^2.$$

Во-вторыхъ, опустивъ изъ m перпендикуляръ на линію центровъ, получимъ въ пересѣченіи постоянную точку n, ибо, какъ видно изъ треугольниковъ mCn и $mC'n$,

$$\overline{nC'}^2 - \overline{nC}^2 = \overline{mC'}^2 - \overline{mC}^2 = r'^2 - r^2, \qquad (2)$$

и эта постоянная точка находится въ постоянномъ разстояніи отъ средины линіи центровъ; въ самомъ дѣлѣ, назвавъ разстояніе между центрами чрезъ $2d$, если O есть средина линіи центровъ, будемъ имѣть*):

$$nC' = nO + d,$$
$$nC = d - nO$$

и, на основаніи равенства (2),

$$\overline{nC'}^2 - \overline{nC}^2 = (nO + d)^2 - (d - nO)^2 = r'^2 - r^2,$$

откуда
$$nO = \frac{r'^2 - r^2}{2d}. \qquad (3)$$

Слѣдовательно, если точка m удовлетворяетъ условію (1), то опущенный изъ нея на линію центровъ перпендикуляръ проходитъ чрезъ постоянную точку, находящуюся на линіи центровъ въ постоянномъ разстояніи отъ средины ея.

Докажемъ, что всякая точка этого перпендикуляра имѣетъ свойство (1). Возьмемъ на прямой mn произвольную точку m_1, проведемъ касательныя m_1t_1 и m_1t_1' и построимъ треугольники m_1Ct_1 и $m_1C't_1'$; тогда

$$\overline{m_1C'}^2 - \overline{m_1C}^2 = r'^2 - r^2 + (\overline{m_1t_1'}^2 - \overline{m_1t_1}^2),$$

а такъ какъ первая разность во второй части равенства есть $\overline{nC'}^2 - \overline{nC}^2$, то

$$\overline{m_1t_1'}^2 - \overline{m_1t_1}^2 = (\overline{m_1C'}^2 - \overline{nC'}^2) - (\overline{m_1C}^2 - \overline{nC}^2) = 0,$$

или
$$m_1t_1' = m_1t_1,$$

т.-е. касательныя, проведенныя къ обоимъ кругамъ изъ произвольной точки прямой, перпендикулярной къ линіи центровъ и проходящей чрезъ постоянную точку n, равны.

Итакъ, *для двухъ непересѣкающихся круговъ существуетъ прямая, перпендикулярная къ линіи центровъ и пересѣкающая послѣднюю въ постоянномъ разстояніи отъ средины ея, которая имѣетъ такое свойство, что касательныя, проведенныя изъ всякой ея точки къ обоимъ кругамъ, равны.*

---

*) Замѣтимъ, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ абсолютными разстояніями, а потому не обращаемъ вниманія на знаки отрѣзковъ.

Эта прямая называется *радикальною осью* *) круговъ.

Проведемъ изъ точки m сѣкущія къ тому и другому кругу, тогда

$$ma.mb = \overline{mt}^2,$$

$$ma'.mb' = \overline{mt'}^2,$$

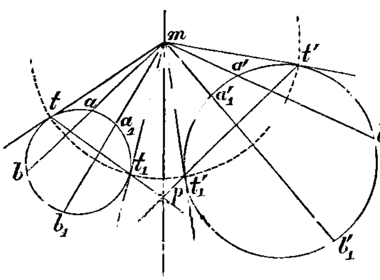
но $mt = mt'$, слѣдовательно

$$ma.mb = ma'.mb'.$$

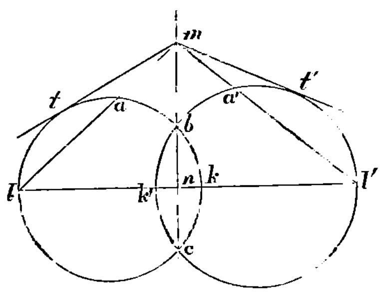
Это, какъ не трудно видѣть, есть свойство всякой точки радикальной оси, и если чрезъ любую изъ точекъ ея проведемъ сѣкущія (фиг. 2), то

$$ma.mb = ma'.mb' = ma_1.mb_1 = ma_1'.mb_1' = \ldots = \overline{mt}^2.$$

Фиг. 2.



Фиг. 3.



Если произведеніе отрѣзковъ (отсчитываемыхъ отъ данной точки до точекъ пересѣченія) на каждой сѣкущей, проведенной чрезъ данную точку къ данному кругу, условимся, для краткости выраженія, называть *степенью* данной точки относительно даннаго круга, то радикальную ось можно опредѣлить какъ *геометрическое мѣсто точекъ, имѣющихъ равныя степени относительно двухъ данныхъ круговъ* **).

Пусть оба круга пересѣкаются. Соединивъ (фиг. 3) какую-нибудь точку m ихъ общей хорды съ точками l и l', будемъ имѣть:

$$ma.ml = mb.mc \quad \text{и} \quad ma'.ml' = mb.mc,$$

---

*) Названіе „радикальная ось", по свойству отрѣзка касательной выражаться посредствомъ квадратнаго радикала, предложено въ 1813 г. Gaultier (см. Chasles, Traité de géométrie supérieure). По Плюкеру она называется *хордальною прямою* (см. Plüker, Analytisch-geometrische Entwickelungen).

**) По этому свойству нѣмецкіе авторы называютъ ее прямою равныхъ степеней (Potenzlinie).

откуда

$$ma.ml = ma'.ml'$$

и, слѣдовательно,

$$mt = mt',$$

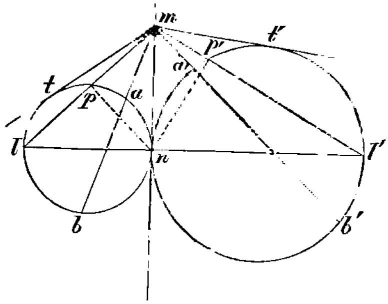
т.-е. общая хорда есть радикальная ось.

Точка n, пересѣченіе радикальной оси съ линіею центровъ, имѣетъ свойство:

$$nk.nl = nk'.nl' = \left(\frac{bc}{2}\right)^2.$$

Радикальная ось двухъ касающихся круговъ есть ихъ общая касательная. Въ самомъ дѣлѣ, пусть (фиг. 4) два круга имѣютъ внѣшнее касаніе; проведя изъ какой-нибудь точки m общей касательной сѣкущія, будемъ имѣть:

Фиг. 4.



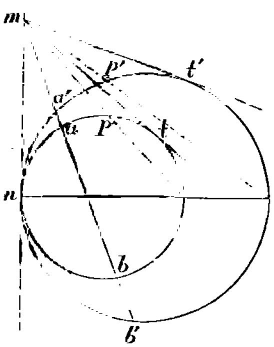
$$ma.mb = ma'.mb' = \overline{mn}^2$$

и, слѣдовательно,

$$mt = mt' = mn.$$

Отсюда видно, что точки t, t' и n лежатъ на одномъ кругѣ, имѣющемъ центръ въ точкѣ m и касательномъ къ линіи центровъ въ точкѣ n. Соединимъ точку m съ точками l и l'; тогда точки m, n, p и p' будутъ лежать на одной окружности, касательной къ линіи центровъ въ точкѣ n. Дѣйствительно, такъ какъ углы mpn и $mp'n$ прямые, то принявъ mn за діаметръ круга, на окружности его будутъ находиться вершины p и p' прямыхъ угловъ, а вмѣстѣ съ тѣмъ и точки m и n.

Фиг. 5.



Въ случаѣ внутренняго касанія имѣемъ также (фиг. 5)

$$ma.mb = ma'.mb' = \overline{mn}^2,$$

т.-е.

$$mt = mt' = mn,$$

и точки m, n, p и p' лежатъ на окружности круга, касательнаго къ линіи центровъ въ точкѣ n и имѣющаго *mn* своимъ діаметромъ. Также и точки n, t и t' лежатъ на другой окружности, имѣющей центръ въ m и касательной къ линіи центровъ въ той же точкѣ n.

Итакъ, какое бы ни было взаимное положеніе двухъ круговъ на плоскости, для нихъ всегда существуетъ радикальная ось и притомъ только одна. Въ самомъ дѣлѣ, точка n, какъ и всякая точка радикальной оси, обладаетъ свойствомъ (см. фиг. 1)

$$nk.nl = nk'.nl';$$

допустивъ существованіе другой радикальной оси, пересѣкающей линію центровъ въ точкѣ n', необходимо допустить и равенство

$$n'k.n'l = n'k'.n'l',$$

которое, въ виду справедливости перваго равенства, немыслимо. Точно такъ же немыслимо существованіе двухъ общихъ хордъ или двухъ общихъ касательныхъ.

Изложимъ теперь нѣкоторыя свойства радикальной оси двухъ непересѣкающихся круговъ.

I. Изъ равенства (см. фиг. 1)

$$nk.nl = nk'.nl',$$

гдѣ $nl' > nl$, слѣдуетъ, что $nk' < nk$, т.-е. *радикальная ось лежитъ ближе къ большому кругу*. Если оба круга равны, то радикальная ось проходитъ чрезъ средину линіи центровъ, какъ видно изъ равенства

$$nO = \frac{r'^2 - r^2}{2d},$$

вторая часть котораго въ этомъ частномъ случаѣ обращается въ нуль.

II. Изъ треугольниковъ mCn и $mC'n$ имѣемъ:

$$\operatorname{tang} Cmn = \frac{Cn}{mn}, \quad \operatorname{tang} C'mn = \frac{C'n}{mn},$$

откуда

$$\frac{\operatorname{tang} Cmn}{\operatorname{tang} C'mn} = \frac{Cn}{C'n} = \text{пост.}$$

т.-е. *отношеніе тангенсовъ угловъ, образуемыхъ радикальною осью съ прямыми, соединяющими какую-нибудь ея точку съ цент-*

рами круговъ, есть величина постоянная, равная отношенію разстояній постоянной точки n отъ соотвѣтственныхъ центровъ круговъ.

III. Мы уже видѣли, что

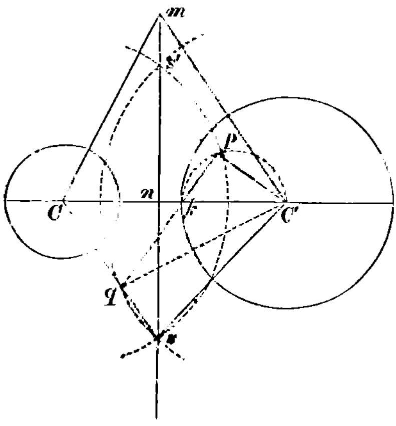
$$\overline{C'm_1}^2 - \overline{Cm_1}^2 = \overline{C'm}^2 - \overline{Cm}^2 = r^2 - r'^2 = \text{пост.}$$

т.-е. *разность квадратовъ разстояній каждой точки радикальной оси отъ центровъ круговъ есть величина постоянная, равная разности квадратовъ соотвѣтственныхъ радіусовъ.*

Обратно: IV. *Если разность квадратовъ разстояній точки m отъ центровъ двухъ круговъ равна разности квадратовъ соотвѣтственныхъ радіусовъ этихъ круговъ, то точка m лежитъ на ихъ радикальной оси.*

Дѣйствительно, пусть дано

Фиг. 6.



$$\overline{C'm}^2 - \overline{Cm}^2 = r'^1 - r^2;$$

проведя изъ m касательныя mt и mt', будемъ имѣть:

$$\overline{mt'}^2 + r'^2 - (\overline{mt}^2 + r^2) = r'^2 - r^2,$$

откуда

$$mt = mt',$$

т.-е. точка m есть одна изъ точекъ радикальной оси.

На этомъ свойствѣ основано слѣдующее построеніе радикальной оси (фиг. 6). На бóльшемъ радіусѣ опишемъ полукругъ, въ которомъ отложимъ прямую kp, равную меньшему радіусу; продолживъ эту прямую, построимъ произвольный прямоугольный треугольникъ qpC', затѣмъ изъ C' радіусомъ, равнымъ гипотенузѣ, и изъ C радіусомъ, равнымъ катету qp, опишемъ круги, общая хорда которыхъ и есть искомая радикальная ось. Для доказательства соединимъ какую-нибудь точку m на хордѣ ss' съ центрами; тогда

$$\overline{C'm}^2 - \overline{Cm}^2 = \overline{C's}^2 - \overline{Cs}^2 = \overline{C'q}^2 - \overline{qp}^2 = \overline{C'p}^2 = \overline{C'k}^2 - \overline{pk}^2 = r'^2 - r^2 = \text{пост.}$$

Замѣтимъ, что произвольную точку q всегда слѣдуетъ выбирать такъ, чтобы круги, описанные радіусами qC' и qp, пересѣкались.

V. *Четыре точки пересѣченія круговъ съ двумя сѣкущими, проведенными изъ какой-нибудь точки радикальной оси, лежатъ на одной окружности.*

Это слѣдуетъ изъ того, что четыреугольникъ $aba'b'$ (фиг. 1) есть четыреугольникъ, вписанный въ кругѣ, потому что $ma \cdot mb = ma' \cdot mb'$.

Обратно: VI. *Если концы двухъ хордъ въ томъ и другомъ кругѣ лежатъ на одной окружности, то при продолженіи хорды пересѣкаются на радикальной оси.*

Пусть точка m есть пересѣченіе хордъ ab и $a'b'$, лежащихъ на одной окружности, тогда равенство

$$ma \cdot mb = ma' \cdot mb'$$

влечетъ за собой равенство касательныхъ

$$mt = mt',$$

а это показываетъ, что точка m лежитъ на радикальной оси.

Отсюда вытекаетъ весьма удобное построеніе радикальной оси: пересѣчемъ данные круги третьимъ, продолжимъ общія хорды и изъ точки встрѣчи ихъ опустимъ перпендикуляръ на линію центровъ данныхъ круговъ. Этотъ перпендикуляръ и есть радикальная ось.

VII. *Четыре точки касанія касательныхъ, проведенныхъ къ даннымъ кругамъ изъ точки на радикальной оси, лежатъ на одной окружности, центръ которой находится въ точкѣ выхода касательныхъ* (см. фиг. 2).

Это слѣдуетъ изъ свойства касательныхъ и радикальной оси:

$$mt = mt_1 = mt' = mt_1'$$

VIII. *Поляры всякой точки радикальной оси пересѣкаются на этой же оси.*

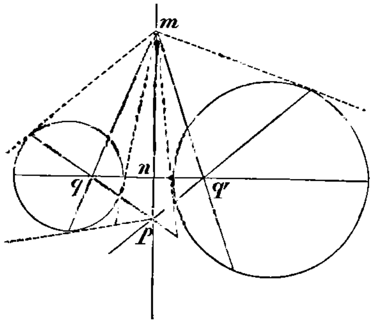
Возьмемъ на радикальной оси произвольную точку m и проведемъ четыре касательныхъ; по предыдущей теоремѣ, точки t, t_1, t' t_1' (см. фиг. 2) лежатъ на одной окружности; поэтому, если продолжимъ поляры tt_1 и $t't_1'$, до встрѣчи въ точкѣ p, то

$$pt_1 \cdot pt = pt_1' \cdot pt'$$

а это показываетъ, что точка p лежитъ на радикальной оси.

IX. Поляры точки n, какъ легко видѣть, перпендикулярны къ линіи центровъ, т.-е. параллельны радикальной оси, а потому пересѣкаются съ нею на безконечности. Соединивъ точку m съ точками q и q' пересѣченія поляръ съ линіею центровъ, будемъ имѣть (см. фиг. 7)

Фиг. 7.



$$\overline{mq'}^2 - \overline{mq}^2 = \overline{nq'}^2 - \overline{nq}^2$$

и

$$\frac{\operatorname{tang} q'mn}{\operatorname{tang} qmn} = \frac{nq'}{nq}.$$

Продолжимъ поляры до пересѣченія въ p, получимъ

$$\overline{pq'}^2 - \overline{pq}^2 = \overline{nq'}^2 - \overline{nq}^2$$

и

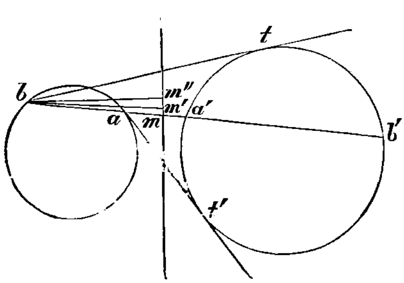
$$\frac{\operatorname{tang} q'pn}{\operatorname{tang} qpn} = \frac{nq'}{nq}.$$

Сравнивая эти четыре равенства, мы видимъ, что точка p относительно точки m то же, что точка m относительно точки p, а потому поляры точки p пересѣкаются въ точкѣ m. Слѣдовательно *поляры всякаго полюса, находящагося на радикальной оси, пересѣкаются на этой же оси въ точкѣ, поляры которой встрѣчаются въ первомъ полюсѣ.*

Пересѣчемъ оба круга сѣкущею (фиг. 8), которая по необходимости пересѣчетъ и радикальную ось, тогда

$$ma \cdot mb = ma' \cdot mb',$$

Фиг. 8.



или

$$mb : mb' = ma' : ma, \qquad (\alpha)$$

откуда

$$mb + mb' : mb' = ma' + ma : ma,$$

а также

$$mb + mb' : mb = ma' + ma : ma',$$

т.-е.

$$bb' : mb' = aa' : ma$$

и

$$bb' : mb = aa' : ma',$$

или:

$$\frac{bb'}{aa'} = \frac{mb'}{ma} = \frac{mb}{ma'}. \qquad (\beta)$$

Отсюда также находимъ

$$\frac{\overline{bb'}^2}{\overline{aa'}^2}=\frac{mb\,.\,mb'}{ma\,.\,ma'}. \qquad (\beta')$$

Путемъ подобныхъ же преобразованій основной пропорціи (α) легко получаемъ:

$$\frac{ba'}{ab'}=\frac{mb}{mb'}, \qquad (\gamma)$$

а также

$$\frac{ba'\,.\,bb'}{aa'\,.\,ab'}=\frac{bm}{am} \qquad (\delta)$$

и

$$\frac{b'a\,.\,b'b}{a'a\,.\,a'b}=\frac{b'm}{a'm}. \qquad (\delta')$$

Всѣ эти выраженія свойствъ общей сѣкущей въ связи со свойствомъ радикальной оси (α), (β), (β'), (γ), (δ) и (δ') можно было бы изложить въ словесной формѣ какъ отдѣльныя теоремы.

XI. Проведя изъ точекъ b и a касательныя ко второму кругу, на основаніи равенства (δ) будемъ имѣть

$$\frac{\overline{bt}^2}{\overline{at'}^2}=\frac{bm}{am}$$

и, если опустимъ изъ тѣхъ же точекъ перпендикуляры на радикальную ось,

$$\frac{bm}{am}=\frac{bm''}{am'};$$

слѣдовательно

$$\frac{\overline{bt}^2}{\overline{at'}^2}=\frac{bm''}{am'},$$

или

$$\frac{\overline{bt}^2}{bm''}=\frac{\overline{at'}^2}{am'}=\text{пост.}$$

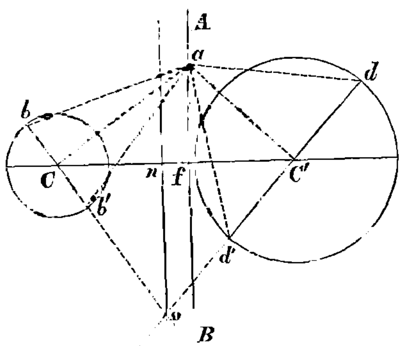
Отсюда вытекаетъ слѣдующая теорема:

Если изъ какой-нибудь точки на одномъ кругѣ проведемъ касательную къ другому и перпендикуляръ къ радикальной *оси, то отношеніе квадрата касательной къ перпендикуляру есть величина постоянная.*

XII. Проведемъ прямую, параллельную радикальной оси и пересѣкающую линію центровъ въ такомъ разстояніи отъ одного изъ центровъ, въ какомъ находится радикальная ось отъ другого центра; эта прямая имѣетъ свойство, что *всякая ея точка есть центръ круга, пересѣкающаго данные круги соотвѣтственно по діаметрамъ.*

Проведемъ прямую AB (фиг. 9) перпендикулярно къ линіи центровъ такъ, чтобы $fC' = nC$, тогда $fC = nC'$; взявъ на этой прямой произвольную точку a, соединимъ ее съ центрами круговъ и проведемъ въ послѣднихъ діаметры соотвѣтственно перпендикулярные къ aC и aC'. Тогда

Фиг. 9.



$$\overline{ad}^2 - \overline{ab}^2 = \overline{aC'}^2 - \overline{aC}^2 + r'^2 - r^2.$$

Но $\overline{aC'}^2 - \overline{aC}^2 = \overline{fC'}^2 - \overline{fC}^2 = \overline{nC}^2 - \overline{nC'}^2 = r^2 - r'^2$, слѣдовательно

$$ab = ab' = ad = ad',$$

т.-е. точки b, b', d, d' лежатъ на окружности, имѣющей центромъ точку a.

Продоливъ діаметры bb' и dd' до встрѣчи въ точкѣ O, будемъ имѣть

$$Ob' \,.\, Ob = Od' \,.\, Od,$$

т.-е. точка встрѣчи обоихъ діаметровъ лежитъ на радикальной оси.

Изъ построенія видно, что другой линіи, которая обладала бы тѣмъ же свойствомъ какъ прямая AB, провести нельзя, и потому

Геометрическое мѣсто центровъ круговъ, пересѣкающихъ два данные круга, каждый по діаметру, есть прямая, параллельная радикальной оси, отстоящая отъ одного изъ *центровъ на разстоянiе, равное разстоянiю радикальной оси отъ другого центра; геометрическое мѣсто пересѣченiя соотвѣтственныхъ дiаметровъ есть радикальная ось.*

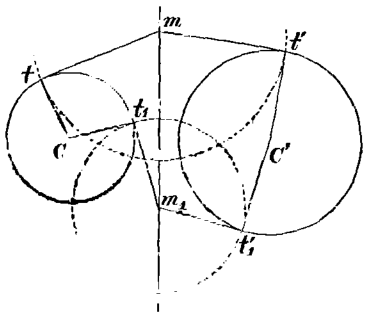
XIII. *Центры круговъ, пересѣкающихъ два данные круга подъ прямыми углами, лежатъ на радикальной оси данныхъ круговъ*).*

Пусть кругъ m пересѣкаетъ данные круги C и C' подъ прямыми углами, тогда (см. фиг. 10).

$$\angle Ctm = \angle C't'm = \frac{\pi}{2},$$

а это показываетъ, что mt есть касательная къ кругу C и

Фиг. 10.



mt' — касательная къ кругу C'. Прямыя mt и mt' равны какъ радiусы одного круга, слѣдовательно точка m находится на радикальной оси круговъ C и C'.

*) Угломъ пересѣкающихся дугъ называется уголъ между касательными, проведенными чрезъ точку пересѣченiя къ той и другой дугѣ; не трудно видѣть, что этотъ уголъ равенъ углу между радiусами, проходящими чрезъ точку пересѣченiя дугъ.

СОДЕРЖАНІЕ.