



П Я Т Ь

К О Л Е Ц

Н. Х. Агаханов О. К. Подлипский

МАТЕМАТИКА РАЙОННЫЕ ОЛИМПИАДЫ



ПРОСВЕЩЕНИЕ
ИЗДАТЕЛЬСТВО



Н. Х. Агаханов О. К. Подлипский

МАТЕМАТИКА РАЙОННЫЕ ОЛИМПИАДЫ

6–11 классы

Москва
«Просвещение»
2010

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
А23

Серия «Пять колец» основана в 2007 г.

Агаханов Н. Х.

A23 Математика. Районные олимпиады. 6—11 классы / Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский. — М.: Просвещение, 2010. — 192 с. : ил. — (Пять колец). — ISBN 978-5-09-018951-4.

В книге содержатся задачи районных олимпиад по математике для школьников Московской области, проходивших в 1994—2008 учебных годах. Задачи снабжены подробными решениями. В книге также приведены классические олимпиадные задачи, разбитые по основным темам олимпиадной математики.

Книга предназначена для учителей математики, руководителей кружков и факультативов, школьников, рекомендуется для подготовки к математическим олимпиадам начальных уровней.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21

Учебное издание

Серия «Пять колец»

**Агаханов Назар Хангельдыевич
Подлипский Олег Константинович**

**МАТЕМАТИКА
РАЙОННЫЕ ОЛИМПИАДЫ**

6—11 классы

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова. Редактор Н. Б. Грызлова. Младший редактор Е. В. Трошко. Художники О. П. Богомолова, Е. Н. Грудина. Художественный редактор О. П. Богомолова. Компьютерная графика О. Ю. Туникова. Технический редактор и верстальщик Н. В. Лукина. Корректоры А. К. Райхчин, В. Г. Голуб

Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Подписано в печать с оригинал-макета 18.08.09. Формат 60 × 90¹/16. Бумага писчая. Гарнитура Школьная. Печать офсетная. Уч.-изд. л. 11,38. Тираж 5000 экз. Заказ № 23749 (к. д.).

Открытое акционерное общество «Издательство «Просвещение». 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Открытое акционерное общество «Смоленский полиграфический комбинат». 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1.



ISBN 978-5-09-018951-4

© Издательство «Просвещение», 2010
© Художественное оформление.
Издательство «Просвещение», 2010
Все права защищены

От составителей

В этом сборнике приведены условия и решения задач, предлагающихся на II (районном, городском) этапе Всероссийской олимпиады школьников по математике в 1994—2008 гг. в Московской области.

Составителями заданий для *районного этапа* в эти годы были члены жюри Московской областной олимпиады — преподаватели, аспиранты и студенты Московского физико-технического института, работавшие одновременно в физико-математической школе № 5 (с 2008 г. физико-математического лицея № 5) г. Долгопрудного: Н. Х. Агаханов, А. Ю. Калинин, Р. Н. Караваев, А. Н. Коровин, А. С. Кочерова, О. К. Подлипский, С. В. Резниченко, Д. А. Терёшин, Б. В. Трушин. Многие из приведенных задач являются новыми и были специально придуманы для районных олимпиад. В то же время очевидно, что для начальных этапов Всероссийской олимпиады нет необходимости в абсолютной новизне предлагаемых задач. Поэтому часть задач ранее встречались в других сборниках либо были предложены в качестве творческого взаимообмена членами областных жюри других регионов России (в первую очередь Кировской области, имеющей богатые традиции по проведению различных математических соревнований для школьников).

При знакомстве с данными сборниками для учителей в первую очередь должны представлять интерес компоновка заданий районных олимпиад, начинающихся с простых задач со «школьной» формулировкой и заканчивающихся одной-двумя достаточно сложными задачами. Опыт проведения по этим заданиям районных олимпиад в г. Долгопрудном и других городах Московской области показал, что с первыми двумя задачами в варианте успешно справляются практически все участники, а полностью выполнить все задания в каждом классе удается одному-двум участникам городской олимпиады. Следует отметить, что авторы сборника стремились к его максимальной доступности, снабдив решениями даже простые задачи. Это позволяет использовать указанный материал как учителям на факультативах, так и учащимся в процессе подготовки к олимпиадам.

Наиболее сложные задачи олимпиад отмечены звездочкой.

Авторы благодарят директора физико-математического лицея № 5 г. Долгопрудного Ермакову Евгению Григорьевну, а также всех завучей, создавших замечательные условия для творческой работы преподавателей лицея.

Авторы также выражают признательность Борису Викторовичу Трушину, сделавшему ряд ценных замечаний при подготовке этой книги.



ОЛИМПИАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

В этом разделе приведены задачи, большая часть из которых стала олимпиадной классикой. Задачи разбиты по основным темам, встречающимся на олимпиадах начального уровня.



1. Четность

- Можно ли разменять 125 рублей при помощи 50 купюр достоинством в 1, 3 и 5 рублей? (*Эта задача появилась в то время, когда в ходу были купюры достоинством в 1, 3, 5, 10, 25, 50 и 100 рублей.*)

Ответ. Нельзя.

Заметим, что сумма четного числа нечетных чисел четна, а число 125 нечетное, поэтому разменять 125 рублей требуемым образом не удастся.

- Вдоль забора растут 8 кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 225 ягод?

Ответ. Не может.

Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на восьми кустах равно сумме четырех нечетных чисел, т. е. числу четному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 225 ягод.

- Можно ли заменить звездочки в равенстве

$$1 * 2 * \dots * 10 = 0$$

на знаки «+» и «-» так, чтобы равенство стало верным?

Ответ. Нельзя.

Заменив все звездочки на плюсы, мы получим, что значение выражения в левой части равно 55. Начнем теперь заменять некоторые плюсы на минусы. При этом каждый раз значение выражения будет уменьшаться на четное число, т. е. значение выражения,

стоящего слева, всегда будет нечетным числом. Значит, четное число 0 мы получить не сможем.

4. В королевстве 1001 город. Король приказал проложить между городами дороги так, чтобы из каждого города выходило ровно 7 дорог. Смогут ли подданные справиться с приказом короля?

Ответ. Не смогут.

Подсчитаем количество дорог, которое необходимо проложить в королевстве. Из каждого города должно выходить 7 дорог. Всего городов 1001, т. е. всего должно выходить $1001 \cdot 7$ дорог. Но при этом каждую дорогу мы посчитали дважды, т. е. на самом деле в королевстве должно быть проложено $\frac{1001 \cdot 7}{2}$ дорог, чего сделать, очевидно, не удастся.

5. Можно ли выпуклый 13-угольник разрезать на параллелограммы?

Ответ. Нельзя.

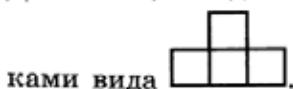
Предположим, что мы смогли разрезать выпуклый 13-угольник на параллелограммы. Пусть a_1 — сторона параллелограмма P_1 , лежащая на стороне 13-угольника M , a_2 — параллельная ей сторона. Если a_2 не является стороной M , то на прямой l , содержащей a_2 , по другую сторону от параллелограмма P_1 расположен параллелограмм P_2 , сторона которого лежит на l . Продолжая аналогично, мы дойдем до параллелограмма со стороной, лежащей на M . Значит, стороны 13-угольника разбиваются на пары параллельных. Однако их нечетное число — противоречие.

6. Можно ли все клетки таблицы 9×2000 заполнить натуральными числами так, чтобы сумма чисел в любом столбце и сумма чисел в любой строке были бы простыми числами?

Ответ. Нельзя.

Предположим, что мы сумели расставить числа требуемым образом. Заметим, что сумма чисел в любом столбце и в любой строке больше двух. Поэтому все соответствующие суммы нечетны, так как они простые и больше двух. Тогда сумма всех чисел в таблице, с одной стороны, равна сумме девяти простых нечетных чисел, т. е. нечетна, а с другой стороны, она равна сумме 2000 простых нечетных чисел, т. е. четна, — противоречие.

7. Докажите, что доску 10×10 нельзя замостить фигурами вида



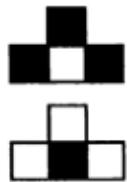


Рис. 1

Решение. Предположим, что мы смогли замостить доску 10×10 требуемым образом. Рассмотрим шахматную раскраску доски. На доске будет 50 белых и 50 черных клеток. Заметим, что каждая фигурка будет накрывать либо три, либо одну черную клетку (рис. 1). Поскольку клеток 100, а каждая фигурка содержит 4 клетки, то всего потребуется 25 фигурок. Но так как фигурок нечетное количество и каждая из них накрывает нечетное количество черных клеток, то все фигурки накроют нечетное число черных клеток (сумма нечетного числа нечетных слагаемых нечетна). Однако они должны накрыть 50 черных клеток — четное число.

▼ 2. Делимость и остатки

8. Десятичная запись числа A состоит из 30 единиц и нескольких нулей. Может ли число A быть полным квадратом?

Ответ. Не может.

Сумма цифр числа A равна 30. Поэтому оно делится на 3, но не делится на 9, т. е. оно не может быть полным квадратом.

9. Дети, построенные парами, выходят из лесу, где они собирали орехи. В каждой паре идут мальчик и девочка, причем у мальчика орехов либо вдвое больше, либо вдвое меньше, чем у девочки. Могло ли так случиться, что у всех вместе 1000 орехов?

Ответ. Не могло.

Заметим, что число орехов у каждой пары детей делится на 3. Это означает, что суммарное число орехов должно делиться на 3. Однако 1000 на 3 не делится.

10. Докажите, что число имеет нечетное число делителей (включая единицу и само число) тогда и только тогда, когда оно является точным квадратом.

Решение. Пусть нам дано число S и a — его делитель. Тогда число $\frac{S}{a}$ также является делителем числа S , т. е.

делители числа разбиваются на пары. У числа может быть нечетное число делителей, только если числа в какой-нибудь паре совпадают: $\frac{S}{a} = a$, откуда $S = a^2$.

И наоборот, если $S = a^2$, то $\frac{S}{a} = a$, т. е. у числа будет нечетное число делителей.

11. Сколько нулями оканчивается число $100!$?

Ответ. 24.

Пусть на конце числа $100!$ стоят n нулей. Это означает, что число $100!$ делится на $2^n \cdot 5^n$. Поскольку в числе $100!$ двойка встречается в качестве сомножителя чаще, чем пятерка, нам необходимо найти количество пятерок в разложении числа $100!$ на простые множители. На 5 делятся двадцать чисел от 1 до 100, при этом четыре из них (25, 50, 75 и 100) делятся на 5^2 . Поэтому в разложении числа $100!$ на простые множители присутствует $20 + 4 = 24$ пятерки, т. е. число $100!$ оканчивается на 24 нуля.

Замечание. В какой степени в разложении числа $N!$ на простые множители входит простое число p ? Пусть m — такое число, что $p^m \leq N < p^{m+1}$. Тогда степень числа p в разложении на простые множители равна

$$\left[\frac{N}{p} \right] + \left[\frac{N}{p^2} \right] + \dots + \left[\frac{N}{p^m} \right].$$

12. Сколько делителей имеет число $N = p^7q^3$ (включая единицу и само число), где p и q — различные простые числа?

Ответ. 32.

Любой делитель числа N имеет вид $p^\alpha q^\beta$, где $0 \leq \alpha \leq 7$, $0 \leq \beta \leq 3$, т. е. всего возможно $8 \cdot 4 = 32$ варианта выбрать пару (α, β) .

Замечание. Количество делителей числа $S = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_n^{\alpha_n}$, где p_1, p_2, \dots, p_n — попарно различные простые числа, равно $(\alpha_1 + 1) \cdot (\alpha_2 + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha_n + 1)$.

13. Докажите, что $\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = ab$.

Решение. Пусть $d = \text{НОД}(a, b)$. Тогда $a = a_1d$, $b = b_1d$, причем $\text{НОД}(a_1, b_1) = 1$. Отсюда следует, что $\text{НОК}(a, b) = a_1b_1d$. Осталось заметить, что $\text{НОК}(a, b) \cdot \text{НОД}(a, b) = (a_1b_1d)d = (a_1d)(b_1d) = ab$.

14. Имеется шесть натуральных чисел. Для каждой пары этих чисел выписали их наибольший общий делитель. Могли ли при этом оказаться выписанными все натуральные числа от 1 до 15?

Ответ. Не могли.

Допустим, такие шесть чисел нашлись. Среди их попарных наибольших общих делителей должны встретиться семь четных чисел (2, 4, ..., 14). Если среди наших шести чисел четных не больше четырех, то четных наибольших общих делителей (или, что то же самое, пар четных чисел) будет не больше шести, а ес-

ли среди наших шести чисел четных не меньше пяти, то четных наибольших общих делителей будет не меньше десяти — противоречие.

15. Может ли дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами равняться 23?

Ответ. Не может.

Пусть нам дан квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ и его дискриминант $D = b^2 - 4ac = 23$, откуда $b^2 = 4ac + 23 = 4(ac + 5) + 3$, т. е. b^2 имеет остаток 3 при делении на 4. Однако квадраты четных чисел делятся на 4, а квадраты нечетных чисел имеют остаток 1 при делении на 4, так как $(2m+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$. Таким образом, дискриминант квадратного трехчлена с целыми коэффициентами не может равняться 23.

16. Существуют ли 2000 подряд идущих натуральных чисел, каждое из которых составное?

Ответ. Существуют.

Рассмотрим, например, числа $2001! + 2, 2001! + 3, \dots, 2001! + 2001$. Они все являются составными, так как первое из них больше двух и делится на 2, второе больше трех и делится на 3, ..., 2000-е больше 2001 и делится на 2001.

17. Решите уравнение в натуральных числах:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2^9.$$

Ответ. Нет решений.

Предположим, что существует решение этого уравнения. Из того, что правая часть уравнения четна, следует, что либо все числа a, b, c четны, либо два числа нечетны, а одно четно. Допустим, что числа a и b нечетны, а число c четно. Квадрат нечетного числа дает остаток 1 при делении на 4 (см. решение задачи 15). Но тогда левая часть будет давать остаток 2 при делении на 4, а правая часть будет делиться на 4. Значит, все числа a, b, c четны: $a = 2a_1, b = 2b_1, c = 2c_1$. И наше уравнение можно переписать в виде $(2a_1)^2 + (2b_1)^2 + (2c_1)^2 = 2^9$, откуда $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 2^7$. Рассуждая аналогично, мы получим, что должно существовать решение в натуральных числах уравнения $a_4^2 + b_4^2 + c_4^2 = 2$. Однако данное уравнение, очевидно, не имеет решений в натуральных числах, откуда следует, что и исходное уравнение не имеет решений в натуральных числах.

18. Можно ли в клетках таблицы 2000×2000 расставить натуральные числа от 1 до 2000^2 так, чтобы для любой клетки этой таблицы из строки или из столбца, содержащих эту клетку, можно было бы выбрать тройку

чисел, одно из которых равно произведению двух других?

Ответ. Нельзя.

Числа от 1 до 1999 могут располагаться не более чем в 1999 строках и 1999 столбцах. Значит, найдутся строка и столбец, все числа в которых не меньше 2000. Но тогда произведение любых двух чисел из такой строки (столбца) больше 2000^2 , т. е. для клетки, расположенной на пересечении таких строки и столбца, условие задачи не выполняется.

19. Решите в целых числах уравнение $2ab + 3a + b = 0$.

Ответ. $(0; 0), (1; -1), (-1; -3), (-2; -2)$.

Умножив обе части уравнения на 2, преобразуем уравнение следующим образом: $(2a + 1)(2b + 3) = 3$. Число 3 раскладывается в произведение двух целых чисел четырьмя способами: $3 = 1 \cdot 3 = 3 \cdot 1 = (-1) \cdot (-3) = (-3) \cdot (-1)$. В первом случае $2a + 1 = 1, 2b + 3 = 3$, т. е. $a = 0, b = 0$. Во втором случае $2a + 1 = 3, 2b + 3 = 1$, т. е. $a = 1, b = -1$. В третьем случае $2a + 1 = -1, 2b + 3 = -3$, т. е. $a = -1, b = -3$. В четвертом случае $2a + 1 = -3, 2b + 3 = -1$, т. е. $a = -2, b = -2$.

20. Числа 2^{1000} и 5^{1000} выписаны одно за другим в десятичной записи. Сколько всего цифр выписано?

Ответ. 1001 цифра.

Пусть $2^{1000} - m$ -значное число и $5^{1000} - n$ -значное число. Это означает, что $10^{m-1} < 2^{1000} < 10^m$ и $10^{n-1} < 5^{1000} < 10^n$. Перемножив эти неравенства, мы получим $10^{n+m-2} < 10^{1000} < 10^{m+n}$. Отсюда следует, что искаемое число цифр $m + n = 1000 + 1 = 1001$.

21. По окончании конкурса бальных танцев, в котором участвовали 7 мальчиков и 8 девочек, каждый (каждая) назвал (назвала) количество своих партнерш (партнеров): 3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Не ошибся ли кто-нибудь из них?

Ответ. Кто-то ошибся.

Суммарное количество названных партнеров и партнерш равно 74. Значит, мальчики назвали 37 партнерш и девочки назвали 37 партнеров. Но кто-то из них (мальчики или девочки) не назвал число 5. Тогда они называли только числа, делящиеся на 3. А 37 на 3 не делится.

22. Докажите, что простых чисел бесконечно много.

Решение. Пусть простых чисел конечное число (N штук): p_1, p_2, \dots, p_N . Тогда рассмотрим число $A = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_N + 1$. Но оно не делится ни на одно из

чисел p_1, p_2, \dots, p_N . Значит, оно делится только на себя и на единицу, т. е. оно тоже простое, — противоречие.

23. Докажите, что $11 \dots 11$ (27 единиц) делится на 27.

Решение. Заметим, что

$$\underbrace{111 \dots 111}_{27 \text{ единиц}} = \underbrace{111 \dots 111}_{9 \text{ единиц}} \cdot \underbrace{100 \dots 00}_{8 \text{ нулей}} \underbrace{100 \dots 00}_{8 \text{ нулей}}.$$

Но первый сомножитель делится на 9, а второй — на 3. Поэтому произведение делится на 27.

24. Дано шестизначное число \overline{abcdef} , причем $\overline{abc} + \overline{def}$ делится на 37. Докажите, что и само число делится на 37.

Решение. По условию $\overline{abc} + \overline{def} \equiv 0 \pmod{37}$. Заметим, что $1000 \equiv 1 \pmod{37}$. Поэтому $\overline{abcdef} = 1000 \cdot \overline{abc} + \overline{def} \equiv 1 \cdot \overline{abc} + \overline{def} \equiv 0 \pmod{37}$.

Замечание. Аналогично доказывается признак делимости на 37, который формулируется следующим образом: «Натуральное число делится на 37 тогда и только тогда, когда при разбиении десятичной записи числа на трехзначные числа, начиная справа, сумма этих трехзначных чисел делится на 37 (трехзначные числа могут начинаться с нулей)».

25. Назовем натуральное число n забавным, если $n^2 + 1$ делится на 101. Докажите, что среди чисел от 1 до 100 четное количество забавных.

Решение. Разобьем числа на пары следующим образом: в первую пару включим числа 1 и 100, во вторую — числа 2 и 99, ..., в i -ю — числа i и $101 - i$, ..., в 50-ю — числа 50 и 51. Покажем, что в каждой паре либо оба числа забавные, либо оба незабавные. Это равносильно тому, что числа $k^2 + 1$ и $(101 - k)^2 + 1$ одновременно делятся или одновременно не делятся на 101. Заметим, что $(101 - k)^2 + 1 \equiv (-k)^2 + 1 \equiv k^2 + 1 \pmod{101}$. А это и означает, что $k^2 + 1$ и $(101 - k)^2 + 1$ имеют одинаковые остатки при делении на 101. Таким образом, количество забавных чисел равно удвоенному количеству пар с забавными числами, т. е. числу четному.



3. Принцип Дирихле

26. В классе учится 22 ученика. Докажите, что из них можно выбрать четырех, которые родились в один день недели.

Решение. Предположим, что в каждый день недели родилось не более трех учеников. Тогда в классе учится не более $3 \cdot 7 = 21$ ученика — противоречие.

27. Докажите, что среди любых шести человек найдется либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых.

Решение. Пусть A — любой из шести человек. По принципу Дирихле среди остальных пяти человек можно выбрать троих таких, что либо каждый из них знаком с A , либо каждый из них незнаком с A . Без ограничения общности можно считать, что B , C и D знакомы с A . Тогда если какие-то двое из них знакомы друг с другом, например B и C , то A , B и C образуют тройку попарно знакомых. Если же такой пары нет, то B , C и D образуют тройку попарно незнакомых.

28. В квадрате со стороной 10 отметили 201 точку. Докажите, что какие-то три из выбранных точек можно закрыть квадратом со стороной 1.

Решение. Разобьем квадрат на 100 квадратов со стороной 1. По принципу Дирихле в какой-то из них попадут по крайней мере три точки из выбранных.

29. Десять команд играют в футбольном турнире, проходящем в один круг. Докажите, что в любой момент найдутся две команды, сыгравшие в этом турнире одинаковое количество матчей.

Решение. Так как команд 10, каждая команда могла сыграть от 0 до 9 матчей (всего 10 вариантов). Предположим, что в какой-то момент все команды сыграли разное количество матчей. Это возможно, только если одна команда сыграла 0 матчей, одна — 1 матч, ..., одна — 9 матчей. Но команда, которая сыграла 9 матчей, сыграла со всеми, в том числе и с командой, которая сыграла 0 матчей, — противоречие.

30. Докажите, что из любых n целых чисел можно выбрать несколько (возможно, одно), сумма которых делится на n .

Решение. Пусть у нас есть числа a_1, a_2, \dots, a_n . Рассмотрим n сумм $a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Если одна из этих сумм делится на n , то мы нашли требуемую сумму, в противном случае рассмотрим остатки данных сумм при делении на n . Эти остатки могут равняться $1, 2, \dots, n - 1$. По принципу Дирихле найдутся две суммы, имеющие одинаковые остатки при делении на n . Пусть это суммы $a_1 + a_2 + \dots + a_k$ и $a_1 + a_2 + \dots + a_m$ ($k < m$). Тогда их разность, равная $a_{k+1} + \dots + a_m$, делится на n .

31. Равносторонний треугольник A можно закрыть пятью равносторонними треугольниками одинакового размера (треугольники могут перекрываться и выступать за

пределы треугольника A). Докажите, что треугольник A можно полностью закрыть и четырьмя такими треугольниками.

Решение. Отметим шесть точек: вершины треугольника A и середины его сторон. Тогда один из треугольников закрывает по крайней мере две из отмеченных точек, т. е. его сторона не меньше $\frac{a}{2}$, где a — длина стороны

треугольника A (в равностороннем треугольнике наибольшим расстоянием между двумя точками является расстояние между вершинами). Значит, каждый из четырех треугольников, на которые A разбивается средними линиями, закрывается одним из данных треугольников.

32. Докажите, что из 26 различных натуральных чисел, не превосходящих 50, всегда можно выбрать два числа, одно из которых делится на другое.

Решение. Представим каждое из чисел в виде $2^k \cdot m$, где m — нечетное число. Так как наши числа не больше 50, то m может принимать значения 1, 3, 5, ..., 49 — всего 25 значений. Значит, по принципу Дирихле какое-то значение будет приниматься по крайней мере дважды. Пусть оно равно $2t + 1$. Но тогда большее из чисел вида $2^a \cdot (2t + 1)$ делится на меньшее $2^b \cdot (2t + 1)$.

33. Дано 82 кубика, каждый из которых окрашен в какой-то цвет. Докажите, что среди них найдутся либо 10 кубиков разных цветов, либо 10 одноцветных.

Решение. Если у нас не найдутся 10 кубиков разных цветов, то все 82 кубика не более чем 9 различных цветов. Но если кубиков каждого из цветов не более 9, то всего кубиков не более $9 \cdot 9 = 81$, что противоречит условию.

34. Докажите, что среди чисел, записываемых только единицами, найдется число, которое делится на 2009.

Решение. Предположим, что среди чисел, записываемых только единицами, нет чисел, которые делятся на 2009. Рассмотрим остатки при делении на 2009 чисел $1, 11, 111, \dots, \underbrace{111 \dots 111}_{2009 \text{ единиц}}$. Если один из остатков ра-

вен 0, то искомое число найдено. Если ни один из остатков не равен 0, то эти остатки могут быть равны 1, 2, ..., 2008 — всего 2008 вариантов. Так как чисел 2009, а остатков 2008, то у каких-то двух чисел остатки будут одинаковы. Пусть у чисел $\underbrace{111 \dots 111}_{m \text{ единиц}}$

$\overbrace{111\dots 111}^n$ будут одинаковые остатки при делении на 2009. Тогда разность этих чисел, равная

$$\overbrace{111\dots 111}^m - \overbrace{111\dots 111}^n = \overbrace{111\dots 111}^{m-n} \cdot \overbrace{10^n}^n = \overbrace{111\dots 111}^{m-n} \cdot 10^n,$$

будет делиться на 2009. Заметим, что НОД (10^n ; 2009) = 1. Из этого и из того, что $\overbrace{111\dots 111}^{m-n} \cdot 10^n$ делится на

2009, следует, что $\overbrace{111\dots 111}^{m-n}$ делится на 2009.

Замечание. Аналогично можно показать, что для любого натурального числа N , взаимно простого с 10, найдется число из одних единиц, делящееся на N .

4. Принцип крайнего

35. По кругу записано 100 чисел, каждое из которых равно среднему арифметическому своих соседей. Докажите, что все 100 чисел равны.

Решение. Рассмотрим наибольшее из записанных чисел (или одно из них, если таких чисел несколько). Из того, что оно не меньше своих соседей и равно их среднему арифметическому, следует, что оно равно своим соседям. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что все числа равны.

36. Докажите, что у любого выпуклого многогранника есть две грани с одинаковым числом сторон.

Решение. Предположим, что нашелся выпуклый многогранник, у которого любые две грани имеют разное число сторон. Рассмотрим его грань с наибольшим числом сторон. Пусть у нее n сторон. Тогда у этой грани есть n соседних граней, причем все они различны, так как многогранник выпуклый. Но у этих граней может быть от 3 до $n-1$ сторон, т. е. по принципу Дирихле из них можно выбрать две с одинаковым числом сторон. Полученное противоречие завершает доказательство.

37. В системе Зеленої Собаки 1001 планета. На каждой из этих планет сидит астроном и смотрит в телескоп на ближайшую планету. Докажите, что если попарные расстояния между планетами различны, то найдется планета, на которую никто не смотрит.

Решение. Рассмотрим две планеты A и B , расстояние между которыми наименьшее. Астроном на планете A смотрит на планету B , а астроном на планете B смотрит на планету A . Если астроном с какой-нибудь другой планеты смотрит на планету A или B , то найдется планета, на которую никто не смотрит. В противном случае, исключив из рассмотрения планеты A и B , получим систему из 999 планет, для которой выполняется условие задачи. Продолжая рассуждать аналогичным образом, мы придем к тому, что у нас останется три планеты. Выбрав из них две планеты, расстояние между которыми наименьшее, получим, что на оставшуюся планету никто не смотрит.

38. Докажите, что число $S = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ ни при каких $n > 1$ не является целым.

Решение. Пусть 2^k ($k \geq 1$) — наибольшая степень двойки среди чисел от 1 до n . Тогда все остальные числа от 1 до n , кроме 2^k , не делятся на 2^k (из двух ближайших чисел, делящихся на 2^k , одно делится на 2^{k+1}). Поэтому после приведения к общему знаменателю получим дробь, у которой знаменатель имеет вид $m \cdot 2^k$, где m — нечетное число. Числитель этой дроби является суммой $n - 1$ четного числа и числа m , которое дает слагаемое $\frac{1}{2^k}$. Числитель — нечетное число, знаменатель — четное, значит, число S не может быть целым.

39. Сто прямых общего положения (никакие две не параллельны, никакие три не проходят через одну точку) разбивают плоскость на части. Докажите, что к любой прямой примыкает треугольник разбиения.

Решение. Рассмотрим произвольную прямую a и ближайшую к ней точку O пересечения двух других прямых l_1 и l_2 . Тогда треугольник, образованный прямами a , l_1 и l_2 , не пересекает ни одна другая прямая, так как в противном случае нашлась бы точка пересечения прямых, лежащая к прямой a ближе, чем точка O .

40. В круговом турнире по волейболу участвовало несколько команд. Будем говорить, что команда A сильнее команды B , если либо команда A выиграла у команды B , либо существует команда C , такая, что команда A выиграла у команды C , а команда C выиграла у команды B . Докажите, что победитель турнира сильнее остальных команд.

Решение. Предположим, что нашлась команда D , такая, что победитель турнира не сильнее команды D .

Это означает, что команда D выиграла и у команды победителя турнира и у всех команд, проигравших победителю турнира. Но тогда у команды D очков больше, чем у победителя турнира, что невозможно.

▼ 5. Оценка + пример

41. Каково наименьшее натуральное n , такое, что $n!$ делится на 18, на 19, на 20 и на 21?

Ответ. 19.

Заметим, что число 19 простое, поэтому если $n < 19$, то $n!$ не делится на 19. Осталось понять, что $19!$ делится и на 18, и на 19, и на 20 ($20 = 5 \cdot 4$), и на 21 ($21 = 7 \cdot 3$).

42. Несколько камней весят вместе 10 т, при этом каждый из них весит не более 1 т. На каком наименьшем количестве трехтонок можно увезти этот груз за один раз?

Ответ. На пяти трехтонках.

Покажем, что на пяти трехтонках можно увезти весь груз за один раз. Действительно, на каждой из четырех первых трехтонок можно увезти более 2 т камней, т. е. первые 4 машины увезут по крайней мере 8 т камней. Оставшиеся камни (суммарным весом менее 2 т) увезет пятая машина. Покажем теперь, что четырех машин может не хватить. Действительно, если бы изначально было 13 камней весом по $\frac{10}{18}$ т каждый, то одна трехтонка увезла бы только 3 таких камня, т. е. 4 трехтонки могут увезти лишь 12 из 13 камней.

43. В турнире по олимпийской системе (проигравший выбывает) участвуют 50 боксеров. Какое наименьшее количество боев надо провести, чтобы выявить победителя?

Ответ. 49.

После каждого боя из соревнований выбывает один боксер, проигравший в этом бою. Поскольку всего к концу соревнований выбыть должны все, кроме победителя, всего должно быть 49 боев независимо от того, как составляется расписание.

44. Какое наибольшее количество: а) ладей; б) слонов; в) коней, не бьющих друг друга, можно расставить на доске 8×8 ?

Ответ. а) 8 ладей; б) 14 слонов; в) 32 коня.

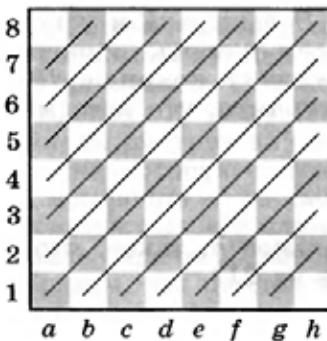


Рис. 2

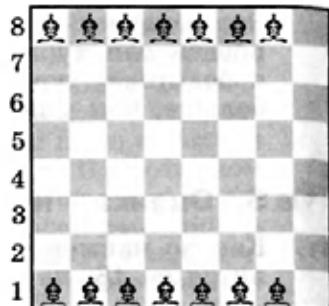


Рис. 3

а) На каждой горизонтали может стоять не более одной ладьи, т. е. всего на доску можно поставить не более восьми ладей, не бьющих друг друга. Поставив 8 ладей на диагональ, мы получим расстановку, удовлетворяющую условию.

б) Рассмотрим 13 диагоналей, показанных на рисунке 2. На каждой из них может стоять не более одного слона, и в двух угловых клетках $a8$ и $h1$ может стоять не более одного слона. Итого на доску можно поставить не более 14 слонов, не бьющих друг друга. Поставив 14 слонов, как показано на рисунке 3, мы получим расстановку, удовлетворяющую условию.

в) Разобьем доску на 8 прямоугольников 2×4 . В каждом прямоугольнике разобьем клетки на пары, как показано на рисунке 4. В каждой паре клеток может стоять не более одного коня, т. е. всего на доску можно поставить не более 32 коней, не бьющих друг друга. Поставив 32 коня на черные поля доски, мы получим расстановку, удовлетворяющую условию, так как кони будут бить только белые клетки.

45. Какое наименьшее число прямоугольников 1×2 клетки нужно закрасить на доске 8×8 клеток, чтобы любой квадрат 2×2 клетки содержал по крайней мере одну закрашенную клетку?

Ответ. 9 прямоугольников.

Рассмотрим 9 квадратов, отмеченных на рисунке 5. Любой прямоугольник 1×2 клетки пересекается не более чем с одним из отмеченных квадратов. Значит, нам потребуется закрасить не менее 9 прямоугольников. На рисунке 6 показано, как закрасить 9 прямоугольников 1×2 клетки, чтобы любой квадрат

1	2
3	4
2	1
4	3

Рис. 4

2×2 клетки содержал по крайней мере одну закрашенную клетку.

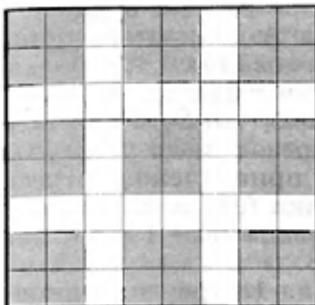


Рис. 5

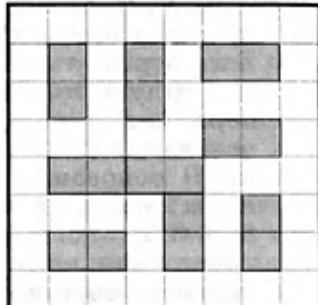


Рис. 6

46. Мишень представляет собой треугольник, разбитый тремя группами параллельных прямых на 100 равных правильных треугольничков с единичными сторонами. Снайпер стреляет по мишени. Он целится в треугольничек и попадает либо в него, либо в один из соседних с ним по стороне. Он видит результаты своей стрельбы и может выбирать, когда стрельбу заканчивать. Какое наибольшее число треугольничков он может с гарантией поразить ровно 5 раз?

Ответ. 25.

I) Стратегия: рассмотрим разбиение мишени на 25 треугольных кусков 2×2 , т. е. состоящих из четырех треугольников (рис. 7). Тогда, стреляя в центр каждого из них до тех пор, пока в одном из четырех треугольников куска не накопится пять попаданий, он получит ровно 25 «призовых» мишеней.

II) Если при стрельбе в какой-то треугольничек какого-то куска стрелок всегда будет попадать в центральный треугольничек этого куска, то «призовых» мишеней будет не больше 25, так как в остальные он не попадет ни разу.

47. На какое наименьшее число равновеликих треугольников можно разрезать фигуру, получаемую из квадрата 8×8 вырезанием угловой клетки 1×1 ?

Ответ. 18.

Покажем вначале, что таких треугольников должно быть не меньше 18. Это равносильно тому, что пло-

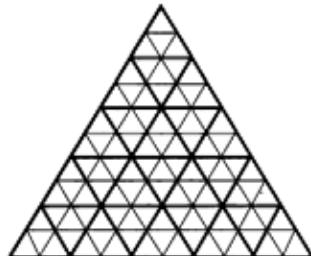


Рис. 7

щадь каждого такого треугольника не больше 3,5. Действительно, рассмотрим тот треугольник A , у которого одна из сторон лежит на отрезке a (рис. 8). Если основание c треугольника A полностью принадлежит отрезку a , то длина основания c не больше 1, и в силу того, что высота треугольника A не больше отрезка d , т. е. $h \leq 7$, получаем, что $S_A \leq 3,5$. Если же основание c выступает за отрезок a , то у треугольника B основание полностью принадлежит отрезку b , а его высота не больше отрезка f , т. е. $S_B \leq 3,5$. Итак, $S_A \leq 3,5$, площадь фигуры равна $64 - 1 = 63$, значит, треугольников не меньше 18.

Пример разрезания фигуры на 18 треугольников приведен на рисунке 9.

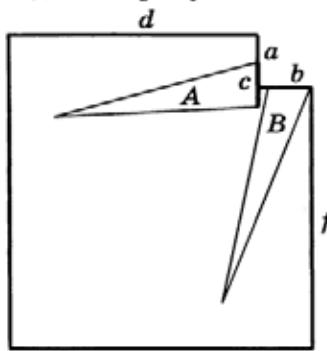


Рис. 8

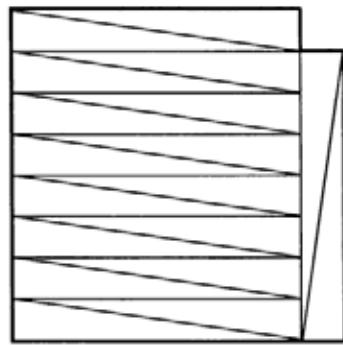


Рис. 9

48. Какое наименьшее количество типов монет должен выпустить монетный двор России, чтобы любую сумму от 1 до 20 рублей можно было уплатить не более чем двумя монетами (без сдачи)?

Ответ. Шесть.

Легко проверить, что монеты достоинством в 1, 3, 5, 7, 9 и 10 рублей удовлетворяют условию задачи. Покажем, что пяти типов монет не хватит. В самом деле, имея монеты пяти типов, мы сможем с соблюдением условия задачи уплатить не более 20 денежных сумм: не более десяти, беря по две различные монеты; пять, беря по две одинаковые монеты; и еще пять, беря по одной монете. Поскольку требуется, чтобы мы могли уплатить ровно 20 различных сумм, все перечисленные выше суммы должны быть различными. Кроме того, поскольку все суммы, которые требуется уплатить, равны целому числу рублей (1, 2, ..., 20), каждая из наших монет должна быть достоинством в целое число рублей (ведь одна она тоже составляет одну из искомых сумм). Поэтому обязательно должна быть

монета достоинством в 1 рубль. Тогда двухрублевой монеты нет (иначе сумму в 2 рубля можно было бы уплатить двумя различными способами), а трехрублевая обязательно есть, четырехрублевой нет ($4 = 3 + 1$), а пятирублевая есть. Получается, что сумму в 6 рублей можно составить двумя способами: $6 = 5 + 1 = 3 + 3$. Значит, сделать все 20 сумм различными все равно не удастся.

49. Найдите все такие натуральные $n \geq 3$, что все целые числа от 1 до n можно расставить по окружности так, чтобы сумма любых двух рядом стоящих чисел делилась на следующее за ними по ходу часовой стрелки число.

Ответ. $n = 3$.

Предположим, что при некотором n удалось найти расстановку, удовлетворяющую условиям задачи. Тогда после каждого четного числа против хода часовой стрелки стоят два числа одинаковой четности (сумма двух чисел разной четности является нечетной и не может делиться на четное число).

1) Если хотя бы для одного четного числа оба его «предшественника» четны, то рассмотрим ближайшее к ним против хода часовой стрелки нечетное число. Следующие за ним по ходу часовой стрелки два числа четны, но нечетное число + четное не может делиться на четное число.

2) Если для каждого четного числа оба его «предшественника» нечетны, то между каждыми двумя четными числами стоит по крайней мере два нечетных. Если четных чисел на окружности k , то нечетных — не меньше $2k$. Но так как разность между количеством нечетных и количеством четных чисел не больше 1, то $k \leq 1$. Это значит, что $n \leq 3$. Но по условию $n \geq 3$. Пример для $n = 3$ очевиден (годится любая расстановка).

50. N цифр — единицы и двойки — расположены по кругу. *Изображенными* назовем число, образуемое несколькими цифрами, расположенными подряд (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При каком наименьшем значении N все четырехзначные числа, запись которых не содержит цифр, отличных от 1 и 2, могут оказаться среди изображенных?

Ответ. 14.

Заметим, что изображения чисел 1111, 2112 и 2122 не могут иметь общих единиц, а изображения чисел 2222, 1221 и 1211 — общих двоек. Следовательно, если все

эти числа встречаются среди изображенных, то по кругу должно располагаться не менее 14 цифр — 7 единиц и 7 двоек.

Равенство $N = 14$ возможно, и соответствующий пример расположения цифр показан на рисунке 10.

51. На столе лежат 5 часов со стрелками. Каждые часы разрешается перевести вперед на некоторое время (возможно, нулевое). Для каждого часов время, на которое при этом их перевели, назовем временем перевода. Требуется все часы установить так, чтобы они показывали одинаковое время. За какое наименьшее суммарное время перевода это можно гарантированно сделать?

Ответ. За 24 часа.

Отметим на одном циферблате положения часовых стрелок всех часов. Граница циферблата разобьется на 5 дуг. Занумеруем дуги по кругу (рис. 11). Пусть часовая стрелка проходит дуги за время x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 соответственно (некоторые из этих чисел, возможно, нулевые). Заметим, что если мы будем устанавливать на всех часах время, соответствующее положению внутри дуги, то каждая часовая стрелка пройдет через начало этой дуги (если идти по часовой стрелке). Это значит, что суммарное время перевода окажется заведомо больше, чем если бы мы устанавливали все часы на начало дуги.

Обозначим через S_i суммарное время, необходимое для установки всех часов на начало i -й дуги. Ясно, что время перевода отдельной стрелки является суммой некоторых x_j . Например, время перевода на начало первой дуги равно x_5 для пятых часов и $x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ для вторых. Тогда $S_1 = (x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (x_3 + x_4 + x_5) + (x_4 + x_5) + x_5 = x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5$. Остальные S_i выражаются аналогично. Отсюда $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + S_5 = (1 + 2 + 3 + 4)(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) = 10 \cdot 12 = 120$ часов. Поэтому наименьшая сумма не превосходит $120 : 5 = 24$ часа. С другой стороны, если все дуги одина-

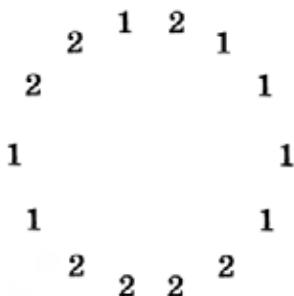


Рис. 10

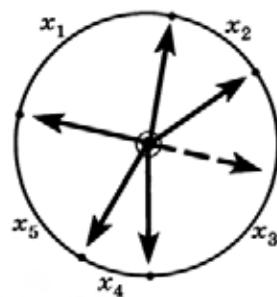


Рис. 11

ковы (например, часы показывают 12 ч, 2 ч 24 мин, 4 ч 48 мин, 7 ч 12 мин и 9 ч 36 мин), то все S_i равны 24 часам, поэтому менее чем 24 часами не обойтись.

52. Найдите наименьшее натуральное число, представимое в виде суммы 2002 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр и в виде суммы 2003 натуральных слагаемых с одинаковой суммой цифр.

Ответ. 10 010.

Пусть для натурального числа n имеют место указанные представления:

$$n = a_1 + \dots + a_{2002} = b_1 + \dots + b_{2003}.$$

Воспользуемся тем, что каждое из чисел a_1, \dots, a_{2002} дает такой же остаток при делении на 9, что и сумма цифр; обозначим этот остаток через r ($0 \leq r \leq 8$), а соответствующий остаток для чисел b_1, \dots, b_{2003} через s ($0 \leq s \leq 8$).

Тогда числа $n - 2002r$ и $n - 2003s$ кратны 9, а значит, и число $(n - 2002r) - (n - 2003s) = 2003s - 2002r = 2003(r + s) - 4005r$ кратно 9. Число $4005r$ также кратно 9, а число 2003 взаимно просто с 9. Отсюда следует, что число $r + s$ кратно 9.

Если при этом $r = s = 0$, то $n \geq 9 \cdot 2003$ (поскольку b_1, \dots, b_{2003} делятся на 9). Если же $r \neq 0$, то $r + s = 9$, и потому имеет место по крайней мере одно из неравенств: $r \geq 5$ или $s \geq 5$; для числа n получаются неравенства $n \geq 5 \cdot 2002$ и $n \geq 5 \cdot 2003$ соответственно.

А так как $10\ 010 = 5 \cdot 2002 = 4 \cdot 2002 + 2002 \cdot 1$ и числа 4 и 2002 имеют одинаковую сумму цифр, то число 10 010 искомое.

53. Имеется 10 мешков с монетами по 100 монет в каждом мешке. Известно, что в девяти из них настоящие монеты весом 10 г каждая, а в одном фальшивые монеты весом 9 г каждая. Есть весы, показывающие общий вес положенных на них монет. За какое наименьшее число взвешиваний можно определить, в каком мешке фальшивые монеты?

Ответ. За одно взвешивание.

Положим на весы одну монету из первого мешка, две — из второго, ..., десять — из десятого. Весы покажут вес $(550 - m)$ г, где m — число фальшивых монет на весах. Значит, в мешке с номером m лежат фальшивые монеты.

54. Вася задумал многочлен $P(x)$ с целыми неотрицательными коэффициентами. Петя может спросить у Васи, какое значение многочлен принимает в некоторой натуральной точке. За какое наименьшее число вопросов

Петя гарантированно сможет угадать многочлен, задуманный Васей?

Ответ. За два вопроса.

За один вопрос Петя не сможет угадать многочлен. Действительно, пусть он спросил значение многочлена в некоторой точке $x = a$ и получил ответ: « $P(a) = a^2$ ». Но тогда Вася мог задумать многочлен $P(x) = x^2$ или, например, $P(x) = ax$.

Покажем, как за два вопроса Петя сможет угадать многочлен. Первым вопросом он должен узнать $P(1)$. Таким образом, он узнает сумму коэффициентов $P(x)$. Пусть $P(1) — k$ -значное число. Так как все коэффициенты $P(x)$ — целые неотрицательные числа, то каждый коэффициент — не более чем k -значное число. Тогда следующим вопросом ему достаточно узнать число $P(10^{2k})$: коэффициенты будут числами, расположеными соответственно в разрядах с 1 по $2k$, с $2k + 1$ по $4k$ и т. д.

55. В музее города Черноморска имеется коллекция из 96 одинаковых золотых монет, лежащих в ряд. Однажды милицией был пойман известный воришко Паниковский, у которого обнаружили 19 монет из этой коллекции. На следствии он показал, что двадцать лет назад заменил 19 лежащих подряд монет на фальшивые, которые легче настоящих, но внешне от них неотличимы. Следователь немедленно отправился в музей, чтобы изъять фальшивые монеты. По дороге он вспомнил, что не спросил у Паниковского, где именно они лежат. Но, найдя в отделе краеведения чашечные весы, он понял, что сможет отыскать все фальшивые монеты сам. За какое наименьшее количество взвешиваний ему удастся это сделать?

Ответ. За четыре взвешивания.

Докажем сначала, что трех взвешиваний может не хватить, чтобы наверняка отыскать все фальшивые монеты. Занумеруем монеты по порядку слева направо: 1, 2, ..., 96. Самая левая фальшивая монета может иметь номер от 1 до 78 — всего 78 вариантов. После каждого взвешивания может быть три результата: перевесит левая чашка весов, перевесит правая, весы будут находиться в равновесии. Значит, после первого взвешивания фальшивая монета с минимальным номером находится (в зависимости от результата) в одном из трех множеств. При этом в одном из них не менее $78 : 3 = 26$ элементов. Если следователю не повезло и монета оказалась именно в этом множестве, то после второго взвешивания указанная монета находится

в одном из трех множеств, большее из которых содержит не менее $26 : 3 > 8$ элементов. Аналогично после третьего взвешивания монета может оказаться во множестве, содержащем не менее $9 : 3 = 3$ элементов, т. е. не определяется однозначно. Таким образом, трех взвешиваний недостаточно. Покажем теперь, как найти все фальшивые монеты за четыре взвешивания. При первом взвешивании положим на левую чашку 27 монет с номерами 1, 2, ..., 27, а на правую — 27 монет с номерами 70, 71, ..., 96. Если весы будут находиться в равновесии, то все эти монеты настоящие, а фальшивые монеты — какие-то 19 лежащих подряд монет из оставшихся 42 монет. Для дальнейшего удобно считать, что фальшивые монеты среди 45 монет (с 28-й по 72-ю), хотя про монеты 70, 71 и 72 уже точно известно, что они настоящие. Если при первом взвешивании перевесит, например, правая чашка (случай с левой чашкой аналогичен), то на левой чашке была хотя бы одна фальшивая монета, т. е. фальшивые монеты — какие-то 19 лежащих подряд монет из 45 монет (с 1-й по 45-ю). При втором взвешивании положим на левую чашку 9 монет с наименьшими номерами (из 45 подозрительных монет), а на правую — 9 монет с наибольшими номерами (из тех же 45 монет). Разбирая возможные исходы этого взвешивания, аналогично предыдущему получим 9 вариантов для самой левой фальшивой монеты, т. е. из оставшихся подозрительными 27 монет какие-то 19 лежащих подряд монет фальшивые. При третьем взвешивании положим на левую чашку 3 монеты с наименьшими номерами (из 27 подозрительных монет), а на правую — 3 монеты с наибольшими номерами (из тех же 27 монет). Разбирая возможные исходы этого взвешивания, аналогично предыдущему получим 3 варианта для самой левой фальшивой монеты, т. е. из оставшихся подозрительными 21 монеты какие-то 19 лежащих подряд монет фальшивые. Теперь осталось сравнить вес крайних монет (из оставшихся подозрительными 21 монеты).

56. В таблице 10×10 по порядку расположены числа от 0 до 99 (в первой строке от 0 до 9, во второй строке от 10 до 19, ..., в десятой от 90 до 99). Вася выбрал десять чисел, таких, что никакие два из них не стоят в одной строке и никакие два из них не стоят в одном столбце, и сложил их. Какую сумму он мог получить?

Ответ. 495.

Представим данную таблицу в виде суммы двух таблиц (рис. 12).

00	01	02	03
10	11	12	13
20	21	22	23
30	31	32	33

0	1	2	3
0	1	2	3
0	1	2	3
0	1	2	3

0	0	0	0
10	10	10	10
20	20	20	20
30	30	30	30

Рис. 12

Если из первой таблицы выбрать десять чисел описанным способом, то, поскольку они стоят в разных столбцах, их сумма будет равна $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$. Если из второй таблицы выбрать десять чисел описанным способом, то, поскольку они стоят в разных строках, их сумма будет равна $0 + 10 + 20 + \dots + 90 = 450$, т. е. сумма десяти выбранных чисел равна $450 + 45 = 495$.

Таким образом, независимо от выбора чисел Васей сумма будет равняться 495.

57. Каким наименьшим числом попарно непересекающихся шаров можно закрыть точечный источник света? (Шары свет не отражают.)

Ответ. 4.

Поместим источник света в центр O правильного тетраэдра $ABCD$. Тогда пространство разобьется на 4 трехгранных угла с общей вершиной O : $OABD$, $OABC$, $OACD$, $OBBCD$ (рис. 13).

Рассмотрим сферу S_1 , проходящую через точки A_1 , B_1 , D_1 , лежащие на лучах OA , OB , OD соответственно, и такую, что точка O лежит вне сферы. Тогда за сферой источник света не будет виден из всех точек трехгранного угла $OABD$. Теперь выберем на лучах OA , OD , OC точки A_2 , D_2 , C_2 так, чтобы первая сфера и точка O лежали по одну сторону от плоскости $A_2D_2C_2$. Проведем через точки A_2 , D_2 , C_2 сферу S_2 так, чтобы точка O и сфера S_1 лежали вне сферы S_2 . Сфера S_2 закроет все точки угла $OACD$, лежащие за сферой. Аналогично построим сферы S_3 и S_4 . Сфера S_1 , S_2 , S_3 , S_4 закрывают источник.

Покажем, что источник нельзя закрыть тремя сферами.

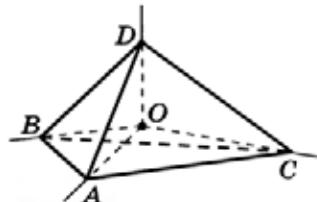


Рис. 13

Проведем к каждой из трех сфер касательную плоскость через точку, ближайшую к точке O . Каждая сфера может закрывать только точки, лежащие в полупространстве, ограниченном построенной плоскостью. Объединение этих полупространств не дает всего пространства, так как среди плоскостей нет совпадающих.

▼ 6. Инварианты и раскраски

58. Написанное на доске четырехзначное число можно заменить на другое, прибавив к двум его соседним цифрам по единице, если ни одна из этих цифр не равна 9, либо вычтя из соседних двух цифр по единице, если ни одна из них не равна 0. Можно ли с помощью таких операций из числа 1234 получить число 2002?

Ответ. Нельзя.

Пусть на доске написано число \overline{abcd} . Тогда рассматриваемые операции не изменяют число $M = (d + b) - (a + c)$, так как они увеличивают (уменьшают) на единицу одно число из первой скобки и одно число из второй. Для числа 1234 число $M_1 = (4 + 2) - (1 + 3) = 2$, для числа 2002 число $M_2 = (2 + 0) - (2 + 0) = 0$. Поэтому требуемое невозможно.

59. В каждой клетке доски 7×7 сидит жук. В какой-то момент времени все жуки взлетают, и после этого каждый из жуков садится в клетку, соседнюю по стороне с той, из которой он взлетел. Докажите, что в какую-то клетку не сядет ни одного жука.

Решение. Рассмотрим шахматную раскраску доски в черный и белый цвета. Тогда у нас 25 клеток покрашено в черный цвет, а 24 — в белый. Заметим, что жук, взлетевший с белой клетки, сядет на черную клетку, а взлетевший с черной — на белую. Но с белых клеток взлетают 24 жука, и они не смогут сесть на 25 клеток.

60. На доске написаны числа 1, 2 и 4. Разрешается стереть с доски два числа a и b , а вместо них записать числа $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$ и $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Можно ли с помощью таких операций получить на доске числа $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$ и 3?

Ответ. Нельзя.

Заметим, что при данной операции не меняется сумма квадратов чисел, записанных на доске:

$$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^2 + b^2.$$

Но у начальной тройки чисел сумма квадратов равна 21, а у той, которую мы хотим получить, сумма квадратов равна 19. Поэтому указанную тройку получить нельзя.

61. На доске написано число 12. Каждую минуту число умножают или делят либо на 2, либо на 3 и результат записывают на доске вместо исходного числа. Докажите, что число, которое будет написано на доске ровно через час, не будет равно 54.

Решение. Заметим, что $12 = 2^2 \cdot 3$, а $54 = 2 \cdot 3^3$. Каждую минуту один из показателей степени меняется на единицу, т. е. сумма степеней меняет четность. Отсюда следует, что через час четность суммы степеней будет той же, что и у исходного числа. Однако сначала сумма степеней была равна 3, т. е. числу нечетному, а в конце оказалась равной 4, т. е. числу четному.

62. Можно ли доску 10×10 разрезать на прямоугольники 4×1 ?

Ответ. Нельзя.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Рис. 14

Рассмотрим раскраску доски в 4 цвета (рис. 14). Заметим, что при такой раскраске любой прямоугольник 4×1 закрывает по одной клетке каждого цвета, т. е. если бы можно было разрезать нашу доску на 25 прямоугольников 4×1 , то на доске должно было быть по 25 клеток каждого цвета, однако клеток второго цвета 26, — противоречие.

63. Можно ли покрыть шахматную доску доминошками (прямоугольниками 1×2) так, чтобы свободными остались только клетки $a1$ и $h8$?

Ответ. Нельзя.

Каждая доминошка покрывает одну белую и одну черную клетки, т. е. доминошки закрывают одинаковое количество белых и черных клеток. Однако если свободными остались только клетки $a1$ и $h8$, то доминошки закрыли белых клеток на 2 больше, чем черных, — противоречие.

64. На доске написаны многочлены $P(x) = x^2 + 2$ и $Q(x) = x + 1$. Разрешается записать на доску сумму, разность или произведение любых двух из уже выписанных на доску многочленов. Может ли на доске появиться многочлен $R(x) = x^3 + 2$?

Ответ. Не может.

Заметим, что $P(-1) = (-1)^2 + 2 = 3$ и $Q(-1) = -1 + 1 = 0$, т. е. значения многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ в точке $x_0 = -1$ делятся на 3. Но если для произвольных многочленов $A(x)$ и $B(x)$ их значения в точке $x_0 = -1$ $A(-1)$ и $B(-1)$ делятся на 3, то и значения выражений $A(-1) + B(-1)$, $A(-1) - B(-1)$ и $A(-1) \cdot B(-1)$ также делятся на 3. Однако $R(-1) = (-1)^3 + 2 = 1$ не делится на 3, т. е. многочлен $R(x) = x^3 + 2$ на доске появиться не может.

65. В клетках квадратной таблицы 4×4 расставлены знаки «+» и «-», как показано на рисунке 15. Разрешается одновременно менять знак во всех клетках, расположенных либо в одной строке, либо в одном столбце, либо на прямой, параллельной какой-нибудь диагонали (в частности, в любой угловой клетке). Докажите, что, сколько бы мы ни произвели таких перемен знака, нам не удастся получить таблицу из одних плюсов.

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Рис. 15

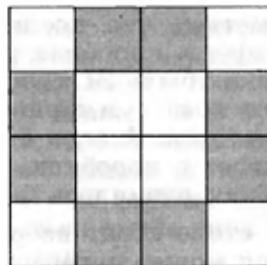


Рис. 16

Решение. Рассмотрим 8 отмеченных клеток (рис. 16). Любая операция затрагивает либо 2 клетки из этих восьми, либо ни одной. Таким образом, при указанных операциях сохраняется четность числа минусов, стоящих в отмеченных клетках. А поскольку изначально в этих клетках стоял один минус (нечетное число), то

таблицу из одних плюсов мы получить не можем (так как в этом случае в отмеченных клетках будет стоять нуль минусов — четное число).

66. На доске написаны числа 3, 4, 5, 6. Любую пару чисел a, b можно заменить на пару чисел $a+b+\sqrt{a^2+b^2}$ и $a+b-\sqrt{a^2+b^2}$. Может ли на доске появиться число, меньшее 1?

Ответ. Не может.

Из того, что $a+b-\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+2ab} - \sqrt{a^2+b^2} > 0$ при $a, b > 0$, следует, что после указанных операций числа на доске остаются положительными. Покажем, что после указанной операции не меняется сумма обратных величин чисел, написанных на доске. Действительно,

$$\frac{1}{x+y+\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x+y-\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x+2y}{(x+y)^2-(x^2+y^2)} = \frac{2x+2y}{2xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Если одно из получившихся чисел меньше 1, то сумма обратных величин всех чисел, написанных на доске, будет больше 1. А так как $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{19}{20} < 1$, то на доске не может появиться число, меньшее 1.

67. В шести коробках лежат конфеты. В первой — 1, во второй — 2, в третьей — 3, ..., в шестой — 6. За один ход разрешается в любые две коробки добавить по одной конфете. Можно ли за несколько ходов уравнять количество конфет в коробках?

Ответ. Нельзя.

Заметим, что после каждого хода суммарное число конфет в коробках увеличивается на 2. Сначала в коробках была 21 конфета. Это означает, что после каждого хода суммарное число конфет в коробках будет нечетным. А если бы мы смогли уравнять количество конфет в коробках, то суммарное число конфет в коробках равнялось бы $6k$ — числу четному.

68. На столе стоят вверх дном 25 стаканов. За один ход Вася может перевернуть любые 2 стакана. Сможет ли Вася за несколько ходов поставить все стаканы правильно?

Ответ. Не сможет.

Покажем, что число стаканов, стоящих вверх дном (стоящих неправильно), будет нечетно. Вначале их 25 — нечетное число. Пусть на каком-то шаге вверх дном стоит $2k+1$ стаканов. Если Вася выберет 2 стакана, стоящие правильно, и перевернет их, то непра-

вильно стоящих стаканов станет $2k + 3$ — нечетное число. Если Вася выберет 2 стакана, стоящие неправильно, и перевернет их, то неправильно стоящих стаканов станет $2k - 1$ — нечетное число. Если Вася выберет 2 стакана, один из которых стоит правильно, а другой — неправильно, и перевернет их, то неправильно стоящих стаканов останется $2k + 1$ — нечетное число. Если бы Вася смог поставить все стаканы правильно, то неправильно стоящих стаканов было бы 0 — четное число. А поскольку всегда на столе будет нечетное число стаканов, стоящих неправильно, то Вася не сможет поставить все стаканы правильно.

69. В пробирке находятся марсианские амебы трех типов: A , B и C . Две амебы любых двух разных типов могут слиться в одну амебу третьего типа. После нескольких таких слияний в пробирке оказалась одна амeba. Каким может быть ее тип, если исходно амеб типа A было 20 штук, типа B — 21 штука и типа C — 22 штуки?

Ответ. Тип B .

Покажем, что разность между количеством амеб двух разных типов будет сохранять свою четность, например, разность между количеством амеб типов A и C будет четной. Изначально эта разность четна. Если в какой-то момент слились амебы типов A и C , то количество амеб каждого из типов A и C уменьшилось на 1, а разность не изменилась. Если в какой-то момент слились амебы типов A и B , то получилась амеба типа C , количество амеб типа A уменьшилось на 1, а типа C увеличилось на 1 и разность изменилась на 2, т. е. осталась четной. Если в какой-то момент слились амебы типов C и B , то разность также изменится на 2, т. е. останется четной. Аналогично показывается, что разность между количеством амеб типов A и B и разность между количеством амеб типов C и B будет нечетной. Если бы в конце осталась амеба типа A , то разность между количеством амеб типов A и C будет равна 1 — числу нечетному, а она должна быть четной. Аналогично не могла оставаться амеба типа C . Поэтому в конце останется амеба типа B .

70. Можно ли таблицу 5×5 заполнить числами так, чтобы сумма чисел в любой строке была положительной, а сумма чисел в любом столбце — отрицательной?

Ответ. Нельзя.

Если бы это было возможно, то сумма всех чисел таблицы, подсчитанная по строкам, была бы положительной, а по столбцам — отрицательной, что невозможно.

7. Полуинвариант

71. На каждой грани куба написано число, причем не все эти числа одинаковы. Каждое из написанных чисел заменяется на среднее арифметическое чисел, написанных на четырех соседних гранях. Могут ли через несколько таких операций на всех гранях оказаться исходные числа?

Ответ. Не могут.

Достаточно заметить, что при указанных операциях наибольшее число (или одно из наибольших, если наибольших чисел несколько) должно уменьшиться. Поэтому через несколько операций на всех гранях не могут оказаться исходные числа.

72. В квадрате 10×10 стоят 100 ненулевых чисел. Можно менять знак у чисел в любом столбце или строке. Докажите, что этими операциями можно добиться того, чтобы в каждой строке и каждом столбце сумма чисел была неотрицательна.

Решение. Рассмотрим величину S — сумму всех чисел в таблице. Если в какой-то строке (или каком-то столбце) сумма чисел отрицательна, то поменяем знаки у чисел этой строки (столбца). При этом величина S увеличится. Так как расстановками знаков «+» и «-» перед каждым из 100 чисел таблицы можно получить лишь конечное число значений величины S , то в какой-то момент величина S перестанет расти. Тогда мы и получим требуемую таблицу.

73. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если X — враг Y , то Y — враг X .)

Решение. Разобьем сначала парламентариев по палатам произвольным образом. Если в какой-то палате у ее члена A не менее двух врагов, то в другой палате у A не более одного врага. Пересадим A в другую палату, при этом суммарное количество S пар врагов в той и другой палате уменьшится. Поскольку S — целое неотрицательное число, то такое уменьшение S может быть проделано лишь конечное число раз, и в результате получим требуемое разбиение на две палаты.

74. В стране несколько городов, попарные расстояния между которыми различны. Путешественник отправился из города A в самый удаленный от него город B , оттуда — в самый удаленный от него город C и т. д.

Докажите, что если C не совпадает с A , то путешественник никогда не вернется в A .

Решение. Предположим, что на втором шаге путешественник не возвратился в город A , т. е. город C отличен от города A . Тогда расстояние от города A до города B короче расстояния от B до C (поскольку C наиболее удаленный от B город). Каждое следующее расстояние будет не меньше предыдущего, так как каждый следующий раз мы выбираем наиболее удаленный город. Пусть на некотором шаге путешественник все же вернулся в город A , отправившись из некоторого города X . По доказанному расстояние от X до A длиннее расстояния от A до B . Но это противоречит тому, что B наиболее удаленный от A город.

75. Квадратное поле разбито на сто одинаковых квадратных участков, девять из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, рядом с которыми не менее двух соседних (т. е. имеющих общую сторону) участков уже поросли бурьяном. Докажите, что поле никогда не зарастет бурьяном полностью.

Решение. Рассмотрим суммарную длину границ участков, заросших бурьяном. Заметим (рис. 17), что при разрастании бурьяна эта суммарная длина границы не увеличивается.

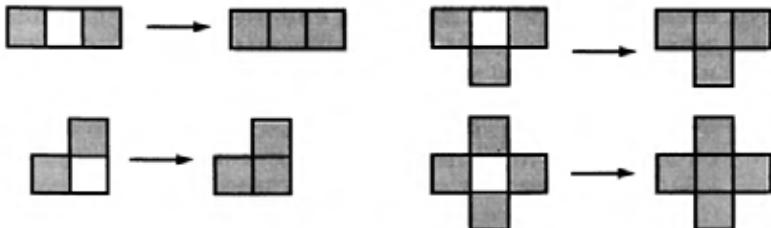


Рис. 17

А поскольку изначально суммарная длина границ участков, заросших бурьяном, не больше $4 \cdot 9 = 36$, то поле не сможет целиком зарости бурьяном, так как длина границы поля равна 40.

76. В тридевятом царстве несколько городов, и некоторые из них соединены дорогами. Из каждого города выходит нечетное число дорог. В каждом городе есть ратуша, а на ратуше — флаг одного из двух цветов: синего или красного. Каждое утро в одном из городов происходит революция: жители поднимают на ратушу вместе старого флага тот, который поднят на большинстве ратуш тех городов, с которыми этот город соединен до-

рогами. Докажите, что рано или поздно революции прекратятся.

Решение. Рассмотрим величину S — количество дорог, концы которых находятся в городах с флагами разных цветов. Рассмотрим город, в котором произошла революция. Пусть в городе был флаг красного цвета. Поскольку произошла революция, то он был заменен на флаг синего цвета. Это означает, что город был соединен с x городами с синими флагами и с y городами с красными флагами, причем $x > y$. До революции из этого города выходило x «разноцветных» дорог, а после стало выходить y «разноцветных» дорог. Это означает, что величина S уменьшилась на $x - y > 0$. Поскольку S — целое неотрицательное число, то такое уменьшение S может быть проделано лишь конечное число раз, и в результате революции прекратятся.

77. На бесконечном клетчатом листе белой бумаги несколько клеток окрашено в черный цвет. Раз в секунду происходит одновременное перекрашивание всех клеток листа по следующему правилу: каждая клетка K принимает тот цвет, который имело в предыдущий момент большинство из трех клеток — самой клетки K и ее соседей справа и сверху. Докажите, что через некоторое время на листе не останется черных клеток.

Решение. Если мы добавим еще несколько черных клеток, то после каждой операции общее число черных клеток будет не меньше, чем в случае, когда мы не добавляли черных клеток. Добавим черные клетки так, чтобы все они (включая те, которые были изначально) образовали черный квадрат $m \times m$ клеток. Но такой квадрат исчезнет за $2m - 1$ шагов. Значит, после $(2m - 1)$ -го шага не останется ни одной черной клетки из исходного множества.

8. Неравенства

78. Докажите, что если $a + b + c = 0$ ($a \neq 0$), то $ab + bc + ca < 0$.

Решение. Возведем равенство $a + b + c = 0$ в квадрат. Получим $a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$, откуда $ab + bc + ca = -\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2) < 0$.

79. Что больше: 31^{11} или 17^{14} ?

Ответ. $31^{11} < 17^{14}$.

$$31^{11} < 32^{11} = 16^{11}2^{11} < 16^{11}2^{12} = 16^{14} < 17^{14}.$$

80. Докажите, что для любых положительных чисел a , b и c выполняется неравенство $1 < \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} < 2$.

Решение. Имеем $S = \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} > \frac{a}{a+b+c} + \frac{b}{a+b+c} + \frac{c}{a+b+c} = 1$. С другой стороны, $S = \frac{a+b}{a+b} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{c+a}{c+a} - S_1 = 3 - S_1$, где $S_1 = \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c} + \frac{a}{c+a}$, откуда $S < 2$, так как $S_1 > 1$.

81. Произведение положительных чисел a_1 , a_2 , ..., a_n равно единице. Докажите, что

$$(1+2a_1) \cdot (1+2a_2) \cdot \dots \cdot (1+2a_n) \geq 3^n.$$

Решение. По неравенству о средних

$$1+2a_k = 1+a_k+a_k \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot a_k \cdot a_k} = 3a_k^{\frac{2}{3}}.$$

Следовательно, $(1+2a_1) \cdot (1+2a_2) \cdot \dots \cdot (1+2a_n) \geq 3^n \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n)^{\frac{2}{3}} = 3^n$.

82. Сравните числа 51^{101} и $101!$.

Ответ. $51^{101} > 101!$.

Заметим, что $101! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 101 = (1 \cdot 101) \cdot (2 \cdot 100) \cdot \dots \cdot (50 \cdot 52) \cdot 51$.

В каждой скобке записано произведение вида $(51-k) \cdot (51+k) = 51^2 - k^2 < 51^2$, откуда следует, что $101! < 51^{101}$.

83. Найдите треугольник наибольшей площади, который можно вписать в данную окружность.

Ответ. Искомый треугольник — равносторонний.

Покажем, что если искомый треугольник существует, то он должен быть равнобедренным. Действительно, у равнобедренного треугольника ABC высота больше, чем у треугольника AB_1C (рис. 18). Центр O окружности лежит на высоте BH треугольника ABC , т. е. $BO = AO = R$. Пусть $OH = x$, тогда

$$S_{ABC} = (R+x) \cdot \sqrt{R^2 - x^2},$$

$$\text{т. е. } S^2 = (R+x)^2 (R-x) = \frac{1}{3} (R+x)^3 \cdot (3R-3x).$$

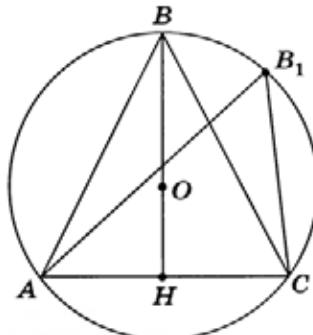


Рис. 18

По неравенству о среднем для четырех чисел $a = b = c = R + x$, $d = 3R - 3x$ получаем $abcd \leq \left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4$,

т. е.

$$3S^2 \leq \left(\frac{3(R+x) + 3R - 3x}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{2}R\right)^4.$$

Значит, наибольшую площадь имеет треугольник, для которого $R + x = 3R - 3x$, т. е. $x = OH = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{2}R$.

Такой треугольник — равносторонний, его площадь равна $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$.

84. Последовательность $\{a_n\}$ задается следующим образом: $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ для любого натурального n . Докажите, что $a_{100} > 14$.

Решение. Заметим, что $a_n > 0$ для любого натурального n . Также $a_{n+1}^2 = \left(a_n + \frac{1}{a_n}\right)^2 > a_n^2 + 2$. Тогда $a_{100}^2 > a_{99}^2 + 2 > a_{98}^2 + 2 \cdot 2 > \dots > a_1^2 + 2 \cdot 99 = 199 > 14^2$, что и требовалось доказать.

9. Игры

85. На столе лежат 20 монет. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди, за один ход можно взять со стола 1, 2 или 3 монеты. Выигрывает тот, кто забирает со стола последнюю монету. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй.

Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый своим ходом взял x монет, то второй должен взять $4 - x$ монет. Следовательно, после каждого хода второго число монет, лежащих на столе, будет делиться на 4. Это означает, что первый не сможет забрать со стола последнюю монету, т. е. это сделает второй.

86. Есть две кучки камней, в одной из которых 15 камней, а в другой — 20. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди, за один ход можно взять любое количество камней, но только из одной кучки. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Первый.

Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Первым ходом он берет 5 камней из кучки, в которой ле-

жит 20 камней. Таким образом, после его хода в каждой кучке лежит 15 камней. Каждым следующим ходом первый должен брать столько же камней, сколько и второй, но только из другой кучки, т. е. после каждого хода первого в двух кучках лежит одинаковое количество камней. Это означает, что у первого всегда есть ход, т. е. второй игрок проигрывает.

87. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску так, чтобы ладьи не били друг друга. Проигрывает тот, кому некуда ходить. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй.

Заметим, что после каждого хода количество вертикалей и горизонталей, куда можно поставить ладью, уменьшается на 1, т. е. игра будет продолжаться ровно 8 ходов и последний выигрышный ход сделает второй игрок.

88. На плоскости отмечено более одной точки. Двое по очереди соединяют еще не соединенную пару точек вектором одного из двух возможных направлений. Если после очередного хода игрока сумма всех нарисованных векторов нулевая, то выигрывает второй; если же ходить больше некуда, а нулевой суммы не было, то первый. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Первый.

Введем на плоскости систему координат. Тогда первому для выигрыша достаточно при каждом ходе проводить вектор с максимальной абсциссой, а из всех векторов, имеющих максимальную абсциссу, — вектор с максимальной ординатой.

Действительно, покажем, что сумма всех проведенных векторов в этом случае будет иметь либо положительную абсциссу, либо нулевую абсциссу и положительную ординату (назовем такой вектор положительным). Очевидно, что при каждом своем ходе первый игрок проводит положительный вектор и сумма двух положительных векторов положительна. Также очевидно, что сумма векторов, проведенных за ход первым и вторым, положительна или равна нулю. Поэтому достаточно доказать, что после первого хода второго игрока эта сумма будет положительна (т. е. не будет нулевой).

Пусть она нулевая, первый провел вектор \vec{AB} , а второй — \vec{CD} . Если абсциссы точек A и D не равны, то один из векторов \vec{AC} и \vec{DB} имеет абсциссу большую, чем вектор \vec{AB} (сумма этих абсцисс равна удвоенной

абсциссе \vec{AC}), что невозможно. Если абсциссы точек A и D совпадают, то не совпадают ординаты (иначе $A = D$, $B = C$), тогда абсциссы векторов \vec{AC} , \vec{DB} и \vec{AB} равны, но у какого-то из первых двух векторов ордината больше, чем у третьего, что опять-таки невозможно.

89. Есть клетчатый прямоугольник 3×10 клеток. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди, за один ход можно закрасить квадрат 1×1 , 2×2 или 3×3 клетки. Красить уже закрашенные клетки нельзя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Первый.

Для победы первый сначала закрасит квадрат 2×2 , как показано на рисунке 19. А после каждого хода второго он должен закрашивать квадрат, симметричный квадрату второго относительно прямой l . Так как больше не осталось квадратов, пересекаемых прямой l , то очевидно, что, действуя таким образом, первый всегда сможет сделать ход, т. е. второй проиграет.

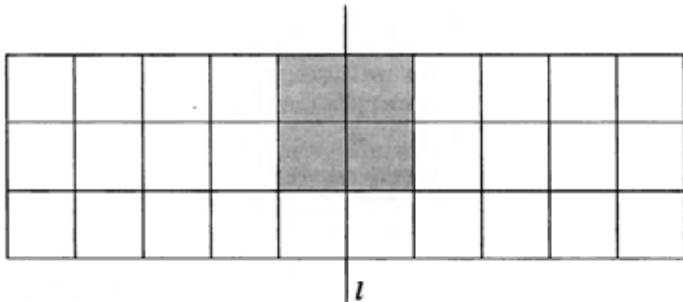


Рис. 19

90. Двое по очереди выписывают на доску делители числа 2002. При этом запрещается выписывать делители уже выписанных чисел. Проигрывает тот, кто не может выписать очередное число. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Первый.

Данная игра обязана закончиться победой одного из игроков, т. е. у одного из игроков должна быть выигрышная стратегия. Предположим, что у второго игрока есть выигрышная стратегия. Это означает, что, какие бы числа ни выписывал первый, второй всегда сможет в ответ выписывать такие числа, что именно он выпишет последнее число. Например, если первый

выпишет на доску цифру 1, то у второго найдется выигрышная стратегия S , и следующим ходом он должен выписать на доску число a . Однако если первый игрок своим первым ходом выпишет на доску число a , то число 1 на доске уже никогда не появится. Но тогда первый может воспользоваться выигрышной стратегией S второго, т. е. у второго нет выигрышной стратегии. Значит, она есть у первого.

91. Двое по очереди выписывают на доску натуральные числа от 1 до 1000. Первым ходом первый игрок выписывает на доску число 1. Затем очередным ходом на доску можно выписать либо число $2a$, либо число $a + 1$, если на доске уже написано число a . При этом запрещается выписывать числа, которые уже написаны на доске. Выигрывает тот, кто выпишет на доску число 1000. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй.

Заметим, что если какой-то из игроков выпишет на доску число 500 или 999 (назовем такой ход *проигрышным*), то его противник следующим ходом выпишет число 1000 и выиграет. Какие числа могут быть выписаны на доску до появления чисел 500 и 999? Во-первых, это все числа от 1 до 499 (их 499). Во-вторых, это все числа от 502 до 998 (их 497), так как 502 можно получить удвоением из числа 251. Заметим также, что число 501 может получиться только из числа 500, т. е. перед появлением числа 500 или 999 будет сделано не более $499 + 497 = 996$ непроигрышных ходов. При этом если сделано менее 996 непроигрышных ходов, то можно сделать еще один. Действительно, все числа от 2 до 499 можно получить из 1 операцией $a + 1$. Число 502 получается из 251. А из 502 можно получить все числа от 503 до 998. Таким образом, можно сделать четное число непроигрышных ходов. Это означает, что проигрышный ход сделает первый игрок.

92. Два игрока играют в следующую игру на доске $m \times n$ клеток ($m, n > 1$). У них есть белый и черный король соответственно, стоящие в противоположных углах доски. Они передвигают своих королей (по правилам шахмат) поочередно так, чтобы расстояние между центрами клеток, на которых стоят короли, уменьшалось (королям разрешается занимать соседние клетки). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

Ответ. Второй игрок выигрывает, если m и n оба нечетны. Во всех остальных случаях выигрывает первый.

Рассмотрим разность координат королей: обозначим их через x и y . Заметим, что вначале $x = m - 1$, $y = n - 1$. Мы докажем, что в следующих позициях первый проигрывает, а во всех остальных выигрывает: а) $x = 0$ и y нечетно; б) $y = 0$ и x нечетно; в) $x \neq 0$, $y \neq 0$, x и y оба четны.

Во-первых, очевидно, что игрок не может из одной проигрышной позиции попасть в другую проигрышную позицию. Также необходимо показать, что из любой выигрышной позиции можно попасть в проигрышную. Нам необходимо рассмотреть два случая (без ограничения общности можно считать, что $x, y \geq 0$):
1) $x, y \geq 1$ — легко видеть, что правила позволяют уменьшать x или y на 1 независимо. Также очевидно, что мы можем или обе координаты сделать четными, или одну сделать нулем, а другую — нечетной;
2) $x = 0$ — мы просто уменьшаем y на 1;
3) $y = 0$ — аналогично предыдущему уменьшаем x на 1. Итак, если первый игрок находится в выигрышной позиции, он и далее всегда может оставаться в выигрышной позиции. Если же он стоит на проигрышной позиции, второй игрок не даст ему занять выигрышную позицию. Так как расстояние между королями уменьшается, игра закончится, и из последней проигрышной позиции не может быть сделано никакого хода.



10. Метод математической индукции

93. На плоскости проведено несколько прямых. Докажите, что части (в том числе неограниченные), на которые плоскость разбивается этими прямыми, можно раскрасить в два цвета так, чтобы части одного цвета не имели общей границы.

Решение. Доказательство проведем индукцией по n — числу прямых. При $n = 1$ раскраска очевидна. Пусть при $n = k$ нам удалось раскрасить плоскость требуемым образом. Проведем $(k + 1)$ -ю прямую. Сохраним цвета всех частей, которые окажутся по одну сторону от этой прямой, а цвета всех частей, которые окажутся по другую сторону от нее, поменяем на противоположный. Легко понять, что полученная раскраска является искомой.

94. Докажите, что любой квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее пяти.

Решение. На рисунке 20 показано, как разрезать квадрат на 6, 7 и 8 квадратов. Пусть мы умеем разрезать квадрат на $n = k$ квадратов. Тогда, разрезав один из квадратов на 4 квадрата, мы получим, что исходный

квадрат будет разрезан на $n = k + 3$ квадратов, т. е. мы показали, что любой квадрат можно разрезать на любое число квадратов, большее пяти.

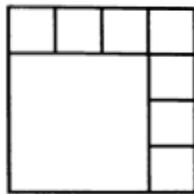
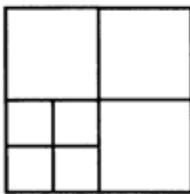
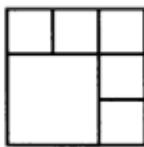


Рис. 20

95. Докажите неравенство Бернулли $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, если $x \geq -1$ и n — натуральное.

Решение. Доказательство будем вести индукцией по n .

База индукции. Для $n = 1$ неравенство превращается в очевидное равенство.

Индукционный переход. Пусть неравенство выполняется для $n = k$, т. е. $(1 + x)^k \geq 1 + kx$. Докажем, что оно выполняется и для $n = k + 1$. Домножим обе части неравенства при $n = k$ на неотрицательное число $(1 + x)$. Мы получим $(1 + x)^k(1 + x) \geq (1 + kx)(1 + x)$, т. е. $(1 + x)^{k+1} \geq (1 + kx)(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$, что и требовалось доказать.

96. Докажите, что при любом натуральном n число $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16.

Решение. **База индукции.** При $n = 1$ получаем, что $3^4 + 8 - 9 = 80$ делится на 16.

Индукционный переход. Пусть утверждение верно при $n = k$, т. е. число $3^{2k+2} + 8k - 9$ делится на 16. Тогда рассмотрим наше число при $n = k + 1$:

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2} + 8(k+1) - 9 &= 9 \cdot 3^{2k+2} + 8k + 8 - 9 = \\ &= 8 \cdot 3^{2k+2} + 8 + 3^{2k+2} + 8k - 9 = \\ &= 8(3^{2k+2} + 1) + (3^{2k+2} + 8k - 9). \end{aligned}$$

Первое слагаемое делится на 16, поскольку оно есть произведение 8 и четного числа. Второе слагаемое делится на 16 по предположению индукции. Значит, на 16 делится и вся сумма. Поэтому при $n = k + 1$ число $3^{2n+2} + 8n - 9$ делится на 16, что и требовалось доказать.

97. Докажите, что $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Решение. **База индукции.** При $n = 1$ тождество очевидно.

Индукционный переход. Пусть тождество выполняется при $n = k$, т. е. выполняется $1^3 + 2^3 + \dots +$

$$\dots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}. \text{ Рассмотрим сумму}$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + (k+1)^3 = (1^3 + 2^3 + \dots + k^3) + (k+1)^3 =$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 = (k+1)^2 \left(\frac{k^2}{4} + k + 1 \right) =$$

$$= (k+1)^2 \left(\frac{k^2 + 4k + 4}{4} \right) = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} =$$

$$= \frac{(k+1)^2((k+1)+1)^2}{4}, \text{ что и требовалось доказать.}$$



11. Геометрия

98. Можно ли покрыть без наложений всю плоскость квадратами, среди которых ровно два одинаковых?

Ответ. Можно.

Решение показано на рисунке 21.

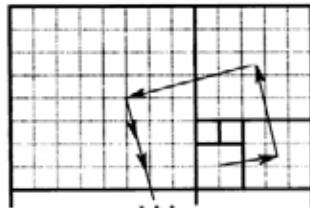


Рис. 21

99. На плоскости расположены два непересекающихся круга. Существует ли точка A , расположенная вне кругов, такая, что любая прямая, проходящая через точку A , пересекает хотя бы один из кругов?

Ответ. Существует.

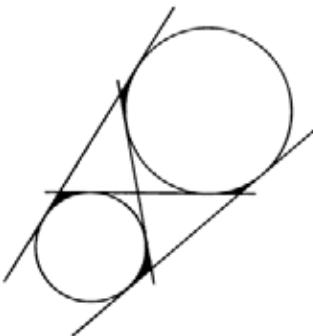


Рис. 22

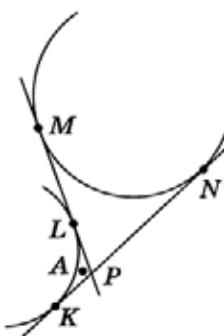


Рис. 23

Проведем общие внешние и внутренние касательные к этим кругам (рис. 22). Тогда каждая точка, расположенная в закрашенной области, является искомой. Действительно, любая прямая, проходящая через точку A , пересекает либо дугу KL первой окружности, либо дугу MN второй окружности, либо сразу обе (рис. 23).

100. На основании AD трапеции $ABCD$ взята точка M . Известно, что периметры треугольников ABM , MBC , CMD равны. Докажите, что $AD = 2BC$.

Решение. Докажем вначале, что $BC = AM$. Пусть это не так и, например, $BC < AM$.

Выберем на прямой BC точку K за точкой C так, чтобы $BK = AM$. Тогда $ABKM$ — параллелограмм и, значит, $P_{ABM} = P_{MBK}$ (рис. 24). Но по условию $P_{ABM} = P_{MBC}$. Значит, $MB + BK + KM = MB + BC + CM$, т. е. $CK + KM = CM$, что невозможно в силу неравенства треугольника. Аналогично приходим к противоречию и в случае $BC > AM$. Значит, $BC = AM$. Аналогично $BC = DM$, откуда $AD = AM + MD = 2BC$.

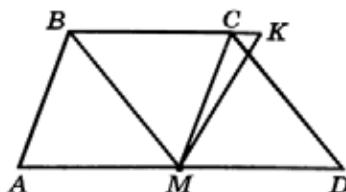


Рис. 24

101. В окружность вписан равносторонний треугольник ABC . На дуге AB окружности взята точка D . Докажите, что $DA + DB = DC$.

Решение. В силу свойств вписанных углов $\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$. Повернем треугольник ADB вокруг точки A на угол 60° (рис. 25). Тогда $D \rightarrow P$, $B \rightarrow B'$ так, что треугольники ADP и ABB' — равносторонние. Следовательно, $B' = C$, $P \in DC$ и $\triangle APC = \triangle ADB$ (треугольник APC получен из треугольника ADB поворотом). Поэтому $DC = DP + PC = DA + DB$, что и требовалось доказать.

102. Все углы шестиугольника $ABCDEF$ равны. Докажите, что $|AB - DE| = |BC - FE| = |CD - AF|$.

Решение. Сумма углов шестиугольника равна $(6 - 2) \times 180^\circ = 720^\circ$, следовательно, каждый угол в шестиугольнике $ABCDEF$ равен 120° . Продолжим стороны

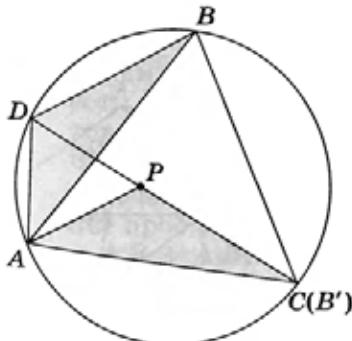


Рис. 25

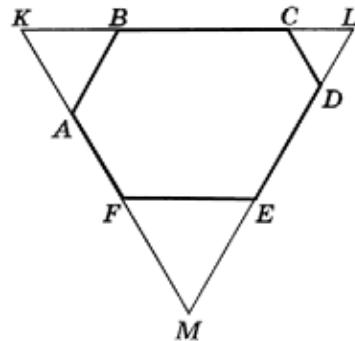


Рис. 26

AF , BC и DE до пересечения (рис. 26). Полученный треугольник KLM будет равносторонним, так как $\angle KAB = 180^\circ - \angle FAB = 60^\circ$, $\angle KBA = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \angle K = 60^\circ$. Аналогично с другими углами. Пусть k, a, b, c соответственно длины сторон треугольников KLM , KBA , LCD , FEM . Тогда $|AB - DE| = |a - (k - b - c)| = |a + b + c - k|$. Аналогично и для других пар сторон.

103. Даны две пересекающиеся окружности ω и Ω . Окружность ω пересекает окружность Ω в точках B и C , а ее хорду AO — в точке I . Докажите, что если O — центр окружности ω , то I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC .

Решение. Покажем, что $\angle CBI = \frac{1}{2} \angle CBA$. Действительно, $\angle CBI = \frac{1}{2} \overset{\smile}{IC} = \frac{1}{2} \angle IOC = \frac{1}{2} \angle AOC = \frac{1}{2} \angle ABC$ (рис. 27). Значит, BI — биссектриса угла ABC . Аналогично CI — биссектриса угла ACB . Утверждение доказано.

104. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $AKLB$ и $BNPC$. Докажите, что если BM — медиана треугольника LBN , то $BM \perp AC$.

Решение. Повернем квадраты по часовой стрелке на угол 90° вокруг точки B (рис. 28). При этом точка L перейдет в точку L_1 , такую, что B — середина отрезка AL_1 . Точка N перейдет в точку C , поэтому M перейдет в точку M_1 — середину отрезка L_1C . Значит, BM_1 — средняя линия треугольника AL_1C . Следовательно, $BM_1 \parallel AC$. Но отрезок BM_1 получен из отрезка BM поворотом на угол 90° , таким образом, $BM \perp AC$.

105. На столе лежат циферблатами вверх несколько правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов ча-

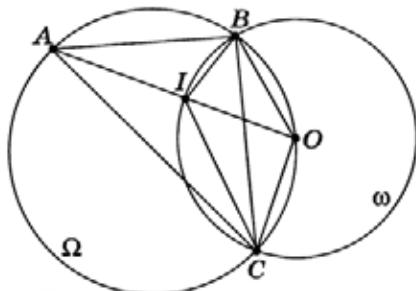


Рис. 27

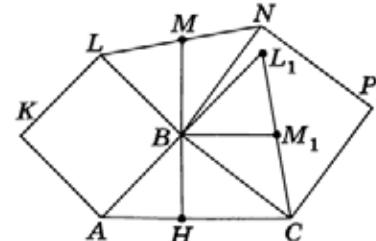


Рис. 28

совых стрелок больше суммы расстояний от центра стола до центра часов.

Решение. Рассмотрим данные суммы расстояний в 12.00 и 18.00. Пусть A_i, B_i, O_i соответственно концы часовных стрелок в 12.00 и 18.00 и центр i -х часов, O — центр стола. Тогда для каждого часов выполняется неравенство

$$OA_i + OB_i \geq 2OO_i,$$

так как длина медианы треугольника меньше полусуммы длин сторон, ее заключающих. Сложив эти неравенства, получим, что $\sum_{i=1}^n OA_i + \sum_{i=1}^n OB_i \geq 2 \sum_{i=1}^n OO_i$ (n — количество часов), откуда и следует утверждение задачи. Если все неравенства обращаются в равенства, то достаточно рассмотрения данных сумм в 9.00 и в 15.00.

106. Даны 5 отрезков, таких, что из любых трех из них можно составить треугольник. Докажите, что хотя бы один из этих треугольников остроугольный.

Решение. Пусть $a \leq b \leq c \leq d \leq e$ — длины отрезков. Предположим противное: все треугольники — тупоугольные или прямоугольные. Тогда, в частности, $a^2 + b^2 \leq c^2$, $b^2 + c^2 \leq d^2$, $c^2 + d^2 \leq e^2$. Отсюда $e^2 \geq c^2 + d^2 \geq a^2 + b^2 + b^2 + c^2 \geq 2a^2 + 3b^2 > 2(a^2 + b^2) \geq a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, значит, $e > a + b$. Получили противоречие: из отрезков длины a, b, e нельзя составить треугольник.

107. Астроном наблюдает на звездном небе несколько звезд, сумма попарных расстояний между которыми равна S . Набежавшее облако закрыло половину звезд. Докажите, что сумма попарных расстояний между оставшимися для наблюдения звездами меньше $\frac{S}{2}$.

Решение. Пусть A_1, \dots, A_m — звезды, оставшиеся для наблюдения, а B_1, \dots, B_n — закрытые облаком звезды. Тогда сумма S_1 оставшихся расстояний есть $\sum_{i \neq j} A_i A_j$.

Среди расстояний, исключенных из рассмотрения, есть $A_i B_j, B_j B_i, B_i A_j$, образующие ломаную, длина которой больше $A_i A_j$. А расстояние $A_i A_j$ сохранилось. Значит, $2S_1 < S$.

Замечание. Кажется, что задача имеет значительно более простое решение, основанное на неравенстве $A_i A_j + A_i B_i + A_j B_i + B_i B_j > 2A_i A_j$. Ошибочность этого «решения» заключается в том, что каждый отрезок $A_i B_i$ будет входить в несколько различных сумм, например, будет еще и в одной из сумм неравенства $A_i A_{j+1} + A_i B_i + A_{j+1} B_{j+1} + B_i B_{j+1} > 2A_i A_{j+1}$.

1994–1995

Авторы задач и составители: Н. Агаханов, С. Резниченко,
Д. Терёшин.

▼ 6 класс

- Найдите десять натуральных чисел, сумма и произведение которых равны двадцати.
- У трехзначного числа поменяли местами две последние цифры и сложили получившееся число с исходным. В результате получилось число 1187. Найдите все такие числа и объясните, почему нет других.
- По дороге идут два туриста. Один из них делает шаги на 10% короче и в то же время на 10% чаще, чем другой. Кто из туристов идет быстрее и почему?
- Проведя два прямолинейных разреза, разрежьте фигуру, показанную на рисунке 29, на такие части, из которых можно сложить квадрат (после первого разреза части фигуры перекладывать нельзя).
- Страницы книги пронумерованы подряд, от первой до последней. Хулиган Вася вырвал из разных мест книги 25 листов и сложил номера всех пятидесяти вырванных страниц. У него получилось число 1994. Когда об этом узнал Коля, он заявил, что при подсчете Вася ошибся. Объясните, почему Коля действительно прав.

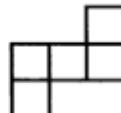


Рис. 29

▼ 7 класс

- Два автомобиля, находящиеся на расстоянии s км друг от друга, движутся навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля v_1 км/ч, второго v_2 км/ч. Через какое время они снова окажутся на расстоянии s км друг от друга?

7. На доске написано число 321321321321. Какие цифры необходимо стереть, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9? Чему равно это наибольшее число?
8. Малыш и Карлсон поочередно берут конфеты из одного пакета. Малыш берет одну конфету, Карлсон — две, затем Малыш берет три конфеты, Карлсон — четыре, и т. д. Когда количество оставшихся в пакете конфет станет меньше необходимого, тот, чья очередь наступила, берет все оставшиеся конфеты. Сколько конфет было в пакете первоначально, если у Малыша в итоге оказалась 101 конфета?
9. У звезды $ACEBD$ на рисунке 30 равны углы при вершинах A и B , углы при вершинах E и C , а также равны длины отрезков AC и BE . Докажите, что $AD = BD$.
10. В некотором доме живут только супружеские пары с маленькими детьми, причем бездетных семей нет, у каждого мальчика есть сестра, и мальчиков больше, чем девочек. Может ли оказаться, что в этом доме взрослых больше, чем детей?

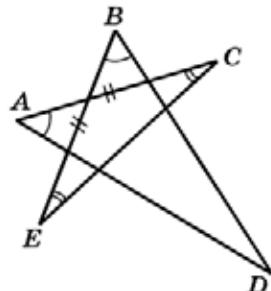


Рис. 30



8 класс

11. Решите уравнение $x^2 + (1 - x)^2 = x$.
12. В треугольнике одна из медиан перпендикулярна одной из биссектрис. Докажите, что одна из сторон этого треугольника вдвое больше другой.
13. Трехзначное число \overline{abc} делится на 37. Докажите, что сумма чисел bca и cab также делится на 37.
14. На доске написаны четыре числа. Разрешается выбрать любые два из них, прибавить к ним по единице и записать полученные числа вместо выбранных. Можно ли с помощью нескольких таких операций из чисел 1, 9, 4 получить четыре равных числа?

15. Графики трех линейных функций расположены так, как показано на рисунке 31. Существуют ли такие числа a , b и c , что одна из этих функций задается формулой $y = ax + b$, другая — формулой $y = bx + c$, а третья — формулой $y = cx + a$?

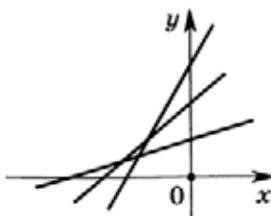


Рис. 31

▼ 9 класс

16. Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{2a}{a+b} + \frac{b}{a-b} = 2$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$.
17. Число $\underbrace{11\dots11}_{\text{несколько единиц}}$ делится на 7. Докажите, что оно делится и на 13.
18. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . Известно, что $AB = CH$. Найдите угол ACB .
19. Сумма трех неотрицательных чисел x_1 , x_2 и x_3 не превосходит $\frac{1}{2}$. Докажите, что $(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) \geq \frac{1}{2}$.
20. По кругу записано n целых чисел, сумма которых равна 94. Известно, что любое число равно модулю разности двух следующих за ним чисел. Найдите все возможные значения n .

▼ 10 класс

21. Числа a и b удовлетворяют равенству $\frac{a^2b^2}{a^4 - 2b^4} = 1$. Найдите все возможные значения выражения $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$.
22. На доске написаны числа 18 и 19. К уже написанным на доске числам разрешается дописать число, равное сумме любых двух из уже написанных. Можно ли, по-

вторая эту операцию, добиться того, чтобы на доске оказалось написано число 1994?

23. На рисунке 32 изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены

$$ax^2 + bx + c, \\ cx^2 + ax + b, \\ bx^2 + cx + a?$$

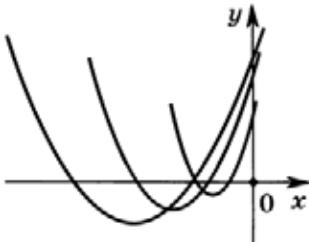


Рис. 32

24. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD . Известно, что центр окружности, вписанной в треугольник BCD , совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC . Найдите углы треугольника ABC .
25. Двенадцать волейбольных команд сыграли турнир в один круг. Обязательно ли найдутся такие три команды, что каждая из девяти оставшихся команд проиграла хотя бы одной из этих трех? (В волейболе не бывает ничьих.)



11 класс

26. Вычислите $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.
27. Существуют ли два последовательных натуральных числа, большие 1 000 000, такие, что суммы их цифр являются точными квадратами?
28. На рисунке 33 изображены графики трех квадратных трехчленов. Могут ли это быть трехчлены $ax^2 + bx + c$, $cx^2 + ax + b$, $bx^2 + cx + a$?
29. В треугольнике ABC проведены медианы AM и BN . Известно, что $\angle MAC = \angle NBC = 30^\circ$. Докажите, что треугольник ABC правильный.
30. В основании правильной пирамиды лежит многоугольник с нечетным числом сторон. Можно ли расставить стрелки на ребрах этой пирамиды (по одной на каждом ребре) так, чтобы сумма полученных векторов оказалась равной $\vec{0}$?

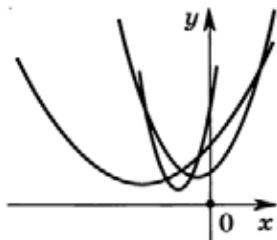


Рис. 33

Авторы задач и составители: Н. Агаханов, Р. Женодаров, С. Резниченко, С. Токарев.

▼ 6 класс

31. Замените буквы A , B , C и D цифрами так, чтобы получилось верное равенство

$$AAAA + BBB - CC + D = 1995.$$
32. К Васе пришли его одноклассники. Мать Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестренка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?
33. Нарисуйте 8 одинаковых квадратов так, чтобы ровно 15 точек были вершинами нарисованных квадратов.
34. Имеются 4 гири с маркировками 1 г, 2 г, 3 г и 4 г. Одна из них дефектная: более легкая или более тяжелая, чем указано на маркировке. Можно ли за два взвешивания узнать, какая из гирь дефектная, и при этом определить, легче она или тяжелее, чем на этой гире указано?
35. На столе лежат 9 карточек, на которых написаны натуральные числа от 1 до 9. Двоих играющих по очереди откладывают в сторону по одной карточке. Играющие видят числа, написанные на карточках. Проигрывает тот, после хода которого сумма чисел на отложенных карточках становится больше 25. Кто выиграет при правильной игре: начинающий или его партнер?

▼ 7 класс

36. Найдите наименьший целый корень уравнения

$$(|x| - 1)(x + 2,5) = 0.$$
37. В треугольнике ABC биссектриса AE равна отрезку EC . Найдите угол ABC , если $AC = 2AB$.
38. На 22 карточках написаны натуральные числа от 1 до 22. Из этих карточек составили 11 дробей. Какое наибольшее число этих дробей могут иметь целые значения?
39. Сколько существует пар двузначных чисел a и b , для которых произведение ab является числом, записанным одинаковыми цифрами?
40. Каждый из трех человек выписал 100 различных слов. После этого слова, встречающиеся не менее двух раз,

вычеркнули. В результате у одного осталось 45 слов, у другого — 68, а у третьего — 54. Докажите, что по крайней мере одно слово выписали трое.

8 класс

41. Докажите, что при любом натуральном n число $n^3 + 3n^2 + 6n + 8$ является составным.
42. На стороне AC треугольника ABC взяты точки D и E ($AD < AE$). Известно, что некоторые 4 из отрезков AB , BC , CE , ED , DA , BD и BE имеют равные длины. Могут ли 3 остальных отрезка иметь равные длины?
43. У крестьянина были коза, корова и кобыла, а еще стог сена и сын. Сын подсчитал, что этого сена хватит, чтобы кормить козу и кобылу один месяц, или козу и корову $\frac{3}{4}$ месяца, или же корову и кобылу $\frac{1}{3}$ месяца. Отец сказал, что сын плохо учится в школе. Объясните, почему он был вправе так сказать.
44. Сумма четырех натуральных чисел равна 1995. Какое наименьшее значение может принимать их НОК?
45. Сто спортсменов выстроены в шеренгу. Каждый из них одет в красный или синий спортивный костюм. При этом если спортсмен одет в красный костюм, то спортсмен, стоящий через девять человек от него, одет в синий костюм. Докажите, что в красные костюмы одеты не более 50 спортсменов.

9 класс

46. Найдите наименьшее целое x , удовлетворяющее неравенству
$$x \geq \frac{1995}{x}.$$
47. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ угол BAD равен 60° . Точки A_1 и A_2 симметричны точке A относительно прямых CB и CD соответственно. Докажите, что $\angle BCD = 60^\circ$, если известно, что точки A_1 , A_2 , B и D лежат на одной прямой.
48. Имеется дробь $\frac{1}{3}$. Каждую секунду к ее числителю прибавляется 1, а к знаменателю прибавляется 7. Восточное поверье гласит: в тот момент, когда получится дробь, сократимая на 11, наступит конец света. Докажите, что не следует бояться наступления конца света.
49. Натуральные числа 22, 23 и 24 обладают тем свойством, что в разложении каждого из них на простые множители каждый множитель входит в нечетной сте-

пени: $22 = 2^1 \cdot 11^1$, $23 = 23^1$, $24 = 2^3 \cdot 3^1$. Какое наибольшее количество последовательных натуральных чисел может обладать таким свойством?

- 50*. Доска размером 4×4 клетки покрыта 13 прямоугольниками размером 1×2 клетки, стороны которых идут по сторонам клеток. Докажите, что один из прямоугольников можно убрать так, что оставшиеся будут по-прежнему покрывать всю доску.

▼ 10 класс

51. Первая и вторая цифры двузначного числа N являются соответственно первым и вторым членами некоторой геометрической прогрессии, а само число N втрое больше третьего члена этой прогрессии. Найдите все такие числа N .
52. Натуральные числа p , q и r таковы, что $p + q$, $q + r$ и $r + p$ простые. Докажите, что среди чисел p , q и r есть равные.
53. Дан прямоугольный треугольник ABC с катетами $AC = 3$ и $BC = 4$. Построим треугольник $A_1B_1C_1$, последовательно переместив точку A на некоторое расстояние параллельно отрезку BC (точка A_1), затем точку B — параллельно отрезку A_1C (точка B_1) и, наконец, точку C — параллельно отрезку A_1B_1 (точка C_1). Чему равна длина отрезка B_1C_1 , если оказалось, что угол $A_1B_1C_1$ прямой и $A_1B_1 = 1$?
54. Найдите наименьшее натуральное число, не делящееся на 11, такое, что при замене любой его цифры на цифру, отличающуюся от выбранной на 1 (например, $3 \rightarrow 2$ или $4; 9 \rightarrow 8$), получается число, делящееся на 11.
55. Шесть футбольных команд в однокруговом турнире набрали 12, 10, 9, 8, 7 и 6 очков. Сколько очков начислялось за победу в матче, если за ничью начислялось 1 очко? (Количество очков, начисляемое за победу, не обязательно целое.)

▼ 11 класс

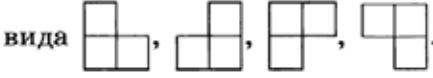
56. Касательная к графику функции $y = x^2$ пересекает координатные оси Ox и Oy в точках A и B так, что $OA = OB$. Найдите длину отрезка AB .
57. Найдите наибольшее число C , такое, что при всех x выполняется неравенство $x^2 \geq C[x] \{x\}$.
58. Докажите, что в произведении $P = 1! \cdot 2! \cdot \dots \cdot 100!$ можно вычеркнуть один из сомножителей так, чтобы произведение оставшихся было полным квадратом.

59. Площадь проекции грани ABB_1A_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость, перпендикулярную диагонали AC_1 , равна S . Чему равна площадь проекции параллелепипеда на эту плоскость?
- 60*. Какое наименьшее число попарно непересекающихся кругов, не содержащих данную точку O , можно расположить на плоскости так, чтобы любой луч, выходящий из точки O , пересекал не менее трех из них?

1996–1997

Авторы задач и составители: Н. Агаханов, А. Кочерова, Д. Терёшин.

▼ 6 класс

61. Решите числовой ребус $AAA - AA - A = BB$.
62. Даны три сосуда: первый емкостью 3 л, второй — 5 л, третий — 20 л. Первые два сосуда пустые. Третий заполнен водой. Как с помощью нескольких переливаний налить во второй сосуд ровно 4 л воды? (При переливаниях разрешается наливать в сосуд ровно столько воды, сколько в нем помещается, либо выливать всю воду из одного сосуда в другой, если она в него вся помещается.)
63. Разрежьте фигуру (рис. 34) на уголки вида  (Каждый квадратик размером 1×1).
64. Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?
65. Во всех клетках таблицы 3×3 первоначально записаны нули. Одним ходом разрешается прибавить ко всем четырем числам любого квадрата 2×2 по единице. Можно ли после нескольких ходов получить нарисованную таблицу (рис. 35)?

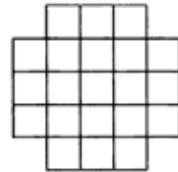


Рис. 34

2	5	3
6	18	8
4	9	5

Рис. 35

▼ 7 класс

66. Найдите все такие двузначные числа N , что сумма цифр числа N в 5 раз меньше самого числа N . Объясните, как вы нашли эти числа.

67. В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?
68. Длины сторон треугольника ABC — последовательные целые числа, а медиана, проведенная из вершины A , перпендикулярна биссектрисе угла B . Найдите длины сторон треугольника ABC .
69. Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно четыре цифры 3?
70. Можно ли на ребрах куба расставить числа от 1 до 12 (по одному числу на каждом ребре) так, чтобы сумма чисел на трех ребрах, выходящих из одной вершины, была одной и той же для каждой вершины куба?

▼ 8 класс

71. При каких a , b и c прямые $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ проходят через точку $A(1; 1)$?
72. Найдите все такие трехзначные числа N , что сумма цифр числа N в 11 раз меньше самого числа N .
73. Как изготовить прямоугольную коробку площадью 16 кв. ед., чтобы в нее можно было поместить два пирожных указанной формы (рис. 36)? (Пирожное состоит из пяти квадратов 1×1 .)
74. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке M , а биссектриса угла AMC проходит через точку D . Найдите углы параллелограмма, если известно, что $\angle MDC = 45^\circ$.
75. Можно ли числа 1, 2, 3, ..., 20 расставить в вершинах и серединах ребер куба так, чтобы каждое число, стоящее в середине ребра, равнялось полусумме чисел на концах этого ребра?



Рис. 36

▼ 9 класс

76. Докажите неравенство $\frac{1+8x}{1+8x^2} \leq 2$.
77. Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горит число, которое читается одинаково слева направо и справа налево?
78. На сторонах AB , BC , CD , DA квадрата $ABCD$ ($AB = 1$) взяты соответственно точки K , L , M и N так, что

$AK + LC + CM + NA = 2$. Докажите, что отрезки KM и LN перпендикулярны.

79. Кузнечик прыгает по плоскости так, что длина каждого следующего прыжка вдвое больше длины предыдущего прыжка. Сможет ли кузнечик когда-нибудь вернуться в начальную точку?
- 80*. Можно ли в квадрате 5×5 закрасить 16 клеток так, чтобы в любом квадрате 2×2 было закрашено не более двух клеток?



10 класс

81. Решите уравнение $19 \sin x + 9 \sin 2x + 6 \operatorname{tg} x = 0$.
82. Найдите наименьшее натуральное число N , такое, что $N + 1$ делится нацело на 19, а $N - 1$ делится нацело на 96.
83. Решите в натуральных числах уравнение
$$a! + b! + c! = d!$$
84. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC взяты соответственно точки R , P , Q так, что отрезки AP , BQ и CR пересекаются в одной точке M . Докажите, что если $S_{AMQ} = S_{AMR}$, $S_{BMR} = S_{BMP}$ и $S_{CMP} = S_{CMQ}$, то M — точка пересечения медиан треугольника ABC .
85. Внутри правильного треугольника со стороной 5 произвольно расположены 76 точек. Докажите, что можно так выбрать круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$, что он покроет не менее четырех из этих точек.



11 класс

86. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 10. Какое наименьшее количество чисел нужно стереть с доски так, чтобы оставшиеся числа можно было разбить на две группы с одинаковыми произведениями чисел в группах?
87. Биссектрисы AD , BE и CF треугольника ABC пересекаются в точке O . Докажите, что если треугольники BOF и BOD имеют равные площади, то треугольник ABC равнобедренный.
88. Пусть $x \geq 0$. Докажите неравенство
$$(1 + x + x^2 + \dots + x^{100}) \cdot (1 + x^{100}) \geq 200x^{100}$$
89. На каждом из ребер куба с ребром длины 1 и на одной из главных диагоналей (длины $\sqrt{3}$) выбраны направления. Какую наименьшую длину может иметь сумма полученных 13 векторов?

90. Верно ли, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде $n^2 + p$, где n — натуральное число, p — простое число?

1997–1998

Авторы задач и составители: Н. Агаханов, Р. Карасёв, А. Коровин, О. Подлипский.

▼ 6 класс

91. Запишите число 1997 с помощью десяти двоек и арифметических операций.
92. В строку одно за другим записаны все натуральные числа от 1 до n . Для какого n записанное число является 1998-значным?
93. Семья состоит из трех человек: отца, матери и сына. В настоящее время сумма их возрастов составляет 74 года, а 10 лет назад эта сумма составляла 47 лет. Сколько лет сейчас отцу, если он старше сына на 28 лет?
94. Какое наибольшее количество уголков вида  , состоящих из трех квадратов 1×1 , можно поместить в прямоугольник 5×7 ? (Уголки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать один на другой.)
95. Во время первенства класса по шахматам двое участников, сыграв равное количество партий, заболели и выбыли из турнира, а остальные участники доиграли турнир до конца. Играли ли выбывшие участники между собой, если всего было сыграно 23 партии? (Турнир проводился по круговой системе: каждый играл с каждым одну партию.)

▼ 7 класс

96. Запишите число 1997 с помощью десяти троек и арифметических операций.
97. Собака, находясь в пункте A , погналась за лисицей, которая была в пункте B на расстоянии 30 м от собаки. Скачок собаки равен 2 м, скачок лисицы — 1 м. Собака делает 2 скачка, в то время как лисица делает 3 скачка. На каком расстоянии от пункта A собака догонит лисицу?

98. Найдите все трехзначные числа, которые уменьшаются в 5 раз после зачеркивания первой цифры.
99. Какое наибольшее количество уголков вида , состоящих из пяти квадратов 1×1 , можно поместить в квадрат 7×7 ? (Уголки можно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать один на другой.)
100. Можно ли закрасить некоторые клетки квадрата 9×9 так, чтобы у каждой клетки было ровно две закрашенные соседние клетки? (Клетки называются соседними, если они имеют общую сторону.)

▼ 8 класс

101. Запишите число 1997 с помощью одиннадцати четверок и арифметических операций.
102. Какое из чисел больше: 2^{1997} или 5^{850} ?
103. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD четырехугольника $ABCD$ пересекаются на стороне AD . Докажите, что если $\angle A = \angle D$, то диагонали четырехугольника $ABCD$ равны.
104. На вопрос о возрасте его детей математик ответил: «У нас трое детей. Когда родился наш первенец, суммарный возраст членов семьи был равен 45 годам, год назад, когда родился третий ребенок, — 70 лет, а в этом году суммарный возраст детей — 14 лет». Каков возраст детей математика?
105. Имеется неограниченное число фишек шести цветов. Какое наименьшее число фишек нужно расположить в ряд, чтобы для любых двух различных цветов в ряду нашлись две соседние фишечки этих цветов?

▼ 9 класс

106. Запишите число 1997 с помощью 12 пятерок и знаков арифметических операций.
107. Числа a и b — длины катетов, c — длина гипотенузы прямоугольного треугольника. Докажите, что $a^4 + a^2b^2 + b^4 \geq \frac{3}{4}c^4$.
108. Квадратный трехчлен $P(x) = ax^2 + bx + c$ (a, b, c — целые, c — нечетное) имеет целые корни. Может ли $P(1997)$ быть нечетным числом?
109. Биссектрисы AA_1 и CC_1 треугольника ABC пересекаются в точке P . Докажите, что если в четырехуголь-

ник PC_1BA_1 можно вписать окружность, то треугольник ABC равнобедренный.

110. На полке стоят 666 книг по черной и белой магии, причем никакие 2 книги по белой магии не стоят через 13 книг (т. е. между ними не может стоять 13 книг). Какое наибольшее число книг по белой магии может стоять на полке?

▼ 10 класс

111. Дан график функции $y = x^2 + ax + a$ (рис. 37). Найдите a .
112. Числа $\frac{1}{a+b}$, $\frac{1}{a+c}$ и $\frac{1}{b+c}$ образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что числа a^2 , b^2 и c^2 также образуют арифметическую прогрессию.
113. AA_1 и CC_1 — биссектрисы треугольника ABC . Докажите, что если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AA_1C и CC_1A , равны, то треугольник ABC равнобедренный.
114. Найдите все тройки простых чисел p , q и r , для которых числа $|p - q|$, $|q - r|$, $|r - p|$ также простые.
115. Можно ли правильный 1997-угольник разбить непересекающимися диагоналями на равнобедренные треугольники?

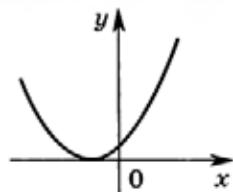


Рис. 37

▼ 11 класс

116. Докажите, что функция $f(x) = \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin x + \cos x}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, является нечетной.
117. Дан график функции $y = ax^4 - x^2 + bx + c$ (рис. 38). Найдите знаки чисел a , b и c .
118. На доске написано число 123. Каждую минуту его увеличивают на 102. Разрешается в любой момент времени произвольно переставлять цифры у написанного числа. Можно ли добиться

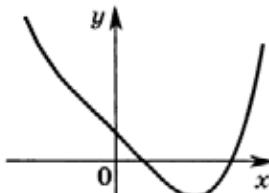


Рис. 38

того, чтобы на доске всегда было написано трехзначное число?

119. В треугольной пирамиде боковые грани, имеющие площади 5, 5, 8, наклонены под равными углами к основанию. Площадь основания 9. Найдите объем пирамиды.
120. Докажите, что если x и y — произвольные положительные числа, m и n — натуральные числа, причем $m \geq n$, то $\sqrt[m]{x^m + y^m} \leq \sqrt[n]{x^n + y^n}$.

1998–1999

Авторы задач и составители: *Н. Агаханов, Р. Карасёв, О. Подлипский.*



6 класс

121. Как разложить гирьки весом 1, 2, ..., 9 г в три коробочки так, чтобы в первой было две гирьки, во второй — три, в третьей — четыре, а суммарный вес гирек в коробочках был одинаковым?
122. Замените букву A на цифру, звездочки на арифметические действия (необязательно одинаковые) и расставьте скобки так, чтобы равенство $AAA * A * A = 1998$ было верным.
123. Разрежьте угол 8×8 на уголки из трех клеток (рис. 39).
124. По дороге едут автомобили: на запад — «москвич» и «жигули» с равными между собой скоростями, а на восток — «мерседес» и БМВ с равными между собой скоростями. «Москвич» встретился с БМВ в 12.00, «жигули» с БМВ — в 15.00, «москвич» с «мерседесом» — в 14.00. Когда встретились «жигули» с «мерседесом»?
125. Известно, что в Московской области землетрясения происходят через равные промежутки времени (необязательно через целое количество дней). Может ли быть так, что первое землетрясение в этом тысячелетии произошло в понедельник, второе — во вторник, а четвертое — в воскресенье?

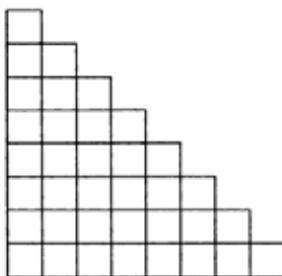


Рис. 39



7 класс

126. У Пети есть торт, в трех углах и в самом центре которого по изюминке (рис. 40). Петя хочет двумя прямолинейными разрезами разделить торт на 4 части — каждая с изюминкой — так, чтобы ему достался кусок с изюминкой A и этот кусок составлял ровно $\frac{1}{5}$ часть торта. Как Петя может разрезать торт?

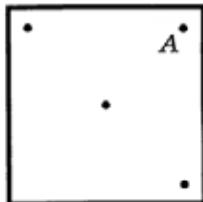


Рис. 40

127. В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идет число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?
128. На острове О живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник встретил двух туземцев — А и Б. Туземец А произнес фразу:
— По крайней мере один из нас (А и Б) — лжец.
Можно ли сказать, кем является А и кем является Б (рыцарем или лжецом)?
129. Может ли разность двух чисел вида $n^2 + 4n$ (n — натуральное) равняться 1998?
130. На скамейке сидят десять школьников: мальчики и девочки. Может ли быть так, что между каждыми двумя мальчиками сидит четное число школьников, а между каждыми двумя девочками — нечетное?



8 класс

131. В США дату принято записывать так: номер месяца, потом номер дня и год. В Европе же сначала идет число, потом месяц и год. Сколько в году дней, дату которых нельзя прочитать однозначно, не зная, каким способом она написана?
132. У фальшивомонетчика есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых 2 фальшивые — они легче, чем остальные, и весят одинаково. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь отобрать 20 настоящих монет?
- 133*. Найдите наименьшее натуральное n , такое, что количество нулей, которыми оканчивается число $(n + 10)!$, на 1998 больше количества нулей, которыми оканчивается число $n!$.

134. Дан остроугольный треугольник ABC . Окружность с центром на стороне BC проходит через вершины B и C и пересекает стороны AB и AC в точках D и E соответственно. Оказалось, что $AD = AE$. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
135. На столе лежит правильный треугольник ABC , сделанный из жести. Его разрешается катать по столу, переворачивая через любую сторону. Докажите, что если после нескольких таких операций треугольник вернулся на свое место, то и все его вершины тоже вернутся на свои места.

▼ 9 класс

136. Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет корни. Верно ли, что трехчлен $a^3x^2 + b^3x + c^3$ также имеет корни?
137. Докажите, что $\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{1997}{1998!} < 1$.
138. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекают описанную окружность в точках K и L соответственно. Отрезки AK и BL пересекаются в точке X и делятся этой точкой в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.
139. Приведите пример хотя бы одного числа, у которого сумма цифр равна 1998, а само число делится на 1998. Ответ обоснуйте.
140. В стране N города соединены между собой авиалиниями, причем перелеты осуществляются только в одном направлении. Известно, что выполняется условие: вылетев из любого города, нельзя вернуться в него, пользуясь этими авиалиниями. Докажите, что можно дополнить систему авиалиний так, чтобы каждый город был соединен авиалинией с каждым другим и при этом новая система авиалиний удовлетворяла данному условию.

▼ 10 класс

141. Про квадратные трехчлены f_1 и f_2 известно, что они имеют корни, а $f_1 - f_2$ не имеет. Докажите, что $f_1 + f_2$ имеет корни.
142. В остроугольном треугольнике ABC высоты из углов A и B пересекают описанную окружность в точках K и L . Отрезки AK и BL пересекаются в точке X и делятся этой точкой в равных отношениях, считая

от вершин треугольника. Докажите, что треугольник ABC равнобедренный.

143. Найдите значение суммы $6 + 66 + 666 + \dots + \overbrace{66 \dots 6}^{\text{1998}}$.

144. На плоскости нарисован выпуклый многоугольник со сторонами, окрашенными снаружи (т. е. считаем, что одна сторона отрезка окрашена, а другая нет). В нем проведено несколько диагоналей, каждая из которых также окрашена с одной стороны. Докажите, что какой-то из многоугольников, на которые оказался разрезан исходный, также окрашен снаружи.
145. На сторонах BC , CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Отрезки A_1B_1 , B_1C_1 и C_1A_1 разбили треугольник ABC на четыре треугольника равной площади. Докажите, что A_1 , B_1 и C_1 — середины сторон треугольника ABC .

▼ 11 класс

146. Найдите два решения уравнения $\left(\frac{4}{3}\right)^{\cos x} = \sin x$, принадлежащие промежутку $(0; 2\pi)$.
147. Знаменатель ненулевой геометрической прогрессии не меньше двух. Докажите, что ни один из членов прогрессии нельзя представить в виде суммы конечного числа различных членов этой прогрессии.
148. В основании четырехугольной пирамиды лежит ромб. Основание высоты пирамиды — точка пересечения диагоналей ромба. Докажите, что для любой точки на основании пирамиды сумма расстояний до двух противолежащих боковых граней равна сумме расстояний до двух других боковых граней.
- 149*. Найдите все разбиения множества натуральных чисел на два непересекающихся подмножества, такие, что любые два числа, разность которых — простое число, большее 100, лежат в разных подмножествах.
- 150*. Две команды играют в футбол до 10 голов (встреча прекращается, как только какая-то команда забьет 10 голов). В процессе игры заполняется протокол, в который вносится счет после каждого изменения счета, например $0 : 0$, $0 : 1$, $0 : 2$, $1 : 2$, ..., $5 : 10$. Сколько разных протоколов может получиться?

Авторы задач и составители: Н. Агаханов, А. Коровин, О. Подлипский. Задача 175 предложена И. Рубановым.

▼ 6 класс

151. Решите числовой ребус

$$AAAA - BBB + CC - D = 1234$$

(одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными буквами — разные цифры).

152. Составьте из прямоугольников 1×1 , 1×2 , 1×3 , ..., 1×13 прямоугольник, каждая сторона которого больше 1.
153. Найдите наибольшее число, все цифры которого различны, а их произведение равно 360.
154. На доске были написаны числа 1, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 12, 16. Петя и Коля стерли по четыре числа, и оказалось, что сумма чисел, стертых Петей, втрое больше суммы чисел, стертых Колей. Какое число могло остаться на доске? Ответ объясните.
- 155*. Малыш и Карлсон по очереди достают из коробки конфеты, при этом каждый берет на 1 конфету больше или меньше, чем перед этим взял другой, не брать конфеты из коробки в свою очередь нельзя. Вначале в коробке было 24 конфеты, и Малыш и Карлсон договорились, что если в какой-то момент в коробке останется ровно 4 или 14 конфет, то тому, чья очередь брать конфеты, достанется торт. Сможет ли Карлсон, который первым берет конфеты, выиграть торт, если вначале он имеет право взять 1 или 2 конфеты?

▼ 7 класс

156. Петя считает пальцы на левой руке от большого пальца до мизинца и обратно от мизинца до большого. Каждый следующий счет приходится на другой палец. На какой палец придется число 1999? (Счет: 1 — большой, 2 — указательный, 3 — средний, 4 — безымянный, 5 — мизинец, 6 — безымянный, 7 — средний и т. д.)
157. Сумма пяти чисел равна 200. Докажите, что их произведение не может оканчиваться на 1999.
158. Дан прямоугольник $ABCD$. На стороне BC взята точка K , а на стороне AD взята точка M так, что $BK = DM$. Отрезки AK и BM пересекаются в точке P ,

а отрезки DK и CM — в точке N . Докажите, что треугольники PAB и NCD равны.

159. Имеется 7 внешне одинаковых монет, среди которых 5 настоящих (все — одинакового веса) и 2 фальшивые (одинакового между собой веса, но легче настоящих). Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь выделить 3 настоящие монеты?
160. Замостите без щелей и перекрытий какую-нибудь полосу (бесконечную в обе стороны) уголками, получаемыми вырезанием из квадратов 3×3 угловых квадратов 2×2 . (Ширина полосы может быть 3, 4, 5, ...)



8 класс

161. Имеется 30 бревен длинами 3 и 4 м, суммарная длина которых равна 100 м. Каким числом распилов можно распилить бревна на чурбаны длиной 1 м? (Каждым распилом пилится ровно одно бревно.)
162. Какое наименьшее количество чисел нужно исключить из набора 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 так, чтобы оставшиеся числа можно было разбить на две группы с одинаковым произведением чисел в группах? Приведите пример такого разбиения на группы.
163. Точка пересечения медиан AA_1 , BB_1 , CC_1 треугольника ABC является центром окружности, вписанной в треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.
164. Назовем натуральное число *особым*, если оно представимо в виде $t^2 + 2n^2$, где t и n — целые числа. Докажите, что произведение двух особых чисел также особое число.
165. В шахматном турнире в школе участвовало 20 участников. Каждый сыграл с каждым по одной партии. После окончания турнира оказалось, что ровно один ученик набрал 9,5 очка и он занял девятнадцатое место. Мог ли победитель турнира обойти игрока, занявшего второе место, на 1 очко? За победу присуждается 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за поражение — 0 очков.



9 класс

166. Докажите, что при любых a и b уравнение
$$(a^2 - b^2)x^2 + 2(a^3 - b^3)x + (a^4 - b^4) = 0$$
 имеет решение.

167. Найдите три последовательных натуральных числа, сумма которых оканчивается на 1999. Какая наименьшая тройка чисел удовлетворяет этому условию?
168. В остроугольном треугольнике из одной вершины проведена высота, из другой — биссектриса, из третьей — медиана. Докажите, что проведенные биссектриса и медиана не могут разделить высоту на три равные части.
- 169*. Длины a , b и c сторон некоторого треугольника удовлетворяют соотношению $2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$. Докажите, что треугольник прямоугольный.
170. В круге, площадь которого равна 1, дано 1999 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Докажите, что из этих точек можно выбрать 3, такие, что площадь треугольника с вершинами в выбранных точках будет меньше 0,0011.

▼ 10 класс

171. Произведение четырех чисел — корней уравнений $x^2 + 2bx + c = 0$ и $x^2 + 2cx + b = 0$, где b и c — положительны, равно единице. Найдите b и c .
172. Коля отправился за грибами между восемью и девятью часами утра в момент, когда часовая и минутная стрелки его часов были совмещены. Домой он вернулся между двумя и тремя часами дня, при этом часовая и минутная стрелки его часов были направлены в противоположные стороны. Сколько времени продолжалась Колина прогулка?
173. Найдите наименьшее натуральное число n , такое, что суммы цифр чисел n и $n + 1$ делятся на 5.
174. Дан выпуклый четырехугольник $ABCD$. Известно, что радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC , BCD , CDA и DAB , равны. Докажите, что $AC = BD$.

175. В пространстве выбраны 9 точек так, что они лежат на четырех прямых, параллельных прямой a , а также на трех прямых, параллельных прямой b , $b \nparallel a$. Докажите, что эти 9 точек лежат в одной плоскости.

▼ 11 класс

176. Пусть $S(N)$ — сумма цифр натурального числа N . Найдите все N , для которых $N + S(N) = 1999$.

177. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0. \end{cases}$$

178. Для некоторого x числа $\sin 2x$, $\sin 5x$ и $\sin 7x$ рациональны. Докажите, что число $\sin 12x$ также рационально.

179*. Три точки — пересечения высот, медиан и биссектрис остроугольного треугольника ABC лежат на окружности с хордой AC . Докажите, что треугольник ABC правильный.

180*. Решите в простых числах уравнение

$$2^p - q^2 = 1999.$$

2000–2001

Авторы задач и составители: *Н. Агаханов, О. Подлипский, Б. Трушин.*



6 класс

- 181.** Запишите число 2000, используя 9 единиц, скобки и арифметические операции.
- 182.** Разрежьте прямоугольник 4×9 на две одинаковые части, из которых можно сложить квадрат.
- 183.** Можно ли с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить хотя бы одну настоящую монету из пяти одинаковых по внешнему виду, если известно, что среди этих монет 3 настоящие и 2 фальшивые, одна из которых легче, а другая тяжелее настоящих монет?
- 184.** В 6Б классе обучаются 20 учеников. В первой четверти они по трое дежурили по классу. Могло ли так получиться, что в некоторый момент каждый из учеников отдежурил с каждым ровно по одному разу?
- 185.** Найдите наименьшее 20-значное число, сумма цифр которого равна 20 и которое само делится на 20.



7 класс

- 186.** Запишите число 2000, используя 8 девяток, скобки и арифметические операции.
- 187.** Можно ли разделить поровну 13 одинаковых прямоугольных пирожных среди шести ребят так, чтобы каждое пирожное либо не разрезалось вовсе, либо раз-

резалось на две равные части, либо разрезалось на три равные части?

188. Рома на каждой перемене съедал больше конфет, чем на предыдущей, и за все 5 перемен съел 31 конфету. Сколько конфет он мог съесть на четвертой перемене, если на первой он съел в 3 раза меньше, чем на пятой?
189. Точки E и F — середины сторон BC и CD квадрата $ABCD$. Отрезки AE и BF пересекаются в точке K . Что больше: площадь треугольника AKF или площадь четырехугольника $KECF$?
190. На доске написано число 2000. Петя и Коля по очереди делят число, написанное на доске, на любое из следующих трех чисел: 2, 5, 10. Проигрывает тот из них, после хода которого на доске появится нецелое число. Петя ходит первым. Кто выигрывает при правильной игре?



8 класс

191. Запишите число 2000, используя 8 троек, скобки и арифметические операции.
192. Из произведения всех натуральных чисел от 1 до 1812 вычеркнули все числа, делящиеся на 5. Какой цифрой будет оканчиваться произведение оставшихся чисел?
193. Можно ли из квадрата 5×5 вырезать прямоугольник 1×6 ?
194. Существует ли выпуклый пятиугольник, в котором каждая диагональ не больше стороны, с которой эта диагональ не имеет общих точек?
195. В левом нижнем углу доски 7×7 клеток стоит фишка. Два игрока по очереди передвигают фишку на одну из соседних по стороне клеток. Проигрывает тот игрок, после хода которого фишка попадает в клетку, где она уже побывала. Кто выигрывает при правильной игре?



9 класс

196. Квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет целые корни, по модулю большие 2. Докажите, что число $a + b + 1$ составное.
197. Докажите, что при всех положительных x, y, z выполняется неравенство $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} \geq 4(x - z)$.
198. Центр города представляет из себя квадрат 5×5 км, состоящий из 25 кварталов размером 1×1 км, границы которых — улицы, образующие 36 перекрестков.

Какое наименьшее количество полицейских необходимо поставить на перекрестках так, чтобы до каждого из перекрестков какой-то из полицейских мог бы добраться, проехав на машине не более 2 км?

199. В треугольнике ABC проведены биссектриса AL , высота BH и медиана CM . Оказалось, что углы CAL , ABH и BCM равны между собой. Какие углы мог иметь треугольник ABC ?
- 200*. Каких треугольников с целочисленными сторонами больше: имеющих периметр 1997 или имеющих периметр 2000?

▼ 10 класс

201. Существует ли такое число x , что значения выражений $x + \sqrt{2}$ и $x^3 + \sqrt{2}$ — рациональные числа?
202. Найдите все пары $(a; b)$ действительных чисел a и b , таких, что уравнения $x^2 + ax + b^2 = 0$ и $x^2 + bx + a^2 = 0$ имеют по крайней мере один общий корень.
203. Решите систему уравнений $\begin{cases} \sin x + \sin y = \sqrt{2} \operatorname{tg} z, \\ \cos x + \cos y = \sqrt{2} \operatorname{ctg} z. \end{cases}$
204. В окружность вписан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB . На большем катете BC взята точка D так, что $AC = BD$, а точка E — середина дуги AB , содержащей точку C . Найдите угол DEC .
205. У Васи есть три банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 10 досок, так, чтобы любые 2 соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски всех трех цветов?

▼ 11 класс

206. Найдите минимальное натуральное n , при котором выражение $n(n+1)(n+2)(n+3)$ делится на 2000.
207. Существует ли такое x , что значения выражений $\operatorname{tg} x + \sqrt{3}$ и $\operatorname{ctg} x + \sqrt{3}$ — целые числа?
208. Дискриминант приведенного квадратного трехчлена $P(x)$ положителен. Сколько корней может иметь уравнение $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = 0$?
209. Все боковые грани четырехугольной пирамиды — прямоугольные треугольники с вершиной прямого угла на основании пирамиды. Может ли основание высоты пирамиды быть внутренней точкой ее основания?

- 210.** На плоскости расположены 2000 точек, любые три из которых являются вершинами треугольника площадью меньше 1. Верно ли, что все точки можно закрыть треугольником площадью 4?

2001–2002

Авторы задач и составители: *Н. Агаханов, О. Подлипский.*

▼ **6 класс**

- 211.** Расставьте скобки в выражении $7 - 6 - 5 - 4 - 3 - 2 - 1 = 0$ так, чтобы получилось верное равенство.
- 212.** Решите ребус: $ABBA + A + B = CDDA$. Одинаковыми буквами обозначены одинаковые цифры, разными — разные. Объясните, как получен ответ.
- 213.** Разрежьте фигуру, полученную из прямоугольника 4×5 вырезанием четырех угловых клеток 1×1 (рис. 41), на три части, не являющиеся квадратами, так, чтобы из этих частей можно было сложить квадрат.
- 214.** Можно ли раскрасить все клетки квадрата 10×10 в 4 цвета так, чтобы любые четыре клетки, образующие одну из фигур, были разного цвета? Объясните свой ответ для каждого случая (а и б).

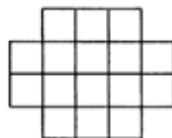


Рис. 41

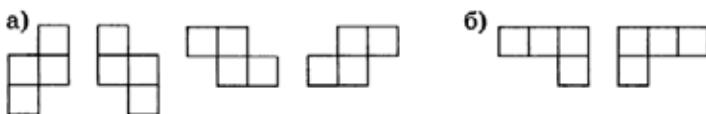


Рис. 42

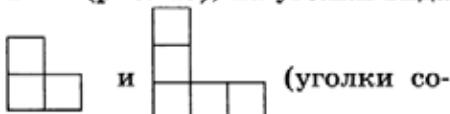
- 215.** В школьной математической олимпиаде приняли участие учащиеся всех шестых классов. Ученики 6Д класса выступили на олимпиаде следующим образом: первую задачу решили 9 учеников, вторую — 7 учеников, третью — 5 учеников, четвертую — 3 ученика, пятую — 1 ученик. Все ученики 6Д, кроме Петя, решили одинаковое число задач, а Петя — на одну задачу больше. Мог ли он стать призером олимпиады, если призерами олимпиады стали шестиклассники, решившие 4 или 5 задач?

▼ **7 класс**

- 216.** Какие весы должны иметь три гири, для того чтобы с их помощью можно было взвесить любое целое число

килограммов от 1 до 10 на чашечных весах (гири можно ставить на обе чаши)? Объясните свой ответ.

217. Разрежьте фигуру, получающую из квадрата 7×7 вырезанием четырех угловых клеток 1×1 (рис. 43), на уголки вида



стоят из квадратиков размера 1×1) так, чтобы квадратики, отмеченные на рисунке, оказались только в больших углах.

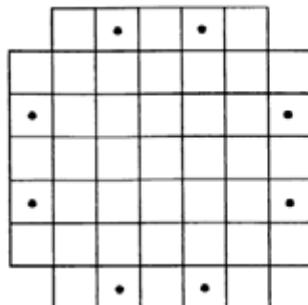


Рис. 43

218. В клетках квадратной таблицы 10×10 произвольным образом расставлены числа от 1 до 100. Пусть S_1, S_2, \dots, S_{10} — суммы чисел, стоящих в столбцах таблицы. Могло ли оказаться так, что среди чисел S_1, \dots, S_{10} любые два соседних числа различаются ровно на 1?
219. Путешественник прибыл на остров, на котором живут лжецы (Л) и правдолюбцы (П). Каждый Л, отвечая на вопрос «Сколько...?», называет число на 2 больше или на 2 меньше, чем правильный ответ, а каждый П отвечает верно. Путешественник встретил двух жителей острова и спросил у каждого, сколько Л и П проживает на острове. Первый ответил: «Если не считать меня, то 1001 Л и 1002 П», а второй: «Если не считать меня, то 1000 Л и 999 П». Сколько Л и П на острове? Кем оказались первый и второй жители острова?
220. На доске написано число 123456789. У написанного числа выбираются две соседние цифры, если ни одна из них не равна нулю, из каждой вычитается по единице и выбранные цифры меняются местами (например, $123456789 \rightarrow 123436789 \rightarrow \dots$). Какое наименьшее число может быть получено в результате таких операций? Ответ необходимо обосновать.



8 класс

221. Докажите, что для любого натурального числа n можно выбрать такое натуральное число a , чтобы число $a(n+1) - (n^2 + n + 1)$ нацело делилось на n^3 .
222. В городской олимпиаде по математике участвовали двое близнецов. На вопрос о том, есть ли у них еще братья и какого они возраста, близнецы ответили: «У нас есть брат, его возраст записывается двумя оди-

наковыми цифрами, а суммарный возраст всех настрих — двузначное число, у которого вторая цифра вдвое больше первой». Определите возраст братьев.

223. Даны действительные числа a , b , c , причем $a > b > c$. Докажите неравенство $a^2b + b^2c + c^2a > b^2a + a^2c + c^2b$.
224. Угол между двумя высотами остроугольного треугольника ABC равен 60° , и точка пересечения высот делит одну из них в отношении $2 : 1$, считая от вершины треугольника. Докажите, что треугольник ABC равносторонний.
225. Шестизначное число N , все цифры которого различны, таково, что само оно и любое число, полученное из N перестановкой цифр, делится на некоторое число M . Каким может быть число M ?

▼ 9 класс

226. Рассматриваются квадратичные функции $y = x^2 + px + q$, у которых $p + \frac{1}{2}q = 2001$. Докажите, что их графики проходят через одну точку.
227. На столе стоят восемь стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количество воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах воды стало поровну.
228. Точка D — середина стороны AC треугольника ABC , DE и DF — биссектрисы треугольников ABD и CBD . Отрезки BD и EF пересекаются в точке M . Докажите, что $DM = \frac{1}{2}EF$.
229. Найдите значение выражения
$$1! \cdot 3 - 2! \cdot 4 + 3! \cdot 5 - 4! \cdot 6 + \dots - 2000! \cdot 2002 + 2001!$$
230. На столе лежит 2001 монета. Двое играют в следующую игру: ходят по очереди, за ход первый может взять со стола любое нечетное число монет от 1 до 99, второй — любое четное число монет от 2 до 100 и т. д. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

▼ 10 класс

231. Докажите, что не существует двух натуральных чисел, таких, что их сумма равна 201, а произведение делится на 201.

232. Клетки доски 2001×2001 раскрашены в шахматном порядке в черный и белый цвета так, что угловые клетки — черные. Для каждой пары разноцветных клеток рисуется вектор, идущий из центра черной клетки в центр белой. Докажите, что сумма всех нарисованных векторов равна нулю.
233. Точка, симметричная центру вписанной в треугольник окружности относительно одной из его сторон, лежит на описанной около этого треугольника окружности S . Докажите, что точка, симметричная центру окружности S относительно некоторой стороны треугольника, также лежит на окружности S .
234. Известно, что для некоторого x выполняются равенства $\cos 3x = a \sin 2x$ и $\sin 3x = b \cos 4x$, где a и b — рациональные числа. Докажите, что $\sin 3x$ — рациональное число.
- 235*. У правильного 5000-угольника окрашена 2001 вершина. Докажите, что можно выбрать три окрашенные вершины, которые являются вершинами равнобедренного треугольника.



11 класс

236. Пусть $\cos x \neq 0$. Докажите неравенство
- $$\left| \frac{\cos 2x + 3}{\cos x} \right| \geq 4.$$
237. Рассматриваются квадратные трехчлены вида $x^2 + px + q$ с целыми коэффициентами, при этом $p + q = -30$. Сколько таких трехчленов имеют целые корни?
238. Площадь проекции некоторого параллелепипеда P на плоскость одной из его граней равна площади этой грани, площадь проекции параллелепипеда P на плоскость другой грани в полтора раза больше площади этой грани, наконец, площадь проекции параллелепипеда P на плоскость третьей грани в 2 раза больше площади этой грани. Найдите углы параллелепипеда P в этих гранях.
239. На листе нарисованы координатные оси и ветви гиперболы $y = \frac{k}{x}$ (k неизвестно, масштаб по координатным осям также не указан). На одной из ветвей отмечена точка. С помощью циркуля и линейки постройте касательную к гиперболе в отмеченной точке.
- 240*. У правильного 5000-угольника окрашена 2001 вершина. Докажите, что можно выбрать три окрашенные вершины, которые являются вершинами равнобедренного треугольника.

авторы задач и составители: Н. Агаханов, О. Подлипский.

▼ 6 класс

241. Получите число 2002, используя 8 одинаковых цифр, а также знаки арифметических действий.
242. Найдите какое-нибудь натуральное число, которое в 2002 раза больше суммы своих цифр.
243. В замке 81 комнаты (рис. 44), между любыми двумя соседними из которых дверь. Стража обходит с дозором замок, проходя через некоторые комнаты и заглядывая в некоторые комнаты, не заходя в них. Начало обхода отмечено стрелкой. Через одну и ту же комнату можно проходить дважды. Как страже осуществить обход замка, чтобы пройти через 32 комнаты и заглянуть в 49 комнат?

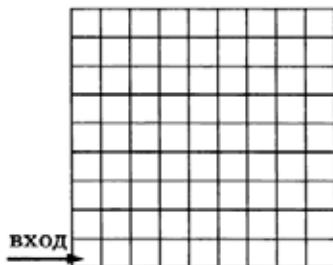


Рис. 44

244. На вопрос о возрасте ее троих детей мама ответила: «Пете и Коле вместе 19 лет, Пете и Ане вместе 14 лет, а младшим вместе 7 лет». Сколько лет каждому из детей? Объясните свой ответ.
245. Найдите наименьшее натуральное число, такое, что суммы подряд идущих его цифр дают все натуральные числа от 1 до 9 (сумма может состоять из одного слагаемого). Почему нет меньшего числа?

▼ 7 класс

246. Представьте число 2002 в виде суммы пяти натуральных чисел, произведение которых делится на 10 000 000 000.
247. Докажите, что из чисел 1, 2, 3, ..., 10 можно составить 5 дробей, таких, что их сумма будет целым числом.
248. На доске написаны числа от 1 до 10. Разрешается стереть любые два числа x и y , а вместо них записать на доску числа $x - 1$ и $y + 3$. Могли ли через некоторое время на доске оказаться числа 2, 3, ..., 9, 10, 2002?
249. Назовем раскраску клеток доски 6×6 в два цвета *хорошей*, если у каждой клетки найдется соседняя по

стороне клетка того же цвета. Найдите какую-нибудь хорошую раскраску доски 6×6 , такую, что после перекраски любого одного столбца или строки получалась нехорошая раскраска.

250. Вдоль дороги растут 2002 ели. Утром на каждой из них сидело по одной вороне. В полдень каждая ворона взлетела и перелетела на дерево, растущее через одно от того, с которого она взлетела. Могло ли так получиться, чтобы на каждой ели вновь сидело по одной вороне?

▼ 8 класс

251. Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2002. Докажите, что их сумма не может равняться 9999.
252. Может ли в остроугольном треугольнике биссектриса быть в 2 раза больше высоты, проведенной из той же вершины?
253. Разрежьте клетчатый квадрат 6×6 клеток на наибольшее число клетчатых прямоугольников, никакие два из которых не являются одинаковыми.
254. Можно ли расставить числа от 1 до 9 в клетки квадрата 3×3 так, что сумма любых двух чисел, стоящих в соседних клетках (имеющих общую сторону), была простым числом?
255. На плоскости даны 11 точек, никакие 3 из которых не лежат на одной прямой. Два игрока по очереди проводят по одному отрезку с концами в этих точках (из каждой точки может выходить произвольное количество отрезков, но каждые 2 точки можно соединять только один раз). Выигрывает игрок, после хода которого из каждой точки выходит хотя бы один отрезок (при достижении такой ситуации игра заканчивается). Кто может обеспечить себе выигрыш в этой игре: тот, кто начинает, или его соперник?

▼ 9 класс

256. Напишите уравнение какого-нибудь квадратного трехчлена, такого, что его график пересекает оси координат в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 4.
257. Можно ли раскрасить клетки доски 8×8 в три цвета: 21 клетку в белый цвет, 21 клетку в синий цвет, 22 клетки в красный цвет — так, чтобы ни на одной из диагоналей (не только на двух главных, но и на

всех параллельных им) не оказалось одновременно клеток всех трех цветов?

258. Окружность S , вписанная в треугольник ABC , касается стороны AC в точке K . Докажите, что оба центра окружностей, одна из которых вписана в треугольник ABK , а другая — в треугольник CKB , не могут одновременно лежать на окружности S .
259. Можно ли некоторую четверку подряд идущих натуральных чисел разбить на две пары так, чтобы сумма двух чисел — произведений чисел в этих парах — была точным квадратом?
260. На гранях каждого из 27 кубиков произвольным образом написаны все числа от 1 до 6. Из этих 27 кубиков Вася сложил куб, причем так, что у любых двух кубиков на соприкасающихся гранях записаны числа, отличающиеся ровно на 1. После этого Вася подсчитал суммы чисел, записанных на каждой из граней. Могли он получить шесть одинаковых сумм?

▼ 10 класс

261. В остроугольном треугольнике h — длина высоты, проведенной к стороне длины c , a и b — длины двух других сторон. Докажите, что если $c < h\sqrt{2}$, то $c^2 + h^2 < a^2 + b^2$.
262. Все коэффициенты квадратного трехчлена — целые нечетные числа. Может ли он иметь два целых корня?
263. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK и на сторонах BA и BC взяты соответственно точки M и N так, что $\angle AKM = \angle CKN = \frac{1}{2} \angle ABC$. Докажите, что прямая AC касается окружности, описанной около треугольника MBN .
264. На гранях восьми кубиков нарисованы кляксы: по одной кляксе на двух противоположных гранях кубиков, по две кляксы еще на двух противоположных гранях кубиков и по три кляксы на двух оставшихся гранях. Из этих восьми кубиков сложили куб. Могло ли так оказаться, что число кляксы на гранях полученного куба — шесть последовательных натуральных чисел?
265. В таблице 3×3 в центральной клетке стоит 0. Двою по очереди ставят в эту таблицу числа от 1 до 8 (каждое число можно использовать только один раз). Первый выигрывает, если, после того как в таблицу будут поставлены все числа, сумма чисел в какой-то строке,

столбце или на какой-то из диагоналей делится на 9. В противном случае выигрывает второй. Кто выигрывает при правильной игре?

▼ 11 класс

266. Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, такую, чтобы уравнения $f(x) = 0$ и $f'(x) + x^2 + 1 = 0$ имели одно и то же непустое множество корней.
267. Докажите, что если
 $\sin \alpha + \sqrt{3} \sin^2 \alpha + \sin^3 \alpha = \cos \alpha + \sqrt{3} \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha$,
то $\sin \alpha = \cos \alpha$.
268. В какое наименьшее количество цветов нужно раскрасить натуральные числа так, чтобы любые два числа, разность между которыми равна 3, 4 или 6, были разных цвета?
269. Пусть $ABCD$ — вписанный четырехугольник. На луче DC отложен отрезок DA_1 , равный DA , а на луче BA отложен отрезок BC_1 , равный BC . Докажите, что прямая BD делит отрезок A_1C_1 пополам.
270. На плоскости выбираются n векторов. От начала координат откладываются всевозможные суммы по одному, два, ..., n из выбранных векторов и отмечаются концы этих сумм. При каком наименьшем n можно выбрать векторы так, чтобы среди отмеченных точек нашлись как 4 вершины квадрата, так и 3 вершины правильного треугольника?

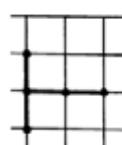
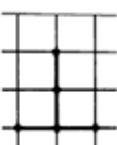
2003–2004

▼ 6 класс

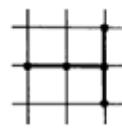
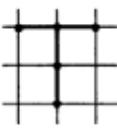
Авторы задач и составители: *Н. Агаханов, О. Подлипский*.

271. Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, а также знаки арифметических действий и скобки, получите число 2003. Из цифр можно составлять числа.
272. У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишневого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть все варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

273. Девять горизонтальных и девять вертикальных линий, проведенных через равные расстояния, образуют сетку с 81 узлом (узел — точка пересечения линий).



а) Петя хочет нарисовать 12 букв «Т», содержащих по 5 узлов, так, чтобы никакие 2 разные буквы «Т» не имели общих узлов (рис. 45). Помогите ему это сделать.



б) Илья сказал, что он может нарисовать 13 букв «Т». Как он может это сделать?

274. На доске было написано натуральное число N . Маша подсчитала произведение его цифр и получила число M . Потом Маша подсчитала произведение цифр числа M и получила 1001. Докажите, что Маша ошиблась.

275. У Васи есть 9 гирь массами 1 кг, 2 кг, 3 кг, ..., 9 кг. Вначале он ставит одну из гирь на любую чашку чашечных весов. Потом он одну за другой выбирает гири и каждую следующую ставит на ту чашку, суммарный вес гирь на которой меньше. Известно, что после постановки первой гири весы никогда не были в равновесии. На какое наибольшее число килограммов гири одной чашки могут перевешивать гири другой чашки, после того как будут выставлены все 9 гирь?



7 класс

276. Используя не более 6 цифр из 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, а также знаки арифметических действий и скобки, получите число 2003. Каждую цифру можно использовать не более одного раза. Из цифр можно составлять числа.
277. Сережа разрезал квадратный именинный торт весом 900 г двумя прямолинейными разрезами, параллельными одной паре сторон, и двумя разрезами, параллельными другой паре сторон, на 9 прямоугольных частей. Докажите, что Петя может выбрать такие три куска торта, не имеющие общих сторон, что суммарный вес этих кусков не меньше 300 г.
278. На доске написано слово ШАШКА. Каждую минуту Вася выбирает две буквы, стирает их, а вместо каждой из них записывает букву, соседнюю в алфавите со стертой. (Используется весь алфавит, т. е. включающий в себя все 33 буквы.) Например, ШАШКА → → ШАЩЙА → ЧАЩИА. Может ли через несколько минут на доске появиться слово КАЗАК?

279. В квадрате 5×5 проведены разрезы по некоторым сторонам квадратиков 1×1 . Могло ли получиться так, что квадрат распался на 8 кусков, любые 2 из которых различны?
280. По кругу в каком-то порядке расставили все натуральные числа от 1 до 18 и вычислили все 18 сумм пар соседних чисел. Какое наибольшее количество таких сумм может оказаться точными квадратами (квадратами натуральных чисел)?

▼ 8 класс

281. Используя каждую из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ровно по одному разу, а также знаки арифметических действий и скобки, получите число 2003. Составлять числа из цифр нельзя.
282. Вася написал на доске несколько целых чисел. Петя подписал под каждым из Васиних чисел его квадрат. После чего Маша сложила все числа, написанные на доске, и получила 2003. Докажите, что кто-то из ребят ошибся.
283. Найдите углы треугольника, если известно, что середина одной из его биссектрис является серединой отрезка, соединяющего основания высоты и медианы, проведенных из двух других вершин треугольника.
284. Числа от 1 до 10 в каком-то порядке выписали в строку и получили числа $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{10}$, а затем вычислили суммы $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots, S_{10} = a_1 + a_2 + \dots + a_{10}$. Какое наибольшее количество простых чисел могло оказаться среди чисел S_1, \dots, S_{10} ?
285. Можно ли покрасить все клетки доски 2003×2003 в два цвета так, чтобы у каждой клетки было ровно две соседние по стороне клетки, покрашенные в тот же цвет, что и сама клетка?

▼ 9 класс

286. Назовем слонопотамом такую шахматную фигуру, которая может ходить и как слон, и как конь, причем если слонопотам сделал ход как конь, то следующим ходом он должен пойти как слон; если же он сделал ход как слон, то следующим ходом он должен пойти как конь. Может ли слонопотам обойти клетки доски 5×5 , побывав на каждой клетке ровно по одному разу, и при этом закончить обход на клетке, соседней по стороне с клеткой начала обхода?

287. Обозначим через $\Pi(x)$ произведение цифр числа x . В ряд выписаны числа $\Pi(2003)$, $\Pi(2004)$, $\Pi(2005)$, Какое наибольшее количество чисел, записанных подряд, могут оказаться последовательными натуральными числами?
288. В таблицу 4×4 записали натуральные числа. Могло ли оказаться так, что сумма чисел в каждой следующей строке на 2 больше, чем в предыдущей, а сумма чисел в каждом следующем столбце на 3 больше, чем в предыдущем?
289. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AD и CE . Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных на прямую DE из точек A и C соответственно. Докажите, что $ME = DN$.
290. В некоторой компании 100 акционеров и любые 66 из них владеют не менее чем 50% акций компании. Каким наибольшим процентом всех акций может владеть один акционер?



10 класс

291. Возрастающая арифметическая прогрессия содержит два натуральных числа и квадрат меньшего из них. Докажите, что она содержит и квадрат второго числа.
292. Может ли один из корней уравнения
- $$x^2 - 2(\sin \alpha + \cos \alpha)x + \sin(2\alpha) = 0$$
- при некотором α быть в 3 раза больше другого?
293. На доске нарисована таблица 9×9 , в левом верхнем углу которой стоит число 1. Сережа последовательно заполняет оставшиеся клетки таблицы числами по следующему правилу: он выбирает пару клеток A и B , имеющих общую сторону, таких, что A уже заполнена, а B нет, и в клетку B записывает одно из чисел $3x$ или $x - 2$, если в клетке A записано число x . Когда Сережа заполнил всю таблицу, он посчитал сумму всех чисел, записанных в таблице. Мог ли он получить нуль?
294. В параболу $y = x^2$ вписан прямоугольный треугольник (т. е. все вершины треугольника лежат на параболе), гипotenуза которого параллельна оси Ox . Докажите, что высота треугольника, опущенная на гипotenузу, равна 1.
295. На отрезке AC взята точка B . Точки M и N выбраны так, что $AM = MB$, $BN = NC$ и $MN \parallel AC$. Пусть r , r_1 и r_2 , $r_1 < r_2$, соответственно радиусы окружностей, вписанных в треугольники MBN , AMB и BNC . Докажите, что $r_1 < r < r_2$.

▼ 11 класс

296. Найдите сумму корней всех квадратных трехчленов вида $x^2 + px - 2003$, где p принимает все целые значения от -100 до 100 .
297. Петя написал на доске значения двух углов какого-то треугольника. Всегда ли Вася сможет написать перед одним из этих углов \sin , а перед другим \cos так, чтобы сумма получившихся чисел $(\sin \alpha + \cos \beta)$ была не больше $\sqrt{2}$?
298. Через точку, находящуюся на расстоянии a от центра параллелограмма, проведена плоскость. Докажите, что сумма расстояний от вершин параллелограмма до этой плоскости не превосходит $4a$. Плоскость не пересекает параллелограмм.
299. Пусть A — множество таких натуральных чисел, которые записываются только с помощью цифр $1, 5$ и 9 , причем каждая цифра используется не менее одного раза. Может ли сумма 1001 различного числа из множества A быть полным квадратом?
300. Точка B — середина отрезка AC . По одну сторону от прямой AC взяты точки M и N так, что $AM = BM$ и $BN = CN$. Докажите, что $r < r_2$, где r, r_1, r_2 соответственно радиусы окружностей, вписанных в треугольники NMB, AMB и BNC , причем $r_1 < r_2$.

2004–2005

Авторы задач и составители: Н. Агаханов, О. Подлипский.

▼ 6 класс

301. Сумма двух двузначных чисел равна 147 . Оба числа записали в обратном порядке и сложили. Какая сумма могла получиться? Приведите все возможные ответы.
302. Огород квадратной формы 5×5 м нужно разделить несколькими кусками сетки на 5 клетчатых участков одинаковой площади. Это легко сделать, используя 20 м сетки (рис. 46). А хватит ли для той же цели 16 м сетки?
303. Продавец арбузов хочет приобрести набор из пяти гирь (вес каждой гири — натуральное число), с помощью которых он сможет взвешивать любой вес от 1 до n кг. У него есть чашечные весы, на одну чашку которых можно класть арбузы, а на другую можно ставить не

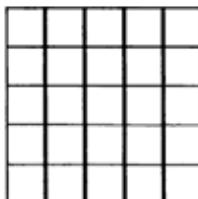


Рис. 46

более трех гирь (из этих пяти). Помогите продавцу подобрать гири, если: а) $n = 21$; б) $n = 23$.

304. Найдите наименьшее натуральное число, произведение цифр которого равно 1080.
305. За круглым столом сидят 10 человек: лжецы и рыцари. Каждый из них знает, кто рыцарь, а кто лжец. Лжецы на любой вопрос дают ложный ответ, рыцари — правдивый. В комнату вошел мудрец и каждому сидящему задал два вопроса: «Поведай мне, кто твой сосед слева?», «Поведай мне, кто твой сосед справа?». По их ответам мудрец сумел определить, сколько лжецов и сколько рыцарей сидят за столом. Какой результат он получил? Объясните ответ.

▼ 7 класс

306. Поставьте вместо звездочек в выражение

$$*** + *** = ***$$

девять различных ненулевых цифр так, чтобы получилось верное равенство.

307. Петя хочет разрезать квадратный торт на 5 кусков, одинаковых по весу, разрезами, параллельными между собой, но не параллельными краям торта. Помогите ему сделать это. Объясните, почему предложенный способ подходит для этого.
308. Каких пятизначных чисел больше: тех, у которых цифры идут в строго возрастающем порядке, или тех, у которых цифры идут в строго убывающем порядке? (Например, в первую группу входит число 12 459, но не входят числа 12 495 и 12 259.)
309. Имеются 10 арбузов и весы, с помощью которых за одно взвешивание можно определить общий вес любых трех арбузов (на весы разрешается кладь ровно 3 арбуза). Как за шесть таких взвешиваний определить общий вес всех арбузов?
310. За круглым столом сидят $2n$ ($n > 5$) человек — рыцари и лжецы. Лжецы на любой вопрос дают ложный ответ, рыцари — правдивый. Каждый из них знает, кто рыцарь, а кто лжец. Каждый из них дал ответы на два вопроса: «Кто его сосед слева?», «Кто его сосед справа?». Мудрецу, который знает, что лжецы за столом присутствуют, но их меньше, чем рыцарей, сообщили количество ответов «Рыцарь» и ответов «Лжец», и он точно назвал количество рыцарей. Сколько ответов «Рыцарь» получил мудрец? Объясните ответ.



8 класс

311. Как, используя несколько выражений a^2 и несколько выражений $a^3 + 1$, а также арифметические операции «+», «-», «×», получить выражение a^5 ?
312. Даны натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n . Все их попарные суммы (т. е. числа $a_1 + a_2, a_1 + a_3, \dots, a_1 + a_n, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n$) оканчиваются на 2004 или на 2005, причем оба окончания встречаются. Докажите, что среди чисел a_1, \dots, a_n либо ровно одно четное, либо ровно одно нечетное.
313. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC ($AB = BC$) выбрана точка D так, что $CD = CA$. Докажите, что центр окружности, вписанной в треугольник ABC , совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ADC .
314. На столе донышками вниз стоит 1001 пустой стакан. Два игрока по очереди переворачивают стаканы, в том числе и перевернутые ранее, по следующим правилам: за первый ход можно перевернуть не более одного стакана, за второй — не более двух и т. д. При этом за каждый ход необходимо перевернуть хотя бы один стакан. Выигрывает тот, после хода которого все стаканы расположены донышками вверх. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?
315. По кругу висят 250 лампочек. Вначале все лампочки включены. Разрешается либо переключить (из включенного состояния в выключенное или наоборот) любые 4 последовательные лампочки, либо взять 5 последовательных лампочек и переключить все, кроме средней. Можно ли с помощью таких операций выключить все лампочки?



9 класс

316. На велотреке одновременно уходят со старта 5 велосипедистов. Скорость первого равна 50 км/ч, второго — 40 км/ч, третьего — 30 км/ч, четвертого — 20 км/ч, пятого — 10 км/ч. Первый велосипедист считает количество велосипедистов, которых он обогнал. Какого велосипедиста он посчитал 21-м? В момент старта обгон не считается.
317. Найдите какие-нибудь два последовательных 100-значных числа, такие, что сумма цифр каждого из них — точный квадрат.
318. В неравнобедренном остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD . На продолжении DB за точку B

выбрана точка K так, что $\angle CAK = \angle BCA$. Докажите, что окружность, проходящая через точку B и касающаяся прямой AC в точке C , пересекает BD в ортоцентре (точке пересечения высот) треугольника AKC .

319. Дан многочлен $P(x) = x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^2 + x + 1$, $n > 2$. Удвойте у него несколько (больше одного) коэффициентов так, чтобы полученный многочлен представлялся в виде произведения двух многочленов степени больше первой каждый.
320. Двое играют в следующую игру. Есть две кучки камней. В одной из них лежит 20 камней, а в другой — 100 камней. Ходят по очереди. За один ход разрешается либо взять из любой кучки один камень, либо взять из любой кучки 2 камня. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

▼ 10 класс

321. Найдите все такие простые p и q , что уравнение

$$px^2 + pqx + q = 0$$

имеет целые корни.

322. При каком наименьшем n числа от 1 до n можно разбить на группы так, чтобы сумма чисел в каждой группе равнялась 40?

323. Из центра клетки, отмеченной на рисунке 47, проведены векторы в центры всех клеток таблицы 5×8 , кроме двух. Сторона клетки равна 1. Какую наименьшую длину может иметь сумма всех проведенных векторов?

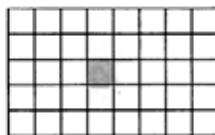


Рис. 47

324. Пусть P — периметр, R — радиус описанной окружности, h_1, h_2, h_3 — длины высот произвольного треугольника. Докажите, что

$$P \geq \sqrt{2R}(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2} + \sqrt{h_3}).$$

325. Двое играют в следующую игру. Есть три кучки камней. В первой из них лежит 7 камней, во второй — 9 камней, в третьей — 11 камней. Ходят по очереди. За один ход разрешается либо взять из любой кучки один камень, либо взять по одному камню из любых двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

▼ 11 класс

326. Найдите все непостоянные целочисленные арифметические прогрессии a_1, a_2, a_3 , для которых
- $$a_1 + a_2 + a_3 = a_1^3 + a_2^3 + a_3^3.$$
327. Известно, что для некоторых x, y, z выполняются условия $\sin y = z \sin x$ и $\sin 2y = z^2 \sin 2x$. Докажите, что $\sin 4y = z^4 \sin 4x$.
328. В треугольнике ABC проведена медиана BM . Может ли радиус окружности, вписанной в треугольник BCM , быть в 2 раза меньше радиуса окружности, вписанной в треугольник ABC ?
329. Параболы вида $y = -x^2 + bx + c$ проходят через одну точку. Докажите, что вершины всех таких парабол лежат на одной параболе.
330. Двое играют в следующую игру. Есть четыре кучки камней. В первой из них лежит 3 камня, во второй — 5 камней, в третьей — 7 камней, в четвертой — 9 камней. Ходят по очереди. За один ход разрешается либо взять из любой кучки один камень, либо взять по одному камню из любых двух кучек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто может выиграть в этой игре независимо от ходов соперника?

2005–2006

Авторы задач и составители: *Н. Агаханов, О. Подлипский*.

▼ 6 класс

331. Поставьте вместо звездочек в выражение $* + ** + *** + + **** = 3330$ десять различных цифр так, чтобы получилось верное равенство.
332. Коммерсант Вася занялся торговлей. Каждое утро он покупает товар на некоторую часть имеющихся у него денег (возможно, на все имеющиеся у него деньги). После обеда он продает купленный товар в 2 раза дороже, чем купил. Как нужно торговать Васе, чтобы через 5 дней у него было ровно 25 000 рублей, если сначала у него была 1000 рублей?
333. Проезжая по лесной дороге, Иван-царевич встретил медведя, волка и лису. Медведь всегда говорит правду, лиса всегда лжет, а волк чередует правду и ложь, всегда начиная с правды. Звери сказали Ивану-царевичу по 2 предложения.
1-й: «Ты коня спасешь», «Но сам погибнешь».

2-й: «Ты целым-невредимым останешься», «И коня спасешь».

3-й: «Ты цел останешься», «А вот коня потеряешь». Определите, какому зверю принадлежит каждый ответ и что ждет Ивана-царевича впереди.

334. Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из получившихся четырех кусков можно было сложить квадрат.
335. В таблицу 2×5 записали все натуральные числа от 1 до 10. После этого подсчитали каждую из сумм чисел по строке и по столбцу (всего получилось 7 сумм). Какое наибольшее количество этих сумм может оказаться простыми числами?



7 класс

336. Коммерсант Вася занялся торговлей. Каждое утро он покупает товар на некоторую часть имеющихся у него денег (возможно, на все имеющиеся у него деньги). После обеда он продает купленный товар в 2 раза дороже, чем купил. Как нужно торговать Васе, чтобы через 5 дней у него было ровно 25 000 рублей, если сначала у него была 1000 рублей?
337. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоявших в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге — лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги, сказали: «Мой сосед по шеренге — лжец».) Какое наибольшее число рыцарей могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2005 воинов?
338. У продавца есть стрелочные весы для взвешивания сахара с двумя чашками. Весы могут показывать вес от 0 до 5 кг. При этом сахар можно кладь только на левую чашку, а гири можно ставить на любую из двух чашек. Какое наименьшее количество гирь достаточно иметь продавцу, чтобы взвесить любое количество сахара от 0 до 25 кг? Ответ объясните.
339. Для натурального числа N вычислили суммы всех пар соседних цифр (например, для $N = 35\ 207$ суммы составляют $\{8, 7, 2, 7\}$). Найдите наименьшее N , для которого среди этих сумм есть все числа от 1 до 9.
340. Клетки таблицы 8×8 окрашены в три цвета. Оказалось, что в таблице нет трехклеточного уголка, все клетки которого одного цвета (трехклеточный уголок — это фигура, получаемая из квадрата 2×2 удалением одной клетки). Также оказалось, что в таблице

нет трехклеточного уголка, все клетки которого трех разных цветов. Докажите, что количество клеток каждого цвета четно.

▼ 8 класс

341. Вася возвел натуральное число A в квадрат, записал результат на доску и стер последние 2005 цифр. Могла ли последняя цифра оставшегося на доске числа равняться единице?
342. Набор, состоящий из целых чисел a, b, c , заменили на набор $a - 1, b + 1, c^2$. В результате получившийся набор совпал с исходным. Найдите числа a, b, c , если известно, что их сумма равна 2005.
343. На смотре войска Острова лжецов и рыцарей (лжецы всегда лгут, рыцари всегда говорят правду) вождь построил всех воинов в шеренгу. Каждый из воинов, стоящих в шеренге, сказал: «Мои соседи по шеренге — лжецы». (Воины, стоящие в концах шеренги, сказали: «Мой сосед по шеренге — лжец».) Какое наибольшее число лжецов могло оказаться в шеренге, если на смотр вышли 2005 воинов?
344. Найдите углы прямоугольного треугольника, если известно, что точка, симметричная вершине прямого угла относительно гипотенузы, лежит на прямой, проходящей через середины двух сторон треугольника.
345. Хромая ладья (это ладья, которая может ходить только по горизонтали или только по вертикали ровно на одну клетку) обошла доску 10×10 клеток, побывав на каждой клетке ровно по одному разу. В первой клетке, где побывала ладья, запишем число 1, во второй — число 2, в третьей — число 3 и т. д. до 100. Могло ли оказаться так, что сумма чисел, записанных в двух соседних по стороне клетках, делится на 4?

▼ 9 класс

346. Вася взял 11 подряд идущих натуральных чисел и перемножил их. Коля взял эти же 11 чисел и сложил их. Могли ли две последние цифры результата Васи совпасть с последними двумя цифрами результата Коли?
347. Набор, состоящий из чисел a, b, c , заменили на набор $a^4 - 2b^2, b^4 - 2c^2, c^4 - 2a^2$. В результате получившийся набор совпал с исходным. Найдите числа a, b, c , если их сумма равна -3 .
348. На основании AC треугольника ABC взята точка D . Докажите, что окружности, вписанные в треугольни-

ки ABD и CBD , точками касания не могут делить отрезок BD на три равные части.

349. Каждая из точек плоскости покрашена в один из трех цветов, причем все три цвета используются. Верно ли, что при любой такой покраске можно выбрать окружность, на которой есть точки всех трех цветов?
350. В клетках таблицы 8×8 расставлены целые числа. Оказалось, что если выбрать любые три столбца и любые три строки таблицы, то сумма девяти чисел, стоящих на их пересечении, будет равна нулю. Докажите, что все числа в таблице равны нулю.

▼ 10 класс

351. Синус и косинус некоторого угла оказались различными корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.
352. Каждая из точек плоскости покрашена в один из трех цветов, причем все три цвета используются. Верно ли, что при любой такой покраске можно выбрать окружность, на которой есть точки всех трех цветов?
353. Решите в натуральных числах уравнение
$$\text{НОК}(a; b) + \text{НОД}(a; b) = ab.$$
(НОД — наибольший общий делитель, НОК — наименьшее общее кратное.)
354. Окружность, вписанная в треугольник ABC , касается сторон AB и BC в точках E и F соответственно. Точки M и N — основания перпендикуляров, опущенных из точек A и C на прямую EF . Докажите, что если стороны треугольника ABC образуют арифметическую прогрессию и AC — средняя сторона, то $ME + FN = EF$.

355. Вася назвал натуральное число N . После чего Петя нашел сумму цифр числа N , потом сумму цифр числа $N + 7N$, затем сумму цифр числа $N + 2 \cdot 7N$, наконец, сумму цифр числа $N + 3 \cdot 7N$ и т. д. Мог ли он каждый следующий раз получать результат, больший предыдущего?

▼ 11 класс

356. Найдите какую-нибудь функцию $f(x)$, отличную от константы, такую, что она не принимает отрицательных значений и для любого α выполняется неравенство $f(\sin \alpha) + f(\cos \alpha) \geq 4f(\sin \alpha \cos \alpha)$.

357. Для каждого из восьми сечений куба с ребром a , являющихся треугольниками с вершинами в серединах ребер куба, рассматривается точка пересечения высот сечения. Найдите объем многогранника с вершинами в этих восьми точках.
358. Пусть $y = k_1x + b_1$, $y = k_2x + b_2$, $y = k_3x + b_3$ — уравнения трех касательных к параболе $y = x^2$. Докажите, что если $k_3 = k_1 + k_2$, то $b_3 \geq 2(b_1 + b_2)$.
359. Вася назвал натуральное число N . После чего Петя нашел сумму цифр числа N , потом сумму цифр числа $N + 13N$, затем сумму цифр числа $N + 2 \cdot 13N$, наконец, сумму цифр числа $N + 3 \cdot 13N$ и т. д. Мог ли он каждый следующий раз получать результат, больший предыдущего?
360. Можно ли нарисовать на плоскости 2005 ненулевых векторов так, что из любых десяти из них можно выбрать три с нулевой суммой?

2006–2007

Авторы задач и составители: Н. Агаханов, О. Подлипский. Задача 371 предложена И. Рубановым, 384 — М. Мурашкиным.

▼ 6 класс

361. Пять шестиклассников на городской олимпиаде по математике в сумме решили 20 задач, причем один из них решил в 2 раза больше задач, чем другой. А сколько задач решил каждый из шестиклассников? Объясните свой ответ. (На олимпиаде было 5 задач.)
362. Закрасьте в квадрате 7×7 четыре фигурки вида, изображенного на рисунке 48, состоящие из четырех клеток, так, чтобы в любом квадрате 2×2 была закрашена хотя бы одна клетка.

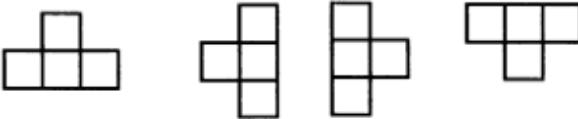


Рис. 48

363. Петя в течение одного часа дважды фотографировал электронные часы, показывающие время от 00:00:00 до 23:59:59. Покажите, что на этих двух фотографиях могли оказаться все цифры от 0 до 9.
364. Шестиклассники Школы сладкоежек собирают конфетные фантики трех цветов: зеленого, синего и крас-

ного — и обмениваются ими по правилам: меняют либо 3 синих фантика на 5 зеленых (и наоборот, 5 зеленых на 3 синих), либо 7 красных фантиков на 11 синих (и наоборот, 11 синих на 7 красных). Могло ли у ребят в конце месяца оказаться 1111 фантиков, если в начале месяца у них была 1000 фантиков?

365. Коля выложил на столе из цифр пятизначное число N , а затем еще четыре числа: сумму первых двух цифр числа N , сумму первых трех, первых четырех, наконец, сумму всех пяти цифр числа N . В итоге на столе оказались: одна цифра 1, шесть цифр 2, одна цифра 4, три цифры 6, две цифры 8. Чему равно число N ? Объясните свой ответ.

▼ 7 класс

366. К бабушке в гости приехали 11 внуков — все дети двух ее дочерей. Одна из внучек сказала: «Здесь у меня в 2 раза больше сестричек, чем дома», а другая ответила: «А у меня здесь в 3 раза больше сестричек, чем дома». Сколько внуков и внучек у бабушки?
367. Петя с интервалом в целое число часов дважды сфотографировал электронные часы, показывающие время от 00:00:00 до 23:59:59. Оказалось, что на второй фотографии цифры идут в обратном порядке по сравнению с первой. Какое время могло пройти между снимками? Объясните свой ответ.
368. Детский конструктор состоит из квадратов 2×2 и равнобедренных прямоугольных треугольников с гипотенузой 3. Какое наибольшее количество «домиков» (рис. 49) можно собрать из деталей конструктора, уложенных в один слой (без наложений) в коробку 7×7 ?

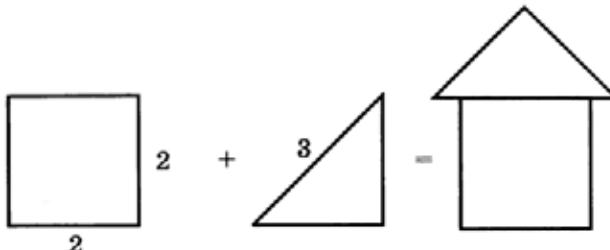


Рис. 49

369. Петя и Коля копили монеты достоинством в 1, 2, 5 рублей, причем оказалось, что в Петиной копилке нет монет того же достоинства, что в Колиной. Могут

ли ребята заплатить по 2006 рублей из своих копилок одинаковым числом монет?

370. Коля составил из различных цифр, отличных от нуля, пятизначное число A и прибавил к нему число, получаемое из A перестановкой цифр в порядке убывания. У него получилась сумма 171 540. Затем он прибавил к A число, получаемое из A перестановкой цифр в порядке возрастания, и у него получилась сумма 85 608. Какое число составил Коля?

▼ 8 класс

371. Когда одно из двух целых чисел увеличили в 2006 раз, а другое уменьшили в 2006 раз, их сумма не изменилась. Докажите, что эта сумма делится на 2007.
372. На доске написаны числа 1, 2, 3, ..., 10. Разрешается выбрать любое нецелое число t и ко всем числам, меньшим t , прибавить 1, а из всех чисел, больших t , вычесть 1. Можно ли несколькими такими операциями получить только единички и четверки?
373. На доске выписаны числа $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$. Разрешается дописать на доску сумму, разность или произведение любых двух различных чисел, уже выписанных на доске. Докажите, что можно написать на доске число 1.
374. Петя с интервалом в 1000 секунд дважды сфотографировал электронные часы, показывающие время от 00:00:00 до 23:59:59. Могли ли на двух фотографиях оказаться все цифры от 0 до 9?
375. Докажите, что любой прямоугольный треугольник с гипотенузой $4c$ можно закрыть тремя одинаковыми кругами радиуса c .

▼ 9 класс

376. В ряд выписаны в порядке возрастания все простые числа. Может ли сумма шести подряд идущих чисел в этом ряду равняться сумме пяти подряд идущих чисел в этом ряду? (Наборы чисел могут пересекаться.)
377. Верно ли, что если квадратные уравнения $x^2 + ax + b = 0$ и $x^2 + cx + d = 0$ не имеют корней, то и уравнение $x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = 0$ также не имеет корней?
378. Компьютерная программа преобразует набор из натуральных чисел по следующему правилу: каждое четное число делится на 2, а из каждого нечетного числа вычитается 1. Докажите, что если начальный набор состоял из пяти последовательных натуральных чи-

сел, то после двух преобразований в нем появятся хотя бы два равных числа.

379. Пусть P и Q — проекции точки H , лежащей на стороне AC остроугольного треугольника ABC , соответственно на стороны AB и CB . Докажите, что если точки A, P, Q, C лежат на одной окружности, то BH — высота треугольника ABC .
380. В каждой клетке доски 5×10 стоит по одной шашке. За один ход можно выбрать какие-то 2 шашки и каждую из них подвинуть на соседнюю по стороне клетку. Если на какой-то клетке оказалось хотя бы 2 шашки, то с этой клетки можно снять ровно 2 из этих шашек. Можно ли при помощи таких операций снять с доски все шашки?

▼ 10 класс

381. На доске написали квадратный трехчлен с положительным старшим коэффициентом. Каждую минуту на доске дописывают квадратный трехчлен, причем у каждого следующего трехчлена все три коэффициента на 1 больше соответствующих коэффициентов предыдущего. Докажите, что когда-нибудь на доске появится трехчлен, не имеющий корней.
382. Все магистры трех Тайных Орденов собрались на встречу. После встречи магистр первого Ордена сказал: «Теперь я знаю в 2 раза больше магистров, чем вчера». Магистр второго Ордена сказал: «Теперь я знаю в 3 раза больше магистров, чем вчера». Магистр третьего Ордена сказал: «Теперь я знаю в 4 раза больше магистров, чем вчера». Докажите, что кто-то из магистров обсчитался. Предполагается, что до встречи каждый магистр знал магистров только из своего Ордена, а после — из всех трех Орденов.
383. Существует ли такое число x , что все три числа $2x - \sqrt{x^2 + 2}$, $\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 2006}$ и $\sqrt{x^2 + 2006} - x$ являются целыми?
384. Серединный перпендикуляр к стороне BC треугольника ABC пересекает сторону AC в точке D , а биссектрису угла ABD в точке K . Докажите, что точки A, B, C, K лежат на одной окружности.
385. Могут ли для остроугольного треугольника с углами α, β, γ одновременно выполняться неравенства $\sin \alpha < \sin(2\beta)$, $\sin \beta < \sin(2\gamma)$, $\sin \gamma < \sin(2\alpha)$?



11 класс

386. Когда одно из двух натуральных чисел возвели в квадрат, а из другого извлекли корень, их сумма не изменилась. Докажите, что эта сумма четна.
387. Существует ли такое число x , что все три числа $x - \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+1}$ и $\frac{1}{x^2+1} - 2x$ являются целыми?
388. Произведение производных двух квадратных трехчленов при всех значениях переменной больше суммы этих трехчленов. Докажите, что хотя бы один из трехчленов будет принимать и отрицательные значения.
389. Восемь бегунов одновременно стартуют в одном направлении из разных точек беговой дорожки, и, пробежав с постоянной скоростью ровно один круг, каждый из них останавливается. (Скорости бегунов могут быть различными.) Каждый раз, когда бегун обгоняет бегущего или стоящего бегуна, ему начисляется 1 балл, а каждый раз, когда его (бегущего или стоящего) обгоняет другой бегун, с него снимается 1 балл. Какое наибольшее число баллов мог заработать бегун после финиша всех участников?
390. Докажите, что если α, β, γ — плоские углы трехгранного угла (углы между его ребрами), то

$$\sin \frac{\gamma}{2} + \sin \frac{\beta}{2} > \sin \frac{\alpha}{2}.$$

2007–2008

Авторы задач и составители: Н. Агаханов, О. Подлипский. Задачи 443 и 448 предложены М. Мурашкиным.



6 класс

391. На доске было записано арифметическое выражение, значение которого равнялось 2007. Вася поменял в этом выражении две цифры местами, и значение выражения стало равным 2008. Покажите, как такое могло произойти.
392. У Винни Пуха в шкафу стояло несколько 11-литровых банок с медом (банки могли быть заполнены не целиком). Каждый день Винни Пух подходил к шкафу, брал какую-то банку и ел из нее мед. При этом если в банке было больше 1 л меда, то он съедал половину меда из банки, а если в банке оставался 1 л меда или меньше, то он доедал весь мед из этой банки. За

14 дней Винни Пух съел весь мед. Мог ли он съесть 30 л меда?

393. У деда с бабкой были чашечные весы и гири массами 1, 3 и 5 кг (гири каждого веса было больше одной). Сначала бабка уравновесила репку на весах. Потом дед уравновесил репку на весах (репка кладется на одну чашку весов, гири ставятся на другую). Мог ли дед использовать для этого на 3 гири больше, чем бабка?
394. Буквой «Г» называется клетчатая фигура, состоящая из 2, 3, 4, ... клеток, идущих подряд, и еще одной клетки, имеющей общую сторону с одной из крайних

клеток:  и т. д. Имеется набор, состоящий из букв «Г», в котором фигура каждого размера встречается ровно по 2 раза. Составьте квадрат 8×8 из фигур набора так, чтобы не было фигуры какого-то размера, использованной ровно один раз.

395. Мама хочет наказать Петю за двойку по математике. Они договорились о следующем. Петя задумывает двузначное число и сообщает его маме. После этого мама тоже задумывает двузначное число и называет его Пете. Дальше Петя в первую минуту прибавляет мамину число к своему числу, во вторую прибавляет мамину число к полученной сумме, в третью — к вновь полученной сумме и т. д. Если в течение двух часов у него получится сумма, оканчивающаяся на две одинаковые цифры, мама отпустит его гулять. Сможет ли мама не позволить Пете в этот день погулять?

7 класс

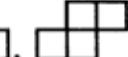
396. На доске было записано арифметическое выражение, значение которого равнялось 2007. Вася поменял в этом выражении два знака действий местами, и значение выражения стало равным 2008. Покажите, как такое могло произойти.
397. В копилке лежат 30 монет одинакового вида, среди которых 2 фальшивые: одна легче настоящих на 0,5 г, другая легче настоящих на 1 г. Как с помощью двух взвешиваний на чашечных весах без гирь определить 14 настоящих монет?
398. Несколько ребят участвовали в шахматном турнире. В итоге оказалось, что нет двух участников с одинаковыми результатами. Миша заметил, что он опередил ровно вдвое больше участников, чем опередили его,

Коля заметил, что он опередил ровно втрое больше участников, чем опередили его, а Саша обнаружил, что Миша и Коля — его соседи в итоговой таблице. Какое место занял Саша?

399. Закрасьте некоторые клетки квадрата 5×5 так, чтобы у одной из незакрашенных клеток не оказалось закрашенных соседних клеток, у другой незакрашенной клетки была бы ровно одна закрашенная соседняя клетка, еще у одной — ровно две закрашенные соседние клетки, ... и у одной из незакрашенных клеток — ровно 8 закрашенных соседних клеток (соседними называются клетки, имеющие общую сторону или вершину; у двух незакрашенных клеток может быть одинаковое количество закрашенных соседних клеток).
400. Мама хочет наказать Петю за двойку по математике. Они договорились о следующем. Петя задумывает двузначное число с разными цифрами и сообщает его маме. После этого мама тоже задумывает двузначное число и называет его Пете. Дальше Петя в первую минуту прибавляет мамино число к своему числу, во вторую прибавляет мамино число к полученной сумме, в третью — к вновь полученной сумме и т. д. Если в течение двух часов у него получится сумма, оканчивающаяся на две одинаковые цифры, мама отпустит его гулять. Сможет ли мама не позволить Пете в этот день погулять?

8 класс

401. На доске было записано арифметическое выражение, значение которого равнялось 2007. Вася поменял местами две соседние цифры в одном из чисел в этом выражении, и значение выражения стало равным 2008. Покажите, как такое могло произойти.
402. Пусть AC — наибольшая сторона треугольника ABC . На стороне AC выбраны точки M и N , такие, что $AM = AB$, $CN = CB$. Докажите, что если $BM = BN$, то треугольник ABC равнобедренный.
403. Назовем число $n^2 - 1$ *почти квадратом* натурального числа n . Докажите, что произведение двух почти квадратов натуральных чисел всегда равно разности каких-то двух квадратов натуральных чисел.
404. Существует ли 30-значное число с ненулевыми цифрами, которое не делится на 9, но такое, что при вычеркивании любой одной его цифры получается 29-значное число, которое делится на 9?

405. Вася отметил 10 клеток в квадрате 10×10 . Всегда ли Петя может вырезать из этого квадрата по линиям сетки 20 фигурок вида , , , и  так, чтобы они не содержали отмеченные клетки? (Петя может вырезать фигурки разных типов.)

▼ 9 класс

406. Пусть D — дискриминант приведенного квадратного трехчлена $x^2 + ax + b$. Найдите корни трехчлена, если известно, что они различны и один из них равен D , а другой равен $2D$.
407. У Пети в копилке 1000 монет достоинством в 1, 2 и 5 рублей на общую сумму 2000 рублей, причем монет каждого достоинства не менее 10. Докажите, что количество однорублевых монет — составное число.
408. Пусть AC — наибольшая сторона треугольника ABC , I — центр вписанной в него окружности. На стороне AC выбраны точки M и N , такие, что $AM = AB$, $CN = CB$. Докажите, что треугольник MIN равнобедренный.
409. Существует ли 30-значное число, такое, что при вычеркивании любой одной его цифры получается 29-значное число, которое делится на 11?
410. У Васи был набор из 2007 трехклеточных уголков. Петя приклеил к каждому уголку по одной клетке (сторона клетки приклеивается к стороне клетки уголка). При этом у Васи получился набор из 2007 четырехклеточных фигурок, причем квадратиков 2×2 клетки получилось не более 10. Могло ли так оказаться, что Вася не сможет сложить (без дырок и перекрытий) из получившегося набора никакой прямоугольник, используя все 2007 фигурок?

▼ 10 класс

411. Сумма каких-то трех членов бесконечной арифметической прогрессии равна сумме каких-то двух членов этой прогрессии. Все члены прогрессии — положительные числа. Докажите, что сумма любых 2007 членов этой прогрессии равна какому-то члену этой прогрессии.
412. На доске записано 12 натуральных чисел. Известно, что сумма любых трех из них не меньше 100. Докажите, что сумма всех чисел не меньше 406.

413. Дан вписанный пятиугольник $ABCDE$ с параллельными сторонами AE и BC . Пусть K — точка пересечения прямых BC и DE . Докажите, что $DK \cdot DA = DC \cdot DB$.
414. Разность кубов двух линейных функций является квадратным трехчленом. Докажите, что этот трехчлен не имеет действительных корней.
415. На доске написаны два взаимно простых натуральных числа x и y . Разрешается дописывать на доску либо утроенное произведение любых двух из написанных чисел, либо увеличенную на 1 сумму любых двух из написанных чисел. Верно ли, что на доске можно получить квадрат натурального числа при любых начальных x и y ?

11 класс

416. Найдите количество квадратных трехчленов вида $x^2 + ax + b$, у которых a , b — натуральные, $ab = 2^{2007}$, а корни — действительные числа.
417. Назовем число $n^2 - 1$ почти квадратом натурального числа n . Докажите, что произведение почти квадратов двух последовательных натуральных чисел также является почти квадратом натурального числа.
418. Окружность, проходящая через вершины B , C и D трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), пересекает сторону AB в точке M ($M \neq B$). На стороне CD взята точка K так, что $BK \parallel DM$. Докажите, что четырехугольник $ABKD$ можно вписать в окружность.
419. Найдите два натуральных числа x и y с суммой 2007, для которых выполняется равенство

$$\sqrt{x} \cos \frac{\pi y}{2x} + \sqrt{y} \cos \frac{\pi x}{2y} = 0.$$

420. На доске написаны два взаимно простых натуральных числа x и y . Разрешается дописывать на доску либо удвоенную сумму любых двух из написанных чисел, либо удвоенное произведение любых двух из написанных чисел. Верно ли, что на доске можно получить квадрат натурального числа при любых начальных x и y ?

1994–1995

▼ 6 класс

1. Ответ. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 10.

2. Ответ. 589 и 598.

Заметим, что первая цифра искомых чисел — 5, так как если она меньше 5, то сумма чисел меньше 1000, а если она больше 5, то их сумма больше или равна 1200. Сумма последних цифр искомых чисел может равняться 7 или 17. В первом случае сумма чисел оканчивается на 77, что неверно. Семнадцать в сумме могут дать только цифры 8 и 9. Отсюда получаем два возможных ответа.

3. Ответ. Медленнее идет тот из туристов, кто делает шаги короче и чаще.

Действительно, когда второй турист делает 10 своих шагов длины a каждый, первый турист делает 11 своих шагов длины $0,9a$ каждый. Таким образом, первый турист проходит расстояние $9,9a$ за то же время, за которое второй проходит большее расстояние $10a$.

4. Два способа разрезания показаны на рисунке 50.

5. На каждом из вырванных листов — две страницы. Номер одной из них — четное число, а другой — нечетное. Поэтому в сумме номеров всех вырванных страниц 25 четных и 25 нечетных слагаемых, следовательно, вся сумма нечетна. Значит, она не может равняться четному числу 1994.

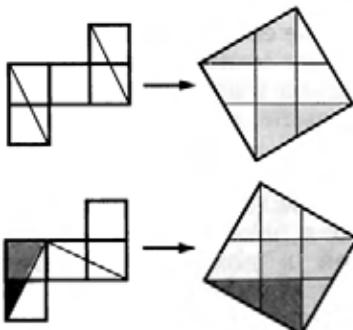


Рис. 50



7 класс

6. Ответ. $\frac{2s}{v_1 + v_2}$ ч.

Автомобили встретятся через $\frac{s}{v_1 + v_2}$ ч. Поэтому через такое же время после момента встречи расстояние между ними снова станет равно s км.

7. Ответ. Две последние тройки; 3213212121.

Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две тройки. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть две последние тройки.

8. Ответ. 211 конфет.

Из того, что $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 17 + 19 = 100$, следует, что Малыш в предпоследний раз взял 19 конфет, а в последний раз — одну оставшуюся конфету. Поэтому первоначально в пакете находилось $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 19 + 20 + 1 = 211$ конфет.

9. Треугольники ACG и BEF равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (рис. 51). Следовательно, $\angle AGC = \angle BFE$ и $AG = BF$. По теореме о смежных углах $\angle FGD = \angle GFD$. Поэтому треугольник GFD равнобедренный ($GD = FD$). Следовательно, $AG + GD = BF + FD$, т. е. $AD = BD$.

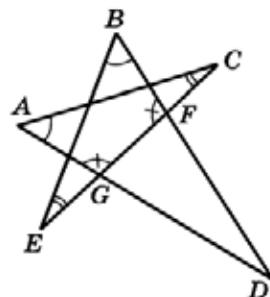


Рис. 51

10. Ответ. Не может.

Из условия вытекает, что в каждой семье есть дочь. Поэтому дочерей в доме не меньше, чем матерей. Но мальчиков в доме больше, чем девочек, следовательно, сыновей больше, чем отцов. Значит, детей в доме больше, чем взрослых.

Замечание. Напрашивается такое рассуждение: «Так как у каждого мальчика есть сестра, а бездетных семей нет, то в каждой семье не меньше двух детей. Поэтому детей в доме не меньше, чем взрослых». К сожалению, это привлекательное своей простотой «решение» неверно. Действительно, если в семье есть сын, то в ней не меньше двух детей. Но ведь в семье может быть и единственная дочь!

11. Ответ. $x = 1$ и $x = \frac{1}{2}$.

Преобразуем данное уравнение: $x^2 + (1-x)^2 = x \Leftrightarrow (1-x)^2 = x - x^2 \Leftrightarrow (1-x)^2 = x(1-x)$. Из последнего уравнения получаем, что $x = 1$ — корень. Если $x \neq 1$, то, разделив обе его части на $1-x$, получаем второй корень: $x = \frac{1}{2}$.

12. Заметим, что указанные медиана и биссектриса не могут выходить из одной вершины, так как в противном случае угол при этой вершине был бы больше 180° .

Пусть теперь в треугольнике ABC

биссектриса AD и медиана CE пересекаются в точке F (рис. 52). Тогда AF — биссектриса и высота в треугольнике ACE , значит, этот треугольник равнобедренный ($AC = AE$), а так как CE — медиана, то $AB = 2AE$ и, следовательно, $AB = 2AC$.

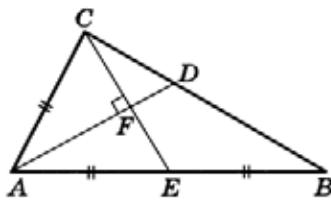


Рис. 52

13. Так как 111 делится на 37 , то на 37 делится число $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 111(a+b+c)$. По условию число \overline{abc} делится на 37 , поэтому и сумма $\overline{bca} + \overline{cab} = 111(a+b+c) - \overline{abc}$ делится на 37 .

14. Ответ. Нельзя.

После n операций из чисел $1, 9, 9, 4$ получаются четыре числа, сумма которых равна $2n+23$, т. е. нечетна. Если бы все эти числа были равны m , то их сумма равнялась бы $4m$, т. е. была бы четной.

15. Ответ. Не существуют.

Предположим противное. Пусть уравнение прямой l_1 (рис. 53) имеет вид $y = bx + c$. У этой прямой самый большой угловой коэффициент, в частности $b > c$. Но прямая l_1 пересекает ось ординат в точке с ординатой c , прямая l_2 — в точке с ординатой b , причем из рисунка видно, что $c > b$. Полученные неравенства противоречат друг другу, следовательно, таких чисел a, b и c не существует.

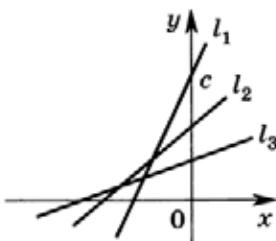


Рис. 53

9 класс

16. Ответ. 1 и 3.

Из данного равенства следует, что $2a(a-b) + b(a+b) = 2(a^2 - b^2)$, $b(3b-a) = 0$, откуда $b=0$ или $a=3b$. Оба случая реализуются. Если $b=0$, то данное равенство выполняется при всех $a \neq 0$, а значение выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$ при всех таких a и b равно 3. Если $a=3b$ и a и b отличны от нуля, то данное равенство выполняется, а значение выражения $\frac{3a-b}{a+5b}$ при всех указанных a и b равно 1.

17. Проверка показывает, что число, в записи которого 6 единиц, делится на 7, а числа, записываемые меньшим числом единиц, на 7 не делятся. Отделяя в записи данного числа группы из 6 единиц, считая от старшего разряда, устанавливаем, что число делится на 7 тогда и только тогда, когда число единиц в его записи делится на 6. Такое число делится на $111111 = 1001 \cdot 111 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 3 \cdot 37$. Следовательно, оно делится и на 13.

18. Ответ. 45° .

Пусть D — основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC (рис. 54). Углы HCB и DAB равны как острые углы с взаимно перпендикулярными сторонами. Следовательно, $\triangle CHD \sim \triangle ABD$ (по гипotenузе и острому углу). Поэтому $CD = AD$, т. е. треугольник ACD равнобедренный и прямоугольный, следовательно, $\angle ACB = 45^\circ$.

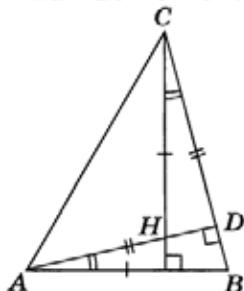


Рис. 54

19. Преобразуем левую часть A доказываемого неравенства: $A = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3) = 1 - (x_1+x_2+x_3) + x_1x_2(1-x_3) + x_2x_3 + x_1x_3$. Из условия следует, что $x_1x_2(1-x_3) \geq 0$, $x_2x_3 \geq 0$ и $x_1x_3 \geq 0$, поэтому $A \geq 1 - (x_1+x_2+x_3) \geq \frac{1}{2}$.

Замечание. Равенство достигается, когда одно из данных чисел равно $\frac{1}{2}$, а два других равны 0.

20. Ответ. $n = 3$ или $n = 141$.

Из условия следует, что все записанные числа неотрицательны. Пусть a — наибольшее из этих чисел (если таких несколько, то выберем любое из них), a, b, c, d и e — следующие за ним по кругу числа. Тогда $a = |b - c|$, что возможно,

только если одно из чисел b или c равно a , а другое равно нулю. Если $b = a$, $c = 0$, то из равенства $b = |c - d|$ следует, что $d = a$. Из равенства $c = |d - e|$ следует, что $e = a$, и т. д. Если же $b = 0$, а $c = a$, то аналогично $d = a$, $e = 0$ и т. д. Таким образом, n делится на 3, $n = 3m$, и записанные числа таковы: $a, a, 0, a, a, 0, \dots, a, a, 0$. Их сумма равна $2ma$. Из равенства $2ma = 94$ следует, что $ma = 47$, т. е. $m = 47$, $a = 1$ или $m = 1$, $a = 47$, откуда $n = 141$ или $n = 3$.

▼ 10 класс

21. Ответ. $\frac{1}{3}$.

Из данного равенства следует, что $a^4 - b^2a^2 - 2b^4 = 0$, т. е. $(a^2 + b^2)(a^2 - 2b^2) = 0$, откуда $a^2 = -b^2$ или $a^2 = 2b^2$. Первый случай невозможен: условию $a^2 = -b^2$ удовлетворяют только числа $a = b = 0$, при которых данное равенство не имеет смысла. Ненулевые числа a и b , такие, что $a^2 = 2b^2$, равенству удовлетворяют, и при всех таких a и b значение выражения $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ равно $\frac{1}{3}$.

22. Ответ. Можно.

Число 1994 можно представить в виде $1994 = 18 + 19 \cdot 104$. Поэтому операции, при которых к уже полученной сумме добавляется число 19, приведут к появлению на доске числа 1994: $18 + 19 = 37$, $37 + 19 = 56$, ..., $1975 + 19 = 1994$.

23. Ответ. Не могут.

Предположим противное. Из рисунка 55 видно, что все трехчлены имеют по два корня, следовательно, $a^2 > 4bc$, $b^2 > 4ca$ и $c^2 > 4ab$, причем $a > 0$, $b > 0$ и $c > 0$ (так как ветви парабол направлены вверх). Перемножая полученные неравенства, приходим к противоречию: $a^2b^2c^2 > 64a^2b^2c^2$.

24. Ответ. $\angle A = \angle C = 72^\circ$, $\angle B = 36^\circ$.

Пусть O — общий центр указанных окружностей (рис. 56). Из

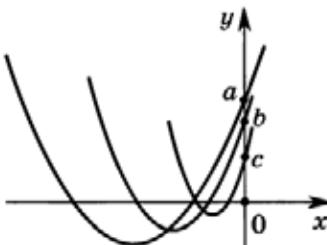


Рис. 55

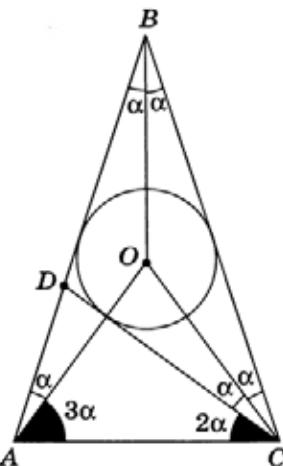


Рис. 56

условия следует, что BO и CO — биссектрисы углов ABC и BCD (O — центр вписанной окружности) и, кроме того, $AO = BO = CO$ (O — центр описанной окружности). Поэтому если $\angle ABO = \alpha$, то $\angle OAB = \alpha$, $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$, $\angle BCD = 2\alpha$ (CD — биссектриса). Отсюда $\angle OAC = \angle OCA = 3\alpha$. Итак, сумма углов треугольника ABC равна 10α , откуда $\alpha = 18^\circ$.

25. Ответ. Обязательно.

Каждая команда сыграла 11 игр, а всего было сыграно $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ игр, поэтому найдется команда A , которая вы-

играла не менее шести игр (в противном случае общее число игр было бы не больше $5 \cdot 12 = 60$). Пусть она выиграла у команд A_1, \dots, A_6 (если есть и другие команды, у которых выиграла команда A , то мы просто их пока не рассматриваем). Рассмотрим все остальные команды, кроме $A, A_1, \dots,$

A_6 . Их пять, между собой они сыграли $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ игр, поэто-

му среди них найдутся команды B, B_1 и B_2 , такие, что B выиграла у B_1 и B_2 . Наконец, из двух оставшихся команд некоторая команда C выиграла у команды C_1 . Таким образом, команды A, B и C — искомые.

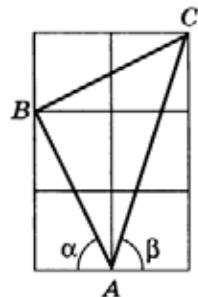
▼ 11 класс

26. Ответ. π .

Так как $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, то достаточно вычислить $\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$. Из формулы для тангенса суммы углов следует, что если $\alpha = \operatorname{arctg} 2$, $\beta = \operatorname{arctg} 3$, то $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{2 + 3}{1 - 2 \cdot 3} = -1$.

Но $\alpha, \beta \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, поэтому $0 < \alpha + \beta < \pi$, значит, $\alpha + \beta = \frac{3\pi}{4}$.

Замечание. Задача имеет простое геометрическое решение. На рисунке 57 треугольник ABC равнобедренный прямоугольный, поэтому $\angle BAC = \frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1$.



27. Ответ. Существуют.

Искомыми являются, например, числа $n = 999\ 999\ 999$ и $n + 1 = 1\ 000\ 000\ 000$, у которых суммы цифр $S(n) = 81$, $S(n + 1) = 1$.

28. Ответ. Не могут.

Предположим противное. Заметим, что значения данных трехчленов в точке $x = 1$ совпадают (они равны $a + b + c$). Но из рисунка 33 видно, что каждые две

Рис. 57

из парабол пересекаются в двух точках, причем все эти шесть точек пересечения различны. Получили противоречие.

29. Докажем, что $\angle ACB = 60^\circ$. Допустим, что это не так. Опустим из точки C перпендикуляры CK и CL на прямые BN и AM (рис. 58; этот рисунок соответствует случаю $\angle ACB > 60^\circ$, случай $\angle ACB < 60^\circ$ разбирается точно так же). Тогда из треугольника ACL находим $CL = \frac{1}{2}AC = CN$ и аналогично из

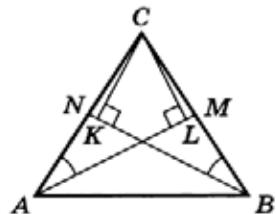


Рис. 58

треугольника BCK $CK = CM$. С другой стороны, $CK < CN$ и $CL < CM$. Следовательно, $CL < CM = CK < CN = CL$. Получим противоречие. Итак, $\angle ACB = 60^\circ$. Но тогда $\angle AMC = \angle BNC = 90^\circ$, т. е. медианы AM и BN являются одновременно и высотами в треугольнике ABC , следовательно, $BC = AB$ и $AC = AB$, т. е. треугольник ABC правильный.

30. Ответ. Нельзя.

Пусть стрелки как-то расставлены. Спроектируем все получившиеся векторы на прямую, содержащую высоту SO пирамиды. Проекции векторов, лежащих в плоскости основания, равны $\vec{0}$, а проекции векторов, лежащих на боковых ребрах, равны \vec{SO} или $-\vec{SO}$. Из нечетности числа векторов, лежащих на боковых ребрах, следует, что сумма их проекций не может равняться $\vec{0}$, поэтому не может равняться $\vec{0}$ и сумма всех полученных векторов.

1995–1996

▼ 6 класс

31. Ответ. $1111 + 888 - 11 + 7 = 1995$.

32. Ответ. 6.

Допустим, что гостей действительно больше шести. Тогда правы и Вася, и его сестра, а это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше шести и Вася неправ. Но тогда должна быть права сестра, иначе снова нарушится условие задачи. Значит, гостей больше пяти. Но если их больше пяти и не больше шести, то их ровно шесть.

33. Ответ. См. рис. 59.

34. Ответ. Можно.

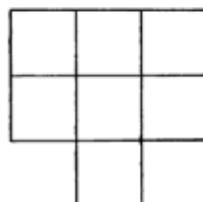


Рис. 59

Покажем, что для этого достаточно при одном взвешивании положить на одну чашку весов гири с маркировками ① и ②, на другую — ③, а при другом взвешивании — на одну чашку — ① и ③, на другую — ④. Возможны случаи:
 а) $① + ② > ③$ (первая чашка перевешивает); б) $① + ② = ③$;
 в) $① + ② < ③$ и аналогичные при другом взвешивании. Приведем таблицу, дающую ответ во всех восьми возможных случаях (буквой «л» обозначена легкая дефектная гирия, а буквой «т» — тяжелая дефектная):

	$① + ③ > ④$	$① + ③ = ④$	$① + ③ < ④$
$① + ② > ③$	① — т	② — т	③ — л
$① + ② = ③$	④ — л	невозможен	④ — т
$① + ② < ③$	③ — т	② — л	① — л

35. Ответ. Выигрывает тот, кто делает первый ход.

Для победы делающему первый ход нужно взять карточку с числом 5. Делая свои второй и третий ходы, он должен брать карточки, на которых записаны числа, дополняющие до 10 числа, записанные на карточках, выбранных перед этим его партнером (убедитесь, что это возможно). Тогда при любых ходах второго игрока сумма чисел на отложенных карточках составит 25, и второй игрок при любом следующем ходе проигрывает.



7 класс

36. Ответ. -1 .

37. Ответ. $\angle ABC = 90^\circ$.

Пусть отрезок ED симметричен отрезку EB относительно прямой AE (рис. 60). Так как AE — биссектриса, точка D лежит на прямой AC . Треугольники ABE и ADE равны как симметричные, значит, $AD = AB = \frac{AC}{2} = DC$,

т. е. ED — медиана треугольника AEC . Так как треугольник AEC равнобедренный, его медиана является высотой, т. е. $\angle ADE = 90^\circ$. Тогда и $\angle ABC = \angle ADE = 90^\circ$.

38. Ответ. Десять дробей, например:

$$\frac{4}{2}, \frac{12}{6}, \frac{14}{7}, \frac{15}{5}, \frac{16}{8}, \frac{18}{9}, \frac{20}{10}, \frac{21}{3}, \frac{22}{11}, \frac{13}{1}.$$

Покажем, что больше десяти дробей, равных целым числам, получить нельзя. Рассмотрим простые числа 13, 17 и 19. Они могут дать целое число только при делении на 1.

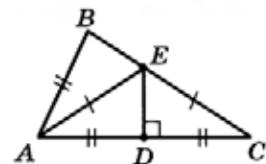


Рис. 60

Поэтому даже если одно из чисел 13, 17, 19 поделено на 1, то оставшиеся два «испортят» по крайней мере одну дробь. Всего же дробей 11. Следовательно, больше десяти дробей, равных целым числам, получить нельзя.

39. Ответ. 7.

Если a и b — двузначные числа, то произведение ab либо трехзначное, либо четырехзначное число. Предположим, что ab — четырехзначное число, записываемое одинаковыми цифрами. Тогда должны выполняться равенства $ab = x \cdot 1111 = x \cdot 11 \cdot 101$, где x — ненулевое однозначное число, что невозможно для двузначных чисел a и b , поскольку 101 — простое число.

Пусть ab — трехзначное число, тогда $ab = x \cdot 111 = x \cdot 3 \cdot 37$, где x — одно из чисел 1, 2, ..., 9. Перебором убеждаемся, что подходят только значения $x = 4, 5, 6, 7, 8, 9$, при этом в случае $x = 8$ имеем $ab = 8 \cdot 3 \cdot 37 = 24 \cdot 37 = 12 \cdot 74$, т. е. 2 искомые пары. Следовательно, всего 7 искомых пар.

40. Допустим, каждое вычеркнутое слово написали ровно два человека. Так как они оба его вычеркнули, то число вычеркнутых записей четно. Но первоначальное число записей, равное 300, четно. Поэтому должно быть четным и число оставшихся записей. Однако по условию: $45 + 68 + 54 = 167$ — нечетное число — противоречие.

8 класс

41. Утверждение задачи следует из разложения данного выражения на множители, каждый из которых больше единицы при всех натуральных n :

$$(n^3 + 8) + (3n^2 + 6n) = (n + 2)(n^2 - 2n + 4) + 3n(n + 2) = (n + 2)(n^2 + n + 4).$$

42. Ответ. Не могут.

Предположим противное: 4 отрезка имеют длину a и 3 остальных отрезка — длину b . Тогда из четырех отрезков BA , BD , BE и BC только два могут иметь длину a и только два — b , так как окружность радиуса a (b) с центром в точке B может пересечь прямую AC не более чем в двух точках. Таким образом, ровно два отрезка имеют длину a и два — b , и при этом $AB = BC$, $DB = DE$ (рис. 61, а).

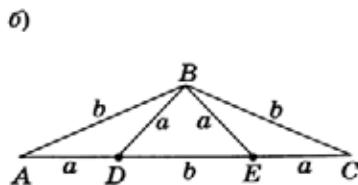
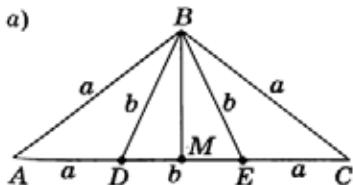


Рис. 61

Кроме того, равнобедренные треугольники ABC и DBE имеют общую медиану BM , поэтому $AD = CE = a$. Итак, возможны два случая:

- 1) $BD = BE = ED = b$ (рис. 61, а);
- 2) $DE = AB = BC = b$ (рис. 61, б).

Первый случай невозможен, так как $AD < AB$, второй невозможен, так как при этом треугольники ADB и DBE должны быть равны, но $\angle ADB > \angle DBE$.

43. Пусть корова поедает в месяц x стогов, кобыла — y , коза — z . Сын считает, что

$$\frac{1}{(y+z)} = 1, \quad \frac{1}{(z+x)} = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{(x+y)} = \frac{1}{3}.$$

Но тогда $y + z = 1$, $z + x = \frac{4}{3}$ и $x + y = 3$. Поскольку, однако, $1 + \frac{4}{3} < 3$, то выходит, что $(y + z) + (z + x) < x + y$. Отсюда $z < 0$, что невозможно.

44. Ответ. 570.

Пусть $a \leq b \leq c \leq d$ — натуральные числа, сумма которых равна 1995, и $N = \text{НОК}(a; b; c; d)$. Заметим, что все числа равны быть не могут, так как 1995 не делится на 4. Тогда ясно, что $2a \leq N$ (так как $a < N$ и $N : a$), $b \leq N$, $c \leq N$, $d \leq N$.

Умножая первое неравенство на $\frac{1}{2}$ и складывая с остальными, получим $a + b + c + d \leq \frac{7}{2}N$, т. е. $N \geq \frac{2}{7}(a + b + c + d) = 570$.

Если $a = \frac{1995}{7} = 285$, $b = c = d = 2a = 570$, то $a + b + c + d = 1995$ и $N = 570$.

45. Занумеруем по порядку спортсменов в шеренге и рассмотрим первых 20 спортсменов. Разобьем их на пары с номерами, различающимися на 10: $(a, 10 + a)$, $1 \leq a \leq 10$. По условию в каждой такой паре не более одного спортсмена в красном костюме. Поэтому среди первых 20 не более 10 спортсменов одеты в красные костюмы. Рассуждая аналогично, получаем такое же утверждение и для остальных групп по 20 спортсменов: $21 - 40$, $41 - 60$, $61 - 80$, $81 - 100$.



9 класс

46. Ответ. -44.

47. Пусть K и M — точки пересечения прямых CB и AA_1 , CD и AA_2 (рис. 62). Из условия следует, что BK — ось симметрии треугольника ABA_1 , поэтому $AB = BA_1$ и BK — биссектриса угла ABA_1 . Отсюда следует, что $\angle CBD = \angle KBA_1 =$

$= \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ABD)$. Аналогично $\angle CDB = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle ADB)$. Тогда $\angle BCD = 180^\circ - \angle CBD - \angle CDB = \frac{1}{2} (\angle ABD + \angle ADB) = \frac{1}{2} (180^\circ - \angle BAD) = 60^\circ$.

48. Через n секунд дробь будет иметь вид $\frac{1+n}{3+7n}$. Предположим, что она со-

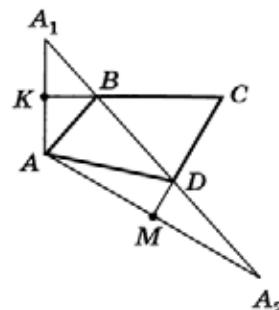


Рис. 62

кратима на 11, т. е. числа $a = 1 + n$ и $b = 3 + 7n$ делятся на 11. Но тогда и число $7a - b$ тоже должно делиться на 11, что неверно, так как $7a - b = 4$.

49. Ответ. 7.

Пример: 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35. Теперь покажем, что восьми подряд идущих чисел с указанным свойством быть не может. Действительно, одно из этих чисел (обозначим его n) делится на 8. Среди восьми наших чисел обязательно будет либо число $(n - 4)$, либо число $(n + 4)$. Оно делится на 4, но не делится на 8, что противоречит условию, так как делитель 2 входит в это число в четной степени.

50. Предположим, что ни один прямоугольник убрать нельзя. Это значит, что у каждого прямоугольника есть половинка, которая не закрыта другими прямоугольниками. Эти 13 половинок закрывают различные клетки доски. На доске остаются 3 клетки, которые закрыты оставшимися 18 половинками прямоугольников. Значит, одна из этих клеток закрыта не менее чем пятью прямоугольниками. Но прямоугольник клетку может закрывать только четырьмя различными способами: слева, справа, сверху и снизу. Значит, два прямоугольника лежат друг на друге и один из них можно убрать — противоречие.



10 класс

51. Ответ. 12, 24, 36, 48.

По условию $10b + bq = 3bq^2$, где $b \neq 0$ — первый член, q — знаменатель прогрессии. Отсюда $3q^2 - q - 10 = 0$, $q_1 = 2$, $q_2 = -\frac{5}{3}$, т. е. $q = 2$. Из неравенства $bq \leq 9$ следует, что $b = 1, 2, 3$ или 4 .

52. Среди чисел p , q и r найдутся два одинаковой четности, скажем, p и q , поэтому $p + q$ четно. Но это — простое число, поэтому $p + q = 2$, откуда $p = q = 1$.

53. Ответ. 12.

При перемещении вершины треугольника параллельно его основанию площадь треугольника не меняется, поэтому последовательно получаем равенство площадей треугольников ABC , A_1BC , A_1B_1C и, наконец, $A_1B_1C_1$. Таким образом, $B_1C_1 = \frac{2S}{A_1B_1} = 12$.

54. Ответ. 909090909.

Обозначим через $A(x)$ разность между суммой цифр числа x на нечетных местах (считая с конца) и суммой цифр на четных местах (например, $A(12345) = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3$). Как известно, при делении на 11 числа x и $A(x)$ дают одинаковые остатки. Искомое число может состоять только из нулей и девяток. Действительно, любую другую цифру можно заменить большей или меньшей и одно из полученных чисел не будет делиться на 11. Далее, если две цифры стоят обе на четных или нечетных местах, то они равны (иначе при замене одной из них $A(x)$ увеличивается, а при замене другой уменьшается на 1, и одно из полученных чисел на 11 не делится). Аналогично цифры, стоящие на местах разной четности, должны быть разными. Если последняя цифра 0, то, зачеркнув ее, получим меньшее число, удовлетворяющее условию задачи. Итак, нужное число имеет вид 909...0909. Простой перебор показывает, что наименьшее среди них, удовлетворяющее условию задачи, — это 909090909.

55. Ответ. 4.

Пусть x — количество очков за победу, n — количество матчей, закончившихся победой одной из команд, m и k соответственно число побед и ничьих у команды, набравшей 6 очков. Всего было сыграно 15 матчей, и в них командами было набрано 52 очка. Поэтому $xn + 2(15 - n) = 52$, откуда $x = 2 + \frac{22}{n}$ и $xm + k = 6$, т. е.

$\left(2 + \frac{22}{n}\right)m + k = 6$. Отсюда следует, что $m \geq 1$, так как $k \leq 5$, и $m < 3$, так как $k \geq 0$. Итак, $m = 1$ или $m = 2$. Если $m = 1$, то $\frac{22}{n} = 4 - k$ — целое число и

из неравенства $n \leq 15$ следует, что $n = 1$, 2 или 11. Первые два случая невозможны, так как $4 - k \leq 4$. В третьем получаем $k = 2$, $x = 4$. Турнирная таблица на рисунке 63 показывает возможность данного распределения очков.

Наконец, если $m = 2$, то $\frac{44}{n} = 2 - k$.

Правая часть равенства не больше 2, поэтому $n \geq 22$ — противоречие.

	1	2	3	4	5	6	Σ
1		4	4	4	0	0	12
2	0		4	4	1	1	10
3	0	0		4	1	4	9
4	0	0	0		4	4	8
5	4	1	1	0		1	7
6	4	1	0	0	1		6

Рис. 63

▼ 11 класс

56. Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Из условия следует, что уравнение касательной имеет вид $y = x + b$ или $y = -x + b$, поэтому в точке касания производная $y'(x_0) = \pm 1$, т. е. $x_0 = \pm \frac{1}{2}$. Значит, $y_0 = \left(\pm \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Уравнения касательных в точках $X\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$ и $Y\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$: $y = x - \frac{1}{4}$ и $y = -x - \frac{1}{4}$, следовательно, $OA = OB = \frac{1}{4}$, откуда $AB = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

57. Ответ. 4.

Пусть $[x] = n$, $\{x\} = \alpha$, тогда n — целое число, $0 \leq \alpha < 1$. Переписав данное неравенство в виде

$$(n + \alpha)^2 \geq Cn\alpha, \quad (1)$$

получаем, что $C \geq 4$. Так как при $C = 4$ неравенство (1) выполняется, то $(n + \alpha)^2 \geq 4n\alpha \Leftrightarrow (n - \alpha)^2 \geq 0$.

Покажем теперь, что при любом $C > 4$ можно выбрать такие n и α , что неравенство (1) нарушится. Действительно, при $n = 1$ его можно переписать в виде $\alpha^2 + (2 - C)\alpha + 1 \geq 0$, но квадратичная функция $f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - C)\alpha + 1$ в точке $\alpha = 1$ принимает отрицательное значение: $f(1) = 4 - C$, поэтому на полуинтервале $[0; 1]$ можно выбрать α так, чтобы $f(\alpha) < 0$.

58. Ответ. Можно вычеркнуть 50!.

Из равенства $(2k)! = (2k - 1)! \cdot 2k$ следует, что данное произведение можно переписать в виде $(1!)^2 \cdot 2 \cdot (3!)^2 \cdot 4 \cdot (5!)^2 \times \dots \times (99!)^2 \cdot 100 = (1! \cdot 3! \cdot 5! \times \dots \cdot 99!)^2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 100 = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 99!)^2 \cdot 2^{50} \cdot 50! = (1! \cdot 3! \cdot 5! \cdot \dots \cdot 99! \cdot 2^{25})^2 \cdot 50!$.

59. Ответ. 3S.

Покажем, что проекцией параллелепипеда будет центрально-симметричный шестиугольник $A'_1B'_1B'C'D'D'_1$ с центром симметрии в точке A' (C'_1) (рис. 64). Действительно, параллельный перенос на вектор \vec{AC}_1 переводит грань $ABCD$ в параллелограмм, центрально-симметричный параллелограмму $A_1B_1C_1D_1$, поэтому проекции этих граней — центрально-симметричные парал-

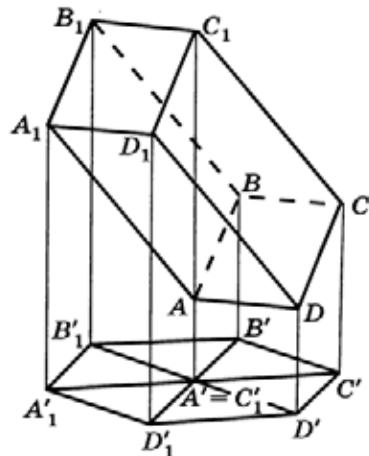


Рис. 64

лелограммы $A'B'C'D'$ и $A'_1B'_1C'_1D'_1$. То же верно и для других пар параллельных граней параллелепипеда, значит, A' — центр симметрии. Равновеликость всех получившихся на рисунке 64 треугольников следует из их равенства. Из условия следует, что суммарная площадь двух треугольников на рисунке 64 равна S . Поэтому искомая площадь равна $3S$.

60. Ответ. Семь кругов.

Разобьем полный угол с вершиной в данной точке на 7 равных углов (далее они называются секторами). Рассмотрим угол, составленный из трех соседних секторов, и впишем в него круг. Рассмотрим далее угол, составленный из трех следующих секторов, и тоже впишем в него круг. Проделаем это построение 7 раз, следя за тем, чтобы каждый следующий круг не пересекался с предыдущими (для этого, например, его можно выбирать значительно больших размеров, чем предыдущие). Так как каждый сектор входит в три из семи построенных углов, лучи, входящие в него, пересекают 3 соответствующих круга.

Докажем, что шестью кругами обойтись нельзя. Пусть имеется 6 кругов, не содержащих данную точку O . Рассмотрим окружность с центром в точке O , не пересекающую этих кругов. Для каждого круга рассмотрим на окружности дугу, высеченную касательными к нему, проведенными из точки O . Заметим, что луч с началом в точке O пересекает круг тогда и только тогда, когда точка пересечения этого луча с построенной окружностью принадлежит соответствующей дуге. Значит, луч пересекает 3 круга тогда и только тогда, когда точка его пересечения с окружностью принадлежит сразу трем дугам. Но каждая дуга меньше 180° . В сумме они дают меньше $6 \cdot 180^\circ = 1080^\circ = 3 \cdot 360^\circ$ и, значит, не могут покрыть окружность в три слоя. Поэтому найдется точка на окружности, принадлежащая не более чем двум дугам. Соответствующий луч пересекает не более двух кругов.

1996–1997

6 класс

61. Ответ. $111 - 11 - 1 = 99$.

62. Например, возможны такие последовательности переливаний: $\{0, 0, 20\} \rightarrow \{0, 5, 15\} \rightarrow \{3, 2, 15\} \rightarrow \{0, 2, 18\} \rightarrow \{2, 0, 18\} \rightarrow \{2, 5, 13\} \rightarrow \{3, 4, 13\}$ либо $\{0, 0, 20\} \rightarrow \{3, 0, 17\} \rightarrow \{0, 3, 17\} \rightarrow \{3, 3, 14\} \rightarrow \{1, 5, 14\} \rightarrow \{1, 0, 19\} \rightarrow \{0, 1, 19\} \rightarrow \{3, 1, 16\} \rightarrow \{0, 4, 16\}$.

63. Один из вариантов ответа на рисунке 65.

64. Ответ. 72 секунды.

Если на табло горят цифры $ab.cd.mn$, то $a \neq 7$, $c \neq 7$, $m \neq 7$, так как $a \leq 2$, $c \leq 5$, $m \leq 5$. Поэтому $b = d = n = 7$. Но тогда $a = 0$ или 1, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Всего получается $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$ подходящих набора цифр, а каждый набор горит 1 секунду.

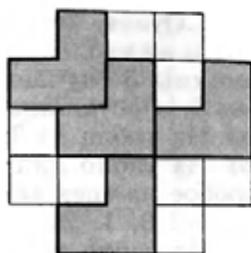


Рис. 65

65. Ответ. Нельзя.

Для того чтобы в левом верхнем углу таблицы стояла двойка, нужно дважды прибавлять единицы к числам левого верхнего квадрата 2×2 . В частности, мы увеличим на 2 число в центральном квадрате 1×1 . Аналогично, рассматривая числа в других угловых клетках таблицы, получаем, что в центральном квадрате в конце должно было стоять число $0 + 2 + 3 + 4 + 5 = 14$, а у нас там написано число 18 — противоречие.



7 класс

66. Ответ. 45.

Пусть $N = \overline{ab}$. Из условия $10a + b = 5(a + b)$ следует, что $5a = 4b$, поэтому b делится на 5. Отсюда $b = 5$, так как если $b = 0$, то $a = 0$.

67. При первом взвешивании на одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: $12 = 6 + 6$. Получили искомое количество гвоздей: $19 = 13 + 6$.

68. Ответ. $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 4$.

Пусть AD — медиана, BK — биссектриса треугольника ABC , P — точка их пересечения (рис. 66). Из условия следует, что в треугольнике ABD отрезок BP одновременно является биссектрисой и высотой, поэтому треугольник равнобедренный:

$AB = BD = \frac{1}{2} BC$. Но длины AB и

BC — это два числа из трех последовательных натуральных чисел. Поэтому либо $AB = 1$, $BC = 2$, либо $AB = 2$, $BC = 4$. В обоих случаях $AC = 3$. Но первый случай невозможен, так как в этом случае $AC = AB + BC$. Треугольник со сторонами 2, 3 и 4 существует.

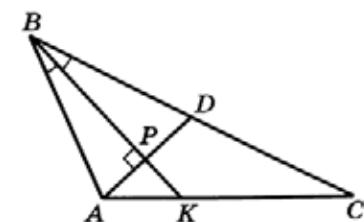


Рис. 66

69. Ответ. 105 секунд.

Если на табло горят цифры $ab.cd.mn$, то $a \neq 3$, поэтому возможны 5 случаев, когда одна из цифр b, c, d, m, n не равна 3, а остальные равны 3.

- На табло $ab.33.33$, где $b \neq 3$. Таких наборов 21.
- На табло $a3.c3.33$, где $c \neq 3$. Здесь a может принимать любое из трех значений 0, 1 или 2, c — любое из пяти значений 0, 1, 2, 4 или 5. Таких наборов $3 \cdot 5 = 15$.
- На табло $a3.3d.33$, где $d \neq 3$. Здесь $a = 0, 1, 2$, $d = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, всего $3 \cdot 9 = 27$ наборов.
- $a3.33.m3$ — 15 наборов.
- $a3.33.3n$ — 27 наборов.

Всего $21 + 15 + 27 + 15 + 27 = 105$ наборов, каждый из которых горит 1 секунду.

70. Ответ. Нельзя.

Предположим, что мы нашли такую расстановку и сумму чисел в любой тройке ребер, выходящих из одной вершины, равную N , тогда по всем вершинам сумма равна $8N$. В то же время при таком суммировании каждое число учитывается дважды, так как каждое ребро куба входит в две тройки ребер. Поэтому $8N = 2(1 + 2 + \dots + 12) = 12 \cdot 13$, откуда $N = \frac{39}{2}$ — не целое, что невозможно, — противоречие.

**8 класс****71. Ответ.** $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Из условия сразу получается система уравнений

$$\begin{cases} a+b=1, \\ b+c=1, \\ a+c=1. \end{cases}$$

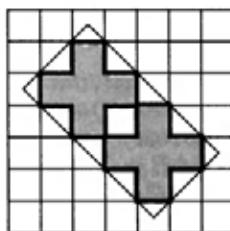
72. Ответ. 198.

Пусть $N = \overline{abc}$. Из условия $100a + 10b + c = 11(a + b + c)$ следует, что $89a = 10c + b$. Справа стоит двузначное (однозначное, если $c = 0$) число, которое делится на 89, значит, $10c + b = 89$. Но тогда $a = 1$.

73. Ответ. См. рисунок 67.

Нарисованный прямоугольник состоит из 11 полных квадратов 1×1 , 8 половинок и 4 четвертупшек квадратиков, поэтому его площадь равна $11 + 8 \cdot \frac{1}{2} +$

$$+ 4 \cdot \frac{1}{4} = 16.$$

**Рис. 67**

74. Ответ. $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 120^\circ$.
 Пусть $\angle DAM = \angle BAM = \alpha$ (рис. 68),
 тогда $\angle AMB = \alpha$ ($BC \parallel AD$),
 $\angle AMC = 180^\circ - \alpha$,
 поэтому $\angle CMD = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$.

Отсюда $\angle MDA = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$,

значит, $\angle MDC = \angle CDA - \angle MDA =$
 $= (180^\circ - 2\alpha) - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = 90^\circ - \frac{3}{2}\alpha$. Итак, $90^\circ - \frac{3}{2}\alpha = 45^\circ$,
 откуда $\alpha = 30^\circ$.

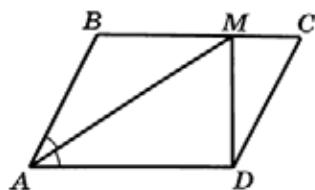


Рис. 68

75. Ответ. Нельзя.

Пусть искомая расстановка существует. Тогда числа, стоящие в соседних вершинах куба, должны быть одной четности, так как число, равное их полусумме, — целое. Отсюда следует, что все числа, стоящие в вершинах, одной четности. Но числа 1 и 20 не могут быть полусуммами никаких двух чисел от 1 до 20, поэтому числа разной четности 1 и 20 должны стоять в вершинах — противоречие.

9 класс

76. Из того, что $1 + 8x^2 > 0$, исходное неравенство равносильно следующему: $1 + 8x \leq 2 + 16x^2$, т. е. $(4x - 1)^2 \geq 0$.

77. Ответ. 96 секунд.

Если на табло горят цифры $ab.cd.mn$, то $a = 0, 1, 2$, $0 \leq b \leq 9$, $0 \leq c \leq 5$, $0 \leq d \leq 9$, $0 \leq m \leq 5$, $0 \leq n \leq 9$. Поэтому если $a = n$, $b = m$, $c = d$, то симметричное число на табло однозначно определяется по цифрам a , b и c , где $a = 0, 1, 2$; $0 \leq b \leq 5$; $0 \leq c \leq 5$. При этом если $a = 0$ или 1, то b и c — любые цифры от 0 до 5, количество таких наборов чисел равно $2 \cdot 6 \cdot 6 = 72$. Если же $a = 2$, то $b = 0, 1, 2, 3$; $0 \leq c \leq 5$ количество таких наборов равно $4 \cdot 6 = 24$. Всего $72 + 24 = 96$ наборов чисел, каждый из которых горит 1 секунду.

78. Проведем $CP \parallel MK$ и $DQ \parallel NL$, тогда $CMKP$ и $DQLN$ — параллелограммы, значит, $KP = CM$ и $LQ = DN$ (рис. 69). Тогда $AK + LC + CM + NA = AK + LQ + CQ + CM + NA = AK + KP + DN + NA + CQ = AP + AD + CQ = 2 - BP + CQ$. Итак, $CQ = BP$ и, значит, $\triangle DQC = \triangle CPB$. Отсюда $\angle QDC = \angle PCB = 90^\circ - \angle PCD$, т. е. $DQ \perp CP$, и, значит, $LN \perp KM$.

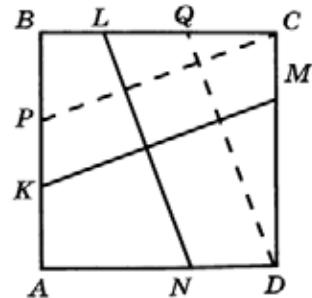


Рис. 69

79. Ответ. Не сможет.

Пусть длина первого прыжка кузнечика равна d , и после n прыжков он вернулся в начальную точку. Тогда его путь — замкнутая ломаная $A_1A_2A_3 \dots A_nA_1$ со звеньями длины d , $2d$, $4d$, ..., $2^{n-1}d$. Такая ломаная не существует, так как длина одного ее звена больше суммы длин других звеньев: $2^{n-1}d > d + 2d + \dots + 2^{n-2}d$ (поскольку $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2} < 2 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2} = 4 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2} = \dots = 2^{n-1}$).

Противоречие.

80. Ответ. Нельзя.

Пусть не так. Выделенный на рисунке 70 (левый верхний) квадрат 4×4 можно разрезать на четыре квадрата 2×2 . В каждом из них по предположению закрашено не более 2 клеток, всего в квадрате 4×4 не более 8 клеток, значит, в отдельном уголке, состоящем из правого столбца и нижней строки, не менее 8 закрашенных клеток. Заметим, что тогда их ровно 8, так как в противном случае в правом нижнем квадрате 2×2 закрашены по крайней мере 3 клетки.

Далее каждая из отмеченных звездочкой клеток входит в квадрат 2×2 , уже имеющий 2 закрашенные клетки, поэтому все эти клетки не закрашены. Таким образом, в левом верхнем квадрате 3×3 закрашено ровно 8 клеток, но тогда в нем есть квадраты 2×2 с тремя закрашенными клетками — противоречие.

			*	
			*	
			*	
*	*	*	*	

Рис. 70

▼ 10 класс

81. Ответ. $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

82. Ответ. $N = 1633$. Действительно, $1633 = 96 \cdot 17 + 1 = = 19 \cdot 86 - 1$.

По условию $N + 1 = 19m$, $N - 1 = 96n$, поэтому $96n + 2 = = 19m$, т. е. $5 \cdot 19n + (n + 2) = 19m$. Отсюда следует, что $n + 2$ делится на 19, т. е. наименьшее возможное значение n равно 17. Тогда $m = 86$.

83. Ответ. $a = b = c = 2$, $d = 3$.

Без ограничения общности можно считать, что $a \leq b \leq c$. Тогда из данного уравнения следует, что $d > c$, значит, $d \geq c + 1$, $d! \geq (c + 1)! = (c + 1) \cdot c! > 3c! \geq a! + b! + c!$, если $c + 1 > 3$. Итак, если $c \geq 3$, уравнение решений не имеет. Значит, $c = 1$ или $c = 2$. Осталось проверить, что из наборов $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$, $(2, 2, 2)$ уравнению удовлетворяет только последний.

84. Обозначим данные в условии площади через S_1 , S_2 и S_3 (рис. 71). Тогда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{AR}{RB}$, так как у треугольников ARM и BRM общая высота. Аналогично $\frac{2S_1 + S_3}{2S_2 + S_3} = \frac{AR}{RB}$, т. е. $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2S_1 + S_3}{2S_2 + S_3}$, откуда $S_1(2S_2 + S_3) = S_2(2S_1 + S_3)$, $S_3(S_1 - S_2) = 0$, $S_1 = S_2$, так как $S_3 > 0$. Отсюда $AR = RB$, т. е. CR — медиана треугольника ABC . Аналогично медианами являются AP и BQ .

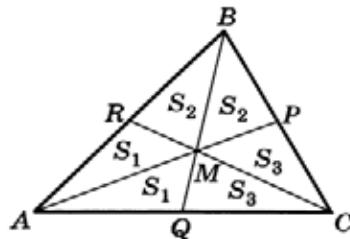


Рис. 71

85. Разобьем треугольник на 25 правильных треугольников со стороной 1 так, как показано на рисунке 72. Тогда хотя бы в одном из треугольников окажется не менее четырех данных точек, так как $(3 \cdot 25 < 76)$. Но такой треугольник можно вписать в круг радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$.



Рис. 72

▼ 11 класс

86. Ответ. Одно — число 7.

Из разложения чисел на простые множители следует, что нужно стереть число 7 и в разные группы записать число 9 и пару 3, 6. Так же в разные группы должны попасть числа 5 и 10. Искомое разбиение: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $\{8, 9, 10\}$. Здесь $\Pi_1 = \Pi_2 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^1$.

87. По условию

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} BF \cdot BO \cdot \sin \angle FBO = \\ &= \frac{1}{2} BD \cdot BO \cdot \sin \angle DBO. \end{aligned}$$

Это значит, что $BD = BF$. Но если a , b , c — длины сторон треугольника ABC , лежащих соответственно против углов A , B

и C (рис. 73), то по свойству его биссектрисы $\frac{c}{BD} = \frac{b}{DC} = \frac{b}{a - BD}$, откуда $BD = \frac{ac}{b + c}$. Аналогично $BF = \frac{ac}{a + b}$. Значит, $\frac{ac}{a + b} = \frac{ac}{b + c}$, и $c = a$.

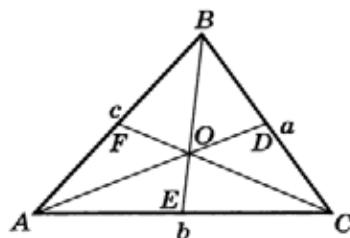


Рис. 73

88. Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые: $1 + x + x^2 + \dots + x^{100} + x^{100} + x^{101} + \dots + x^{200} - 200x^{100} = (1 + x^{200}) + (x + x^{199}) + (x^2 + x^{198}) + \dots + (x^{100} + x^{100}) - 200x^{100} \geq 2x^{100} + 2x^{100} + \dots + 2x^{100} - 200x^{100} = 2x^{100} \geq 0$ (мы воспользовались неравенством $x^k + x^{200-k} \geq 2\sqrt{x^k \cdot x^{200-k}} = 2x^{100}$).

89. Ответ. $\sqrt{3}$.

Выберем базис из трех векторов, идущих по ребрам куба, так, чтобы вектор диагонали равнялся $\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Тогда четыре вектора будут равны $\pm \vec{e}_1$, еще четыре — $\pm \vec{e}_2$, еще четыре — $\pm \vec{e}_3$. Таким образом, сумма \vec{S} векторов имеет вид $k\vec{e}_1 + m\vec{e}_2 + n\vec{e}_3$, где k, m, n — целые нечетные числа, а $|\vec{S}| = \sqrt{k^2 + m^2 + n^2} \geq \sqrt{3}$, так как $k^2 \geq 1, m^2 \geq 1, n^2 \geq 1$. Очевидно, что, разбив пары параллельных ребер куба на противоположно направленные векторы, мы получим, что $k = m = n = 1$ и $|\vec{S}| = \sqrt{3}$.

90. Ответ. Верно.

Покажем, что бесконечно много квадратов чисел не представимы в виде $n^2 + p$. Пусть $m^2 = n^2 + p$, тогда $m^2 - n^2 = p$, т. е. $(m-n)(m+n) = p$. Последнее в силу простоты числа p возможно только в случае $m-n=1, m+n=p$, т. е. $m = \frac{p+1}{2}$. Итак, равенство $m^2 = n^2 + p$ возможно только для чисел m вида $m = \frac{p+1}{2}$, где p — простое число. Но существует бесконечно много нечетных чисел, не являющихся простыми, например числа вида 3^r , где $r \geq 2$.

1997–1998

6 класс

91. $2222 - 222 - 2 - 2 : 2 = 1997$.

92. Ответ. $n = 702$.

Число 123...979899 имеет $9 + 2 \cdot 90 = 189$ цифр, поэтому $1998 = 189 + 3 \cdot (n - 99)$.

93. Ответ. 35 лет.

Из того, что $(74 - 47) - 2 \cdot 10 = 7$, следует, что сейчас сыну 7 лет.

94. Ответ. 11.

Площадь уголка равна 3, а площадь прямоугольника — 35, поэтому в прямоугольнике не может поместиться 12 уголков. На рисунке 74 приведен один из способов размещения в прямоугольнике 11 уголков.

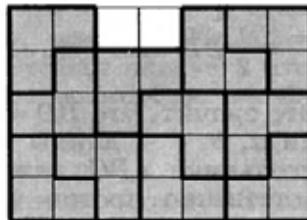


Рис. 74

95. Ответ. Не играли.

Турнир с 6 участниками состоит из 15 партий (6 участников \times 5 партий : 2), с 7 участниками — из 21 партии, с 8 участниками — из 28 партий. Поэтому либо в турнире участвовало, кроме выбывших *A* и *B*, 6 участников, и, значит, *A* и *B* участвовали в 8 партиях (23 – 15), либо 7 участников, и тогда *A* и *B* участвовали в 2 партиях (23 – 21). Если бы они сыграли между собой, то они сыграли бы с другими участниками в первом случае 7 партий, во втором — 1 партию и, значит, не смогли бы сыграть равное количество партий.

7 класс

96. $1997 = 3 \cdot 333 + 3 \cdot 333 - 3 : 3$.

97. Ответ. 120 метров.

За единицу времени собака пробегает $2 \cdot 2 = 4$ (м), а лисица — $3 \cdot 1 = 3$ (м), значит, за единицу времени собака настигает лисицу на 1 м. Расстояние в 30 м будет покрыто за 30 единиц времени, т. е. собака пробежит $30 \cdot 4 = 120$ (м).

98. Ответ. 125, 250, 375.

Пусть $n = \overline{abc}$ — искомое число. По условию $100a + 10b + c = 5$ ($10b + c$), откуда после сокращения на 4 получили $25a = 10b + c$, т. е. c делится на 5. Если $c = 0$, то $5a = 2b$, откуда $b = 5$, $a = 2$ ($b = 0 \Rightarrow a = 0$). Если же $c = 5$, то $5a = 2b + 1$, откуда $b = 2$ или $b = 7$.

99. Ответ. 9.

Площадь каждого уголка равна 5, а площадь квадрата — 49, поэтому в квадрат нельзя поместить более 9 уголков. На рисунке 75 приведен один из способов размещения в квадрате 9 уголков.

100. Ответ. Нельзя.

Пусть искомую раскраску удалось получить. Тогда клетки 2 и 3 — соседи клетки 1 (рис. 76) — закрашены. Эти же клетки — соседи клетки 4, значит, клетки 5 и 6 не закра-

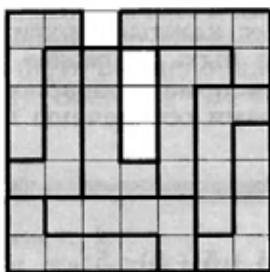


Рис. 75

1	2						
3	4	5					
6	7	8					
9	10						
						11	
					12		
						13	
						14	15
						16	
						17	18

Рис. 76

шены. Тогда клетки 8 и 9 — соседи клетки 7 — закрашены. Продолжая эти рассуждения, получаем, что закрашены клетки 11, 12, 13, 14. Тогда клетки 16 и 17 — соседи клетки 15 — не закрашены. Значит, у клетки 18 нет закрашенных соседей — противоречие.

8 класс

101. $1997 = 444 \cdot 4 + 44 \cdot 4 + 44 + 4 : 4$.

102. Ответ. $2^{1997} > 5^{850}$.

Из неравенства $2^7 = 128 > 125 = 5^3$ следует, что $2^{1997} = (2^7)^{285} \cdot 2^2 > (5^3)^{285} = 5^{855} > 5^{850}$.

103. Пусть K — точка пересечения серединных перпендикуляров (рис. 77). Тогда $AK = KB$, $CK = KD$ и $\angle KBA = \angle BAK = \angle KDC = \angle KCD$. Отсюда $\angle AKB = \angle CKD$, значит, $\angle AKC = \angle BKD$. Но тогда $\triangle AKC \sim \triangle BKD$ (по двум сторонам и углу между ними) и $BD = AC$ (как стороны равных треугольников).

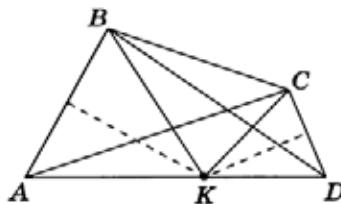


Рис. 77

104. Ответ. 1, 5 и 8 лет.

Если первенец старше второго ребенка на x лет, а средний старше третьего ребенка на y лет, то $70 - 45 = 3(x + y) + y$, так как возраст каждого из родителей и старшего ребенка к моменту рождения третьего ребенка увеличился на $(x + y)$ лет, а возраст второго — на y лет. Аналогично $(x + y + 1) + (y + 1) + 1 = 14$. Мы получили систему уравнений $\begin{cases} 3x + 4y = 25, \\ x + 2y = 11, \end{cases}$ из которой $x = 3$, $y = 4$.

105. Ответ. 18 фишек.

Из условия следует, что для каждого фиксированного цвета A фишка этого цвета должна встретиться в паре с фишкой каждого из остальных 5 цветов. В ряду фишка имеет не более двух соседей, поэтому фишка цвета A должна встретиться не менее 3 раз. Аналогично с каждым другим цветом. Таким образом, всего должно быть не менее $3 \cdot 6 = 18$ фишек. Вот один из примеров искомого расположения фишек: 123456246325164135 (цифрами обозначены цвета).

9 класс

106. Три варианта:

$$1997 = (555 - 55)(5 - 5 : 5) - (5 + 5 + 5) : 5;$$

$$1997 = (55 - 5)(55 - 5 - 5 - 5) - (5 + 5 + 5) : 5;$$

$$1997 = (5 \cdot 5 \cdot 5)(5 + 5 + 5 + 5 : 5) - (5 + 5 + 5) : 5.$$

107. Из равенства $a^2 + b^2 = c^2$ следует: $a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = c^4$, поэтому доказываемое неравенство принимает вид $4(a^4 + a^2b^2 + b^4) \geq 3(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) \Leftrightarrow a^4 - 2a^2b^2 + b^4 \geq 0 \Leftrightarrow (a^2 - b^2)^2 \geq 0$.

108. Ответ. Не может.

Пусть x_1 и x_2 — корни $P(x)$. Тогда по теореме Виета $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$, т. е. $x_1 \cdot x_2 \cdot a = c$. По условию c — нечетное; числа a, x_1, x_2 — целые. Отсюда следует, что числа a, x_1, x_2 — нечетные. По теореме Виета $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, т. е. $b = -(x_1 + x_2) \cdot a$, значит, b — четное число. Тогда $P(1997) = a \cdot 1997^2 + b \cdot 1997 + c$ — сумма двух нечетных и одного четного числа, т. е. четно.

109. Данная окружность вписана в угол ABC , поэтому её центр O лежит на биссектрисе BP угла B (рис. 78). При симметрии относительно прямой BO окружность переходит в себя, а касательная PC_1 — в касательную PC_2 . Но прямые PA_1 и PC_2 совпадают, значит, треугольник PA_1B симметричен треугольнику PC_1B . Отсюда $\angle PA_1B = \angle PC_1B$, т. е. $\gamma + \frac{\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2} + \alpha \Rightarrow \alpha = \gamma$, где $\alpha = \angle BAC$, $\gamma = \angle BCA$.

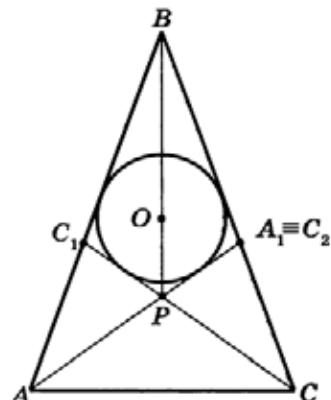


Рис. 78

110. Ответ. 336.

Разобьем книги на цепочки книг, идущих через 13: 1-я, 15-я, 29-я, ...; 2-я, 16-я, ...; ...; 14-я, 28-я, ...; получили 14 цепочек. Из того, что $666 = 14 \cdot 47 + 8$, следует, что мы получим 8 цепочек по 48 книг и 6 по 47 книг. В каждой из цепочек по условию книги по белой магии не могут быть соседними. Значит, в любой цепочке длины 48 их наибольшее количество равно 24, и в цепочке длины 47 их также может быть 24 (цепочка начинается и заканчивается такой книгой). Всего $14 \cdot 24 = 336$ книг.

▼ 10 класс

111. Ответ. 4.

График касается оси Ox , поэтому $y = (x + x_0)^2$, $y = x^2 + 2x_0x + x_0^2$, т. е. $a = 2x_0$ и $a = x_0^2$. Отсюда $a = 0$ или $a = 4$. Но из графика следует, что $a \neq 0$.

112. По условию $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{2}{a+c}$, т. е. $\frac{a+c+2b}{(a+b)(b+c)} = \frac{2}{a+c}$. Умножив обе части последнего равенства на $(a+b)(b+c)(a+c)$ и приведя подобные, получим $a^2 + c^2 = 2b^2$, что и требовалось доказать.

113. Если O_1 и O_2 соответственно центры окружностей, вписанных в треугольники CC_1A и AA_1C , K_1 и K_2 — точки касания этими окружностями стороны AC (рис. 79), то $O_1 \in AA_1$, $O_2 \in CC_1$ и $O_1K_1 = O_2K_2 = r$. Отсюда следует, что четырехугольник AO_1O_2C — трапеция. Но AO_2 — биссектриса угла A_1AC , CO_1 — биссектриса угла C_1CA , поэтому $\angle O_1AO_2 = \angle O_2AC = \angle AO_2O_1$, т. е. $AO_1 = O_1O_2$.

Аналогично $CO_2 = O_1O_2$. Трапеция AO_1O_2C — равнобедренная, значит, $\angle O_1AC = \angle O_2CA$, откуда и следует утверждение задачи, так как $\angle BAC = 2\angle O_1AC$, $\angle BCA = 2\angle O_2CA$.

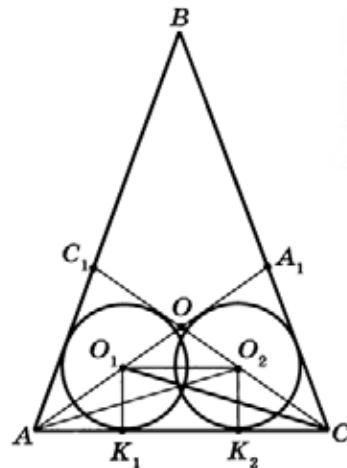


Рис. 79

114. Ответ. (2, 5, 7) — единственная тройка с точностью до перестановок.

Из условия следует, что все числа p , q и r различны. Без ограничения общности $p > q > r$. Если все числа p , q , r нечетны, то их разности четны, но все эти разности не могут одновременно равняться 2.

Значит, $r = 2$, p и q нечетны, следовательно, $p - q = 2$. Тогда одно из чисел $(p - r)$ и $(q - r)$ должно делиться на 3, так как $q > 3$ (1 — не простое число), т. е. $p - 2 = 3$, что невозможно, или $q - 2 = 3$, отсюда $q = 5$, $p = 7$.

115. Ответ. Нельзя.

Число сторон нечетно, следовательно, найдется треугольник, в который входит ровно одна сторона AB исходного 1997-угольника (рис. 80), значит, она является основанием одного из треугольников, вершиной C которого является противоположная вершина 1997-угольника. Убрав этот треугольник, получим два 999-угольника, у которых одна сторона (AC или BC) больше всех сторон и



Рис. 80

диагоналей, значит, она — основание, вершина — «противоположная» вершина. Убрав эти треугольники, получим 500-угольники, у каждого из которых одна сторона больше всех сторон и диагоналей, но для нее нет «противоположной» вершины, следовательно, такого быть не может.

▼ 11 класс

116. $f(x) = \frac{1+\sin x - \cos x}{1+\sin x + \cos x} = \frac{2\sin^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2} + 2\sin \frac{x}{2}\cos \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, а на интервале $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ — нечетная.

117. Ответ. $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$.

При $x \rightarrow +\infty$ $y \rightarrow +\infty$, значит, $a > 0$. График пересекает ось Oy в точке с положительной ординатой, поэтому $c = y(0) > 0$. В этой же точке функция убывает, значит, $y'(0) < 0$. Но $y' = 4ax^3 - 2x + b$, т. е. $y'(0) = b < 0$.

118. Ответ. Можно.

Например, так: $123 \rightarrow 225 \rightarrow 327 \rightarrow 429 \rightarrow 531$ (поменяли местами цифры) $\rightarrow 135 \rightarrow 237$ (поменяли местами цифры) $\rightarrow 327 \rightarrow \dots$ — получили цикл.

119. Ответ. 6.

Пусть угол между боковыми гранями и основанием α . Спроектируем боковые грани на основание и запишем равенство площадей: $9 = (5 + 8 + 5) \cos \alpha$. (Из условия следует, что вершина S проектируется внутрь треугольника ABC , рис. 81.) Отсюда $\cos \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$. Пусть SA' , SB' , SC' — высоты боковых граней, SO — высота пирамиды. Тогда $SO = SA' \sin \alpha = SB' \sin \alpha = SC' \sin \alpha \Rightarrow SA' = SB' = SC' = h$.

Далее $\frac{1}{2} SA' \cdot BC = 5 \Rightarrow BC = \frac{10}{h}$. Аналогично $AC = \frac{10}{h}$, $AB = \frac{16}{h}$. Высота равнобедренного треугольника ABC равна $\frac{6}{h}$, поэтому $S_{ABC} = \frac{48}{h^2}$.

Итак, $\frac{48}{h^2} = 9$, $h = \frac{4}{\sqrt{3}}$, $SO = h \sin \alpha = 2$, $V = \frac{1}{3} SO \cdot S_{ABC} = 6$.

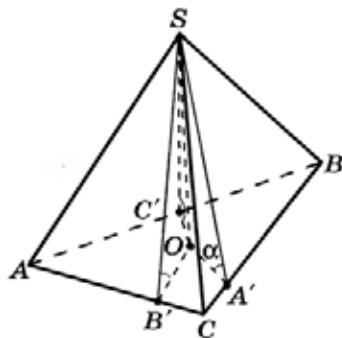


Рис. 81

120. Пусть для определенности $x \geq y$, тогда, разделив обе части неравенства на x , получим равносильное неравенство $\sqrt[m]{1+t^m} \leq \sqrt[n]{1+t^n}$, или $(1+t^m)^n \leq (1+t^n)^m$, где $0 < t = \frac{y}{x} \leq 1$. Последнее неравенство верно, так как при $m \geq n$ $1 < 1+t^m \leq 1+t^n$.

1998–1999

▼ 6 класс

121. Ответ. Например: $9 + 6$; $8 + 5 + 2$; $7 + 4 + 3 + 1$.

Суммарный вес гирек равен 45, поэтому в каждой коробочке суммарный вес гирек равняется 15 г.

122. Ответ. $333 \times (3 + 3) = 1998$.

123. Одно из возможных решений показано на рисунке 82.

124. Ответ. В 17.00.

Расстояние между БМВ и «мерседесом» и их скорости не меняются, а скорости «москвича» и «жигулей» равны. «Москвич» встретил «мерседес» через 2 ч после БМВ, значит, «жигули» встретят «мерседес» тоже через 2 ч после БМВ, т. е. в 17.00.

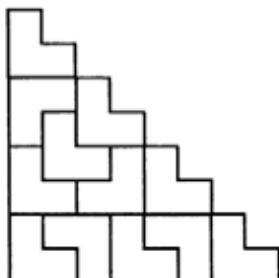


Рис. 82

125. Ответ. Нет.

Так как первое и второе землетрясения произошли в понедельник и вторник, то интервал между землетрясениями — это целое число недель плюс промежуток, меньший чем двое суток. Тогда между вторым и четвертым должно пройти целое число недель плюс промежуток, меньший чем четверо суток. Но между вторником и воскресеньем больше чем четверо суток, значит, такого не могло быть.

▼ 7 класс

126. Первое решение. Можно провести разрезы так, как показано на рисунке 83, в произведении $\frac{7}{15} \times \frac{3}{7} = \frac{1}{5}$ каждый из сомножителей меньше $\frac{1}{2}$.

После проведения олимпиады выяснилось, что школьникам легче представить себе эту задачу как классическую задачу на разрезание клетчатых фигур. В результате большинство из них предложили варианты решений, аналогичные приведенному ниже.

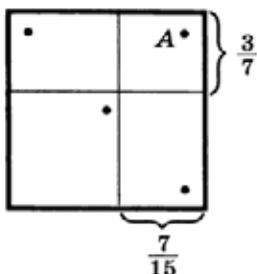


Рис. 83

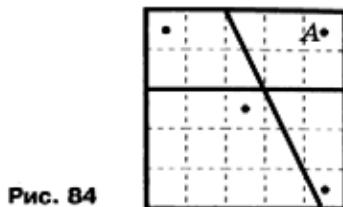


Рис. 84

Второе решение. Разобьем торт на 25 равных квадратов и проведем разрезы так, как показано на рисунке 84. Очевидно, что кусок, содержащий изюминку A , — это фигура, по площади равная 5 клеткам, т. е. составляет $\frac{1}{5}$ часть торта.

127. Ответ. 132.

Очевидно, это те дни, у которых дата может быть номером месяца, т. е. принимает значения от 1 до 12. Таких дней $12 \times 12 = 144$. Но те дни, у которых число совпадает с номером месяца, понимаются однозначно. Таких дней 12. Поэтому искомых дней $144 - 12 = 132$.

128. Ответ. А — рыцарь, Б — лжец.

Если А — лжец, то его утверждение неверно, т. е. оба должны быть рыцарями — противоречие. Значит, А — рыцарь. Тогда его утверждение верно и Б — лжец.

129. Ответ. Не может.

Если $A = n^2 + 4n$ и $B = m^2 + 4m$, то $A - B = (n - m)(n + m + 4)$. Но числа в скобках одинаковой четности, и их произведение не может быть равным 1998 (поскольку это число четно, но не делится на 4).

130. Ответ. Не может.

Посмотрим на места с четными и на места с нечетными номерами. Если какая-то девочка сидит на месте с нечетным номером и другая — на четном, то между ними четное число школьников, значит, либо четные, либо нечетные места свободны от девочек. Рассмотрим первый случай: тогда на четных местах сидят только мальчики, и между любой их парой — нечетное число школьников — противоречие. Второй случай точно так же приводит к противоречию.



8 класс

131. См. решение задачи 127.

132. Разобьем монеты на три кучки: А, Б и В, содержащие 10, 10 и 20 монет соответственно. Сравним веса А и Б, есть два варианта:

1) Вес А равен весу кучки Б. Тогда сравним веса А + Б и В. Если вес А + Б меньше, то в А и Б по одной фальшивой монете и В — искомая кучка, если вес А + Б больше, то ни в А, ни в Б нет фальшивых монет и искомая кучка — А + Б. Случай равенства А + Б и В, очевидно, невозможен.

2) Вес А больше веса Б (противоположный случай аналогичен). Тогда монеты в кучке А заведомо настоящие, а в кучке Б есть хотя бы одна фальшивая. Поэтому в кучке В не более одной фальшивой монеты. Теперь разобьем В на две половины: в той, которая тяжелее, нет фальшивых монет (если веса половинок равны, то в обоих нет фальшивых монет); эта половина вместе с А является искомой кучкой.

133. Ответ. $5^{1997} - 10$.

Условие равносильно тому, что число $(n+1)(n+2) \times \dots \times (n+10)$ делится на 5^{1998} . Но среди чисел $n+1, n+2, \dots, n+10$ ровно два делятся на 5, причем одно из этих двух не делится ни на какую большую степень пятерки, т. е. другое обязано делиться на 5^{1997} , отсюда $n+10 \geq 5^{1997}$. Это означает, что $n \geq 5^{1997} - 10$. Однако при $n = 5^{1997} - 10$ условие выполняется, т. е. минимальное n равно $5^{1997} - 10$.

134. Середина отрезка BC — точка O — центр окружности. Так как треугольники ADE и ODE равнобедренные, то $\angle ADE = \angle AED$, $\angle ODE = \angle OED$, поэтому $\angle OEA = \angle ODA$, $\angle OEC = \angle ODB$. Из равнобедренности треугольников OCE и ODB следует, что $\angle OCE = \angle OEC = \angle ODB = \angle OBD$, т. е. $\angle C = \angle B$, что и требовалось доказать.

135. Нарисуем на плоскости точки, в которых могут оказаться вершины треугольника, получится косоугольная решетка. Раскрасим узлы решетки, как показано на рисунке 85, в цвета A , B и C . Заметим, что если вначале треугольник лежал так, как показано на рисунке, то его соответствующие вершины путешествуют по соответствующим цветам. Значит, если он вернулся на место, то его вершины заняли исходную позицию.

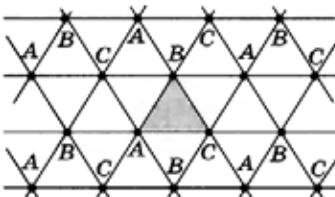


Рис. 85



9 класс

136. Ответ. Верно.

Так как $ax^2 + bx + c$ имеет корни, то $b^2 \geq 4ac$, откуда $b^6 \geq 64a^3c^3$. Если $ac \geq 0$, то $64a^3c^3 \geq 4a^3c^3$, а если $ac < 0$, то $b^6 \geq 0 > 4a^3c^3$ — в обоих случаях $b^6 \geq 4a^3c^3$, т. е. дискrimинант неотрицателен.

$$\begin{aligned}
 137. \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{1997}{1998!} &= \left(\frac{2}{2!} - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{3}{3!} - \frac{1}{3!} \right) + \dots + \\
 &+ \left(\frac{1998}{1998!} - \frac{1}{1998!} \right) = \left(1 - \frac{1}{2!} \right) + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) + \dots + \left(\frac{1}{1997!} - \frac{1}{1998!} \right) = \\
 &= 1 - \frac{1}{1998!} < 1, \text{ что и требовалось} \\
 &\text{доказать.}
 \end{aligned}$$

138. Из условия (рис. 86) следует подобие треугольников AXB и KXL — по первому признаку подобия треугольников ($\angle AXB = \angle KXL$). Отсюда $\angle BAK = \angle LKA$, но $\angle LKA = \angle ABL$ (вписаные углы, опирающиеся на одну дугу). Так как AK и BL — биссектрисы углов A и B , половины которых равны, то отсюда следует: $\angle A = \angle B$.

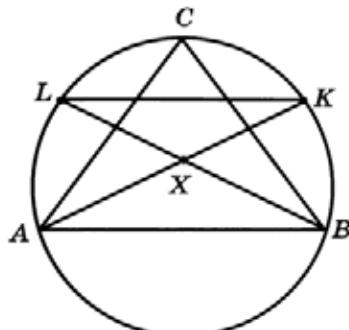


Рис. 86

139. Приведем несколько примеров: а) Рассмотрим число $\underbrace{99\dots 990}_{222}$. Так как $222 = 74 \cdot 3$,

то это число можно разложить на множители: $\underbrace{99\dots 990}_{222} = 10 \cdot \underbrace{999 \cdot 1001001\dots 001}_{74 \text{ единицы}}$, т. е. оно делится на 999 и на 10,

а значит, и на 1998, при этом его сумма цифр равна $9 \cdot 222 = 1998$.
б) Рассмотрим число $\underbrace{11\dots 110}_{1998}$. Так как $1998 = 666 \cdot 3$,

то это число можно разложить на множители: $10 \cdot \underbrace{111 \cdot 1001001\dots 001}_{666 \text{ единиц}}$. Число $1001001\dots 001$ делится на 9,

так как сумма его цифр (666) делится на 9, т. е. исходное число делится на $111 \cdot 9$ и на 10, а значит, и на 1998, при этом его сумма цифр равна $1 \cdot 1998 = 1998$.

Замечание. Приведенные здесь ответы не являются единственными возможными, например, числа $\underbrace{33\dots 330}_{666}$ и $\underbrace{66\dots 66}_{333}$

также удовлетворяют условию задачи.

140. Покажем, что если существующая система авиалиний удовлетворяет условию, и два города A и B не соединены авиалинией, то тогда можно их соединить авиалинией $A \rightarrow B$ или $B \rightarrow A$ так, чтобы получившаяся система авиалиний по-прежнему удовлетворяла условию.

Предположим противное. Тогда после проведения авиалинии $A \rightarrow B$ появился замкнутый путь $B \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow A \rightarrow B$. Аналогично после проведения авиалинии $B \rightarrow A$ появился замкнутый путь $A \rightarrow D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_m \rightarrow B \rightarrow A$. Но тогда до проведения авиалиний между A и B уже существовал замкнутый путь $A \rightarrow D_1 \rightarrow \dots \rightarrow D_m \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_n \rightarrow A$ (возможно, некоторые вершины C_i и D_j совпадают), существующая система авиалиний не удовлетворяла условию, так как из A можно было вылететь и вернуться назад, — противоречие.



10 класс

141. Первое решение. Предположим противное: $f_+ = f_1 + f_2$ и $f_- = f_1 - f_2$ оба не имеют корней. Есть два варианта: f_+ и f_- одного знака или они разных знаков (если у многочлена нет корней, то он принимает значения одного знака). В первом случае их сумма также постоянного знака, но $f_+ + f_- = 2f_1$ имеет корни — противоречие. Во втором случае их разность должна иметь постоянный знак, но $f_+ - f_- = 2f_2$ тоже имеет корни — противоречие.

Второе решение. Пусть $f_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$, $f_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$. По условию $D_1 = b_1^2 - 4a_1c_1 \geq 0$, $D_2 = b_2^2 - 4a_2c_2 \geq 0$ и $D_- = (b_1 - b_2)^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) < 0$. Из последнего неравенства следует, что $2b_1b_2 > b_1^2 + b_2^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2)$, поэтому $D_+ = (b_1 + b_2)^2 - 4(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) > 2b_1^2 + 2b_2^2 - 4(a_1 - a_2)(c_1 - c_2) - 4(a_1 + a_2)(c_1 + c_2) = 2(b_1^2 - 4a_1c_1) + 2(b_2^2 - 4a_2c_2) \geq 0$.

142. Как и в решении задачи 138, получаем $\angle KAB = \angle LBA$. Так как AK и BL — высоты, то отсюда следует: $\angle A = \frac{\pi}{2} - \angle LBA = \frac{\pi}{2} - \angle KAB = \angle B$, что и требовалось доказать.

143. Ответ. $740740\dots740739408$.

664 раза 740

$$\begin{aligned}
 6 + 66 + 666 + \dots + \underbrace{66\dots6}_{1998} &= \frac{2}{3}(10 - 1) + \frac{2}{3}(10^2 - 1) + \dots + \\
 &+ \frac{2}{3}(10^{1998} - 1) = \frac{2}{3}(10 + 10^2 + \dots + 10^{1998} - 1998) = \\
 &= \frac{2}{3}\underbrace{(11\dots10 - 1998)}_{1998} = \underbrace{740740\dots740}_{666 \text{ раз } 740} - 1332 = \\
 &= \underbrace{740740\dots740}_{664 \text{ раза } 740} 739408.
 \end{aligned}$$

144. Докажем индукцией по количеству проведенных диагоналей: перед проведением последней диагонали есть некоторый окрашенный снаружи многоугольник. Если по-

следняя диагональ его не пересекает, то он не изменился и все доказано. Если диагональ делит его на две части, то та, которая лежит с неокрашенной стороны, является многоугольником, окрашенным снаружи.

145. Обозначим $\frac{AC_1}{AB} = \alpha$, $\frac{BA_1}{BC} = \beta$, $\frac{CB_1}{CA} = \gamma$.

Из теоремы об отношении площадей треугольников с общим углом получаем

$$(1 - \alpha)\beta = (1 - \beta)\gamma = (1 - \gamma)\alpha = \frac{1}{4}.$$

Первое решение. В этой системе уравнений после исключения β и γ получим уравнение $(2\alpha - 1)^2 = 0$ и т. д.

Второе решение. Используем симметричность системы. Перемножив равенства, получим

$$\alpha\beta\gamma(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) = \frac{1}{64}.$$

По неравенству о среднем геометрическом и арифметическом $\alpha(1 - \alpha) \leq \frac{1}{4}$, причем равенство достигается только при

$\alpha = \frac{1}{2}$. Написав аналогичные неравенства для β и γ и перемножив все три, получаем

$$\alpha\beta\gamma(1 - \alpha)(1 - \beta)(1 - \gamma) \leq \frac{1}{64},$$

а так как на самом деле имеет место равенство, то получаем $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$, что и требовалось доказать.

11 класс

146. Ответ. $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{2\pi}{3}$.

147. Допустим противное, т. е. для некоторого k возможно, что $b_1q^k = b_1q^a + b_1q^b + \dots + b_1q^v$, где $a < b < \dots < v$, $q \geq 2$. Тогда на b_1 можно сократить, так как $b_1 \neq 0$. Если $k > v$, то равенство невозможно, так как

$$q^a + \dots + q^v \leq 1 + q + \dots + q^v = \frac{q^{v+1} - 1}{q - 1} \leq q^{v+1} - 1 < q^{v+1} \leq q^k.$$

При $k \leq v$ равенство также невозможно, поскольку в сумме есть, кроме q^v , и другие положительные слагаемые:

$$q^a + \dots + q^v > q^v \geq q^k.$$

Во всех случаях мы приходим к противоречию.

148. Пусть $SABCD$ — данная пирамида, SO — ее высота (рис. 87). Точка O — точка пересечения диагоналей ромба — равноудалена от его сторон, поэтому из теоремы о трех перпендикулярах двугранные углы с ребрами AB , BC , CD и DA равны между собой. Пусть они равны α . Тогда для лю-

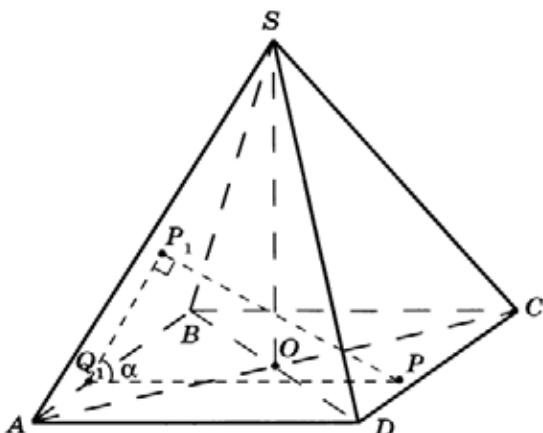


Рис. 87

бой точки P на основании пирамиды $PP_1 = PQ_1 \sin \alpha$, где PP_1 — расстояние от P до грани SAB , PQ_1 — расстояние от P до ребра AB . Аналогично PP_2 , PP_3 , PP_4 — расстояния до остальных трех боковых граней (на рисунке не показаны), PQ_2 , PQ_3 , PQ_4 — расстояния до ребер BC , CD и DA соответственно (на рисунке также не показаны). Утверждение задачи следует из того, что для ромба $PQ_1 + PQ_3 = PQ_2 + PQ_4 = 2r$, r — радиус окружности, вписанной в ромб.

Замечание. Данную четырехугольную пирамиду можно рассматривать как пересечение двух треугольных призм, ортогональные сечения которых — равные равнобедренные треугольники. Утверждение задачи тогда сразу следует из того, что для любой точки на основании равнобедренного треугольника сумма расстояний до боковых сторон одинакова.

149. Ответ. Существует единственное разбиение — это разбиение на четные и нечетные числа.

Пусть для определенности число 1 попало в первое подмножество, тогда числа $102 = 101 + 1$ и $104 = 103 + 1$ попадут во второе подмножество, так как числа 101 и 103 простые и больше 100. Но тогда число $3 = 104 - 101$ обязано попасть в первое подмножество, а $106 = 103 + 3$ — во второе. Действуя таким образом, мы получим, что все нечетные числа будут в первом подмножестве, а четные, большие 100, — во втором. Так как числа 103, 105, ..., 201 лежат в первом подмножестве, числа $103 - 101 = 2$, $105 - 101 = 4$, ..., $201 - 101 = 100$ обязаны лежать во втором подмножестве. Таким образом, мы получили, что искомое разбиение — это разбиение на четные и нечетные числа.

150. Ответ. 184 756.

В каждом протоколе допишем в конце голы, которые забила бы проигравшая команда, чтобы сделать счет $10 : 10$. Назовем это протоколом $10 : 10$. Легко понять, что разным исход-

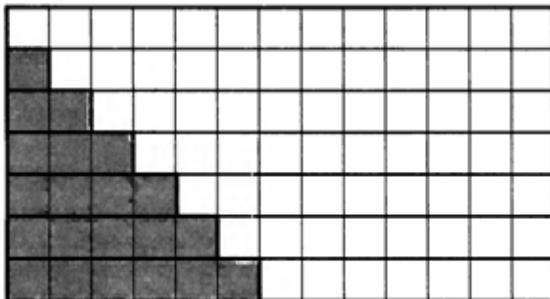
ным протоколам соответствуют разные протоколы $10 : 10$ и каждый протокол $10 : 10$ можно так получить (просто уберем из него все мячи, забитые проигравшей командой после того, как другая забила 10 голов). Число же протоколов $10 : 10$ равно $C_{20}^{10} = \frac{20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 11}{10 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 1} = 184\,756$, так как это просто число способов выбрать 10 мячей, забитых одной командой, из всех 20 мячей, забитых по порядку в матче.

1999–2000

6 класс

151. Ответ. $2222 - 999 + 11 - 0 = 1234$.

152. Ответ. Один из вариантов см. на рисунке 88.



157. Произведение чисел нечетно, следовательно, все пять чисел нечетны, и их сумма также должна быть нечетной.

158. Нетрудно доказать, что $\triangle ABK = \triangle CDM$ (рис. 89), откуда следует, что $\angle BAK = \angle DCM$, $\angle BAP = \angle DCN$. Аналогично $\triangle BAM = \triangle DCK$, откуда $\angle MBA = \angle KDC$. Значит, $\angle PBA = \angle NDC$.

159. Занумеруем монеты: 1, 2, ..., 7. 1-е взвешивание: 1, 2, 3 \vee 4, 5, 6.

а) В случае равенства среди монет 1, 2, 3 и 4, 5, 6 по одной фальшивой монете, а монета 7 настоящая. 2-е взвешивание: 1 \vee 2. При равенстве монеты 1, 2, 7 настоящие. Если $1 > 2$, то монеты 1, 3, 7 настоящие.

б) Если 1, 2, 3 $>$ 4, 5, 6, то монеты 1, 2, 3 настоящие.

160. С помощью трех уголков можно замостить изображенную на рисунке 90, а фигуру с одним вырезанным и одним пририсованным к прямоугольнику 5×3 квадратом 1×1 . А с помощью таких фигур легко замостить полосу шириной 5 (рис. 90, б). Можно, конечно, сразу получить замощение полосы (рис. 90, в).

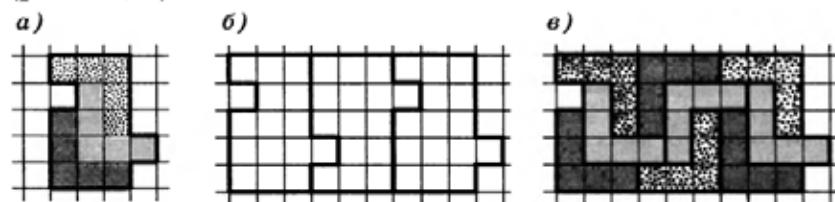


Рис. 90

8 класс

161. Ответ. 70.

Первое решение. Склейм все бревна в одно 100-метровое бревно.

Чтобы его разделить на 100 частей, нужно сделать 99 распилов, из которых 29 уже было сделано.

Второе решение. Если было m трехметровых и n четырехметровых бревен, то $m + n = 30$, $3m + 4n = 100$, откуда $m = 20$, $n = 10$. Поэтому нужно сделать $20 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 70$ распилов.

162. Ответ. Нужно исключить три числа, например 3, 7 и 11.

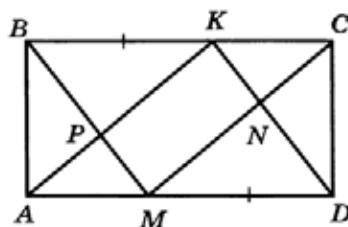


Рис. 89

Подойдут группы, произведение чисел в которых равно 1440, например $\{4, 5, 8, 9\}$ и $\{2, 6, 10, 12\}$. Очевидно, что числа 7 и 11 должны быть исключены. Произведение остальных чисел есть $2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5^2$, поэтому еще необходимо исключить число 3 или 12 (так как в произведение число 3 входит в нечетной степени).

163. Центр вписанной окружности — точка пересечения биссектрис треугольника, поэтому диагональ AA_1 (рис. 91) параллелограмма $AB_1A_1C_1$ (A_1C_1 и A_1B_1 — средние линии треугольника ABC) является биссектрисой его угла A_1 . Значит, $AB_1A_1C_1$ — ромб. Но тогда $\frac{1}{2}AB = AC_1 = AB_1 = \frac{1}{2}AC$, т. е. $AB = AC$. Аналогично $BC = AC$.

164. Утверждение задачи следует из тождества

$$(m^2 + 2n^2)(a^2 + 2b^2) = m^2a^2 + 2m^2b^2 + 2n^2a^2 + 4n^2b^2 = \\ = (ma - 2nb)^2 + 2(mb + na)^2.$$

165. Ответ. Не мог.

Участники, занявшие места с 1-го по 18-е, набрали по крайней мере 10 очков каждый, т. е. всего лучшие 19 участников набрали не менее $9,5 + 10 \cdot 18 = 189,5$ очка. В то же время всего в турнире разыгрывалось $(20 \cdot 19) : 2 = 190$ очков, т. е. последний участник набрал не более 0,5 очка. Если у него 0,5 очка, то распределение очков таково: 1—18-й — по 10, 19-й — 9,5, 20-й — 0,5. Если же 0 очков, то: 1-й — 10,5, 2—18-й — по 10, 19-й — 9,5, 20-й — 0.

В любом случае первого от второго отделяет не более 0,5 очка.

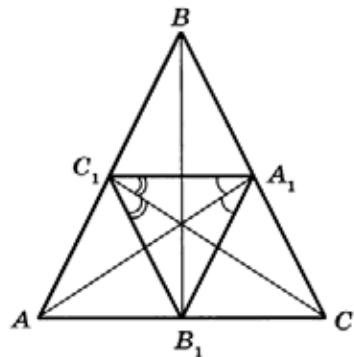


Рис. 91

9 класс

166. Если $a^2 - b^2 \neq 0$, то данное уравнение квадратное с дискриминантом $\frac{1}{4}D = (a^3 - b^3)^2 - (a^2 - b^2)(a^4 - b^4) = a^2b^4 - 2a^3b^3 + a^4b^2 = a^2b^2(a - b)^2 \geq 0$.

Если $a^2 - b^2 = 0$, то уравнение имеет корень $x = 0$.

167. Ответ. 7332, 7333, 7334.

Сумма $S = (n - 1) + n + (n + 1) = 3n$ делится на 3, поэтому $S = \overline{a_1 \dots a_k} 1999$, где $a_1 + \dots + a_k$ дает остаток 2 при делении на 3. Значит, $S_{\min} = 21\ 999$.

168. Пусть BB_1 — высота треугольника ABC и $BP = PQ = QB_1$ (рис. 92).

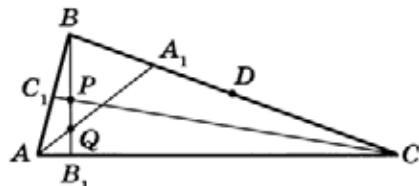


Рис. 92

a) CC_1 — биссектриса, тогда $BC : B_1C = BP : B_1P = 1 : 2$, т. е. $BC < B_1C$, что невозможно, так как BC — гипotenуза треугольника BB_1C .

б) CC_1 — медиана, т. е. C_1 — середина стороны AB , и, значит, точка P лежит ниже средней линии C_1D треугольника ABC . Но тогда $BP > \frac{1}{2}BB_1$ — противоречие.

169. Имеем

$$\begin{aligned} 2(a^8 + b^8 + c^8) &= (a^4 + b^4 + c^4)^2 \Leftrightarrow a^8 + b^8 + c^8 - 2a^4b^4 - 2a^4c^4 - \\ &- 2b^4c^4 = 0 \Leftrightarrow (a^4 + b^4 - c^4)^2 - 4a^4b^4 = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - c^4)(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - c^4) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow [(a^2 - b^2)^2 - c^4] \cdot [(a^2 + b^2)^2 - c^4] = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a^2 - b^2 - c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + b^2 + c^2) = 0. \end{aligned}$$

Последняя скобка положительна, а равенство нулю любой из трех первых дает искомое утверждение.

170. Разобьем круг на 999 равных секторов с углом $\frac{360^\circ}{999}$.

Тогда в одном из секторов не менее трех точек (точку, лежащую на границе двух секторов, считаем принадлежащей одному из них). Рассмотрим этот сектор и три точки, попавшие в него. Треугольник, образованный этими точками, имеет площадь, меньшую площади сектора: $\frac{1}{999} < 0,0011$.

Тем самым доказано существование треугольника с площадью, меньшей 0,0011.



10 класс

171. Ответ. $b = c = 1$.

По теореме Виета $x_1x_2x_3x_4 = cb \Rightarrow bc = 1$. Но $b^2 - c \geq 0$ и $c^2 - b \geq 0 \Rightarrow b^2 \geq \frac{1}{b}$, $\frac{1}{b^2} \geq b$, т. е. $b \geq 1$ и $\frac{1}{b} \geq 1$, откуда $b = 1$.

172. Ответ. 6 часов.

По прошествии 6 часов минутная стрелка находится в исходном положении, а часовая поворачивается на 180° .

173. Ответ. 49 999.

Из условия следует: $n = \overline{a \dots bc9 \dots 9}$, $n+1 = \overline{a \dots b(c+1)0 \dots 0}$, т. е. $(p+9k) : 5$ и $(p+1) : 5$, где

$p = a + \dots + b + c$. Так как $(p+1) \vdots 5$, то $p = 5n + 4$. Тогда $p + 9k = (5n + 4) + (10k - k) \vdots 5$, т. е. $(k-4) \vdots 5$, т. е. $p_{\min} = k_{\min} = 4$.

174. Пусть r — радиусы указанных в условии окружностей.

Тогда (рис. 93) $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{CDA} = \frac{1}{2} r(AB + BC + CA) + \frac{1}{2} r(CD + DA + AC) = \frac{1}{2} rP + rAC$, где S и P — площадь и периметр четырехугольника $ABCD$. Аналогично $S_{ABCD} = S_{BCD} + S_{DAB} = \frac{1}{2} r \cdot P + r \cdot BD$,

откуда следует: $AC = BD$.

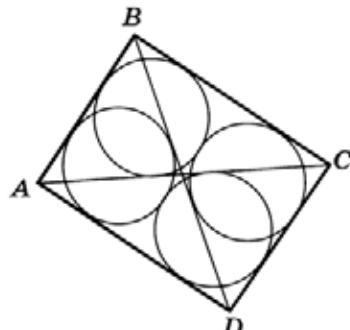


Рис. 93

175. Данные 9 точек лежат на четырех прямых параллельных a , значит, на одной из них — прямой c — по крайней мере 3 точки. Но никакие 2 из этих 3 точек не могут оказаться на одной прямой, параллельной b , так как $b \not\parallel a$. Значит, все три прямые, параллельные b , пересекают c . Это означает, что они лежат в одной плоскости.

▼ 11 класс

176. Ответ. 1976.

Очевидно, искомое N — четырехзначное число $N = 1000a + 100b + 10c + d \Rightarrow 1001a + 101b + 11c + 2d = 1999$, где $1 \leq a \leq 9$, $0 \leq b, c, d \leq 9$. Тогда $a = 1 \Rightarrow 101b + 11c + 2d = 998 \Rightarrow b = 9 \Rightarrow 11c + 2d = 89 \Rightarrow c = 8$, $2d = 1$, что невозможно, либо $c = 7$, $2d = 12$, $d = 6$.

177. Ответ. Система несовместна.

Перемножив равенства $z = -x - y$ и $\frac{1}{z} = -\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$, получим

$1 = \frac{(x+y)^2}{xy} \Rightarrow x^2 + xy + y^2 = 0$. Здесь $D = -3y^2 \leq 0$, поэтому

уравнение может иметь решение только при $y = 0$, но из второго уравнения системы $y \neq 0$.

178. Перемножив тождества $\sin 5x + \sin 7x = 2 \sin 6x \cos x$ и $\sin 7x - \sin 5x = 2 \sin x \cos 6x$, получим $\sin 2x \cdot \sin 12x = 2 \sin x \cos x \cdot 2 \sin 6x \cdot \cos 6x = \sin^2 7x - \sin^2 5x$, если $\sin 2x \neq 0 \Rightarrow \sin 12x$ — рационально; если $\sin 2x = 0$ (этот случай необходимо разобрать отдельно: $0 \cdot \sqrt{2} = 0$ — рационально!), то тогда $\sin 6x = 0$ ($\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha \Rightarrow \Rightarrow \sin 12x = 0$).

179. Пусть H , O , M соответственно точки пересечения высот, биссектрис и медиан треугольника ABC (рис. 94) и $\angle ABC = \alpha$. Тогда $\angle AHC = \pi - \alpha$ (углы с перпендикулярными сторонами) и $\angle AOC = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ ($\angle AOC = \pi - \angle OAC - \angle OCA = \pi - \frac{1}{2}\angle BAC - \frac{1}{2}\angle BCA = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \alpha)$), значит, $\alpha = \frac{\pi}{3}$, так как $\angle AHC = \angle AOC$ (вписанные, опирающиеся на одну дугу AC). Отсюда $\angle AMC = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, т. е. $\angle A_1MC_1 + \angle A_1BC_1 = \pi$, и, значит, A_1MC_1B — вписанный четырехугольник. Тогда по теореме о секущих $CC_1 \cdot CM = CB \cdot CA_1$, т. е. $m \cdot \frac{2}{3}m = a \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow CC_2 = CB \frac{\sqrt{3}}{2}$. Опустим из точки C перпендикуляр CC_2 на AB . Тогда $CC_2 = CB \frac{\sqrt{3}}{2}$ ($\angle CBC_2 = \frac{\pi}{3}$), т. е. $CC_2 = CC_1$. Но CC_1 — наклонная $\Rightarrow CC_1 > CC_2$, если $C_1 \neq C_2$. Значит, медиана CC_2 является и высотой $\Rightarrow BC = AC \Rightarrow$ треугольник ABC — равносторонний ($\angle B = \frac{\pi}{3}$).

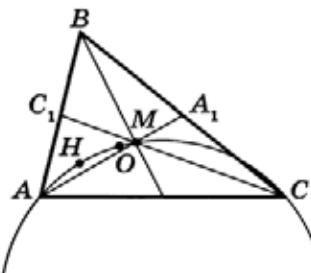


Рис. 94

180. Ответ. $p = 11$, $q = 7$.

Данная пара чисел удовлетворяет ответу. Для любой другой пары $p > 11$, откуда $q \geq 7$ и $p \geq 3$. Поэтому $p = 3k + 1$ или $p = 3k + 2$ и остаток от деления 2^p на 7 равен 2 (при $p = 3k + 1$) или 4 (при $p = 3k + 2$). А q^2 при делении на 7 дает в остатке 1, 2 или 4, поэтому $q^2 + 1999$ при делении на 7 дает в остатке 5, 6 или 1, т. е. равенство $2^p = q^2 + 1999$ при $q \neq 7$ невозможно.

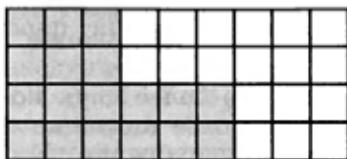
2000–2001

6 класс

181. Ответ. Например, $2000 = (1111 - 111) \cdot (1 + 1)$.

182. Ответ. См. рисунки 95, а и 95, б.

а)



б)

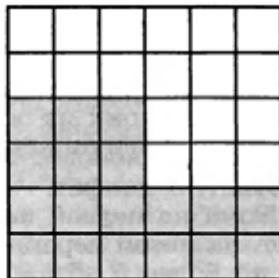


Рис. 95

183. Ответ. Можно.

Если при взвешивании двух монет — по одной на каждой чашке весов — устанавливается равновесие, то обе монеты настоящие, в противном случае по крайней мере одна из них фальшивая. Значит, решение задачи таково: при первом взвешивании на каждую чашку весов кладем по одной монете. В случае равенства мы нашли сразу две настоящие монеты. Если же чашки не уравновешены, то откладываем эти монеты в сторону и взвешиваем третью и четвертую монеты. В случае равенства мы вновь нашли две настоящие монеты. Если же и среди этих монет есть фальшивая, то оставшаяся пятая монета настоящая.

184. Ответ. Не могло.

Предположим, что такое возможно. Рассмотрим любого ученика. В первое свое дежурство он отдежурил с двумя одноклассниками. Во второе — с двумя другими и т. д. После девятого его дежурства останется ровно один одноклассник, с которым он не отдежурил. Полученное противоречие завершает доказательство.

185. Ответ. 10 000 000 000 000 002 980.

Если число делится на 20, то оно оканчивается на 00, 20, 40, 60 или 80. Из двух чисел, имеющих одинаковое число знаков, меньше то, у которого в старшем разряде стоит меньшая цифра. Поэтому наше число должно начинаться с 1. И наоборот, в младших разрядах должны стоять большие цифры. Поэтому наше число должно оканчиваться на 80. Перед цифрой 8 должна идти цифра 9. А перед цифрой 9 наибольшая возможная цифра равна $20 - 8 - 9 - 1 = 2$. Остальные цифры — нули, откуда и получается ответ.



7 класс

186. Ответ. Например, $2000 = (9 : 9 + 999) \cdot (9 + 9) : 9$.

187. Ответ. Можно.

Для того чтобы разделить 13 пирожных между 6 ребятами, достаточно взять 3 пирожных и каждое из них разрезать на две равные части, затем взять 4 пирожных и каждое разрезать на три равные части. Таким образом, у нас получится 6 половинок, 12 третей и 6 целых пирожных. Тогда мы можем дать каждому из ребят по одному целому, одной половинке и две трети пирожных, и все ребята получат поровну.

188. Ответ. 8 конфет.

Если Рома на первой перемене съел не более двух конфет, значит, на пятой перемене он съел не более шести конфет и всего не более $5 \cdot 6 = 30$ конфет — противоречие. Если на первой перемене он съел не менее четырех конфет, то на второй — не менее пяти, на третьей — шести, на четвертой — семи, а на пятой — не менее 12. Но тогда всего он съел не менее $4 + 5 + 6 + 7 + 12 = 34$ конфет — противоречие.

Отсюда следует, что на первой перемене Рома мог съесть только 3 конфеты. Тогда на пятой перемене он съел 9 конфет. Предположим, что на четвертой перемене он съел не более семи конфет, тогда на третьей он съел не более шести, на второй — не более пяти конфет. И всего получается не более $3 + 5 + 6 + 7 + 9 = 30$ конфет.

Таким образом, на четвертой перемене он мог съесть только 8 конфет. Пример: 3, 5, 6, 8, 9 конфет — удовлетворяет условию.

189. Ответ. Площадь треугольника больше.

Пусть $4S$ — площадь квадрата (рис. 96). Тогда площадь каждого из треугольников ABE , ADF , BCF равна S , поэтому площадь треугольника ABF равна $2S$. Но треугольник AKB — часть треугольника ABE , поэтому его площадь меньше S , а это означает, что площадь треугольника AKF больше S . С другой стороны, площадь четырехугольника $KECF$ меньше S , так как он составляет часть треугольника BCF .

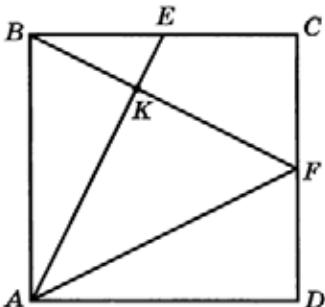


Рис. 96

190. Ответ. Выигрывает Петя.

Приведем выигрышную стратегию для Пети.

Первым ходом он делит число 2000 на 5. После чего на доске написано число 400. Далее на каждый ход Коли Петя отвечает таким же ходом, т. е. делит на то же число, что и Коля. Теперь заметим, что 400 — полный квадрат, а значит, после каждого хода Пети на доске вновь появляется квадрат некоторого натурального числа. Тогда после Колиного хода квадрата появиться не может, а значит, не может появиться и единица. Следовательно, единица появится после хода Пети.

▼ 8 класс

191. Ответ. Например, $2000 = 333 \cdot (3 + 3) + (3 + 3) : 3$.

192. Ответ. 2.

Заметим сначала, что на последнюю цифру произведения влияют только последние цифры сомножителей. Поэтому наше произведение имеет ту же последнюю цифру, что и произведение

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 9 \cdot 1 \cdot 2$. Рассмотрим произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$. Оно оканчивается на 6, т. е. наше произведение оканчивается на ту же цифру, что и произведение $6 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 6 \cdot 1 \cdot 2$. Но из того, что $6 \cdot 6$ оканчивается на 6 и $6 \cdot 1 \cdot 2 = 12$, следует, что наше произведение оканчивается на 2.

193. Ответ. Можно.

Вырежем из квадрата $ABCD$ прямоугольник $KLMN$, как показано на рисунке 97 (сторона KL параллельна диагонали AC , а сторона $NK = 1$). Покажем, что $MN > 6$. В прямогольном треугольнике ANK

катет $AN = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит,

$$ND = 5 - AN = 5 - \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \text{А в тре-}$$

угольнике NMD гипотенуза $MN = \sqrt{2}ND = 5\sqrt{2} - 1$. Покажем, что $5\sqrt{2} - 1 > 6$. Так как $50 > 49$, то $5\sqrt{2} > 7$, из чего и следует доказываемое неравенство.

194. Ответ. Не существует.

Пусть $ABCDE$ — выпуклый пятиугольник и P — точка пересечения диагоналей AC и BE (рис. 98). Тогда по неравенству треугольника $AP + PE > AE$ и $BP + PC > BC$.

Сложив эти неравенства, получим $AC + BE > AE + BC$. Аналогично $BD + CA > BA + CD$, $CE + DB > CB + DE$, $DA + EC > DC + EA$, $EB + AD > AB + ED$.

Сложив неравенства, получим $2(AC + BD + CE + DA + EB) > 2(AB + BC + CD + DE + EA)$. С другой стороны, если бы указанный в условии пятиугольник существовал, то у него сумма

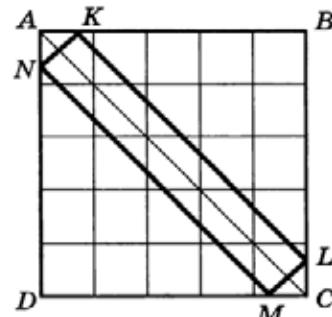


Рис. 97

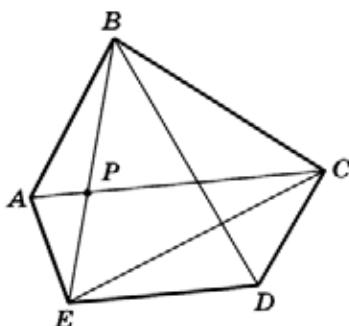


Рис. 98

диагоналей не превосходила бы сумму его сторон — противоречие.

195. Ответ. Выигрывает второй игрок.

Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Разобьем все клетки доски (кроме начальной) на пары, как показано на рисунке 99. На каждый ход первого в одну из клеток некоторой пары второй ходит в другую клетку той же пары. Таким образом, у второго игрока всегда есть ответный ход. Значит, второй игрок выигрывает.

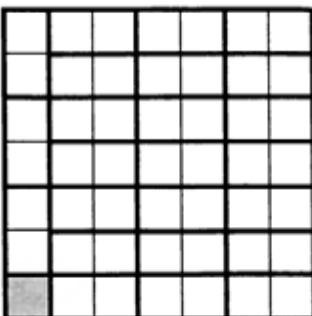


Рис. 99

9 класс

196. Пусть x_1 и x_2 — корни данного трехчлена. Тогда из теоремы Виета $a + b + 1 = -(x_1 + x_2) + x_1 \cdot x_2 + 1 = = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$. Из условия следует, что каждая скобка не равна 1, -1 или 0, т. е. число $a + b + 1$ составное.

197. Докажем, что при $x, y > 0$ выполняется неравенство $\frac{x^2}{y} \geq 4(x - y)$. Действительно, домножим обе части неравенства на y : $x^2 \geq 4(xy - y^2)$, или, что то же, $(x - 2y)^2 \geq 0$. Теперь, сложив неравенство $\frac{x^2}{y} \geq 4(x - y)$ с неравенством $\frac{y^2}{z} \geq 4(y - z)$, мы получим требуемое.

198. Ответ. 4 полицейских.

Рассмотрим угловой перекресток A . До него полицейский может добраться, если он находится на одном из 6 перекрестков, примыкающих к этому углу (рис. 100, а). Аналогичные рассуждения для трех оставшихся углов показывают, что для выполнения условия задачи необходимо наличие по крайней мере четырех полицейских. Осталось только привести пример расстановки четырех полицейских (рис. 100, б).

199. Ответ. $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ либо $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = 30^\circ$, $\angle C = 90^\circ$.

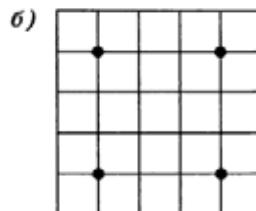
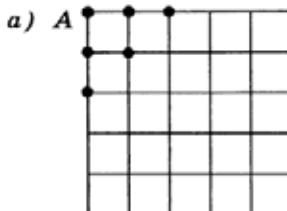


Рис. 100

Пусть $\angle CAL = \angle ABH = \angle BCM = \alpha$, тогда $\angle BAC = 2\alpha$. Если угол при вершине A в $\triangle ABC$ тупой (рис. 101, а), то точка H лежит на продолжении AC за точку A , и значит, $2\alpha = \alpha + 90^\circ$, откуда $\alpha = 90^\circ$, что невозможно (α — острый). Кроме того, $\angle BAC \neq 90^\circ$ ($\alpha > 0$). Значит, угол BAC острый, и тогда из $\triangle ABH$ (рис. 101, б) получаем $\alpha + 2\alpha = 90^\circ$, откуда $\alpha = 30^\circ$. Верно и обратное: если в $\triangle ABC$ угол при вершине A равен 60° , то для биссектрисы AL и высоты BH выполняется равенство $\angle CAL = \angle ABH$.

Таким образом, искомыми являются треугольники ABC с углом BAC , равным 60° , у которых медиана CM образует со стороной BC угол 30° . Множество точек, из которых данный отрезок BM виден под углом 30° и расположенных по одну сторону от прямой AB , — дуга окружности, которая может пересекать AC не более чем в двух точках. С другой стороны, таковыми на рисунке 101, в являются точки C , для которой $\triangle ABC$ равносторонний, и точка H , так как HM — средняя линия $\triangle ABC$, и, значит, $\angle BHM = \angle HBC = 30^\circ$.

200. Ответ.

Таких треугольников равные количества.

Пусть натуральные числа $k \geq n \geq m$ — длины сторон треугольника с периметром 1997. Тогда натуральные числа $k+1, n+1, m+1$ будут длиниами сторон треугольника периметра 2000. Такой треугольник существует, так как из неравенства $m+n > k$ следует неравенство $(m+1)+(n+1) > (k+1)$. Значит, каждому треугольнику периметра 1997 соответствует треугольник периметра 2000. Поэтому утверждение задачи будет доказано, если мы докажем, что и каждому треугольнику периметра 2000 соответствует треугольник периметра 1997. Пусть натуральные числа $K \geq N \geq M$ — длины сторон треугольника периметра 2000. Тогда, во-первых, все его стороны больше 1. Действительно, каждая сторона треугольника больше разности двух

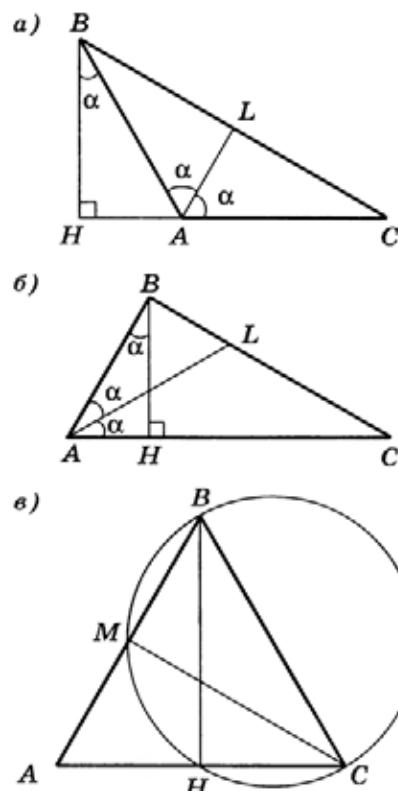


Рис. 101

других сторон, поэтому если какая-то сторона имеет длину 1, то две другие должны быть равны между собой, и в этом случае периметр треугольника — нечетное число. Во-вторых, $M + N > K$, откуда $(M - 1) + (N - 1) \geq (K - 1)$. Но в случае равенства мы получаем, что сумма $M + N + K = 2k + 1$ (нечетна), но она равна 2000.

Значит, сумма двух меньших чисел среди чисел $M - 1$, $N - 1$ и $K - 1$ больше третьего и эти числа являются длинами сторон некоторого треугольника.

10 класс

201. Ответ. Не существует.

Предположим, что требуемое x нашлось. Тогда $x + \sqrt{2} = a$ — рациональное число. Отсюда $x = a - \sqrt{2}$. Но тогда $x^3 + \sqrt{2} = (a - \sqrt{2})^3 + \sqrt{2} = a^3 - 3\sqrt{2}a^2 + 6a - 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = a^3 + 6a - (3a^2 + 1)\sqrt{2}$. Это число является рациональным только при $3a^2 + 1 = 0$ — противоречие.

202. Ответ. $(0; 0)$.

Предположим, что $a \neq b$ и x_0 — общий корень уравнений. Подставляя x_0 в уравнения и вычитая одно из другого, получаем $(a - b)x_0 + b^2 - a^2 = 0$, откуда $x_0 = a + b$. Следовательно, $(a + b)^2 + a(a + b) + b^2 = 0$ или $2a^2 + 3ab + 2b^2 = 2\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{8}b^2 = 0$, откуда $a = b = 0$ — противоречие.

Пусть теперь $a = b$. Тогда оба уравнения имеют вид $x^2 + ax + a^2 = 0$.

Дискриминант этого уравнения равен $-3a^2 \leq 0$, т. е. единственная возможность: $a = b = 0$. Очевидно, что эта пара удовлетворяет условию.

203. Ответ. $\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi n_1; \frac{\pi}{4} + 2\pi m_1; \frac{\pi}{4} + \pi k_1\right)$, $n_1, m_1, k_1 \in \mathbf{Z}$ и $\left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi n_2; \frac{5\pi}{4} + 2\pi m_2; \frac{3\pi}{4} + \pi k_2\right)$, $n_2, m_2, k_2 \in \mathbf{Z}$.

Очевидно, что $\operatorname{tg} z \neq 0$, так как в противном случае $\operatorname{ctg} z$ не определен.

Пусть $\operatorname{tg} z = a > 0$. Сложив оба уравнения, мы получим $\sin x + \sin y + \cos x + \cos y = \sqrt{2} (\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z)$. Заметим, что $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$. Аналогично $\sin y + \cos y \leq \sqrt{2}$. Причем равенства достигаются только при $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$ и $y = \frac{\pi}{4} + 2\pi m$, т. е. левая часть не больше $2\sqrt{2}$. Рассмотрим теперь правую часть. Она равна $\left(a + \frac{1}{a}\right)\sqrt{2} \geq 2\sqrt{2}$, при-

чем равенство достигается при $\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z = 1$, т. е. при $z = \frac{\pi}{4} + \pi k$. Таким образом, $(\sin x + \cos x) + (\sin y + \cos y) \leq 2\sqrt{2} \leq \sqrt{2}$ ($\operatorname{tg} z + \operatorname{ctg} z$). Уравнение имеет решения, только когда оба неравенства обращаются в равенства. Очевидно, что найденные x , y и z являются решением системы. Пусть теперь $\operatorname{tg} z < 0$. Аналогичным образом находим решения: $x = \frac{5\pi}{4} + 2\pi n$, $y = \frac{5\pi}{4} + 2\pi m$, $z = \frac{3\pi}{4} + \pi k$.

204. Ответ. 90° .

Точка E — середина дуги AB (рис. 102), поэтому $AE = BE$. Кроме того, вписанные углы CAB и EBD , опирающиеся на одну дугу, равны. Также по условию $AC = BD$. Значит, треугольники ACE и BDE равны, откуда $\angle CEA = \angle BED$. Но тогда $\angle DEC = \angle BEA = 90^\circ$, так как $\angle BEA = \angle BCA$.

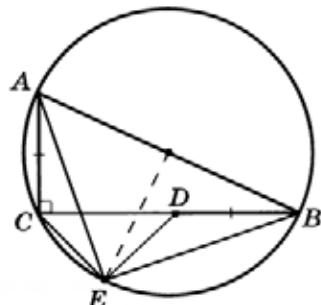


Рис. 102

205. Ответ. 1530 способов.

Посчитаем сначала число способов, которыми можно покрасить забор так, чтобы любые две соседние доски были покрашены в различные цвета. Первую доску можно покрасить любой из трех красок, вторую — одной из двух оставшихся, третью — одной из двух красок, отличающихся по цвету от второй доски, и т. д. То есть число способов равно $3 \cdot 2^9 = 1536$. В полученное число вошли и способы покраски забора в два цвета. Число таких способов равно 6 (первую доску можно покрасить тремя способами, а вторую — двумя, далее покраска определяется однозначно). Итого $1536 - 6 = 1530$ способов.

▼ 11 класс

206. Ответ. 125.

$2000 = 2^4 \cdot 5^3$. Заметим, что из четырех последовательных натуральных чисел не более одного делится на 5. Поэтому ровно одно из наших четырех чисел делится на 5. Значит, оно делится и на 125. Поэтому $n+3 \geq 125$, т. е. $n \geq 122$. Последовательно перебирая $n = 122, n = 123, n = 124, n = 125$, мы получаем, что только при $n = 125$ произведение делится на 2000.

207. Ответ. Не существует.

Пусть $\operatorname{tg} x + \sqrt{3} = n$ и $\operatorname{ctg} x + \sqrt{3} = m$, где n и m — целые числа. Тогда $\operatorname{tg} x = n - \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} x = m - \sqrt{3}$, следовательно, $(n - \sqrt{3})(m - \sqrt{3}) = 1$, откуда $(n+m)\sqrt{3} = nm + 2$. Число $\sqrt{3}$

иррационально, поэтому это равенство возможно лишь в случае $n + m = nm + 2 = 0$. Полученное равенство возможно только для иррациональных n и m ($n = \pm\sqrt{2}$, $m = \mp\sqrt{2}$). **Замечание.** Если в задаче заменить $\sqrt{3}$ на $\sqrt{2}$, то число x , удовлетворяющее условию задачи, существует.

208. Ответ. Один.

Первое решение. Пусть $P(x) = x^2 + px + q$ и $D = p^2 - 4q \geq 0$. Тогда уравнение примет вид $P(x) + P(x + \sqrt{D}) = x^2 + px + q + (x + \sqrt{D})^2 + p(x + \sqrt{D}) + q = 2x^2 + 2(p + \sqrt{D})x + 2q + D + p\sqrt{D} = 0$. Посчитаем четверть дискриминанта получившегося квадратного уравнения. Она равна $(p + \sqrt{D})^2 - 2(2q + D + p\sqrt{D}) = p^2 - 4q - D = 0$. То есть уравнение имеет ровно один корень.

Второе решение. Если $x_1 < x_2$ — корни квадратного трехчлена $P(x)$, то $x_2 - x_1 = \sqrt{D}$, откуда следует, что график $y = P(x + \sqrt{D})$ получается из графика трехчлена $y = P(x)$ сдвигом влево вдоль оси Ox на расстояние \sqrt{D} , равное расстоянию между точками пересечения графика $y = P(x)$ с осью Ox . Это означает, что графики трехчленов $y = P(x)$ и $y = P(x + \sqrt{D})$ пересекают ось Ox в общей точке с абсциссой $x = x_1$ и симметричны относительно прямой $x = x_1$. Поэтому график квадратного трехчлена $y = P(x) + P(x + \sqrt{D})$ пересекает ось Ox в точке с абсциссой $x = x_1$ и симметричен относительно прямой $x = x_1$. Значит, квадратный трехчлен $P(x) + P(x + \sqrt{D})$, во-первых, имеет корень $x = x_1$, во-вторых, не может иметь других корней, так как все его корни должны быть симметричны относительно точки $x = x_1$, и наличие других корней означало бы, что их не меньше трех.

209. Ответ. Не может.

Пусть $SABCD$ — данная пирамида (рис. 103). Предположим, что вершины прямых углов боковых граней пирамиды являются четырьмя различными точками. Без ограничения общности можно считать, что $\angle SAB = \angle SBC = \angle SCD = \angle SDA = \frac{\pi}{2}$. Тогда

$SB > SA$, $SC > SB$, $SD > SC$ и

$SA > SD$. Отсюда $SA > SA$ — противоречие. Значит, хотя бы одна из вершин основания пирамиды является вершиной прямых углов для двух боковых граней. Пусть, например, это вершина A , тогда ребро SA перпендикулярно двум пересекающимся прямым AB и AD основания пирамиды, следовательно, SA — высота пирамиды.

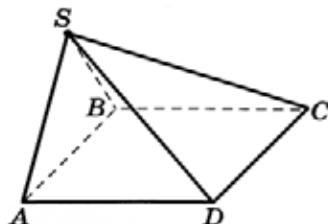


Рис. 103

210. Ответ. Верно.

Рассмотрим все треугольники с вершинами в данных точках и выберем из них треугольник наибольшей площади (один из них, если таких треугольников несколько). Пусть это треугольник ABC (рис. 104). Проведем через его вершины прямые, параллельные его противоположным сторонам. Они образуют треугольник $A_1B_1C_1$, стороны которого вдвое больше соответствующих сторон треугольника ABC , поэтому его площадь меньше 4. Покажем, что все 2000 точек должны лежать внутри или на сторонах треугольника $A_1B_1C_1$. Действительно, пусть это не так и некоторая точка M лежит вне этого треугольника. Тогда точка M и одна из вершин треугольника $A_1B_1C_1$ лежат по разные стороны относительно одной из сторон этого треугольника. Пусть, например, точка M и вершина C_1 лежат по разные стороны относительно прямой A_1B_1 . Но тогда высота треугольника MAB , опущенная на сторону AB , больше высоты треугольника CAB , опущенной на ту же сторону. Значит, треугольник ABC не наибольшей площади — противоречие.

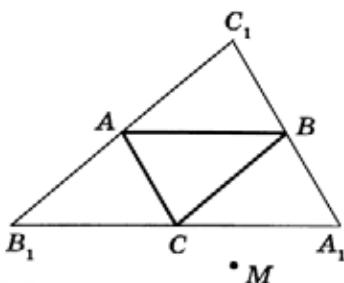


Рис. 104

2001–2002**▼ 6 класс**

211. Например, скобки можно расставить так:

$$(7 - 6) - (5 - 4) - (3 - 2 - 1) = 0.$$

212. Ответ. $1991 + 1 + 9 = 2001$.

Из того, что числа $ABBA$ и $CDDA$ оканчиваются на одинаковую цифру, следует, что $A + B$ оканчивается на 0, т. е. $A + B = 10$, $ABBA + 10 = CDDA$. Заметим теперь, что первые цифры у чисел $ABBA$ и $CDDA$ различны, откуда следует, что был переход через тысячу. Но это возможно только в том случае, когда $B = 9$, откуда получаем $A = 1$, $C = 2$, $D = 0$.

213. Пример разрезания приведен на рисунке 105, а.

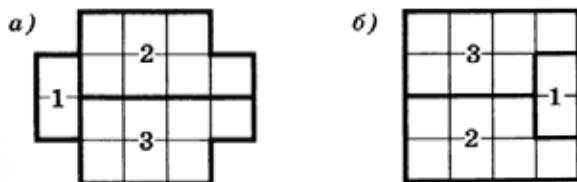


Рис. 105

214. Ответ. а) Можно; б) нельзя.

а) Пример раскраски приведен на рисунке 106, а.

а)

1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4
1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	4	3	4	3	4	3	4	3	4

б)

<i>a</i>	<i>b</i>	<i>v</i>	
<i>d</i>	<i>e</i>	<i>z</i>	
		<i>ж</i>	

Рис. 106

б) Если искомая раскраска существует, то клетки *a*, *b*, *v*, *z* (рис. 106, б) четырех разных цветов. Также разных цветов клетки *v*, *b*, *a*, *d*. Значит, клетки *d* и *z* одного цвета. Но тогда в фигуре *d*, *e*, *z*, *ж* две клетки одного цвета.

215. Ответ. Не мог.

Всего ученики 6Д класса решили $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$ задач. Значит, если бы Петя выступил так же, как остальные, то выполнялось бы равенство $24 = n \cdot x$, где n — число учеников 6Д класса, участвовавших в олимпиаде, x — число задач, решенных каждым из них. Но из условия задачи следует, что $n \geq 9$, значит, либо $n = 12$, $x = 2$, либо $n = 24$, $x = 1$. В первом случае Петя решил 3, во втором — 2 задачи.



7 класс

216. Например, 1, 3 и 6 кг. Действительно, $10 = 6 + 3 + 1$, $9 = 6 + 3$, $8 = 6 + 3 - 1$, $7 = 6 + 1$, $6 = 6$, $5 = 6 - 1$, $4 = 3 + 1$, $3 = 3$, $2 = 3 - 1$, $1 = 1$.

Те гири, веса которых берутся с минусом, ставятся на ту же чашку весов, что и взвешиваемый груз, те, что с плюсом, — на другую.

217. Пример разрезания приведен на рисунке 107.

218. Ответ. Не мог.

Предположим, что требуемая расстановка чисел существует. Тогда, так как суммы чисел, стоящих в соседних столбцах, отличаются на единицу,

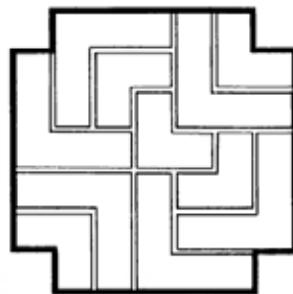


Рис. 107

цу, то в пяти столбцах сумма чисел четна, а в пяти других нечетна, т. е. сумма чисел во всей таблице нечетна. Однако $1 + 2 + \dots + 100 = 5050$ — четное число — противоречие.

219. Ответ. I — Л, II — П. На острове 1000 Л и 1000 П.

Ответы первого и второго различны, поэтому вариант П и П невозможен. Также невозможен и вариант Л и Л, так как числа 1001 и 1000 отличаются на 1, а ответы лжецов по поводу количества Л должны были либо совпадать, либо отличаться на 4. Вариант I — П, II — Л также невозможен, так как в этом случае на острове проживает 1003 П, и, значит, Л не мог дать ответ 999 П. Остается вариант I — Л, II — П. Из ответа II получаем 1000 Л и 1000 П, что соответствует ответу I.

220. Ответ. 101010101.

Заметим, что при указанных операциях на нечетных местах всегда будут стоять нечетные цифры; а на четных — четные, так как при вычитании 1 четность чисел меняется на противоположную, а перестановка их местами приводит к исходной четности. Значит, на всех нечетных позициях стоит цифра, не меньшая 1, и потому наименьшим может быть только число $N = 101010101$. Осталось проверить, что число N может быть получено указанными операциями. Для этого вначале за 8 операций превратим в 01 две последние цифры, затем за 6 операций — в 01 две предыдущие цифры (пару 67), за 4 операции — пару 45 в 01, наконец, за 2 операции — пару 23 в 01.



8 класс

221. Возьмем $a = n^2 + 1$. Тогда $(n^2 + 1)(n + 1) - (n^2 + n + 1) = n^3$.

222. Ответ. 13, 13 и 22 года.

Из условия получаем $\overline{aa} + \overline{2bc} = \overline{d}(2\overline{d})$, откуда следует, что a — четная цифра, т. е. $a = 2$ (теоретически возможно и $a \geq 4$, но тогда $d \geq 6$ и $2d$ уже не является цифрой). Значит, $d = 3$ или 4. Первое невозможно, так как тогда возраст каждого из близнецов — $\frac{1}{2}(36 - 22) = 7$ лет, и они не могли участвовать в олимпиаде, во втором случае их возраст $\frac{1}{2}(48 - 22) = 13$ лет.

223. Перенесем все слагаемые в левую часть: $a^2b + b^2c + c^2a - b^2a - a^2c - c^2b = ab(a - b) - c(a^2 - b^2) + c^2(a - b) = (a - b)(ab - ac - bc + c^2) = (a - b)(b - c)(a - c) > 0$, так как выражение в каждой из скобок положительно.

224. Пусть AD и CE — высоты треугольника ABC , O — точка их пересечения (рис. 108). Из того, что в пря-

моугольном треугольнике AOE угол AOE равен 60° , следует, что $OE = \frac{1}{2} AO$, т. е. $OE = OD$.

Значит, прямоугольные треугольники OEB и ODB равны (BO — общая гипотенуза). Тогда $BE = BD$, откуда следует, что $\triangle ABD \cong \triangle CBE$ ($\angle ABC$ — общий). Отсюда $AB = BC$. С другой стороны, $\angle ABC = 90^\circ - \angle BAD = \angle AOE = 60^\circ$. Значит, треугольник ABC равносторонний.

225. Ответ. 1, 3 и 9.

Поскольку N состоит из 6 различных цифр, то в его записи найдутся 2 цифры, отличающиеся на 1. Пусть это цифры a и b ($a = b + 1$). Теперь рассмотрим число x , полученное из N , и такое, что оно оканчивается на \bar{ab} . Пусть y — число, полученное из x перестановкой двух последних цифр (т. е. оно оканчивается на \bar{ba}). Так как x , и y делятся на M , то и их разность, равная 9, также делится на M , т. е. M может принимать значения 1, 3 и 9. На 1 делится любое натуральное число, а из признака делимости на 3 (9) следует, что если число делится на 3 (9), то и любое число, полученное из него перестановкой цифр, также делится на 3 (9).

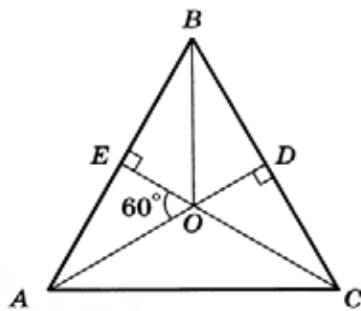


Рис. 108

9 класс

226. Рассмотрим значение трехчлена в точке $x_0 = 2$. Тогда $x_0^2 + px_0 + q = 4 + 2p + q = 4 + 2\left(p + \frac{q}{2}\right) = 4006$, т. е. графики всех трехчленов проходят через точку $(2; 4006)$.

227. Разобьем стаканы на пары и уравняем объемы воды, налитой в стаканы каждой пары. После чего выберем по одному стакану из каждой пары. Если мы сумеем уравнять в них объемы воды, то, проделав аналогичные операции с оставшимися 4 стаканами, мы добьемся того, что во всех стаканах будет поровну воды. Возьмем 4 выбранных стакана и разобьем их на пары. После чего уравняем объемы воды, налитой в стаканы каждой пары. Выберем по одному стакану из каждой пары и уравняем в них объемы воды. Проделав то же самое с оставшимися двумя стаканами, мы получим требуемое — 4 стакана, в которых налито одинаковое количество воды.

228. По свойству биссектрисы для треугольников ABD и CBD можно записать: $BE : EA = BD : DA = BD : DC =$

$= BF : FC$ (рис. 109). Значит, по обратной теореме Фалеса $EF \parallel AC$, откуда $EM : MF = AD : DC = 1 : 1$, т. е. DM — медиана треугольника EDF . Но $\angle EDF = \angle EDB + \angle FDB = \frac{1}{2} \angle ADB + \frac{1}{2} \angle CDB = \frac{1}{2} (\angle ADB + \angle CDB) = 90^\circ$. Таким образом, $DM = \frac{1}{2} EF$ по свойству медианы прямоугольного треугольника.

229. Ответ. 1.

Из тождества $n! \cdot (n+2) = n! \cdot (n+1+1) = (n+1)! + n!$ следует, что искомое выражение $S = 2! + 1! - 3! - 2! + 4! + 3! - 5! - 4! + \dots + 2000! + 1999! - 2001! - 2000! + 2001! = 1$.

230. Ответ. Выигрывает первый.

Опишем стратегию первого игрока. Первым ходом он должен взять со стола 81 монету. Каждым следующим ходом если второй берет x монет, то первый должен взять $101 - x$ монет. Он всегда может это сделать, потому что если x — четное число от 2 до 100, то $(101 - x)$ — нечетное число от 1 до 99. Так как $2001 = 101 \cdot 19 + 81 + 1$, то через 19 таких «ответов» после хода первого на столе останется 1 монета и второй не сможет сделать ход, т. е. проиграет.

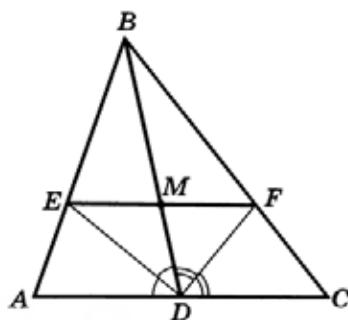


Рис. 109

▼ 10 класс

231. Предположим, что нашлись такие два числа x и y , что $x + y = 201$, а xy делится на 201. Так как $201 = 3 \cdot 67$, то одно из чисел, для определенности x , делится на 3, но тогда и $y = 201 - x$ делится на 3. Аналогично и x , и y делятся на 67, т. е. каждое из них не меньше $3 \cdot 67$, т. е. их сумма больше 201 — противоречие.

232. Для любой черной клетки, не лежащей в центре квадрата, и любой белой клетки существует симметричная им пара из черной и белой клеток. Сумма двух векторов, порожденных каждой из пар, равна нулю (рис. 110, а). А для центральной клетки (она черного цвета) все выходящие из нее векторы разбиваются на пары с нулевой суммой, так как все белые клетки разбиваются на пары клеток, сим-

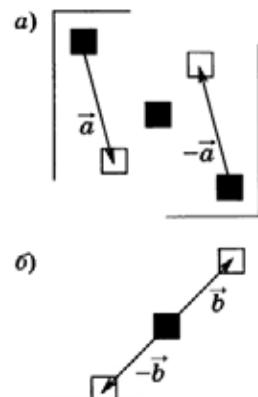


Рис. 110

метрических относительно центра квадрата (рис. 110, б).

233. Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей данного треугольника ABC (рис. 111), точки P и Q симметричны I и O относительно стороны AC .

Тогда из симметрии треугольников AIC и APC следует, что $\angle APC = \angle AIC = 180^\circ - \angle IAC - \angle ICA = 180^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC - \frac{1}{2} \angle BCA = 180^\circ - \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ABC) = 90^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC$.

С другой стороны, четырехугольник $ABCP$ вписанный, поэтому $\angle APC + \angle ABC = 180^\circ$. Значит, $90^\circ + \frac{1}{2} \angle ABC + \angle ABC = 180^\circ \Rightarrow \angle ABC = 60^\circ$.

Тогда $\angle AOC = 2\angle ABC$ (центральный угол) $= 120^\circ$. Значит, $\angle AQC = 120^\circ = 180^\circ - \angle ABC$. Это означает, что $Q \in S$.

234. Перемножив данные равенства, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin 6x &= ab \sin 2x \cos 4x, \text{ т. е. } \frac{1}{2} \sin(3 \cdot 2x) = \\ &= \frac{1}{2} (3 \sin 2x - 4 \sin^3 2x) = \frac{1}{2} \sin 2x (3 - 4 \sin^2 2x) = \\ &= \frac{1}{2} \sin 2x (1 + 2 \cos 4x) = ab \sin 2x \cos 4x. \end{aligned}$$

Теперь если $\sin 2x = 0$, то $\cos 4x = 1 \Rightarrow \sin 3x = b$ — рациональное число. Если же $\sin 2x \neq 0$, то $\frac{1}{2} + \cos 4x = ab \cos 4x \Rightarrow (ab - 1) \cos 4x = \frac{1}{2}$. Данное равенство возможно только при $ab - 1 \neq 0$, и тогда $\cos 4x = \frac{1}{2(ab - 1)} \Rightarrow \sin 3x = \frac{b}{2(ab - 1)}$ — рациональное число.

235. Занумеруем вершины 5000-угольника числами от 1 до 5000 по часовой стрелке. После чего разобьем вершины на 1000 пятерок следующим образом: в первую пятерку выберем вершины с номерами 1, 1001, 2001, 3001 и 4001, во вторую — с номерами 2, 1002, 2002, 3002 и 4002 и т. д. Заметим, что вершины каждой пятерки образуют правильный пятиугольник. Покажем, что в какую-то пятерку попали по крайней мере 3 покрашенные вершины. Действительно, если в каждой пятерке не более двух покрашенных вершин, то всего покрашено не более 2000 вершин. Значит, найдутся 3 вершины, попавшие в одну пятерку. Они лежат

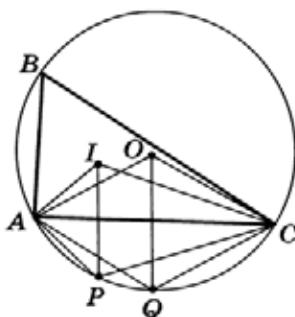


Рис. 111

в вершинах равнобедренного треугольника, так как в правильном пятиугольнике любые 3 вершины являются вершинами равнобедренного треугольника.

▼ 11 класс

236. Имеем

$$\left| \frac{\cos 2x + 3}{\cos x} \right| = \left| \frac{2\cos^2 x - 1 + 3}{\cos x} \right| = 2 \left| \cos x + \frac{1}{\cos x} \right| \geq 2 \cdot 2 = 4 \quad (\text{так как } \left| a + \frac{1}{a} \right| = |a| + \frac{1}{|a|} \geq 2 \sqrt{\frac{|a|}{|a|}} = 2).$$

237. Ответ. Два трехчлена: $x^2 - 34x + 64$ и $x^2 + 30x$.

Пусть x_1 и x_2 — целые корни трехчлена $x^2 + px + q$. Тогда $p = -(x_1 + x_2)$, $q = x_1 x_2$, откуда $30 = p + q = (x_1 - 1)(x_2 - 1) - 1$, т. е. $(x_1 - 1)(x_2 - 1) = 31$. Так как число 31 простое, оно может быть представлено в виде произведения двух целых чисел только следующим образом: $31 = 1 \cdot 31 = = (-1) \cdot (-31)$. В первом случае получаем, что корнями трехчлена являются числа 2 и 32 (трехчлен $x^2 - 34x + 64$), а во втором случае — числа 0 и -30 (трехчлен $x^2 + 30x$).

238. Ответ. I — 45° и 135° , II и III — все углы по 90° .

Пусть $A_1B_1C_1D_1$ — первая грань данного параллелепипеда $A_1B_1C_1D_1ABCD$, $A'B'C'D'$ — проекция грани $ABCD$ на плоскость $A_1B_1C_1$ (рис. 112, а). Тогда из условия следует, что параллелограммы $A'B'C'D'$ и $A_1B_1C_1D_1$ совпадают, значит, ребра AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 перпендикулярны плоскости $A_1B_1C_1$, и, следовательно, четыре другие грани — прямоугольники. Тогда площадь проекции пирамиды P на плоскость A_1ADD_1 есть сумма площадей этой грани и проекции грани A_1ABB_1 (рис. 112, б), т. е. $S_2 = AD \cdot AA_1 + AB \cos \phi \cdot AA_1$, где ϕ — угол между плоскостями граней A_1ABB_1 и A_1ADD_1 . Отсюда $AD + AB \cos \phi = 1,5AD$. Аналогично $AB + AD \cos \phi = 2AB$, т. е. $AB \cos \phi = \frac{1}{2}AD$,

$AD \cos \phi = AB$, откуда $\cos^2 \phi = \frac{1}{2}$, $\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\phi = 45^\circ$. Но ϕ — это угол D в грани $ABCD$.

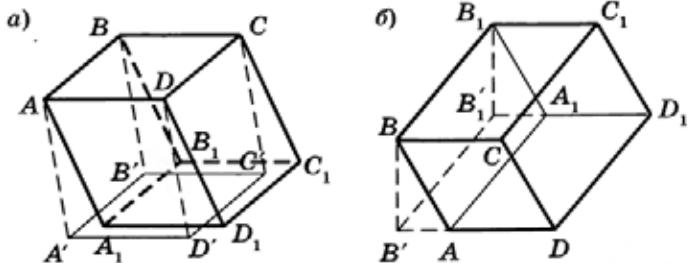


Рис. 112

239. Пусть A и B — проекции отмеченной точки K на координатные оси (рис. 113). Покажем, что касательная l к гиперболе параллельна AB .

Действительно, пусть $K(x_0, \frac{k}{x_0})$,

$A(x_0, 0)$, $B(0, \frac{k}{x_0})$ — координаты этих точек, тогда $\operatorname{tg} \angle BAO = \frac{k}{x_0^2}$.

С другой стороны, $\operatorname{tg} \angle KCO = -f'(x_0) = -\left(-\frac{k}{x_0^2}\right) = \frac{k}{x_0^2} = \operatorname{tg} \angle BAO$. Значит, $l \parallel AB$ и построение очевидно.

240. См. решение задачи 235.

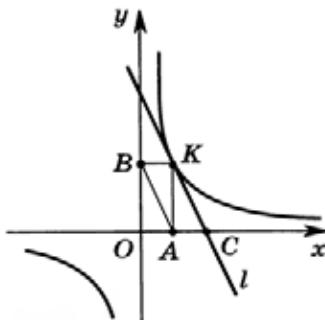


Рис. 113

2002–2003

6 класс

241. Ответ. Например, $2002 = 2222 - 222 + 2$ или $2002 = 333 \cdot (3 + 3) + 3 + 3 : 3$.

242. Ответ. Например, $12\ 012 = 2002 \cdot 6$.

243. На рисунке 114 отмечены комнаты, через которые стражи может осуществить обход замка.

244. Ответ. Пете 13 лет, Коле 6 лет, Ане 1 год.

Младшим меньше лет, чем детям в парах, в которые входит Петя. Значит, он старший, а Коля с Аней младшие. Коля старше Ани на 5 лет $= 19 - 14$, а вместе им 7 лет, значит, Коле 6 лет, а Ане 1 год.

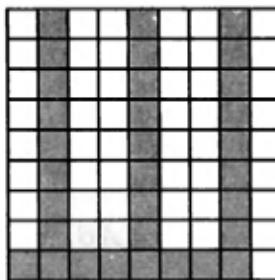


Рис. 114

245. Ответ. 1143.

Нетрудно убедиться, что число 1143 подходит ($1 = 1$, $2 = 1 + 1$, $3 = 3$, $4 = 4$, $5 = 1 + 4$, $6 = 1 + 1 + 4$, $7 = 4 + 3$, $8 = 1 + 4 + 3$, $9 = 1 + 1 + 4 + 3$). Покажем, что оно наименьшее. Трехзначное число не подходит, так как из сумм его цифр можно получить только 6 чисел: 3 — из одной цифры, 2 — из сумм пар цифр, 1 — из суммы всех цифр. Тем более не подходит одно- и двузначные числа. Искомое число не должно содержать в своей записи ну-

лей, так как для числа с нулем получаются такие же суммы, как для трехзначного без этого нуля, и не нужный нам 0. Поэтому искомое число не меньше 1111. Если число имеет вид 112*, то из того, что какая-то сумма должна равняться 9, следует, что это число либо 1125, либо 1126, либо 1127, либо 1129. Но тогда никакие подряд идущие цифры не дадут в сумме для первого числа 6, а для остальных — 5. Если число имеет вид 113*, то из того, что какая-то сумма должна равняться 9, следует, что это число либо 1134, либо 1135, либо 1136, либо 1139, тогда никакие подряд идущие цифры не дадут в сумме для первого числа 6, а для остальных — 5, т. е. искомое число не меньше 1141. Но из того, что какая-то сумма должна равняться 9, следует, что искомое число не меньше 1143, а оно нас устраивает.

7 класс

246. Ответ. Например, $2002 = 1000 + 100 + 400 + 500 + 2$.

247. Ответ. Например, $\frac{5}{10} + \frac{7}{2} + \frac{8}{4} + \frac{6}{3} + \frac{9}{1} = 17$.

248. Ответ. Не могли.

Предположим, что мы смогли получить на доске числа 2, 3, ..., 9, 10, 2002. Заметим, что после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, увеличивается на 2. Изначально она была равна 55, т. е. после каждой операции сумма чисел, написанных на доске, будет нечетной. Однако сумма $2 + 3 + \dots + 10 + 2002 = 2056$ четна — противоречие.

249. Ответ. Нетрудно убедиться, что раскраска на рисунке 115 требуемая.

250. Ответ. Не могло.

Занумеруем ели по порядку с 1 по 2002. Заметим, что вороны, сидевшие на елях с нечетными номерами, перелетят на ели с нечетными номерами. Соответственно вороны, сидевшие на елях с четными номерами, перелетят на ели с четными номерами. Рассмотрим ели с нечетными номерами. Покрасим их в два цвета.

В белый цвет покрасим 1, 5, 9, ..., 2001 ель (таких елей 501). В черный цвет покрасим 3, 7, 11, ..., 1999 елей (таких елей 500). Заметим, что ворона с белой ели перелетит на черную и наоборот. Однако черных елей 500, а белых — 501. Значит, по крайней мере на одну из белых елей не сядет ни одной вороньи.

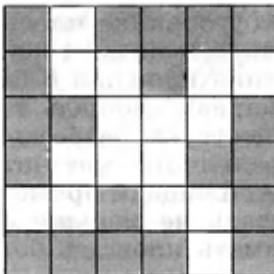


Рис. 115



8 класс

251. Если сумма трех целых чисел равна 9999, то либо они все нечетны (и тогда их произведение оканчивается на нечетную цифру), либо два из них четны, а одно нечетно (тогда их произведение делится на 4, а число, оканчивающееся на 02, на 4 не делится).

252. Ответ. Не может.

Пусть BH — высота, BL — биссектриса остроугольного треугольника ABC (рис. 116). По условию $BL = 2BH$, значит, $\angle BLH = 30^\circ$. Но тогда $\angle HBL = 60^\circ$, и, следовательно, $\angle ABL > 60^\circ$, а $\angle ABC = 2\angle ABL > 120^\circ$, т. е. треугольник ABC тупоугольный.

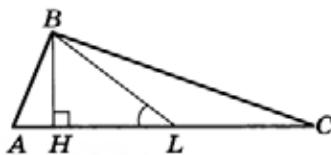


Рис. 116

253. Пример разрезания на 8 попарно различных клетчатых прямоугольников показан на рисунке 117.

Покажем, что мы не сможем разрезать квадрат 6×6 более чем на 8 попарно различных клетчатых прямоугольников. Предположим, что существует требуемое разрезание более чем на 8 прямоугольников. Рассмотрим все клетчатые прямоугольники площади не больше 6. Их всего 8. Есть по одному прямоугольнику площади 1, 2, 3, 5 (это прямоугольники 1×1 , 1×2 , 1×3 и 1×5). Есть два прямоугольника площади 4 (это прямоугольники 1×4 и 2×2). Также есть два прямоугольника площади 6 (это прямоугольники 1×6 и 2×3). Суммарная площадь этих прямоугольников равна 31. Если существует разрезание квадрата более чем на 8 попарно различных клетчатых прямоугольников, то 8 наименьших по площади прямоугольников будут иметь суммарную площадь не меньше 31. Следующий прямоугольник должен иметь площадь больше 6. Но тогда суммарная площадь будет больше 37, что больше 6^2 .

254. Ответ. Нельзя.

Пусть $a, b, c, d, e, f, g, h, k$ — искомая расстановка (рис. 118). Тогда из простоты сумм $a + b, b + c, \dots, a + d, \dots, f + k$ следует их нечетность (каждая сумма больше 2). Значит, в любой паре соседних клеток одно число четное, а другое нечетное. Но от 1

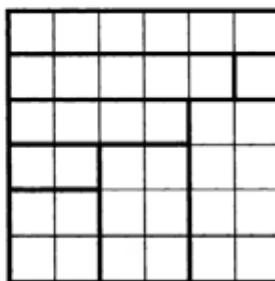


Рис. 117

a	b	c
d	e	f
g	h	k

Рис. 118

до 9 всего 4 четных числа, следовательно, четными являются числа b, d, f, h , т. е. вместе с центральной клеткой они образуют суммы $e + 2, e + 4, e + 6, e + 8$. Но из четырех последовательных нечетных чисел одно обязательно делится на 3, и простым числом, делящимся на 3, является только 3. Значит, $e = 1$. Но тогда сумма $e + 8 = 9$ не является простой.

255. Ответ. Выигрывает второй.

Предположим, что в какой-то момент игры только от одной или двух точек не вело ни одного отрезка. Тогда игрок, чей сейчас ход, в такой ситуации может выиграть одним ходом. Если от двух точек не вело ни одного отрезка, то он должен соединить их отрезком. Если только от одной точки не вело ни одного отрезка, то он должен провести отрезок от этой точки к какой-то другой. Таким образом, игрок, который сделает ход, после которого останется две или одна точка без отрезков, проигрывает. Игрок вынужден будет сделать такой проигрышный ход только в одном случае: перед его ходом есть 3 точки, из которых не ведет ни одного отрезка, а 8 остальных точек попарно соединены отрезками, т. е. к этому моменту сделано $\frac{7 \cdot 8}{2} = 28$ ходов. Это означает, что 28-й ход сделал второй игрок, т. е. проигрышный ход должен сделать первый игрок.

9 класс

256. Ответ. Например, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$.

Пусть вершина C этого треугольника лежит на оси Oy (рис. 119), тогда $OC = OA = OB = 2$, т. е. парабола проходит через точки $A(-2; 0)$, $B(2; 0)$, $C(0; -2)$. Парабола имеет уравнение

$$y = a(x - 2)(x + 2),$$

и из равенства $-2 = a \cdot (-2) \cdot 2$ находим a .

257. Ответ. Можно.

Раскрасим все клетки в шахматном порядке в белый и красный цвета, тогда все диагонали будут одноцветными. Затем перекрасим 11 любых белых клеток и 10 любых красных клеток в синий цвет. Полученная раскраска такова, что на одной диагонали не встретятся одновременно белые и красные клетки.

258. Предположим, что центры окружностей O_1 и O_2 одновременно лежат на S . По свойству вписанной окружности лучи AO , AO_1 , CO , CO_2 , KO_1 , KO_2 — биссектрисы углов, из которых они проведены. Это означает, что точки O_1 и O_2

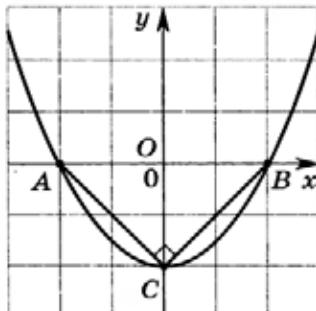


Рис. 119

лежат на отрезках AO и CO соответственно (рис. 120). Кроме того, $\angle O_1KO_2 = \angle O_1KO + \angle O_2KO = = \frac{1}{2} \angle AKO + \frac{1}{2} \angle CKO = \frac{1}{2} \cdot 180^\circ = = 90^\circ$, т. е. O_1O_2 — диаметр окружности S .

Значит, точка O лежит на отрезке O_1O_2 . Но тогда все 5 точек A, O_1, O, O_2, C лежат на одной прямой — противоречие.

259. Ответ. Нельзя.

Среди четырех подряд идущих чисел одно делится на 4, одно при делении на 4 дает в остатке 1, одно — 2, одно — 3. Кроме того, квадрат целого числа при делении на 4 дает в остатке 0 или 1. Но все возможные разбиения этих чисел на пары: $0 \cdot 1 + 2 \cdot 3$, $0 \cdot 2 + 1 \cdot 3$, $0 \cdot 3 + 1 \cdot 2$, при делении на 4 дают остатки 2, 3, 2.

260. Ответ. Не мог.

Заметим, что сумма чисел, записанных на двух соприкасающихся гранях, нечетна. Таких пар граней в кубе $3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$, т. е. сумма чисел, записанных на гранях, расположенных внутри куба, есть сумма 54 нечетных чисел. Значит, она четна. Обозначим ее $2S$. Посчитаем сумму чисел, записанных на поверхности большого куба. Она равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) \cdot 27 - 2S$, т. е. нечетному числу. Значит, это число не может равняться $6m$.

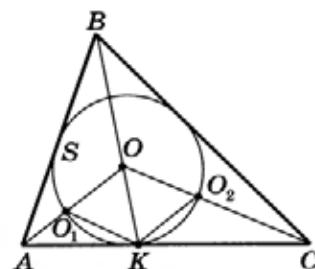


Рис. 120

▼ 10 класс

261. Пусть x и y — отрезки, на которые высота разбивает сторону c треугольника (рис. 121). Тогда $a^2 = h^2 + x^2$, $b^2 = h^2 + y^2$ и доказываемое неравенство принимает вид $(x+y)^2 + h^2 < h^2 + x^2 + h^2 + y^2$, т. е. $2xy < h^2$. Последнее верно, так как $2xy \leq \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 \Leftrightarrow 4xy \leq x^2 + 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$.

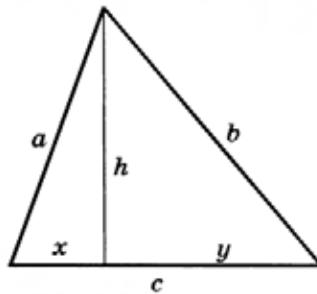


Рис. 121

262. Ответ. Не может.

Предположим, что нашелся такой квадратный трехчлен $p(x) = ax^2 + bx + c$, что a, b, c — нечетные, а x_1 и x_2 — его целые корни. Но тогда произведение $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ нечетно, откуда x_1 и x_2 нечетные. Их сумма четна, однако $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ нечетно — противоречие.

263. Пусть $\angle ABC = 2\alpha$, тогда $\angle MKN = \pi - \angle AKM - \angle CKN = \pi - 2\alpha$, т. е. $\angle MBN + \angle MKN = \pi$ (рис. 122). Значит, четырехугольник $MBNK$ вписанный, т. е. окружность, описанная около треугольника MBN , проходит также через точку K . Проведем через точку K касательную l к этой окружности, тогда угол между l и хордой KN измеряется половиной дуги KmN , т. е. равен углу KBN . Но $\angle CKN = \angle KBN$. Значит, l совпадает с KC , т. е. KC — касательная.

264. Ответ. Не могло.

Заметим, что противоположные грани кубиков разбиваются на пары: одна грань внутри большого куба, другая — снаружи, т. е. ровно половина клякс находится внутри куба, а другая половина — снаружи. Всего у нас $8 \cdot 2 \cdot (1 + 2 + 3) = 96$ клякс, т. е. снаружи нарисовано 48 клякс. Однако число 48 не представляется в виде суммы шести последовательных натуральных чисел, поскольку такая сумма нечетна, так как содержит ровно три нечетных и три четных слагаемых.

265. Ответ. Выигрывает второй.

Укажем выигрышную стратегию второго игрока. Разобьем клетки доски на пары так, как показано на рисунке 123. И на любой ход первого числом x в одну из клеток какой-то пары второй должен поставить во вторую клетку пары число $9 - x$ (очевидно, что он всегда сможет это сделать). Тогда вдоль любой из сторон квадрата будут стоять числа a , $9 - a$ и b ($1 \leq b \leq 9$). Их сумма больше 9, но меньше 18. А в любой тройке, содержащей 0 (диагональной, вертикальной или горизонтальной), два оставшихся числа в сумме не будут давать 9 (так как числа, дающие в сумме 9, стоят рядом).

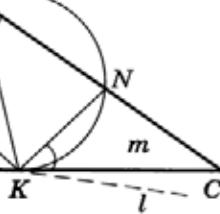


Рис. 122

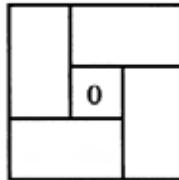


Рис. 123

▼ 11 класс

266. Ответ. Например, $f(x) = -x$.

Действительно, уравнения $-x = 0$ и $(-x)' + x^2 + 1 = 0$ оба имеют единственный корень $x = 0$.

267. Первое решение. Преобразуем уравнения:

$$(\sin \alpha - \cos \alpha) + \sqrt{3} (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) + (\sin^3 \alpha - \cos^3 \alpha) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (1 + \sqrt{3} \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) \times \\ \times (\sin \alpha - \cos \alpha). \text{ Если } \sin \alpha - \cos \alpha \neq 0, \text{ то } 2 + \sqrt{3} \sin \alpha +$$

$+\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha \cos \alpha = 0$. Возведя уравнение $2 + \sin \alpha \cos \alpha = -\sqrt{3} (\sin \alpha + \cos \alpha)$ в квадрат, получаем $4 + 4t + t^2 = 3 (\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha) = 3 (1 + 2t)$, где $t = \sin \alpha \cos \alpha$, откуда $t = 1$. Но уравнение $\sin 2\alpha = 2$ не имеет решений. Значит, $\sin \alpha = \cos \alpha = 0$.

Второе решение. Производная функции $f(x) = x + \sqrt{3}x^2 + x^3$ (а именно такой вид имеют функции, стоящие в левой и в правой части) при всех x неотрицательна: $f' = 1 + 2\sqrt{3}x + 3x^2 = (\sqrt{3}x + 1)^2$. Значит, функция $f(x)$ монотонно возрастает на промежутках $(-1; -\frac{1}{\sqrt{3}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 1)$.

Кроме того, $f(x)$ непрерывна. Поэтому из равенства $f(\sin \alpha) = f(\cos \alpha)$ следует: $\sin \alpha = \cos \alpha$.

268. Ответ. В 3 цвета.

Пусть число $n = 1$ цвета A , тогда в другой цвет должны быть покрашены числа 4, 5 и 7. Пусть $n = 4$ цвета B , тогда из того, что $7 - 4 = 3$, следует, что число $n = 7$ третьего цвета — C . Итак, потребуется не менее 3 цветов.

Раскраска $AAABBBCCCCAAABBB\dots$ — искомая.

269. Доказываемое утверждение равносильно равенству перпендикуляров A_1A_2 и C_1C_2 , проведенных к BD (рис. 124). Но $A_1A_2 = A_1D \sin \alpha = AD \sin \alpha$, $C_1C_2 = C_1B \sin \beta = CB \sin \beta$, и утверждение задачи следует из теоремы синусов:

$$AD \sin \alpha = CB \sin \beta \Leftrightarrow \frac{AD}{\sin \beta} = \frac{CB}{\sin \alpha} = 2R.$$

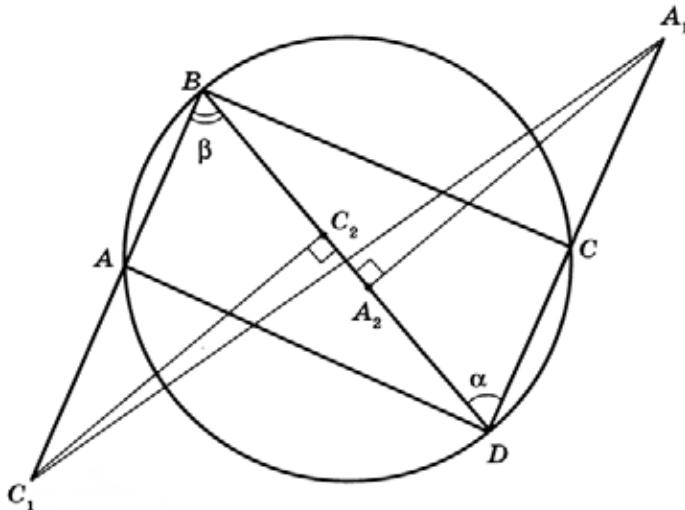


Рис. 124

270. Ответ. $n = 3$.

Два вектора дают 3 точки на плоскости, поэтому с их помощью квадрат получить нельзя. Искомой тройкой будут, например, векторы $\vec{a} = (2; 0)$, $\vec{b} = (1; \sqrt{3})$, $\vec{c} = (0; 2)$ (рис. 125). Вершины квадрата дают векторы \vec{b} , $\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} + \vec{c} + \vec{a}$, $\vec{b} + \vec{a}$, а вершины правильного треугольника — векторы \vec{c} , $\vec{c} + \vec{b}$, $\vec{c} + \vec{a}$.

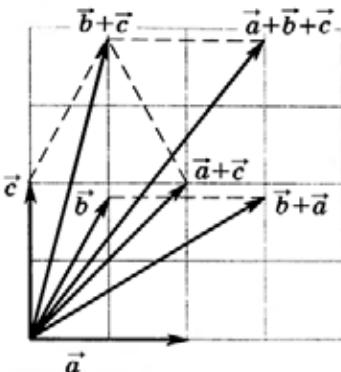


Рис. 125

2003–2004

▼ 6 класс

271. Например, $(81 + 3 - 4) \cdot (7 - 2) \cdot 5 + 9 - 6 = 2003$, $25 \times (81 - (3 + 4) : 7) + 9 - 6 = 2003$, $1987 + 23 + 4 - 5 - 6 = 2003$.

272. Ответ. Не может.

Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из $5 + 8 + 10 = 23$ банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.

273. Ответ. а) Один из примеров показан на рисунке 126.
б) Один из примеров показан на рисунке 127.

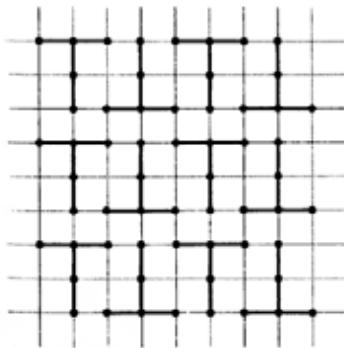


Рис. 126

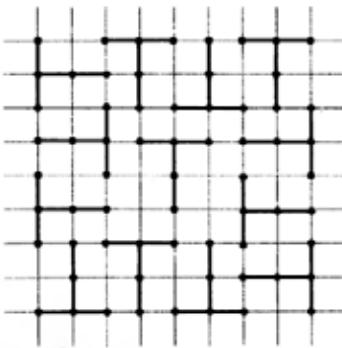


Рис. 127

274. Пусть a, b, c, \dots, f — цифры числа M . Тогда $a \cdot b \times c \cdot \dots \cdot f = 1001$. Но $1001 = 7 \cdot 13 \cdot 11$. А цифр 11 и 13 не бывает, т. е. Маша ошиблась.

275. Ответ. На 7 кг.

Заметим, что в любой момент после установки второй гири разность весов гирь, стоящих на разных чашках, не больше 8 кг. Предположим, что после установки последней гири разность весов в точности составила 8 кг. Это означает, что на одной чашке суммарный вес гирь равен x кг, а на другой — $x + 8$ кг. Но тогда суммарный вес всех гирь равен $2x + 8$ кг. С другой стороны, он равен $1 + 2 + \dots + 9 = 45$, откуда $2x + 8 = 45$, т. е. x — не целое число. Значит, после установки последней гири разность весов меньше 8 кг. В таблице показано, в каком порядке Вася может ставить гири, чтобы в конце разность весов составляла 7 кг.

Правая чашка		1	2	5		3		8	
Левая чашка	6				4		7		9

7 класс

276. Ответ. Например, $251 \cdot 8 - 9 + 4 = 2003$, $1968 + 35 = 2003$.

277. Рассмотрим тройки кусков, обозначенные на рисунке 128 одинаковыми цифрами. Суммарный вес кусков хотя бы одной тройки не меньше 300 г, в противном случае вес торта меньше $300 \times 3 = 900$ г.

278. Ответ. Не может.

Заметим, что при указанных операциях не меняется четность суммы номеров в алфавите записанных букв. Действительно, если обе буквы заменяются на следующие или на предыдущие в алфавите, то сумма номеров увеличивается или уменьшается на 2. Если же одна буква меняется на предыдущую, а другая — на следующую, то сумма номеров не изменяется, т. е. если в словах суммы номеров букв имеют разную четность, то одно слово из другого получить нельзя.

А у нас

$$\begin{aligned} & III + A + III + K + A - (K + A + 3 + A + K) = \\ & = 2III + 2A + K - (2K + 2A + 3) = \\ & = 2(III - K) + (K - 3) = 2(III - K) + 3 \end{aligned}$$

нечетно.

279. Ответ. Могло.

Пример разрезания показан на рисунке 129.

1	2	3
3	1	2
2	3	1

Рис. 128

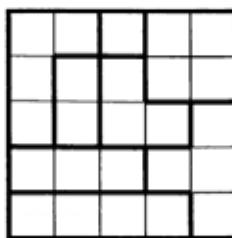
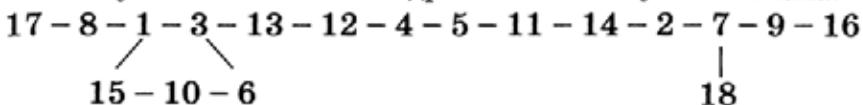


Рис. 129

280. Ответ. 16.

Соединим каждые два числа от 1 до 18 отрезком, если их сумма — точный квадрат. У нас получится схема:



Из нее, во-первых, следует, что каждое из чисел 16, 17 и 18 порождает не более одной пары с суммой — точным квадратом, значит, таких сумм не более 16, так как, даже когда эти числа стоят рядом, какие-то две суммы не будут квадратами. Во-вторых, схема показывает, как расположить числа по кругу, чтобы сумм — точных квадратов — было ровно 16:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 18 & - & 17 & \equiv & 8 & \equiv & 1 & \equiv & 15 & \equiv & 10 & \equiv & 6 & \equiv & 3 & \equiv & 13 \\
 & | & \parallel \\
 & & 16 & \equiv & 9 & \equiv & 7 & \equiv & 2 & \equiv & 14 & \equiv & 11 & \equiv & 5 & \equiv & 4 & \equiv & 12
 \end{array}$$

8 класс

281. Равенства $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$ и $2003 = 20 \cdot 10 \cdot 10 + 3$ помогают построить такой пример: $(9 + 7 + 5 - 1) \cdot (8 + 2) \cdot (6 + 4) + 3 = 2003$.

282. Предположим, что никто из ребят не ошибся. Если Вася написал числа x_1, x_2, \dots, x_n , то Петя должен был написать числа $x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2$. Маша должна была посчитать сумму $S = x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + x_1^2) + (x_2 + x_2^2) + \dots + (x_n + x_n^2)$. Заметим, что если число a — целое, то число $a^2 + a = a(a+1)$ — четное. Значит, S — сумма четных чисел, т. е. четное число и не может равняться 2003.

283. Ответ. $60^\circ, 60^\circ, 60^\circ$.

Пусть N — середина биссектрисы BL , AH и CM соответственно высота и медиана треугольника ABC (рис. 130). Тогда $BMLH$ — параллелограмм (диагонали делятся точкой пересечения пополам). Прямая, проходящая через середину стороны, параллельной основанию треугольника, является средней линией. Поэтому ML — средняя линия треугольника BAC , т. е. точка L — середина AC . Тогда и LH — средняя линия треугольника ABC . Значит, биссектриса BL и высота

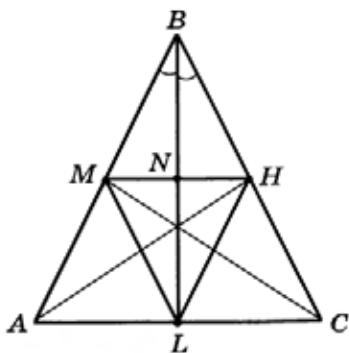


Рис. 130

AH являются также медианами треугольника ABC . Следовательно, $AB = BC$, $BA = AC$ и треугольник ABC равносторонний.

284. Ответ. 7.

Прибавление нечетного числа меняет четность суммы на противоположную, а среди четных чисел только 2 — простое число. Пусть b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 — нечетные числа в том порядке, как они выписывались в строку. Тогда при прибавлении b_2 и при прибавлении b_4 получающиеся суммы S_k и S_n — четные числа, большие 2. Поэтому S_k, S_n и $S_{10} = 55$ — составные числа, и простых сумм не больше 7. Таблица показывает пример расположения в строку чисел ровно с 7 простыми суммами.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_i	7	6	4	2	9	1	3	5	10	8
S_i	7	13	17	19	28	29	32	37	47	55

285. Ответ. Нельзя.

Первое решение. Предположим, что клетка 1 покрашена в черный цвет, тогда клетки 2 и 3 черного цвета. Клетки 5 и 6 белого цвета, в противном случае у клетки 4 не будет ровно двух соседей одного с ней цвета. Аналогично клетки 8 и 9 черного цвета и т. д. Таким образом, клетки, соседние с диагональю, разбиваются на пары одного цвета (2—3, 5—6, 8—9, ...) (рис. 131). Рассматривая другую диагональ, мы получаем, что одноцветными окажутся пары клеток $a—b, c—d, e—f, \dots$. Но тогда у центральной клетки все соседи одного цвета, так как одноцветными должны быть пары $A—B, C—D$, а также пары $A—C, B—D$ (рис. 132) — противоречие.

Второе решение. Предположим, что требуемая раскраска существует. Рассмотрим какую-нибудь клетку a_1 . Пусть она покрашена в первый цвет. Для клетки a_1 найдутся две

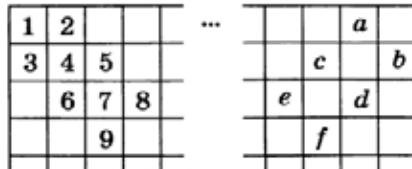


Рис. 131

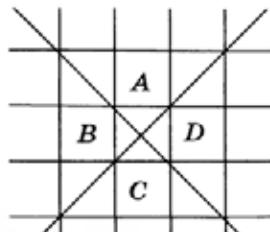


Рис. 132

соседние клетки, покрашенные в первый цвет. Возьмем одну из них и назовем ее a_2 . Для клетки a_2 , кроме a_1 , найдется ровно одна соседняя клетка первого цвета. Назовем ее a_3 . Для клетки a_3 найдем соседнюю клетку a_4 первого цвета и т. д. Так как клеток на доске конечное количество, то в какой-то момент процесс выбора клеток закончится. Это произойдет, когда для клетки a_N нам придется выбрать клетку, которую мы уже выбрали ранее. Заметим, что это может быть только клетка a_1 , так как у остальных клеток с a_2 по a_{N-1} уже есть по две соседние выбранные клетки, т. е. мы получили замкнутую цепочку клеток первого цвета $a_1 - a_2 - a_3 - \dots - a_N - a_1$. Все остальные клетки, соседние с клетками этой цепочки, — клетки второго цвета, так как в противном случае у какой-то клетки цепочки оказалось бы более двух соседей первого цвета, т. е. если мы вырежем эти клетки, то у любой оставшейся клетки по-прежнему будет ровно две соседние клетки, покрашенные в тот же цвет, что и сама клетка. Рассмотрим какую-нибудь оставшуюся клетку и аналогичным образом построим для нее замкнутую цепочку, содержащую эту клетку. Таким образом мы можем разбить всю доску на замкнутые однокрасочные цепочки клеток.

Покажем теперь, что каждая такая цепочка состоит из четного числа клеток. Действительно, рассмотрим шахматную раскраску нашей доски и произвольную цепочку из K клеток $x_1 - x_2 - x_3 - \dots - x_k - x_1$. Соседние клетки в этой цепочке должны иметь разный цвет. Пусть для определенности клетка x_1 будет черного цвета, тогда клетка x_2 — белого, x_3 — черного и т. д. Мы получим, что все клетки с нечетными номерами будут черными, а с четными номерами — белыми. Но так как клетки x_1 и x_k — соседние, то клетка x_k должна быть белого цвета, т. е. K четно. Таким образом, мы показали, что каждая цепочка состоит из четного числа клеток, но тогда вся доска как объединение таких цепочек должна состоять из четного числа клеток. Однако число $2003 \cdot 2003$ нечетное. Полученное противоречие завершает доказательство.



9 класс

286. Ответ. Не может.

Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски. Заметим, что после хода как слон слонопотам попадает в клетку того же цвета, а после хода как конь слонопотам попадает в клетку другого цвета. Пусть для определенности слонопотам начинает обход с черной клетки. Возможны два случая. Если слонопотам начинает ходить как слон, то цвета клеток будут меняться следующим образом: ч-ч-б-б-ч-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-ч-ч-б-ч-ч-б-ч. Если же слонопотам начинает ходить

как конь, то цвета клеток будут меняться таким образом: ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-ч-б-б-ч-ч-ч-б-ч-ч-ч-б-ч-ч. И в том и в другом случае слонопотам должен закончить путь в клетке того же цвета, что и клетка начала обхода. А так как соседние клетки имеют разные цвета, то закончить обход в соседней клетке слонопотам не сможет.

287. Ответ. 9.

Заметим, что $\Pi(10m) = 0$, т. е. по крайней мере каждое десятое из выписанных чисел равно 0. Отсюда следует, что в этом ряду может встретиться не более 9 записанных подряд чисел, отличных от 0. Покажем, что они могут быть последовательными натуральными. Такими числами будут, например, $\Pi(11111) = 1$, $\Pi(11112) = 2$, ..., $\Pi(11119) = 9$.

288. Ответ. Не могло.

Пусть A — сумма чисел в первой строке, B — сумма чисел в первом столбце, S — сумма всех чисел в таблице. Если таблица удовлетворяет условию задачи, то

$$S = A + (A + 2) + (A + 4) + (A + 6) = 4A + 12 = 4(A + 3) \text{ и}$$

$$S = B + (B + 3) + (B + 6) + (B + 9) = 4B + 18 = 4(B + 4) + 2.$$

Первое число делится на 4, второе нет.

289. Первое решение. Точки D и E лежат на окружности с диаметром AC (рис. 133), значит, $OE = OD$, где O — середина стороны AC . Тогда $KE = KD$, где $OK \perp MN$. Следовательно, $OK \parallel AM$, т. е. OK — средняя линия трапеции $CAMN$. Отсюда $MK = NK \Rightarrow ME = DN$, так как $EK = KD$.

Второе решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$. Из подобия треугольников ABD и CBE следует подобие треугольников ABC и DBE , следовательно, $\angle BED = \gamma$, $\angle BDE = \alpha$, значит, $ME = AE \times \cos \gamma = AC \cos \alpha \cos \gamma$. Аналогично $DN = AC \cos \gamma \cos \alpha$.

290. Ответ. 25%.

Пусть M — акционер, владеющий наибольшим процентом акций — x процентами акций. Разобьем остальных 99 акционеров на три группы A , B и C по 33 акционера. Пусть они владеют соответственно a , b и c процентами акций. Тогда $2(100 - x) = 2(a + b + c) = (a + b) + (b + c) + (c + a) \geqslant 50 + 50 + 50$, т. е. $x \leqslant 25$.

Если каждый из 99 акционеров, кроме M , владеет $\frac{75}{99} = \frac{25}{33}\%$ акций, то любые 66 из них владеют ровно 50%, а у M ровно 25% акций.

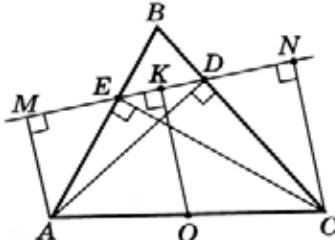


Рис. 133

10 класс

291. Пусть числа a , b , a^2 входят в прогрессию. Тогда $b = a + nd$, $a^2 = a + md$. Отсюда $b - a = nd$, $b^2 = a^2 + b^2 - a^2 = a^2 + (b - a)(b + a) = a + md + nd$ ($b + a$) = $a + kd$, т. е. b^2 также входит в прогрессию.

292. Ответ. Не может.

Первое решение. Пусть x_1 и $x_2 = 3x_1$ — корни уравнения. Тогда по теореме Виета $x_1 + 3x_1 = 4x_1 = 2(2x_1) = 2(\sin \alpha + \cos \alpha)$ и $x_1 \cdot 3x_1 = \sin(2\alpha)$, откуда $4x_1^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2$ и $3x_1^2 = \sin(2\alpha)$, т. е. $3(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 4 \sin(2\alpha) \Leftrightarrow 3 + 3 \sin(2\alpha) = 4 \sin(2\alpha)$, $\sin(2\alpha) = 3$, что невозможно.

Второе решение. Корнями уравнения являются числа $x_{1,2} = \sin \alpha + \cos \alpha \pm 1$. Пусть $t = \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$,

откуда $|t| \leq \sqrt{2}$. Предположим, что корни различаются в 3 раза. Тогда либо $t + 1 = 3(t - 1) \Rightarrow t = 2 > \sqrt{2}$, либо $t - 1 = 3(t + 1) \Rightarrow t = -2 < -\sqrt{2}$ — противоречие.

293. Ответ. Не мог.

Заметим, что если число x нечетное, то и число $3x$, и число $x - 2$ тоже нечетные, поэтому все записанные числа нечетные. После заполнения всей таблицы в ней стоит 81 нечетное число. Но сумма нечетного числа нечетных чисел не может равняться четному числу, т. е. Сережа не мог получить нуль.

294. Пусть $A(-x_1; x_1^2)$, $B(x_1; x_1^2)$, $C(x_2; x_2^2)$ — вершины треугольника (рис. 134).

Первое решение. $\angle ACB = 90^\circ \Leftrightarrow C \in \omega$, где ω — окружность с диаметром AB . Ее уравнение $x^2 + (y - x_1^2)^2 = x_1^2$, поэтому $x_2^2 + (x_2^2 - x_1^2)^2 = x_1^2$, откуда в силу $x_2^2 - x_1^2 \neq 0$ $x_1^2 - x_2^2 = 1$, т. е. $y_A - y_C = 1$.

Второе решение. $\angle ACB = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{CA} \cdot \vec{CB} = 0 \Leftrightarrow (-x_1 - x_2; x_1^2 - x_2^2) \cdot (x_1 - x_2; x_1^2 - x_2^2) = 0 \Leftrightarrow x_2^2 - x_1^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2 = 0 \Rightarrow y_A - y_C = 1$.

295. Пусть S и p , S_1 и p_1 , S_2 и p_2 соответственно площади и полупериметры треугольников MBN , AMB и BNC

(рис. 135). Отсюда $r = \frac{S}{p}$, $r_1 = \frac{S_1}{p_1}$, $r_2 = \frac{S_2}{p_2}$. Проведем

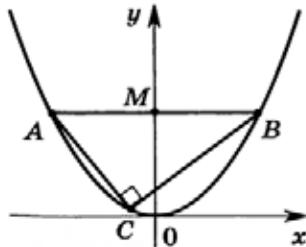


Рис. 134

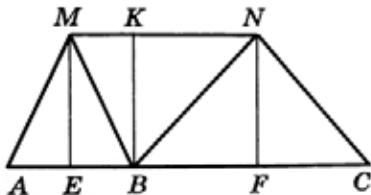


Рис. 135

$ME \perp AB$, $BK \perp MN$, $NF \perp BC$. Тогда $MK = BE = \frac{1}{2}AB$, $NK = BF = \frac{1}{2}BC$, поэтому $p = \frac{1}{2}(MN + MB + BN) = \frac{1}{4}(AB + CB + AM + MB + BN + NC) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$. Кроме того, $S = \frac{1}{2}BK \cdot (MK + KN) = \frac{1}{2}ME \cdot \frac{1}{2}AB + \frac{1}{2}NF \cdot \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$. Значит, $r = \frac{S_1 + S_2}{p_1 + p_2}$, откуда $r_1 < r < r_2$, так как если $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ($a, b, c, d > 0$), то $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

▼ 11 класс

296. Ответ. 0.

Поскольку $D = p^2 + 4 \cdot 2003 > 0$ для любого p , то все трехчлены имеют вещественные корни. Заметим, что по теореме Виета сумма корней трехчлена $x^2 + px - 2003$ равна $-p$, т. е. сумма корней всех написанных трехчленов равна $100 + 99 + 98 + \dots + (-99) + (-100) = 0$.

297. Ответ. Всегда.

Предположим, что Петя написал такие углы α и β , что $\sin \alpha + \cos \beta > \sqrt{2}$, так и $\cos \alpha + \sin \beta > \sqrt{2}$. Отсюда $\sin \alpha + \cos \beta + \cos \alpha + \sin \beta > 2\sqrt{2}$.

Заметим, что для любого x выполняется неравенство $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin(x + 45^\circ) \leq \sqrt{2}$, откуда $\sin \alpha + \cos \beta + \cos \alpha + \sin \beta \leq 2\sqrt{2}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

298. Пусть O — центр параллелограмма $ABCD$ (рис. 136), AA_1 , BB_1 , CC_1 , DD_1 , OO_1 — перпендикуляры к плоскости β , проходящей через данную точку P . Тогда $AA_1 \parallel OO_1 \parallel CC_1$, поэтому точки A ,

A_1 , O_1 , C , C_1 , O лежат в одной плоскости и OO_1 — средняя линия трапеции CAA_1C_1 . Значит, $AA_1 + CC_1 = 2OO_1$. Аналогично $BB_1 + DD_1 = 2OO_1$ и, следовательно, рассматриваемая сумма расстояний равна $4 \cdot OO_1 \leq 4 \cdot OP = 4a$, так как OO_1 — перпендикуляр, а OP — наклонная к плоскости β .

299. Ответ. Не может.

Заметим, что числа 1, 5, 9 имеют вид $4k + 1$. Тогда каждое число из A представимо в виде $100a + (4b + 1) \cdot 10 + (4c + 1) = 4m + 3$ (например, $1959 = 19 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 9$), т. е. каждое число из множества A имеет остаток 3 при делении на 4

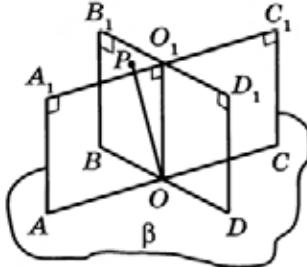


Рис. 136

и сумма 1001 числа из множества A также будет иметь остаток 3 при делении на 4, так как $1001 = 4 \cdot 250 + 1$. Однако квадраты четных чисел делятся на 4, а квадраты нечетных чисел имеют остаток 1 при делении на 4, так как $(2t+1)^2 = 4(t^2+t) + 1$. Поэтому сумма 1001 различного числа из множества A не может быть полным квадратом.

300. Пусть D и E — середины отрезков AB и BC . Тогда $MD \perp AC$, $NE \perp AC \Rightarrow MN \geq DE = DB + BE = \frac{1}{2}(AB + BC)$ (рис. 137).

Пусть S_1 и p_1 , S_2 и p_2 , S и p — площади и полупериметры треугольников AMB , BNC и MBN соответственно. Тогда $r_1 = \frac{S_1}{p_1}$, $r_2 = \frac{S_2}{p_2}$,

$r = \frac{S}{p}$. Но $p = \frac{1}{2}(MB + BN + MN) \geq$

$\geq \frac{1}{4}(AM + MB + AB + BC + BN + NC) = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$. Кроме того, $S = S_{EDMN} - S_{BMD} - S_{BNE} = \frac{1}{2}(MD + NE) \cdot DE - \frac{1}{2}MD \cdot BD - \frac{1}{2}NE \cdot BE$, т. е. с учетом равенства $DB = BE$, $S = \frac{1}{2}MD \cdot DB + \frac{1}{2}NE \cdot BE = \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$.

Поэтому $r \leq \frac{S_1 + S_2}{p_1 + p_2} \Rightarrow r_1 < r_2$, так как при $\frac{S_1}{p_1} < \frac{S_2}{p_2}$ выполняется неравенство $S_1p_2 + S_2p_1 < S_2p_1 + S_2p_2$, т. е. $\frac{S_1 + S_2}{p_1 + p_2} < \frac{S_2}{p_2}$.

2004–2005

▼ 6 класс

301. Ответ. 84, 183.

Если при сложении не происходило переноса 1 в следующий разряд, то сумма десятков исходных чисел равна 14, а единиц — 7. Значит, получится число $7 \cdot 10 + 14 = 84$. Если же перенос был, то сумма единиц равна 17, десятков — 13, и получится сумма $17 \cdot 10 + 13 = 183$.

302. Ответ. Хватит.

Один из способов показан на рисунке 138.

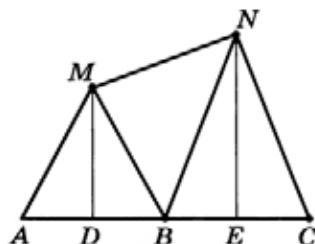


Рис. 137

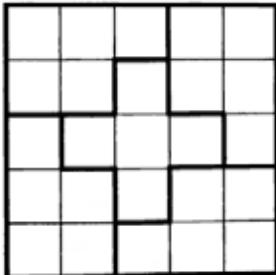


Рис. 138

303. Добавлением гири, вес которой мы не можем получить при помощи гирь меньших весов, легко получить пример для п. «а»): 1, 2, 4, 8, 15. Можно убедиться, что этот набор подходит, но им нельзя набрать вес 22 кг.

б) Например, 1, 2, 4, 7, 14.

304. Ответ. 3589.

Заметим, что в наименьшем числе не должна встречаться цифра 1, так как ее можно просто вычеркнуть — число уменьшится, а произведение цифр не изменится. Так как $1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5$, а на 5 делится только цифра 5, то в исскомом числе обязательно будет цифра 5. Из того, что $2^3 \cdot 3^3 > 100$, следует, что в исскомом числе, кроме цифры 5, будут еще по крайней мере три цифры. Предположим, что искомое число четырехзначное. Чем меньше первая цифра, тем меньше число. Но если первая цифра 2, то из того, что $2^2 \cdot 3^3 > 100$, следует, что в исскомом числе, кроме цифр 5 и 2, будут еще по крайней мере три цифры, т. е. число будет по крайней мере пятизначным. Если первая цифра 3, то единственным вариантом оставшихся двух цифр будут цифры 8 и 9. Но тогда наименьшим числом будет 3589.

305. Ответ. 5 лжецов, 5 рыцарей.

Если рядом сидят два рыцаря (Р) или два лжеца (Л), то они друг про друга сказали «Р». Если рядом сидят Р и Л, то их ответы будут «Л» и «Л». Поэтому если заменить всех Р на Л и наоборот, то набор ответов не изменится. Значит, можно по ответам однозначно определить количество Р и Л, только если их поровну.



7 класс

306. Ответ. Например, $219 + 348 = 567$.

307. Один из примеров разрезания показан на рисунке 139. Треугольные части имеют площадь $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 4 = 20 = \frac{1}{5} \cdot 100$, а средние — $\frac{1}{3}(100 - 2 \cdot 20) = 20 = \frac{1}{5} \cdot 100$.

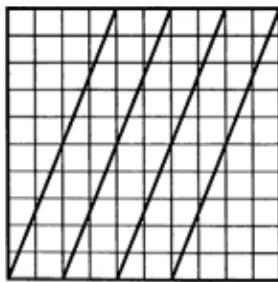


Рис. 139

308. Ответ. Больше тех, у которых цифры идут в убывающем порядке.

Запишем число первой группы в обратном порядке. Мы получим число второй группы, причем из разных чисел первой группы получаются разные числа второй группы. В то же время числа второй группы, оканчивающиеся на 0, на-

пример 98 760, не могли быть получены переворотом из чисел первой группы (число 06789 = 6789 не пятизначное). Значит, во второй группе чисел больше.

Замечание. Можно найти количество чисел в группах, исходя из комбинаторных соображений. Числа первой группы получаются из числа 123 456 789 вычеркиванием четырех цифр, т. е. их $C_9^4 = 126$, а числа второй группы — из числа 9 876 543 210 вычеркиванием пяти цифр, т. е. их $C_{10}^5 = 252$.

309. Обозначим веса арбузов через A_1, A_2, \dots, A_{10} . Сначала взвешиваем 1, 2 и 3-й арбузы. Пусть $A_1 + A_2 + A_3 = M_1$. Затем взвешиваем 1, 2 и 4-й арбузы. Пусть $A_1 + A_2 + A_4 = M_2$. Потом взвешиваем 2, 3 и 4-й арбузы. Пусть $A_2 + A_3 + A_4 = M_3$. Далее взвешиваем 1, 3 и 4-й арбузы. Пусть $A_1 + A_3 + A_4 = M_4$. Тогда $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = \frac{M_1 + M_2 + M_3 + M_4}{3}$. Еще за два взвешивания узнаем суммарный вес оставшихся 6 арбузов (взвешиваем 5, 6 и 7-й арбузы, после этого взвешиваем 8, 9 и 10-й арбузы).

310. Ответ. 4.

Друг про друга два сидящих рядом рыцаря (Р), как и два сидящих рядом лжеца (Л), дают ответы «Р» и «Р», а сидящие рядом Р и Л — ответы «Л» и «Л». Если число Л меньше $n - 1$, то в группе подряд сидящих Р можно заменить крайнего Р на Л, и мы получим тот же набор ответов при другом количестве Р. Также можно заменить Л на Р, если рядом окажутся по крайней мере два Л. Итак, Л ровно $n - 1$ и никакие двое из них не сидят рядом. Тогда размещение за столом имеет вид либо —Р—Л—Р—...—Л—РРР—Л—, либо —Р—Л—Р—...—Л—РР—Л—...—Р—Л—РР—Л—...—Л—. В обоих случаях получаем 4 ответа «Р».



8 класс

311. Ответ. $a^3 = (a^3 + 1) \cdot (a^3 + 1) - a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 - (a^3 + 1)$.

312. Заметим, что среди чисел есть четное и есть нечетное, так как если сумма двух чисел нечетна (оканчивается на 2005), то одно из них четно, а другое нечетно. Пусть среди чисел a_1, \dots, a_n есть два нечетных a и b и два четных c и d . Тогда из условия следует, что $a + b$ и $c + d$ оканчиваются на 4 (эти суммы четны), $a + c$ и $b + d$ оканчиваются на 5. Но тогда число $A = a + b + c + d = (a + b) + (c + d)$ должно оканчиваться на 8, и, с другой стороны, $A = (a + c) + (b + d)$ должно оканчиваться на 0 — противоречие.

313. Центр O вписанной окружности лежит на пересечении биссектрис треугольника ABC (рис. 140). Но биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника является и его высотой, и медианой. Значит, точка O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC . Аналогично O лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AD , т. е. является центром окружности, описанной около треугольника ADC .

314. Ответ. Выигрывает второй.

Опишем стратегию второго игрока. Пусть второй переворачивает обратно те стаканы, которые перевернул первый, до тех пор, пока первый не сделает свой 500-й ход. Тогда перед ходом первого каждый раз все 1001 стакан стоят донышками вниз. И первый имеет право перевернуть каждым своим ходом не более 999 стаканов (ровно 999 ему можно будет перевернуть только при своем 500-м ходе). Тогда пусть первый при своем 500-м ходе перевернул несколько (не более 999) стаканов. Остались неперевернутыми не более 1000 стаканов. А так как второму своим ходом можно перевернуть 1000 стаканов или меньше, то он просто переворачивает оставшиеся стаканы и выигрывает.

315. Ответ. Нельзя.

Пусть лампочки будут двух цветов: красного и синего — и цвета лампочек будут чередоваться. Тогда у нас по 125 лампочек каждого цвета. Будем рассматривать только красные лампочки. Заметим, что любая операция переключения затрагивает ровно 2 красные лампочки. Будем считать количество включенных красных лампочек. Сначала их 125. Если операция затрагивает 2 включенные красные лампочки, то общее число включенных красных лампочек уменьшится на 2. Если операция затрагивает 2 выключенные красные лампочки, то общее число включенных красных лампочек увеличится на 2. Если операция затрагивает 1 включенную и 1 выключенную красные лампочки, то общее число включенных красных лампочек не изменится. Таким образом, мы получаем, что всегда будет включенным нечетное число красных лампочек. Значит, выключить даже все красные лампочки не удастся.

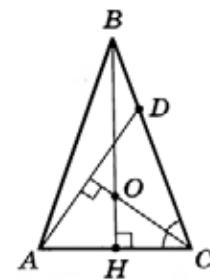


Рис. 140

9 класс

316. Ответ. Пятого, у которого скорость 10 км/ч.

Будем считать обгоны в тот момент, когда первый догоняет второго велосипедиста. В момент, когда первый проехал 5 кругов, второй проехал 4 круга (его скорость составляет $\frac{4}{5}$ от скорости первого), третий — 3 круга, чет-

вертый — 2 круга, пятый — 1 круг. В этот момент все велосипедисты опять находятся в одной точке. Тогда к этому моменту первый обогнал второго 1 раз, третьего — 2 раза, четвертого — 3 раза, пятого — 4 раза, т. е. первый насчитал 10 велосипедистов, которых он обогнал. После того как первый проедет еще 5 кругов, он насчитает 10 обгонов. В этот момент все велосипедисты опять находятся в одной точке. Тогда первый обгонит и посчитает 21-м самого медленного из велосипедистов — пятого.

317. Например, числа $N = 100\dots000999999899$ и $N + 1 = 100\dots000999999900$.

Сумма цифр числа N равна 81, а сумма цифр числа $N + 1$ равна 64.

318. Пусть построенная окружность пересекает BD в точке H (рис. 141) и CH пересекает AK в точке N . По теореме об угле между касательной и хордой $\angle NCA =$

$$= \frac{1}{2} CH = \angle CBH = \angle CBD =$$

$$= 90^\circ - \angle BCD = 90^\circ - \angle BCA = \\ = 90^\circ - \angle KAC = 90^\circ - \angle NAC.$$

Значит, $\angle CNA = 90^\circ$, т. е. CN — высота треугольника AKC , и тогда H — ортоцентр треугольника AKC .

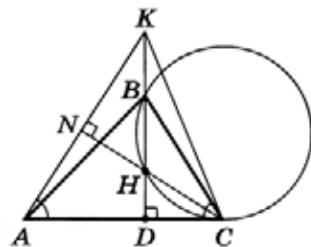


Рис. 141

319. Ответ. Удвоим все коэффициенты, кроме коэффициентов при x^{2n} , x^{2n-1} , x и свободного члена. Тогда $x^{2n} + x^{2n-1} + 2x^{2n-2} + 2x^{2n-3} + \dots + 2x^3 + 2x^2 + x + 1 = \\ = (x^{2n} + x^{2n-1} + \dots + x^3 + x^2) + (x^{2n-2} + x^{2n-3} + \dots + x + 1) = \\ = (x^2 + 1)(x^{2n-2} + x^{2n-3} + \dots + x + 1)$.

320. Ответ. Первый.

Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Первым ходом он берет из второй кучки 2 камня, а дальше добивается того, чтобы после каждого его хода разность количества камней в кучках делилась на 3. Тогда после каждого хода второго разность количества камней в кучках не будет делиться на 3 (в частности, число камней в кучках будет разным), поскольку она будет меняться на 1 или на 2. Покажем, как первому добиться того, чтобы после каждого его хода разность количества камней в кучках делилась на 3. После первого его хода разность равна $98 - 20 = 78$. Пусть после хода второго в кучках осталось a и b камней ($a > b$, $a - b = 3k + d$, $d = 1$ или $d = 2$). Тогда первому достаточно взять d камней из кучки с a камнями. А так как суммарное число камней в кучках после каждого хода уменьшается, то после какого-то хода первого в обеих кучках не останется камней и он выиграет.

10 класс

321. Ответ. $p = q = 2$.

Пусть x_1, x_2 — корни уравнения $px^2 + pqx + q = 0$. Тогда по теореме Виета $x_1x_2 = \frac{q}{p}$, $x_1 + x_2 = -q$. Отношение $\frac{q}{p}$ простых чисел — целое, значит, $p = q$ и $x_1x_2 = 1$, откуда $x_1 = x_2 = -1$ и $p = q = 2$.

322. Ответ. $n = 15$.

Из условия следует, что $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = 40m$, т. е.

$n(n+1) = 5 \cdot 16 \cdot m$, откуда одно из чисел n и $n+1$ делится на 16 (числа n и $n+1$ разной четности). Наименьшее натуральное n , при котором это возможно, равно $n = 15$. Это число подходит: искомым является, например, разбиение $(15 + 14 + 11)$, $(13 + 12 + 10 + 5)$, $(9 + 8 + 7 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1)$.

323. Ответ. 12.

Вначале проведем векторы в центры всех клеток таблицы. Тогда все векторы, кроме пяти, изображенных на рисунке 142, разбиваются на пары с нулевой суммой. Значит, сумма S всех векторов равна $(20; 0)$, а искомая сумма \vec{S}_1 равна $(20 - x_1 - x_2; -y_1 - y_2)$, где $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$ — векторы, не вошедшие в сумму. Тогда $|\vec{S}_1| = \sqrt{(20 - x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2}$ минимален, если число $x_1 + x_2$ максимально, а число $|y_1 + y_2|$ минимально. Это выполняется для двух пар векторов: \vec{a}_1 и \vec{b}_1 , \vec{a}_2 и \vec{b}_2 , для которых $x_1 + x_2 = 8$, $y_1 + y_2 = 0$, т. е. $|\vec{S}_{\min}| = \sqrt{(20 - 8)^2 + 0^2} = 12$.

324. Из формул $S = \frac{1}{2}ah_1 = \frac{abc}{4R}$ следует, что $bc = 2Rh_1$, откуда $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc} = \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_1}$. Аналогично $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_2}$, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{2R} \cdot \sqrt{h_3}$. Сложив эти неравенства, получаем утверждение задачи.

325. Ответ. Выигрывает второй.

Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Если первый игрок первым ходом взял 1 камень из какой-нибудь кучки, то второму следует взять по 1 камню из двух других кучек. Если же первый игрок первым ходом взял по 1 камню из каких-то двух кучек, то второму следу-

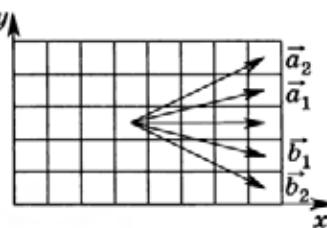


Рис. 142

ет взять 1 камень из оставшейся кучки. Таким образом после хода второго в первой кучке будет лежать 6 камней, во второй — 8 камней, в третьей — 10 камней, т. е. в каждой кучке будет лежать четное число камней. Каждым следующим ходом второй должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и первый, т. е. после каждого хода второго в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Второй всегда сможет сделать ход, так как после хода первого в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т. е. хотя бы по одному. А так как второй всегда сможет сделать ход, то именно он заберет последние камни из кучек и выиграет.

11 класс

326. Ответ. $a_1 = -n$, $a_2 = 0$, $a_3 = n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$.

Пусть d — разность прогрессии, тогда $a_1 = a_2 - d$, $a_3 = a_2 + d$, и, значит, $a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2$, $a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 = 3a_2^3 + 6a_2d^2$, т. е. $3a_2(a_2^2 + 2d^2 - 1) = 0$. Отсюда либо $a_2 = 0$ и $a_1 = -n$, $a_3 = n$, либо $a_2^2 + 2d^2 = 1$, но последнее возможно только при $a_2 = \pm 1$, $d = 0$ (a_2 и d — целые числа).

327. Если $z = 0$, то $\sin y = 0$, $y = \pi n$ и все равенства выполнены при любых x . Если $\sin x = 0$, то $\sin y = 0$, $\sin 2x = -\sin 2y = \sin 4x = \sin 4y = 0$ и при любом z все равенства выполнены. Если $z \neq 0$, $\sin x \neq 0$, то получаем $\cos y = z \cos x$, откуда $1 = \sin^2 y + \cos^2 y = z^2 (\sin^2 x + \cos^2 x)$, т. е. $z^2 = 1 = z^4$. Тогда $\sin 2y = \sin 2x$, $\sin y = \pm \sin x \Rightarrow \cos 2y = 1 - 2 \sin^2 y = \cos 2x \Rightarrow \sin 4y = \sin 4x = z^4 \sin 4x$.

328. Ответ. Не может.

Первое решение. Пусть ω_1 и ω_2 — данные окружности (рис. 143), r_1 и r — их радиусы, $r = 2r_1$. Тогда из формулы $S = rp$ и равенства $S_{BMC} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ следует, что периметры треугольников ABC и BMC должны быть равны. Но $P_{ABC} = AB + BC + CM + MA = (AB + AM) + BC + CM > BM + BC + CM = P_{BMC}$.

Второе решение. Построим треугольник ADC , в котором BM — средняя линия. Он подобен треугольнику BMC с коэффициентом 2, т. е. радиус r' вписанной в него окружности ω' равен $2r_1$, но $r' > r$ (окружности ω и ω' вписаны в один угол C , но окружность ω' касается более удаленной от вершины угла C , чем AB , прямой AD).

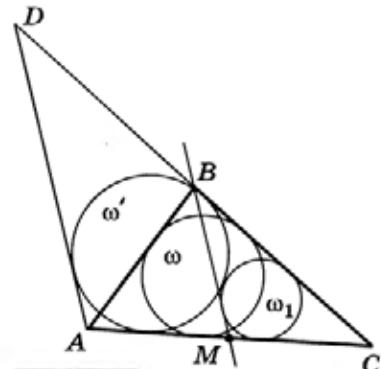


Рис. 143

329. Первое решение. Пусть параболы проходят через точку $O(x_0; y_0)$. Тогда $y_0 = -x_0^2 + bx_0 + c$, откуда $c = y_0 + x_0^2 - bx_0$. Вершина каждой из данных парабол имеет координаты $x_B = \frac{-b}{2} = \frac{b}{2}$, $y_B = -\frac{b^2}{4} + \frac{b^2}{2} + c = \frac{b^2}{4} + c = \frac{b^2}{4} + y_0 + x_0^2 - bx_0$.

Значит, $y_B = x_B^2 - 2x_0x_B + y_0 + x_0^2$, т. е. вершины парабол лежат на параболе $y = x^2 - 2x_0x + (y_0 + x_0^2)$.

Замечание. Вычисления упростятся, если перенести начало координат в точку $(x_0; y_0)$. Вид данных парабол при таком параллельном переводе не изменится.

Второе решение. Построим параболу Π_0 вида $a = x^2 + Ax + B$ с вершиной в точке O (рис. 144). Пусть V — вершина одной из данных парабол Π . Тогда при симметрии относительно точки M — середины отрезка OV — парабола Π переходит в параболу Π_0 (парабола однозначно определяется вершиной и коэффициентом при x^2). Поэтому точка O , являющаяся одновременно точкой, принадлежащей параболе Π , и вершиной параболы Π_0 , перейдет в точку, принадлежащую параболе Π_0 , и в вершину параболы Π . Значит, вершина V лежит на параболе Π_0 .

330. Ответ. Первый.

Выигрывает тот, после чьего хода в кучках не осталось камней. Опишем выигрышную стратегию первого игрока. Первым ходом он берет из первой кучки один камень.

Далее возможно несколько случаев.

1) Второй взял один камень из какой-нибудь кучки, отличной от первой, тогда первый берет по одному камню из двух оставшихся (нетронутых) кучек.

2) Второй взял по одному камню из каких-то двух кучек, отличных от первой, тогда первый берет один камень из оставшейся (нетронутой) кучки.

В случаях 1 и 2 после хода первого в каждой кучке будет лежать четное число камней.

3) Второй взял один камень из первой кучки, тогда первый берет один камень из первой кучки.

4) Второй взял один камень из первой кучки и один камень из второй кучки, тогда первый берет по одному камню из тех же кучек.

В случаях 3 и 4 после хода первого мы получим три кучки камней, в каждой из которых будет лежать нечетное число камней. Если же теперь второй возьмет один камень из какой-нибудь кучки, то первому следует взять по одному камню из двух оставшихся кучек. Если же второй взял по одному камню из каких-то двух кучек, то первому следует взять один камень из оставшейся кучки, т. е. и в случаях 3 и 4 мы

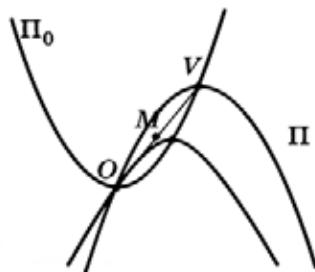


Рис. 144

получаем, что после некоторого хода первого в каждой кучке будет лежать четное число камней (возможно нуль).

Таким образом, во всех случаях мы можем получить ситуацию, в которой после некоторого хода первого в каждой кучке будет лежать четное число камней (возможно нуль). Каждым следующим ходом первый должен брать столько же камней и из тех же кучек, что и второй, т. е. после каждого хода первого в каждой кучке будет оставаться четное число камней. Первый всегда сможет сделать ход, так как после хода второго в тех кучках, из которых он брал камни, будет оставаться нечетное число камней, т. е. хотя бы по одному. А так как первый всегда сможет сделать ход, то именно он заберет последние камни из кучек и выиграет.

Замечание. Сравните с задачей 325.

2005–2006

▼ 6 класс

331. Ответ. Например, $5 + 40 + 367 + 2918 = 3330$.

332. Один из вариантов следующий. Первые четыре дня Вася должен покупать товар на все имеющиеся у него деньги. Тогда через четыре дня у него будет $1000 \rightarrow 2000 \rightarrow 4000 \rightarrow 8000 \rightarrow 16\ 000$. На пятый день он должен купить товар на 9000 рублей. У него останется 7000 рублей. После обеда он продаст товар за 18 000 рублей, и у него станет ровно 25 000 рублей.

333. Ответ. 1-й — лисе, 2-й — волку, 3-й — медведю. Иванцаревич цел останется, но коня потеряет.

Среди ответов есть два полностью противоположных: первый и третий. Значит, второй ответ принадлежит волку, а тогда правильным является третий ответ.

334. Ответ. Два из возможных примеров разрезания приведены на рисунках 145 и 146.

Рис. 145

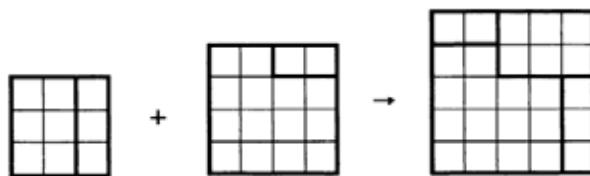
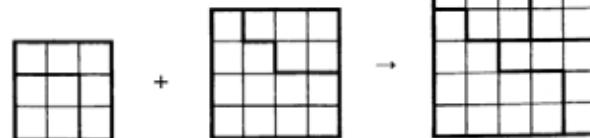


Рис. 146



335. Ответ. 6.

Если бы все 7 сумм были простыми числами, то простыми, в частности, были бы две суммы по 5 чисел. Каждая из этих сумм больше 5. Если бы обе эти суммы были простыми числами больше 5, то каждая из этих сумм была бы нечетной (поскольку только 2 является простым четным числом). Но если мы сложим эти суммы, получим четное число. Однако в эти две суммы входят все числа от 1 до 10, и их сумма равна 55 — числу нечетному. Поэтому среди полученных сумм не больше 6 будут простыми числами. Ниже показано, как расставить числа в таблице, чтобы получить 6 простых сумм (в нашем примере все суммы по 2 числа равны 11, и $1 + 2 + 3 + 7 + 6 = 19$).

1	2	3	7	6
10	9	8	4	5

7 класс**336. См. решение задачи 332.****337. Ответ. 1003.**

Заметим, что два воина, стоящие рядом, не могли оказаться рыцарями. Действительно, если бы они оба были рыцарями, то они оба сказали бы неправду. Выберем воина, стоящего слева, и разобьем ряд из оставшихся 2004 воинов на 1002 группы по два рядом стоящих воина. В каждой такой группе не более одного рыцаря, т. е. среди рассматриваемых 2004 воинов не более 1002 рыцарей, т. е. всего в шеренге не более $1002 + 1 = 1003$ рыцарей.

Рассмотрим шеренгу РЛРЛР...РЛРЛР. В такой шеренге стоит ровно 1003 рыцаря.

338. Ответ. Две гири.

Одной гири продавцу не хватит, поскольку для взвешивания 25 кг сахара требуется гиря весом не менее 20 кг. Имея только такую гирю, продавец не сможет взвесить, например, 10 кг сахара. Покажем, что продавцу хватит двух гирь: одной весом 5 кг и одной весом 15 кг. Сахар весом от 0 до 5 кг можно взвесить без гирь. Чтобы взвесить от 5 до 10 кг сахара, нужно поставить гирю в 5 кг на правую чашку. Чтобы взвесить от 10 до 15 кг сахара, нужно поставить гирю в 5 кг на левую чашку, а гирю в 15 кг на правую чашку. Чтобы взвесить от 15 до 20 кг сахара, нужно поставить гирю в 15 кг на правую чашку. Чтобы взвесить от 20 до 25 кг сахара, нужно поставить гири в 5 кг и 15 кг на правую чашку.

339. Ответ. $N = 1\ 021\ 324\ 354$.

Число N по крайней мере десятизначное, так как различных сумм 9. Поэтому наименьшее число десятизначное,

при этом каждая из сумм 1, ..., 9 должна встречаться ровно один раз. Из двух десятизначных чисел, начинающихся с одинаковых цифр, то меньше, у которого первая различающаяся цифра меньше. Поэтому первая цифра числа N равна 1, вторая — 0. Сумма 1 уже встретилась, поэтому наименьшая третья цифра — 2 и т. д.

340. Рассмотрим произвольный квадратик 2×2 . В нем не может быть клеток всех трех цветов, так как тогда можно было бы найти трехклеточный уголок, все клетки которого трех разных цветов. Также в этом квадратике 2×2 все клетки не могут быть одного цвета, так как тогда можно было бы найти трехклеточный уголок, все клетки которого одного цвета. Значит, в этом квадратике клетки только двух цветов. Заметим, что в этом квадратике клеток одного цвета не может быть 3, так как тогда можно было бы найти трехклеточный уголок, все клетки которого одного цвета, т. е. в этом квадратике по 2 клетки двух разных цветов. Разобьем теперь таблицу 8×8 на 16 квадратиков 2×2 . В каждом из них либо нет клеток первого цвета, либо две клетки первого цвета, т. е. всего клеток первого цвета четное количество. Аналогично клеток второго и третьего цветов четное количество.



8 класс

341. Ответ. Могла.

Рассмотрим, например, число $A = 32\ 000\dots 000$ (на конце 1001 нуль). Тогда $A^2 = 1\ 024\ 000\dots 000$ (на конце 2002 нуля). Если стереть последние 2005 цифр, то останется число 1.

342. Ответ. 1003, 1002, 0.

Из того, что наборы совпадают, следует равенство $a + b + c = a - 1 + b + 1 + c^2$. Получаем $c = c^2$, т. е. $c = 0$ или $c = 1$. Так как $c = c^2$, то $a - 1 = b$, $b + 1 = a$. Это означает, что возможны два случая: набор $b + 1$, b , 0 и $b + 1$, b , 1. Из того, что сумма чисел набора равна 2005, в первом случае получаем $2b + 1 = 2005$, $b = 1002$ и набор 1003, 1002, 0, во втором случае получаем $2b + 2 = 2005$, $b = 1001$, 5 — не целое число, т. е. второй случай невозможен.

343. Ответ. 1336.

Заметим, что оба воина, стоящих на одном краю шеренги, не могли оказаться лжецами. Действительно, если бы они оба были лжецами, то воин, стоящий с краю шеренги, сказал бы правду. Поэтому из двух самых левых и двух самых правых воинов суммарно не более двух лжецов. Рассмотрим ряд из оставшегося 2001 воина.

Заметим, что три подряд стоящих воина не могли оказаться лжецами, поскольку тогда средний из них сказал бы правду. Разобьем ряд из 2001 воина на 667 групп по три

рядом стоящих воина. В каждой группе не более двух лжецов, т. е. среди рассматриваемого 2001 воина не более 1334 лжецов. Всего в шеренге из 2005 воинов не более $1334 + 2 = 1336$ лжецов.

Рассмотрим шеренгу ЛР (ЛЛР) (ЛЛР) ... (ЛЛР) ЛР. В такой шеренге стоит ровно 1336 лжецов.

344. Ответ. $60^\circ, 30^\circ, 90^\circ$.

Прямая, проходящая через середины катетов, делит высоту CH пополам, поэтому искомая точка $P \in MN$, где M и N — середины катета и гипотенузы (рис. 147), т. е. MN — средняя линия треугольника ABC .

Тогда $MN \parallel BC \Rightarrow \angle P = \angle BCH$ (как внутренние накрест лежащие углы при параллельных прямых) $\Rightarrow \triangle BCH = \triangle NPH$ ($\angle CHB = \angle PHN = 90^\circ$, $CH = PH$ — по стороне и острому углу) $\Rightarrow BH = NH \Rightarrow CN = CB = a$ (в равнобедренном треугольнике высота является биссектрисой). Но CN — медиана прямоугольного треугольника ABC , поэтому $CN = BN$ (ясно, если описать около треугольника ABC окружность) $\Rightarrow \triangle BCN$ равносторонний, следовательно, $\angle B = 60^\circ$.

345. Ответ. Не могло.

Рассмотрим шахматную раскраску доски 10×10 . Заметим, что из белой клетки своим ходом хромая ладья попадает в черную, а из черной клетки — в белую. Пусть ладья начала обход с белой клетки. Тогда 1 будет стоять в белой клетке, 2 — в черной, 3 — в белой, ..., 100 — в черной, т. е. в белых клетках будут стоять нечетные числа, а в черных — четные. Но из двух соседних по стороне клеток одна черная, а другая белая, т. е. сумма чисел, записанная в этих клетках, всегда будет нечетной и не будет делиться на 4.

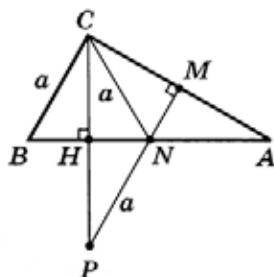


Рис. 147

9 класс

346. Ответ. Могли.

Заметим, что среди 11 подряд идущих натуральных чисел есть два, делящиеся на 5, и есть два четных числа, поэтому их произведение оканчивается на два нуля. Заметим теперь, что

$$a + (a + 1) + (a + 2) + \dots + (a + 10) = (a + 5) \cdot 11.$$

Если взять, например, $a = 95$ (т. е. Вася выбрал числа 95, 96, ..., 105), то сумма также будет заканчиваться на два нуля.

347. Ответ. $a = b = c = -1$.

Из того, что наборы совпадают, следует совпадение их сумм. Значит, $a^4 - 2b^2 + b^4 - 2c^2 + c^4 - 2a^2 = a + b + c = -3$,

$(a^2 - 1)^2 + (b^2 - 1)^2 + (c^2 - 1)^2 = 0$, откуда $a^2 - 1 = b^2 - 1 = c^2 - 1 = 0$, т. е. $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 1$. Условию $a + b + c = -3$ удовлетворяют только $a = b = c = -1$. Осталось проверить, что найденная тройка удовлетворяет условиям задачи.

348. Пусть E, F, K, L, M, N — точки касания (рис. 148). Предположим, что $DE = EF = FB = x$. Тогда $AK = AL = a$, $BL = BE = 2x$, $BM = BF = x$, $CM = CN = c$, $DK = DE = x$, $DN = DF = 2x \Rightarrow AB + BC = a + 3x + c = AC$, что противоречит неравенству треугольника.

Замечание. Так же доказывается невозможность равенства $BF = DE$. Вообще если для вписанной в треугольник ABD окружности E — точка касания и $BF = DE$, то F — точка, в которой внеписанная окружность треугольника ABD касается BD .

349. Ответ. Верно.

Предположим, что нельзя выбрать окружность, на которой есть точки всех трех цветов. Выберем точку A первого цвета и точку B второго цвета и проведем через них прямую l . Если вне прямой l найдется точка C третьего цвета, то на окружности, описанной около треугольника ABC , найдутся точки всех трех цветов (например, A, B и C). Значит, вне прямой l нет точек третьего цвета. Но раз хотя бы одна точка плоскости покрашена в третий цвет, то эта точка (назовем ее D) лежит на прямой l . Если теперь рассмотреть точки A и D , то аналогично можно показать, что вне прямой l нет точек второго цвета. Рассмотрев точки B и D , можно показать, что вне прямой l нет точек первого цвета, т. е. вне прямой l нет покрашенных точек. Получили противоречие с условием. Значит, можно выбрать окружность, на которой есть точки всех трех цветов.

350. Выберем строки с номерами a_1, a_2, a_3 и столбцы с номерами b_1, b_2, x . Сумма девяти чисел, стоящих на их пересечении, будет равна нулю. Выберем теперь строки с номерами a_1, a_2, a_3 и столбцы с номерами b_1, b_2, y . Сумма девяти чисел, стоящих на их пересечении, будет равна нулю. Отсюда следует, что сумма трех чисел, стоящих в столбце x в строках с номерами a_1, a_2, a_3 , равна сумме трех чисел, стоящих в столбце y в строках с номерами a_1, a_2, a_3 (обозначим эту сумму через S). Аналогично сумма трех чисел, стоящих в другом произвольном столбце z в строках с номерами a_1, a_2, a_3 , также равна S . Выберем строки с номерами a_1, a_2, a_3 и столбцы с номерами x, y, z . Сумма девяти чисел, стоящих на их пересечении, будет равна нулю. Но она также равна $3S$, т. е. $S = 0$. В силу произвольности выбора чисел $a_1, a_2,$

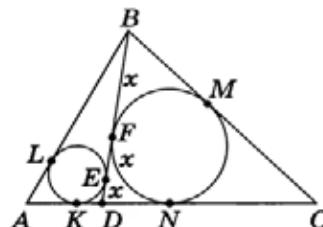


Рис. 148

a_3, x, y, z мы показали, что сумма любых трех чисел, стоящих в одном столбце, равна нулю. Рассмотрим теперь четыре произвольных числа k, l, m, n , стоящие в одном столбце. Для них $k + l + m = k + l + n = 0$ и $k + l + m = k + m + n = 0$. Из первого равенства получаем $m = n$, а из второго равенства получаем $l = n$, т. е. $l = m = n$. Теперь из $l + m + n = 0$ получаем $l = m = n = 0$. В силу произвольности выбора чисел мы доказали, что все числа в таблице равны нулю.

10 класс

351. Из теоремы Виета получаем $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{c}{a}$ и $\sin \alpha + \cos \alpha = -\frac{b}{a}$. Нам требуется доказать равенство $b^2 = a^2 + 2ac$. Так как $a \neq 0$, то разделим это равенство на a^2 . Нам нужно доказать равенство $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + 2\frac{c}{a}$. Получаем $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = 1 + 2\frac{c}{a}$, что и требовалось.

352. См. решение задачи 349.

353. Ответ. $a = b = 2$.

Первое решение. Пусть НОД $(a; b) = d$. Тогда $a = a_1d$, $b = b_1d$, где НОД $(a_1; b_1) = 1$, и тогда НОК $(a; b) = a_1b_1d$. Отсюда $a_1b_1d + d = a_1db_1d$, или $a_1b_1 + 1 = a_1b_1d$, откуда $a_1b_1(d - 1) = 1$, т. е. $a_1 = b_1 = 1$ и $d = 2$, значит, $a = b = 2$.

Второе решение. Предположим, что $a > b$. Тогда НОК $(a; b) : a$, $ab : a$, значит, и НОД $(a; b) : a$. Но $1 \leq \text{НОД} (a; b) \leq b < a$ — противоречие. Аналогично невозможен случай $a < b$. Поэтому $a = b$, и из условия получаем $a + a = a^2$, откуда $a = b = 2$.

Замечание. Другое решение можно было получить, воспользовавшись равенством НОК $(a; b) \cdot \text{НОД} (a; b) = ab$.

354. Пусть BP — высота равнобедренного треугольника FBE (рис. 149). Тогда из подобия $\triangle AEM \sim \triangle BPE$ следует, что $\frac{ME}{PE} = \frac{AE}{BE}$. Аналогично

$$\frac{NF}{PF} = \frac{CF}{BF}. \quad \text{Далее } PE = PF = \frac{EF}{2},$$

$AE = AK$, $CF = CK$, где K — точка касания окружности со стороной AC .

С учетом равенства

$$BE = BF = \frac{AB + BC - (AE + CF)}{2} = \frac{2AC - (AK + CK)}{2} = \frac{AC}{2} \quad \text{получаем}$$

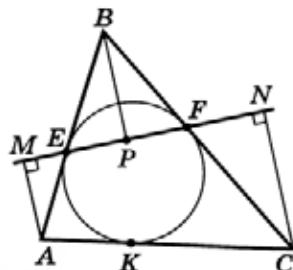


Рис. 149

$\frac{2ME}{EF} + \frac{2NF}{EF} = \frac{2AK}{AC} + \frac{2CK}{AC} = \frac{2(AK + CK)}{AC} = 2$. Утверждение доказано.

355. Ответ. Не мог.

Рассмотрим число $N + 142\ 857 \cdot 7N = N + 999\ 999N = 1\ 000\ 000N$. Его сумма цифр равна сумме цифр числа N . Значит, Петя не мог каждый раз получать результат больше предыдущего.

11 класс

356. Например, подойдет функция $f(x) = x^2$. Действительно, $f(\sin \alpha) + f(\cos \alpha) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $4f(\sin \alpha \cos \alpha) = 4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (2 \sin \alpha \cos \alpha)^2 = \sin^2(2\alpha)$, а неравенство $1 \geq \sin^2(2\alpha)$ выполняется для любого α .

357. Ответ. $\frac{8}{27} a^3$.

Каждый из таких треугольников равносторонний, так как его стороны равны половинам диагоналей граней куба. Тогда вершины рассматриваемого многогранника — центры этих треугольников (рис. 150). При повороте куба вокруг диагонали A_1C , переводящем куб в себя (например, $A \rightarrow B_1 \rightarrow D_1 \rightarrow A$, $C_1 \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C_1$), вершины сечения также меняются местами ($K \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow K$), поэтому центр T треугольника KLM лежит на диагонали A_1C , а плоскость KLM перпендикулярна A_1C . Тогда из подобия $\triangle TA_1K \sim \triangle AA_1C$

(рис. 151) находим $\frac{TA_1}{A_1K} = \frac{A_1A}{A_1C} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, т. е. $TA_1 = \frac{a}{2\sqrt{3}} \Rightarrow OT = \frac{2}{3} OA_1$.

Значит, A_1 переходит в T при гомотетии с центром O и коэффициентом $k = \frac{2}{3}$. Аналогично получаем и остальные вершины многогранника. Следовательно, он является кубом, гомотетичным исходному, а его объем $V = \left(\frac{2}{3}\right)^3 a^3$.

358. Прямая $y = kx + b$ касается параболы $y = x^2$, если уравнение $x^2 = kx + b$ имеет единственное решение, т. е. $D = k^2 + 4b = 0$, откуда $4b_i = -k_i^2$, $i = 1, 2, 3$. Тогда $4b_3 =$

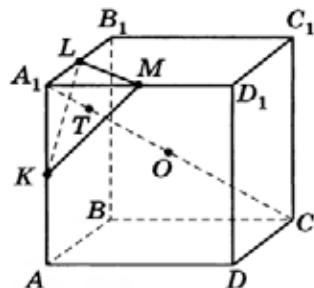


Рис. 150

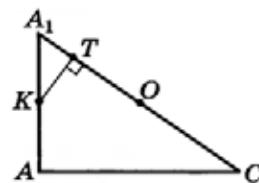


Рис. 151

$= -k_3^2 = -(k_1 + k_2)^2 = -k_1^2 - 2k_1k_2 - k_2^2 \geq -2k_1^2 - 2k_2^2 = 8b_1 + 8b_2$,
так как $k_1^2 + k_2^2 \geq 2k_1k_2$.

359. Ответ. Не мог.

Рассмотрим число $N + 76\ 923 \cdot 13N = N + 999\ 999N = 1\ 000\ 000N$. Его сумма цифр равна сумме цифр числа N . Значит, Петя не мог каждый раз получать результат больше предыдущего.

360. Ответ. Нельзя.

Предположим, что мы смогли нарисовать на плоскости 2005 ненулевых векторов так, что из любых 10 из них можно выбрать 3 с нулевой суммой. Выберем прямую, которая не перпендикулярна ни одному из нарисованных 2005 векторов. Рассмотрим проекции нарисованных векторов на выбранную прямую. Ни одна из этих проекций не равна нулевому вектору. При этом по крайней мере 1003 проекции направлены в одну сторону. Выберем 10 векторов, проекции которых направлены в одну сторону. Тогда проекции любых трех из них направлены в одну сторону, и поэтому их сумма не равна нулю. (Так как если сумма векторов равна нулю, то и сумма проекций этих векторов на прямую также равна нулю.)

2006–2007

▼ 6 класс

361. Ответ. 2, 4, 4, 5, 5.

Пусть Вася решил в 2 раза больше задач, чем Петя. Остальные трое ребят вместе решили не больше $3 \cdot 5 = 15$ задач, так как каждый может решить не более 5 задач. Следовательно, Петя и Вася вместе решили не меньше 5 задач. Если Петя решил 1 задачу (или меньше), то Вася решил 2 (или меньше), и вместе они решили 3 задачи (или меньше). Значит, этот случай не подходит. Если Петя решил 3 задачи (или больше), то Вася должен был решить 6 задач (или больше). Но на олимпиаде только 5 задач. Поэтому Петя решил ровно 2 задачи, а Вася — 4 задачи. Остальные трое ребят вместе решили $20 - 4 - 2 = 14$ задач. Это возможно, только если один из них решил 4 задачи, а остальные двое — по 5 задач.

362. Ответ. См. рисунок 152.

363. Ответ. Например, 07:18:29 и 07:34:56.

364. Ответ. Не могло.

Заметим, что после каждого обмена количество фантиков у ребят из 6 класса изменяется на четное число (либо на 2,

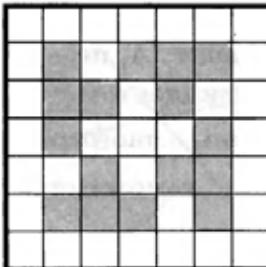


Рис. 152

либо на 4). Но так как у них изначально была ровно 1000 фантиков — четное число, то после каждого обмена общее количество фантиков у ребят должно оставаться четным числом. А число 1111 нечетное.

365. Ответ. 88 622.

Количество цифр, выложенных на столе, равно 13. Суммы — не более чем двузначные числа, поэтому они вместе могли дать не более шести цифр. Следовательно, все четыре суммы — двузначные числа. При прибавлении цифры нельзя перескочить через десятичный разряд, поэтому ровно одна из сумм (первая) начинается с 1, а остальные суммы начинаются с 2. Но $8 + 8 + 4 = 20$, а цифра 0 отсутствует. Значит, первые три цифры числа N — это 8, 8 и 6. Отсюда вторая сумма — 22 ($6 + 8 + 8$), третья — 24, четвертая — 26, так как третья и четвертая суммы начинаются с 2, и для сумм остались цифры 2, 4 и 6. Цифра 4 на столе одна, поэтому число N не может начинаться с 86 или 68. Значит, $N = 88\ 622$ ($2 = 24 - 22$, $2 = 26 - 24$).



7 класс

366. Ответ. 4 внука и 7 внучек.

Количество сестер у первой девочки делится на 2, а у второй девочки делится на 3. Значит, если от количества внучек отнять единицу, то получится число, делящееся на $2 \cdot 3 = 6$. Но от 1 до 10 только 6 является таким числом. Значит, внучек 7, а внуков 4.

367. Ответ. Кратное 24 часам.

Заметим, что через целое число часов ни минуты, ни секунды не изменяются (если было $xy : ab : cd$, то стало $dc : ab : cd$). С другой стороны, должно получиться по условию $dc : ba : ux$, т. е. ux совпадает с cd , а тогда xy совпадает с dc . Значит, время на фотографиях одинаковое. Следовательно, прошло время, кратное 24 часам.

368. Ответ. 8 «домиков».

Рисунок 153 показывает, что детали для 8 «домиков» в коробку не помещаются (это также следует из того, что суммарная площадь 8 «домиков» равна 50). В то же время детали для 7 «домиков» уложить в коробку можно: достаточно на рисунке 153 убрать один из перекрывающихся квадратиков 2×2 и одну «крышу».

369. Ответ. Не могут.

Предположим, что ребята могут заплатить по 2006 рублей из своих копилок одинаковым числом монет. Тогда у кого-то из ребят будут монеты только одного достоинства (только в 1, 2 или 5 руб-

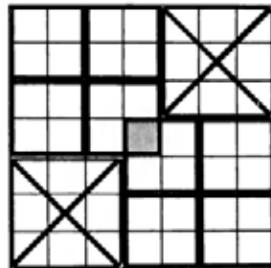


Рис. 153

лей), иначе будет противоречие с условием. Если у кого-то в копилке есть монеты достоинством в 5 рублей, то у него должны быть и монеты другого достоинства, поскольку 2006 на 5 не делится. Также не может быть варианта, что у кого-то есть монеты достоинством в 1 рубль. В этом случае, чтобы набрать 2006 рублей, потребуется 2006 монет для одного из мальчиков. А для другого мальчика 2006 монет другого достоинства в сумме составит больше 2006 рублей. Значит, у кого-то (для определенности у Пети) в копилке только монеты достоинством в 2 рубля. Тогда у Коли в копилке должны быть монеты достоинством и в 5 рублей, и в 1 рубль. Чтобы набрать 2006 рублей, Петя потребуется ровно 1003 монеты. Однако Коля не сможет набрать 2006 рублей при помощи 1003 монет достоинством в 1 или 5 рублей, поскольку нечетное количество (1003) нечетных чисел (1 или 5) в сумме дает нечетное число, а 2006 — четное.

370. Ответ. 72 819.

Пусть \overline{ABCDE} — число, полученное из исходного перестановкой цифр в порядке убывания. Тогда $\overline{ABCDE} - \overline{EDCBA} = 171\ 540 - 85\ 608 = 85\ 932$. Цифра 8 разности может быть получена, только если $A = 9$, откуда $E = 1$ ($E \neq 0$). Мы получили ребус $\overline{BCD1} - \overline{DCB9} = 85\ 932$, следовательно, $\overline{BCD1} - \overline{DCB9} = 5932$. При вычитании мы занимали одну единицу у числа B , поскольку $\overline{CD1} < \overline{CB9}$, поэтому $B - D = 6$. Но $B \leq 8$, $D \geq 2$ (цифры 1 и 9 уже встретились в числе), значит, $B = 8$, $D = 2$. Осталось найти цифру C . При перестановке цифр остаток r от деления числа на 9 не изменяется (по признаку делимости числа на 9). Но 85 608 делится на 9, следовательно, $r = 0$. Итак, $12C89 : 9$, поэтому $C = 7$. Тогда искомое число есть $85\ 608 - 12\ 789 = 72\ 819$.

Отметим, что C можно найти и по-другому. Число, составленное Колей, равно $85\ 608 - 12C89$. Независимо от значения C эта разность начинается на 7. Поскольку семерка среди найденных нами цифр в числе не встречается, то $C = 7$, а искомое число равно $85\ 608 - 12\ 789 = 72\ 819$.



8 класс

371. Пусть m и n — искомые числа. По условию $m + n = 2006m + n : 2006$, откуда $2005n : 2006 = 2005m$ и $n = 2006m$. Значит, $m + n = 2007m$, откуда и следует утверждение задачи.

372. Ответ. Нельзя.

Достаточно заметить, что при указанных операциях из пары чисел, отличающихся на 1, получается пара чисел, отличающихся на 1.

373. Получим сначала числа $\sqrt{5} - \sqrt{2}$ и $\sqrt{5} + \sqrt{2}$. Перемножив их, получим число 3. Последовательным домножением числа $\sqrt{5}$ на $\sqrt{2}$ и $\sqrt{5}$ мы получим числа $\sqrt{10}, \sqrt{20}, \sqrt{100} = 10$. И наконец, $10 - 3 - 3 - 3 = 1$.

Замечание. Приведенный способ не единственный.

374. Ответ. Могли.

Например, Петя сфотографировал часы в 08:56:47 и 09:13:27. Между снимками прошло 16 минут 40 секунд, т. е. 1000 секунд.

375. Проведем в прямоугольном треугольнике ABC медиану CM из вершины прямого угла C и средние линии MN и MK , параллельные катетам (рис. 154). Они рассекут его на четыре равных прямоугольных треугольника с гипотенузами, равными $2c$, причем у двух из них (треугольников MNC и MCK) общей гипотенузой будет медиана CM исходного треугольника.

Построим три круга радиуса c с центрами в серединах гипотенуз этих четырех треугольников. Каждый из них будет описанным для соответствующих треугольников и потому целиком закроет их. Поэтому вместе эти круги целиком закроют исходный треугольник (рис. 154).

Замечание. Схема на рисунке 154 не единственная возможная. Например, на ней можно немного сдвинуть самый верхний круг влево так, что треугольник останется целиком закрыт кругами.

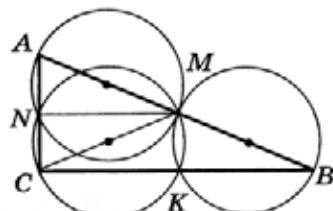


Рис. 154

9 класс

376. Ответ. Не может.

Пусть такие наборы из шести и пяти чисел существуют. Заметим, что все простые числа, кроме 2, нечетные. Если первая сумма не содержит число 2, то она четна (сумма шести нечетных чисел). Но тогда вторая сумма, которая тем более не начинается с 2 (иначе сумма шести последовательных простых чисел будет больше суммы первых пяти простых чисел), будет нечетна и данные суммы не могут быть равны. Если первая сумма есть $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13$, а вторая сумма начинается с 3, то $2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 > > 3 + 5 + 7 + 11 + 13$. Значит, вторая сумма должна быть не меньше чем $5 + 7 + 11 + 13 + 17$. Сравнивая эти суммы, видим, что $17 > 2 + 3$, поэтому вторая сумма больше.

377. Ответ. Верно.

Первое решение. По условию $a^2 < 4b$, $c^2 < 4d$. Покажем, что тогда $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 < 4\left(\frac{b+d}{2}\right)$. Имеем $\left(\frac{a+c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + 2ac + c^2) \leqslant$

$\leq \frac{1}{4}(a^2 + (a^2 + c^2) + c^2) = \frac{1}{2}(a^2 + c^2) \leq \frac{1}{2}(4b + 4d)$. (Мы использовали неравенство $2ac \leq a^2 + c^2 \Leftrightarrow 0 \leq (a - c)^2$.)

Второе решение. Пусть $f_1 = x^2 + ax + b$, $f_2 = x^2 + cx + d$. По условию $f_1 > 0$ и $f_2 > 0$ при всех x , так как $D_1 < 0$ и $D_2 < 0$.

Но тогда и $f = x^2 + \frac{a+c}{2}x + \frac{b+d}{2} = \frac{f_1 + f_2}{2} > 0$, значит, уравнение $f = 0$ не имеет корней.

378. Первое (наименьшее) число исходного набора может иметь вид только $4k - 2$, или $4k - 1$, или $4k$, или $4k + 1$ (соответственно это числа, дающие остатки 2, 3, 0 и 1 при делении на 4).

А каждый из таких наборов заканчивается числом, не меньшим $4k + 2$. Значит, все возможные наборы из пяти последовательных чисел обязательно содержат в себе два соседних числа $4k + 1$ и $4k + 2$. Теперь заметим, что после двух преобразований оба числа такого вида станут равными $2k$: $4k + 1 \rightarrow 4k \rightarrow 2k$; $4k + 2 \rightarrow 2k + 1 \rightarrow 2k$.

379. Условие задачи равносильно тому, что $\angle PAC + \angle PQC = 180^\circ$, т. е. $\angle A + \angle PQH = 90^\circ$ (рис. 155).

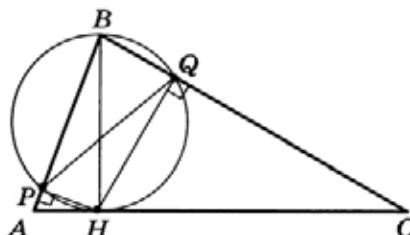


Рис. 155

Но четырехугольник $PBQH$ вписанный, так как $\angle HPB + \angle HQB = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$. Поэтому $\angle PQH = \angle PBH$ (как вспомогательные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу), и, значит, $\angle A + \angle PQH = \angle A + \angle PBH = 90^\circ$, т. е. $\angle BAH + \angle ABH = 90^\circ$. Это и означает, что $\angle BHA = 90^\circ$. Утверждение доказано.

380. Ответ. Нельзя.

Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски. Заметим, что изначально на черных клетках стояло 25 шашек (нечетное число). Покажем, что после каждого хода количество шашек, стоящих на черных клетках, будет нечетным. Действительно, после выполнения хода либо две шашки ушли с черных клеток, либо две шашки пришли на черные клетки, либо одна шашка пришла, а другая ушла. Также при снятии с доски пары шашек количество шашек, стоящих на черных клетках, либо не изменяется, либо уменьшается (увеличивается) на 2. Поэтому хотя бы одна шашка останется на черной клетке, а значит, и на доске.

▼ 10 класс

381. Пусть сначала на доске был написан трехчлен $ax^2 + bx + c$. Тогда через n минут будет выписан трехчлен $(a+n)x^2 + (b+n)x + (c+n)$. Его дискриминант $D = -(b+n)^2 - 4(a+n)(c+n) = -3n^2 + (2b - 4a - 4c)n + (b^2 - 4ac)$ является квадратным трехчленом (относительно переменной n) с отрицательным старшим коэффициентом. Значит, при некотором натуральном n дискриминант будет отрицательным. Поэтому на доске появится трехчлен, не имеющий корней.

382. Пусть в трех Орденах суммарно N магистров. Если первый магистр до встречи знал x магистров, то после встречи он стал знать $2x$ магистров, т. е. $2x + 1 = N$. Значит, в первом Ордене $x + 1 = \frac{N-1}{2} + 1$ магистр. Аналогично во втором Ордене $\frac{N-1}{3} + 1$ магистр, в третьем — $\frac{N-1}{4} + 1$ магистр. Но тогда во всех трех Орденах магистров $\frac{N-1}{2} + 1 + \frac{N-1}{3} + 1 + \frac{N-1}{4} + 1 = \frac{13N+23}{12} > N$. Значит, кто-то из магистров обсчитался.

383. Ответ. Не существует.

Предположим, что существует такое число x , что все три числа, данные в условии, целые. Тогда их сумма, равная x , тоже целая. Первое число $2x - \sqrt{x^2 + 2}$ будет целым тогда, когда x — целое и $\sqrt{x^2 + 2}$ — целое. Но из равенства $x^2 + 2 = y^2$ следует: $y^2 - x^2 = 2$. Однако разность между двумя квадратами целых чисел не может равняться 2, поскольку между 0^2 и 1^2 разность равна 1, а между любыми двумя другими квадратами она хотя бы равна 3. Таким образом, первое число не может быть целым.

384. Утверждение задачи равносильно тому, что $\angle ABK = \angle ACK$ (рис. 156). Но по свойству серединного перпендикуляра $DB = DC$ и $KB = KC$. Значит, $\triangle BKD \cong \triangle CKD$ по трем сторонам. Отсюда $\angle ACK = \angle DCK = \angle DBK$. Но $\angle DBK = \angle ABK$, т. е. $\angle ACK = \angle ABK$. Следовательно, точки A, B, C, K лежат на одной окружности. Утверждение доказано.

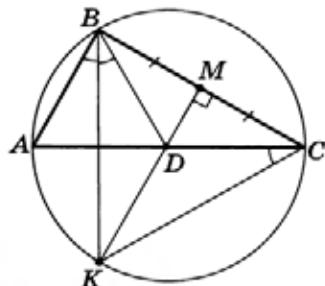


Рис. 156

385. Ответ. Не могут.

Пусть такой треугольник существует и γ — его наибольший угол. Тогда $\gamma \geq 60^\circ$, и, значит, $2\gamma \geq 120^\circ$. Неравенство $\sin \beta < \sin (2\gamma)$ может выполняться, если точка C триго-

нометрической окружности имеет большую ординату, чем точка A (рис. 157). Но это означает, что $\beta + 2\gamma < 180^\circ$. С другой стороны, $\gamma \geq \alpha$, поэтому

$180^\circ = \alpha + \beta + \gamma < \beta + 2\gamma < 180^\circ$ — противоречие.

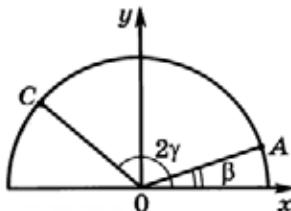


Рис. 157

11 класс

386. По условию $a^2 + \sqrt{b} = a + b$, откуда $a^2 - a = b - \sqrt{b}$, т. е. $a(a - 1) = \sqrt{b}(\sqrt{b} - 1)$. Заметим, что $a - 1 \geq 0$, $\sqrt{b} - 1 \geq 0$. Значит, $a = \sqrt{b}$ (иначе каждый из сомножителей в одной из частей равенства был бы больше соответствующего сомножителя в другой части), т. е. $a^2 = b$, и числа a и b — одной четности, откуда и следует утверждение задачи.

387. Ответ. Не существует.

Предположим, что существует такое число x , что все три числа, данные в условии, целые. Тогда их сумма, равная $-x$, тоже целая. Поскольку первое число $x - \frac{1}{x}$ должно быть целым, то $\frac{1}{x}$ — целое. Это возможно только при $x = \pm 1$. Но в этом случае $\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{2}$, т. е. второе число не является целым.

388. Производная квадратного трехчлена — линейная функция, которая обращается в нуль в точке, абсцисса которой совпадает с вершиной параболы, являющейся графиком трехчлена. Поэтому в этой точке сумма трехчленов отрицательна. Отсюда следует, что в этой точке значение по крайней мере одного из трехчленов отрицательно.

389. Ответ. Нуль баллов (все бегуны получают по 0 баллов). Рассмотрим любую пару бегунов. Как в начале, так и в конце пути один и тот же бегун находится впереди другого. Тогда либо вообще ни один из них не обгонял другого, либо каждый (из этих двоих) обогнал другого по одному разу. Значит, на обгонах друг друга (в рассмотренной паре) бегуны заработали по 0 баллов. Таким образом, в итоге все бегуны получат по 0 баллов.

Замечание. Из решения видно, что утверждение остается верным и в случае непостоянства скоростей бегунов, когда количество обгонов в паре может быть сколь угодно большим.

390. Отложим от вершины S трехгранного угла $SABC$ на ребрах отрезки $SA = SB = SC = 1$ (рис. 158). Пусть A_1 , B_1 , C_1 соответственно середины отрезков BC , CA и AB . Тогда из равнобедренного треугольника BSA

$$BC_1 = BS \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \angle BSA\right) = \sin\frac{\gamma}{2}, \quad \text{т. е.}$$

$$BA = 2 \sin\frac{\gamma}{2}. \text{ Аналогично } CA = 2 \sin\frac{\beta}{2},$$

$CB = 2 \sin\frac{\alpha}{2}$. Но из неравенства треугольника следует, что $BC < CA + AB$, т. е. $2 \sin\frac{\alpha}{2} < 2 \sin\frac{\beta}{2} + 2 \sin\frac{\gamma}{2}$. Утверждение доказано.

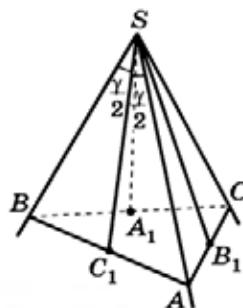


Рис. 158

2007–2008

▼ 6 класс

391. Например, $2003 + 2 \cdot 1 + 2 = 2007 \rightarrow 2003 + 2 \cdot 2 + 1 = 2008$.

392. Ответ. Мог.

Заметим, что если в банке было ровно 8 литров меда, то за 4 дня Винни Пух мог съесть весь мед из банки. Если же в банке было 11 литров меда, то Винни Пух мог съесть весь мед из банки за 5 дней. Поэтому если у него изначально было две банки меда с 11 литрами и одна банка меда с 8 литрами (всего 30 литров), то он мог съесть весь мед за $5 + 5 + 4 = 14$ дней.

393. Ответ. Не мог.

Заметим, что сумма нечетного числа нечетных слагаемых нечетна, а сумма четного числа нечетных слагаемых четна. Числа 1, 3 и 5 нечетные. Поэтому если репка весит четное число килограммов, то для ее взвешивания потребуется четное число гирь, а если репка весит нечетное число килограммов, то для ее взвешивания потребуется нечетное число гирь. Таким образом, в любом случае количество гирь, которое потребуется бабке и деду для взвешивания репки, будет отличаться на четное число. Однако число 3 нечетное.

394. Например, см. рисунок 159.

Идея решения основана на симметричном расположении букв относительно центра квадрата.

395. Ответ. Не сможет.

Какое бы число мама ни задумала, после 100 прибавлений ее числа к Петиному две последние цифры полученной суммы будут совпадать с двумя последними цифрами его числа. Значит, если Петя задумает, напри-

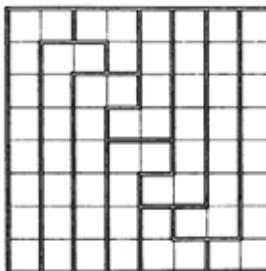


Рис. 159

мер, число 11, то после 100 сложений, т. е. через 1 час 40 минут, он получит сумму, оканчивающуюся на две одинаковые цифры, и мама отпустит его гулять. Если он, конечно, не ошибется в вычислениях.

7 класс

396. Например, $2003 + 1 \cdot 2 + 2 = 2007 \rightarrow 2003 + 1 + 2 \cdot 2 = 2008$.

397. Приведем один из примеров взвешивания. При первом взвешивании положим на чашки по 7 монет. Если весы окажутся в равновесии, то все 14 взвешиваемых монет настоящие и требуемые 14 монет уже найдены. Если же одна из чашек перевешивает, то на другой обязательно находится более легкая, т. е. фальшивая, монета. В этом случае вторым взвешиванием положим на чашки по 7 монет из тех, которые мы еще не взвешивали. Если установится равновесие, то все 14 взвешиваемых монет настоящие. Если же одна из чашек будет перевешивать, то на ней 7 настоящих монет, так как среди взвешиваемых монет не более одной фальшивой и она попала на другую чашку. Тогда на более тяжелой чашке первого взвешивания еще 7 настоящих монет, т. е. мы определили 14 настоящих монет.

398. Ответ. Восьмое.

Если Мишу опередили x участников, то он опередил $2x$ участников, т. е. всего участников без Миши будет $3x$. Значит, количество участников без одного делится на $1 + 2 = 3$. Аналогично количество участников без одного делится на $1 + 3 = 4$, т. е. количество участников без одного должно делиться на 12. Наименьшее такое число — 12. Но если участников $12 + 1 = 13$, то Мишу опередят четверо ребят, Колю — трое и Саша не сможет «вклиниваться» между ними. Если участников $1 + 2 \cdot 12 = 25$, то Мишу опередят 8 ребят, Колю — 6 ребят, значит, Сашу опередят 7 ребят. Если же участников больше, то между Мишой и Колей в турнирной таблице будет по крайней мере двое.

399. Например, см. рисунок 160. Идея его построения основана на том, что вначале нужно выделить квадрат 3×3 , центральная клетка которого граничит с 8 закрашенными клетками, и понять, что этот квадрат может стоять только в углу квадрата 5×5 .

400. Ответ. Сможет.

Если Петя задумает число с двумя цифрами разной четности, то маме нужно назвать, например, число 20. Тогда четность каждой из двух последних цифр после каждого прибавления будет сохра-

1			2	0
3	6		4	1
			5	
		8	7	

Рис. 160

няться, и эти цифры никогда не совпадут. Если же цифры Петиного числа будут одной четности, то маме достаточно назвать число 50. После каждого двух прибавлений последнее две цифры будут повторяться, т. е. не будут совпадать, а после первого, третьего, пятого и т. д. прибавления эти цифры будут иметь разную четность, т. е. тоже не совпадут.

8 класс

401. Ответ. Например, $2002 + 45 : 9 = 2007 \rightarrow 2002 + 54 : 9 = 2008$.

402. Из условия следует, что $\angle ABM = \angle AMB = \angle NMB = \angle MNB = \angle CNB = \angle CBN$. Но тогда $\angle ABN = \angle CBM$ (рис. 161). Кроме того, $\angle ANB = \angle CMB$, так как $\angle BNM = \angle BMN$. Тогда $\triangle ABN \sim \triangle CBM$ по второму признаку. Отсюда следует, что $AB = CB$.

403. Утверждение следует из тождества $(a^2 - 1)(b^2 - 1) = a^2b^2 - a^2 - b^2 + 1 = a^2b^2 + 1 + 2ab - 2ab - a^2 - b^2 = (ab + 1)^2 - (a + b)^2$.

404. Ответ. Не существует.

Предположим, что искомое число (назовем его M) нашлось. Напомним признак делимости на 9: «Число делится на 9, если сумма его цифр делится на 9». Рассмотрим в числе M две соседние цифры a и b . Назовем M_a число, которое получается из M вычеркиванием цифры a . Назовем M_b число, которое получается из M вычеркиванием цифры b . Числа M_a и M_b отличаются лишь одной цифрой (в M_a осталась цифра b , а в M_b осталась цифра a), и у обоих этих чисел сумма цифр делится на 9. Поэтому цифры a и b одинаковые (так как они не нули). Так как a и b — две произвольные соседние цифры, то в каждой паре соседние цифры одинаковы. Значит, в числе M все цифры одинаковы. Пусть они равны d . Заметим, что $d \neq 9$, так как в этом случае число M делилось бы на 9. Теперь рассмотрим число, состоящее из 29 цифр d . Его сумма цифр равна $29d$, что не делится на 9, — противоречие.

405. Ответ. Не всегда.

Первое решение. Предположим, Петя отметил 10 клеток так, как показано на рисунке 162. Заметим, что из областей A , B и C нельзя вырезать ни одной фигурки. В области D осталось 79 клеток, поэтому из нее нельзя вырезать больше 19 фигурок.

Второе решение. Предположим, Петя отметил 10 клеток так, как показано на рисунке 163. Рассмотрим теперь шахматную раскраску доски. Заметим, что каждая фигурка содержит по две черные и две белые клетки. В области A

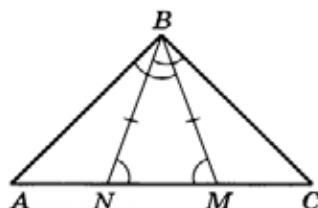


Рис. 161

осталось 19 черных клеток, поэтому из нее нельзя вырезать больше 9 фигурок. В области B осталась 21 черная клетка, поэтому из нее нельзя вырезать больше 10 фигурок.

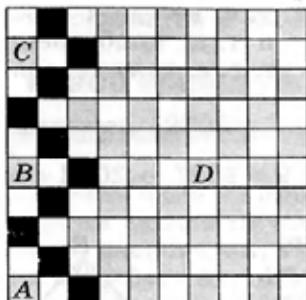


Рис. 162

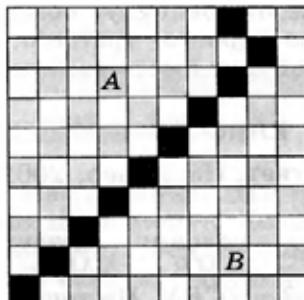


Рис. 163

Замечание. Заметим, что на рисунке 162 в области D осталось 37 черных клеток, поэтому из нее можно вырезать не более 18 фигурок.

▼ 9 класс

406. Ответ. 1 и 2.

По теореме Виета $b = D \cdot 2D = 2D^2$, $a = -(D + 2D) = -3D$, т. е. трехчлен равен $x^2 - 3Dx + 2D^2$. Его дискриминант $D = (-3D)^2 - 4 \cdot 2D^2$, откуда $D = D^2$, т. е. $D = 0$ (в этом случае оба корня одинаковы и равны 0) или $D = 1$ (в этом случае корни равны 1 и 2).

407. Пусть монет достоинством в 1 рубль — x , 2 рубля — y , 5 рублей — z . Тогда $x + y + z = 1000$, $x + 2y + 5z = 2000$. Вычтем из второго равенства первое, умноженное на 2. Получим, что $x = 3z$. Таким образом, число x не меньше 10 и делится на 3, значит, оно составное.

408. Первое решение. Точка I является точкой пересечения биссектрис треугольника ABC (рис. 164), т. е. AI — биссек-

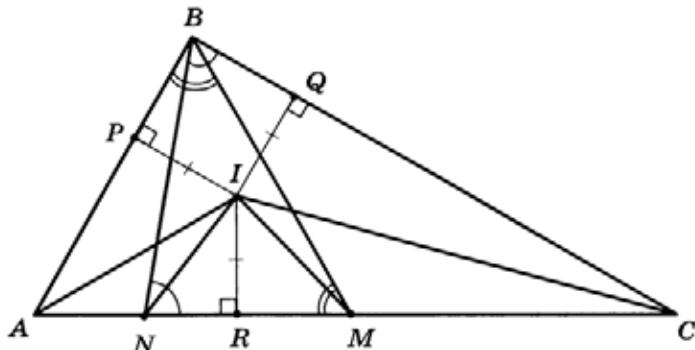


Рис. 164

триса равнобедренного треугольника BAM ($AM = AB$). Но тогда она является его медианой и высотой, т. е. серединным перпендикуляром к стороне BM треугольника BMN . Аналогично точка I лежит на серединном перпендикуляре к стороне BN этого треугольника. Значит, I — центр описанной окружности треугольника BMN . Отсюда $IM = IN$.

Второе решение. Пусть P, Q, R — точки, в которых вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AB, BC, CA соответственно. Тогда $AM = AR + RM = AP + + RM = (AB - BP) + RM$. Но $AM = AB$, значит, $RM = BP$. Аналогично $RN = BQ$. Следовательно, $RM = RN$, так как $BP = BQ$. Отсюда IR — серединный перпендикуляр к отрезку MN , т. е. $IM = IN$.

409. Ответ. Не существует.

Предположим, что искомое число (назовем его M) нашлось. Напомним признак делимости на 11: «Число делится на 11, если знакопеременная сумма его цифр делится на 11». Рассмотрим в числе M две соседние цифры a и b . Назовем M_a число, которое получается из M вычеркиванием цифры a . Назовем M_b число, которое получается из M вычеркиванием цифры b . Числа M_a и M_b отличаются лишь одной цифрой (в M_a осталась цифра b , а в M_b осталась цифра a), и у обоих этих чисел знакопеременная сумма цифр делится на 11. Поэтому цифры a и b одинаковые. Так как a и b — две произвольные соседние цифры, то в каждой паре соседние цифры одинаковы. Но число из 29 одинаковых цифр не делится на 11 — противоречие.

410. Ответ. Могло.

Пусть Петя приклейт клетки так, чтобы в получившемся наборе оказалась ровно одна фигурка вида . Предположим, что Вася сможет сложить прямоугольник Π из получившихся фигурок. Заметим, что площадь каждой фигурки равна 4. Поэтому площадь прямоугольника Π будет четной. Значит, по крайней мере одна из его сторон будет иметь четную длину.

Рассмотрим шахматную раскраску прямоугольника Π . Из-за того, что у него есть сторона с четной длиной, количество черных и белых клеток в нем будет одинаковым. Рассмотрим теперь шахматные раскраски четырехклеточных фигурок. У фигурок вида , , ,  по 2 черные

и белые клетки. А у фигурки  3 клетки одного цвета, а одна — другого. Поэтому, если мы сложим прямоугольник из полученных фигурок, у него будет на 2 клетки одного цвета больше, чем другого, — противоречие.

▼ 10 класс

411. Пусть $a > 0$ — первый член прогрессии, $d > 0$ — ее разность. Из условия следует, что $(a + kd) + (a + ld) + \dots + (a + md) = (a + sd) + (a + td)$, где k, l, m, s, t — целые неотрицательные числа. Тогда $a = (s + t - k - l - m)d = nd$, где n — натуральное, т. е. прогрессия имеет вид $nd, (n+1)d, (n+2)d, \dots$. Для такой прогрессии утверждение задачи очевидно.

412. Упорядочим числа по возрастанию: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{12}$. Если $x_3 \leq 33$, то тогда $x_1 + x_2 + x_3 \leq 99$. Поэтому $x_{12} \geq \dots \geq x_4 \geq x_3 \geq 34$. Из условия $x_1 + x_2 + x_3 \geq 100$. Тогда $x_1 + x_2 + \dots + x_{12} \geq x_1 + x_2 + x_3 + 9x_4 \geq 100 + 9 \cdot 34 = 406$.

413. Во-первых, $\angle DCK = \pi - \angle DCB = \angle DAB$ (четырехугольник $ABCD$ — вписанный) (рис. 165). Во-вторых, в силу параллельности $\angle CKD = \pi - \angle KEA = \pi - \angle DEA = \angle DBA$, т. е. треугольники ABD и CKD подобны по двум углам, откуда $\frac{DK}{DC} = \frac{DB}{DA}$, что и требовалось доказать.

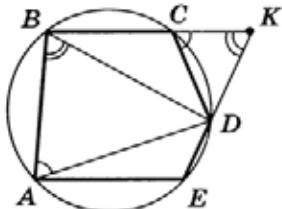


Рис. 165

414. Пусть $f(x) = ax + b$ и $g(x) = cx + d$ — рассматриваемые линейные функции. Так как $f(x)^3 - g(x)^3 = (a - c)x^3 + \dots$, то $a = c$, иначе разность была бы кубической функцией. При этом $b \neq d$. Тогда $f(x)^3 - g(x)^3 = (b - d)(f(x)^2 + f(x)g(x) + g(x)^2)$. Заметим, что выражение

$$m^2 + mn + n^2 = \left(m + \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3n^2}{4} \geq 0,$$

причем оно равно нулю только при $m = n = 0$; в то же время не существует точки x , в которой $f(x) = g(x) = 0$. Поэтому трехчлен $(b - d)(f(x)^2 + f(x)g(x) + g(x)^2)$ принимает значения одного знака, т. е. не имеет корней.

Замечание. То, что трехчлен не имеет корней, можно проверить, непосредственно вычислив его дискриминант.

415. Ответ. Неверно.

Пусть изначально на доске были написаны числа 3 и 7. Заметим, что оба этих числа дают остаток 3 при делении на 4. Покажем, что любое дописанное на доску число также будет давать остаток 3 при делении на 4. Действительно, $3(4m+3)(4n+3) = 4(12mn + 9m + 9n + 8) + 3$ и $(4m+3) + (4n+3) + 1 = 4(m+n+1) + 3$. Однако квадраты натуральных чисел дают остатки 0 и 1 при делении на 4: $(2t)^2 = 4t^2$, $(2t+1)^2 = 4(t^2+t) + 1$.

▼ 11 класс

416. Ответ. 1338.

Заметим, что числа a и b будут степенями двойки с целыми неотрицательными показателями, т. е. $a = 2^k$, $b = 2^{2007-k}$. Тогда дискриминант

$$D = a^2 - 4b = 2^{2k} - 4 \cdot 2^{2007-k} = 2^{2k} - 2^{2009-k} \geq 0.$$

Отсюда $2^{2k} \geq 2^{2009-k}$, или $2k \geq 2009 - k$. Таким образом, $k \geq \frac{2009}{3} = 669 \frac{2}{3}$, т. е. $k \geq 670$. Но $k \leq 2007$, поэтому k может принимать $2007 - 670 + 1 = 1338$ различных целых значений. Осталось заметить, что каждому k соответствует ровно один искомый трехчлен.

417. Утверждение следует из цепочки равенств: $((n+1)^2 - 1) \times (n^2 - 1) = n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n = (n^2 + n)^2 - n^2 - n^2 - 2n = (n^2 + n)^2 - 2(n^2 + n) = (n^2 + n - 1)^2 - 1$.

418. Имеем $\angle ABK = \angle AMD = \pi - \angle BMD = \angle BCD$ (так как четырехугольник $MBCD$ вписанный) (рис. 166). Из параллельности BC и AD следует, что

$\angle BCD = \pi - \angle CDA = \pi - \angle KDA$, т. е. $\angle ABK = \pi - \angle KDA$, откуда и следует утверждение задачи.

419. Ответ. Например, $x = 669$, $y = 1338$.

Пусть $x = t$, $y = 2t$. Тогда $\sqrt{t} \cos \frac{2t\pi}{2 \cdot t} + \sqrt{2t} \cos \frac{t\pi}{2 \cdot 2t} = \sqrt{t} \cos \pi + \sqrt{2t} \cos \frac{\pi}{4} = -\sqrt{t} + \frac{\sqrt{2t}}{\sqrt{2}} = 0$. А так как 2007 делится на 3, то можно выбрать $x = 669$, $y = 1338$.

Замечание. Можно показать, что других пар натуральных чисел, удовлетворяющих условию задачи, не существует, т. е. возможны два ответа: $x = 669$, $y = 1338$ и $x = 1338$, $y = 669$.

420. Ответ. Неверно.

Пусть изначально на доске были написаны числа 5 и 8. Заметим, что оба этих числа дают остаток 2 при делении на 3. Покажем, что любое дописанное на доску число также будет давать остаток 2 при делении на 3. Действительно, $2(3m+2)(3n+2) = 3(6mn+4m+4n+2) + 2$ и $2((3m+2)+(3n+2)) = 3(2m+2n+2) + 2$.

Однако квадраты натуральных чисел дают остатки 0 и 1 при делении на 3: $(3t)^2 = 3(3t^2)$, $(3t \pm 1)^2 = 3(3t^2 \pm 2t) + 1$.

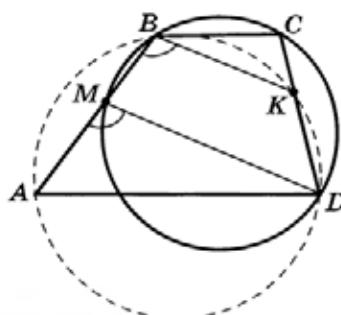


Рис. 166

От составителей	3
---------------------------	---

КЛАССИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОЛИМПИАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

1. Четность	4
2. Делимость и остатки	6
3. Принцип Дирихле	10
4. Принцип крайнего	13
5. Оценка + пример	15
6. Инварианты и раскраски	25
7. Полуинвариант	30
8. Неравенства	32
9. Игры	34
10. Метод математической индукции	38
11. Геометрия	40

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ РАЙОННЫХ ОЛИМПИАД

1994—1995	44	2001—2002	67
1995—1996	48	2002—2003	71
1996—1997	51	2003—2004	74
1997—1998	54	2004—2005	78
1998—1999	57	2005—2006	82
1999—2000	61	2006—2007	86
2000—2001	64	2007—2008	90

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ РАЙОННЫХ ОЛИМПИАД

1994—1995	95	2001—2002	141
1995—1996	101	2002—2003	148
1996—1997	108	2003—2004	155
1997—1998	114	2004—2005	163
1998—1999	120	2005—2006	171
1999—2000	127	2006—2007	178
2000—2001	132	2007—2008	185

Используемые обозначения

$n!$ — произведение первых n натуральных чисел, $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$;

$[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x ;

$\{x\}$ — дробная часть числа, $\{x\} = x - [x]$;

$\triangle ABC$ — треугольник ABC ;

S_{ABC} — площадь треугольника ABC ;

S_F — площадь фигуры F ;

P_{ABC} — периметр треугольника ABC ;

$\overset{\curvearrowleft}{AB}$ — дуга AB ;

\mathbb{R} — множество действительных чисел;

\mathbb{N} — множество натуральных чисел;

\mathbb{Z} — множество целых чисел;

\mathbb{Q} — множество рациональных чисел;

НОД ($a; b$) — наибольший общий делитель чисел a и b ;

НОК ($a; b$) — наименьшее общее кратное чисел a и b .

Под *правильной игрой* понимается стратегия (план) игры одного из игроков, обеспечивающая ему победу (ничью) независимо от игры его соперника.