С.Н.Олехник, М.К.Потапов, П.И.Пасиченко

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА.
НЕСТАНДАРТНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ: СПРАВОЧНИК.

Справочник посвящен задачам, которые для школьников считаются задачами повышенной трудности, требующим нестандартных методов решений. Приводятся методы решений уравнений и неравенств, основанные на геометрических соображениях, свойствах функций (монотонности, ограниченности, четности), применении производной. Книга ставит своей целью познакомить школьников с различными, основанными на материале программы общеобразовательной средней школы, методами решения, казалось бы трудных задач, проиллюстрировать широкие возможности использования хорошо усвоенных школьных знаний и привить читателю навыки употреблять нестандартные методы рассуждений при решении задач. Для школьников, абитуриентов, руководителей математических кружков, учителей и всех любителей решать задачи.

Справочное издание

Оглавление

Оглавление

От авторов

Имеется много уравнений и неравенств, для решения которых применимы необычные для школьника рассуждения. В данной книге приведены некоторые нестандартные методы решения уравнений и неравенств.

В книге считаются известными основные определения и факты из теории уравнений и неравенств: равносильность уравнений, уравнение-следствие, совокупность уравнений и т. д. Желающим освежить эти сведения рекомендуем следующие книги, где эти понятия содержатся:

1. Нестеренко Ю. В., Олехник С. Н., Потапов М. К. Задачи вступительных экзаменов по математике. М.: Наука, 1986.

2. Потапов М. К., Александров В. В., Пасиченко П. И. Алгебра и анализ элементарных функций. М.: Наука, 1980.

3. Вавилов В. В., Мельников И. И., Олехник С. Н., Пасиченко П. И. Задачи по математике. Уравнения и неравенства. М.: Наука, 1987.

Глава I
Алгебраические уравнения и неравенства

В этой главе рассматриваются алгебраические уравнения степени n, т. е. уравнения вида

$$P_n(x) = 0 \tag{I}$$

и алгебраические неравенства степени n, т. е. неравенства вида

$$P_n(x) > 0 \tag{II}$$

и

$$P_n(x) < 0, \tag{III}$$

где $P_n(x)$ — многочлен степени n, т. е.

$$P_n(x) \equiv a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0. \tag{IV}$$

При решении алгебраических уравнений и неравенств часто приходится разлагать многочлен $P_n(x)$ на множители, поэтому § 1.1 посвящен этому вопросу.

§ 1.1. Разложение многочлена на множители

Разложить многочлен на множители — это значит представить его в виде произведения двух или нескольких многочленов. В этом параграфе приводятся некоторые методы разложения многочленов в произведение множителей первой и второй степени, поскольку знания такого разложения достаточно для решения алгебраических уравнений и неравенств.

1.1.1. Вынесение общего множителя. Если все члены многочлена имеют общий множитель, то, вынося его за скобки, получим разложение многочлена на множители.

Пример 1. Разложить на множители многочлен

$$x^3 - 3x^2 + 4x.$$

Решение. Все члены данного многочлена содержат общий множитель x. Вынося его за скобки, получим разложение данного многочлена на множители

$$x^3 - 3x^2 + 4x = x(x^2 - 3x + 4).$$

1.1.2. Применение формул сокращенного умножения. Иногда многочлен $P_n(x)$ можно разложить на множители, используя формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned}
a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b),\\
a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2),\\
a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2),\\
a^4 - b^4 &= (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a-b)(a+b)(a^2+b^2),\\
a^5 - b^5 &= (a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4),\\
&\vdots\\
a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots +\\
&\quad + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}),\ n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Пример 2. Разложить на множители многочлен

$$(x^2 + 2x)^2 - (x+1)^2.$$

Решение. Применяя формулу $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, имеем $(x^2+2x)^2 - (x+1)^2 = (x^2 + 2x - x - 1)(x^2 + 2x + x + 1) = (x^2 + x - 1)(x^2 + 3x + 1)$.

Пример 3. Разложить на множители многочлен

$$(4x-3)^3 - (2x-1)^3.$$

Решение. Применяя формулу $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, имеем $(4x-3)^3 - (2x-1)^3 = ((4x-3)-(2x-1))((4x-3)^2 + (4x-3)(2x-1) + (2x-1)^2) = (2x-2)(16x^2 - 24x + 9 + 8x^2 - 6x - 4x + 3 + 4x^2 - 4x + 1) = (2x-2)(28x^2 - 38x + 13)$.

1.1.3. Выделение полного квадрата. Иногда многочлен можно разложить на множители, если воспользоваться сначала методом выделения полного квадрата, а затем, как правило, формулой разности квадратов.

Пример 4. Разложить на множители многочлен

$$x^4 + 6x^2 - 10.$$

Решение. Выделяя полный квадрат, а затем применяя формулу разности квадратов, имеем $x^4 + 6x^2 - 10 = (x^2)^2 + 2 \cdot 3 \cdot x^2 + 3^2 - 3^2 - 10 = (x^2+3)^2 - 19 = (x^2+3)^2 - \left(\sqrt{19}\right)^2 = \left(x^2 + 3 - \sqrt{19}\right)(x^2 + 3 + \sqrt{19})$.

1.1.4. Группировка. Этот способ применяется чаще всего в сочетании со способом вынесения за скобки общего множителя. Суть его состоит в перегруппировке слагаемых в многочлене и дальнейшем объединении в группы таким образом, чтобы после вынесения (если это можно) общего множителя из каждого слагаемого в данной группе в скобке получилось выражение, являющееся в свою очередь общим множителем уже для каждой группы.

Пример 5. Разложить на множители многочлен

$$x^4 - 5x^2 + x^3 - 5x.$$

Решение. Объединим в одну группу первое и второе слагаемые, а в другую — третье и четвертое слагаемые. Тогда имеем $x^4 - 5x^2 + x^3 - 5x = (x^4 - 5x^2) + (x^3 - 5x)$. Вынося из первой скобки множитель x^2, а из второй скобки x, получаем $(x^4 - 5x^2) + (x^3 - 5x) = x^2(x^2 - 5) + x(x^2 - 5)$. Наконец, вынося за скобку общий множитель $x^2 - 5$, получаем, что $x^2(x^2-5) + x(x^2 - 5) = (x^2 - 5)(x^2 + x)$, и, наконец, вынося за скобки множитель x, получим, что

$$x^4 - 5x^2 + x^3 - 5x = (x^2 - 5)(x + 1)x.$$

1.1.5. Метод неопределенных коэффициентов. Суть этого метода состоит в том, что заранее предполагается вид множителей — многочленов, на которые разлагается данный многочлен. Этот метод опирается на следующие утверждения:

1) два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях x;

2) любой многочлен третьей степени разлагается в произведение линейного и квадратного множителей;

3) любой многочлен четвертой степени разлагается в произведение двух многочленов второй степени.

Пример 6. Разложить на множители многочлен

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3.$$

Решение. Будем искать многочлены $x-\alpha$ и $\beta_1 x^2+\beta_2 x+\beta_3$ такие, что справедливо тождественное равенство

$$x^3 - 5x^2 + 7x - 3 = (x - \alpha)(\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3). \qquad (1)$$

Правую часть этого равенства можно записать в виде

$$\beta_1 x^3 + (\beta_2 - \alpha\beta_1)x^2 + (\beta_3 - \alpha\beta_2)x - \alpha\beta_3.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства (1), получаем систему равенств для нахождения α, β_1, β_2, β_3:

$$\begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 - \alpha\beta_1 = -5, \\ \beta_3 - \alpha\beta_2 = 7, \\ \alpha\beta_3 = 3. \end{cases}$$

Легко видеть, что этим равенствам удовлетворяют числа $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -2$, $\beta_3 = 1$, $\alpha = 3$, а это означает, что многочлен $x^3 - 5x^2 + 7x - 3$ разлагается на множители $x - 3$ и $x^2 - 2x + 1$.

1.1.6. Подбор корня многочлена по его старшему и свободному коэффициентам. Иногда при разложении многочлена на множители бывают полезными следующие утверждения:

1) если многочлен $a_n + a_{n-1}x + \dots + a_0x^n$, $a_0 \neq 0$, с целыми коэффициентами имеет корень $x_0 = p/q$ (где p/q — несократимая дробь), то p — делитель свободного члена a_n, а q — делитель старшего коэффициента a_0;

2) если каким-либо образом подобран корень $x = \alpha$ многочлена $P_n(x)$ степени n, то многочлен $P_n(x)$ можно представить в виде $P_n(x) = (x - \alpha)P_{n-1}(x)$, где $P_{n-1}(x)$— многочлен степени $n - 1$.

Многочлен $P_{n-1}(x)$ можно найти либо делением многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - \alpha)$ "столбиком", либо соответствующей группировкой слагаемых многочлена и выделением из них множителя $x - \alpha$, либо методом неопределенных коэффициентов.

Пример 7. Разложить на множители многочлен

$$x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6.$$

Решение. Поскольку коэффициент при x^4 равен 1, то рациональные корни данного многочлена, если они существуют, являются делителями числа 6, т. е. могут быть целыми числами ± 1, ± 2, ± 3 и ± 6. Обозначим данный многочлен через $P_4(x)$. Так как $P_4(1) = 4$ и $P_4(-1) = 23$, то числа 1 и -1 не являются корнями многочлена $P_4(x)$. Поскольку $P_4(2) = 0$, то $x = 2$ является корнем многочлена $P_4(x)$, и, значит, данный многочлен делится на двучлен $x - 2$. Поэтому

$$\begin{array}{r|l}
-\begin{array}{r} x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 6 \\ x^4 - 2x^3 \phantom{{}+7x^2-5x+6} \end{array} & \begin{array}{c} x - 2 \\ \hline x^3 - 3x^2 + x - 3 \end{array} \\
\hline
-\begin{array}{r} -3x^3 + 7x^2 - 5x + 6 \\ -3x^3 + 6x^2 \phantom{{}-5x+6} \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} x^2 - 5x + 6 \\ x^2 - 2x \phantom{{}+6} \end{array} & \\
\hline
-\begin{array}{r} -3x + 6 \\ -3x + 6 \end{array} & \\
\hline
0 &
\end{array}$$

Следовательно, $P_4 = (x-2)(x^3-3x^2+x-3)$. Так как $x^3-3x^2+ + x - 3 = x^2(x-3) + (x-3) = (x-3)(x^2+1)$, то $x^4 - 5x^3 + + 7x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)(x^2+1)$.

1.1.7. Метод введения параметра. Иногда при разложении многочлена на множители помогает метод введения параметра. Суть этого метода поясним на следующем примере.

Пример 8. Разложить на множители многочлен

$$x^3 - \left(\sqrt{3}+1\right)x^2 + 3.$$

Решение. Рассмотрим многочлен с параметром a

$$x^3 - (a+1)x^2 + a^2,$$

который при $a = \sqrt{3}$ превращается в заданный многочлен. Запишем этот многочлен как квадратный трехчлен относительно a:

$$a^2 - ax^2 + (x^3 - x^2).$$

Так как корни этого квадратного относительно a трехчлена есть $a_1 = x$ и $a_2 = x^2 - x$, то справедливо равенство $a^2 - ax^2 + (x^3 - x^2) = (a-x)(a-x^2+x)$. Следовательно, многочлен $x^3 - \left(\sqrt{3}+1\right)x^2 + 3$ разлагается на множители $\sqrt{3} - x$ и $\sqrt{3} - x^2 + x$, т. е.

$$x^3 - \left(\sqrt{3}+1\right)x^2 + 3 = \left(x - \sqrt{3}\right)\left(x^2 - x - \sqrt{3}\right).$$

1.1.8. Метод введения новой неизвестной. В некоторых случаях путем замены выражения $f(x)$, входящего в многочлен $P_n(x)$, через y можно получить многочлен относительно y, который уже легко разложить на множители. Затем после замены y на $f(x)$ получаем разложение на множители многочлена $P_n(x)$.

Пример 9. Разложить на множители многочлен

$$x(x+1)(x+2)(x+3) - 15.$$

Решение. Преобразуем данный многочлен следующим образом:

$$x(x+1)(x+2)(x+3) - 15 = [x(x+3)][(x+1)(x+2)] - 15 = \\ = (x^2+3x)(x^2+3x+2) - 15.$$

Обозначим x^2+3x через y. Тогда имеем

$$y(y+2)-15=y^2+2y-15=y^2+2y+1-16=$$
$$=(y+1)^2-16=(y+1+4)(y+1-4)=(y+5)(y-3).$$

Поэтому

$$x(x+1)(x+2)(x+3)-15=(x^2+3x+5)(x^2+3x-3).$$

Пример 10. Разложить на множители многочлен

$$(x-4)^4+(x+2)^4.$$

Решение. Обозначим $\dfrac{x-4+x+2}{2}\equiv x-1$ через y. Тогда $(x-4)^4+(x+2)^4=(y-3)^4+(y+3)^4=$ $=y^4-12y^3+54y^2-108y+81+y^4+12y^3+54y^2+$ $+108y+81=2y^4+108y^2+162=2(y^4+54y^2+81)=$ $=2[(y^2+27)^2-648]=2\left(y^2+27-\sqrt{648}\right)\left(y^2+27+\sqrt{648}\right)=$ $=2\left((x-1)^2+27-\sqrt{648}\right)\left((x-1)^2+27+\sqrt{648}\right)=2\Big(x^2-$ $-2x+28-18\sqrt{2}\Big)\left(x^2-2x+28+18\sqrt{2}\right)$.

1.1.9. Комбинирование различных методов. Часто при разложении многочлена на множители приходится применять последовательно несколько из рассмотренных выше методов.

Пример 11. Разложить на множители многочлен

$$x^4-3x^2+4x-3.$$

Решение. Применяя группировку, перепишем многочлен в виде

$$x^4-3x^2+4x-3=(x^4-2x^2)-(x^2-4x+3).$$

Применяя к первой скобке метод выделения полного квадрата, имеем

$$x^4-3x^2+4x-3=(x^4-2\cdot 1\cdot x^2+1^2)-(x^2-4x+4).$$

Применяя формулу полного квадрата, можно теперь записать, что

$$x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = (x^2 - 1)^2 - (x - 2)^2.$$

Наконец, применяя формулу разности квадратов, получим, что

$$x^4 - 3x^2 + 4x - 3 = (x^2 - 1 + x - 2)(x^2 - 1 - x + 2) = \\ = (x^2 + x - 3)(x^2 - x + 1).$$

§ 1.2. Простейшие способы решения алгебраических уравнений

В случае $n = 1$ уравнение (I) обычно записывается в виде

$$ax + b = 0, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

и называется уравнением первой степени. Уравнение (1) имеет единственный корень $x_0 = -b/a$.

В случае $n = 2$ уравнение (I) обычно записывается в виде

$$ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0, \tag{2}$$

и называется квадратным уравнением.

Хорошо известно, что если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$:

а) отрицателен, то уравнение (2) не имеет корней;

б) положителен, то уравнение (2) имеет два различных корня

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \tag{3}$$

в) равен нулю, то уравнение (2) имеет единственный корень $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Иногда в этом случае говорят, что уравнение (2) имеет два совпадающих корнях $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$. Легко видеть, что они также отыскиваются по формулам (3).

При $n = 3$ и $n = 4$ существуют формулы для нахождения корней алгебраических уравнений третьей и четвертой степеней, однако в силу их громоздкости они применяются редко.

В общем случае не существует формул для нахождения корней любого алгебраического уравнения более высокой степени, чем четыре. Тем не менее достаточно часто приходится решать алгебраические уравнения степени большей, чем два.

Если многочлен $P_n(x)$ записан в виде произведения многочленов первой и второй степени, то уравнение (1) равносильно совокупности соответствующих уравнений первой и второй степени, формулы решения которых приведены выше.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x-2)(x^2+3x+2)=0.$$

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности уравнений $x-2=0$ и $x^2+3x+2=0$. Решение первого из этих уравнений есть $x_1 = 2$. Решения второго уравнения есть $x_2 = -2$, $x_3 = -1$. Следовательно, решения исходного уравнения есть $x_1 = -2$, $x_2 = -1$ и $x_3 = 2$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$.

Если многочлен $P_n(x)$ имеет степень большую, чем 2, и не разложен на множители первой и второй степени, то его сначала надо каким-либо способом разложить на такие множители, а затем заменить уравнение (I) равносильной ему совокупностью уравнений.

Приведем решения некоторых алгебраических уравнений $P_n(x) = 0$, основанные на разложении его левой части — многочлена $P_n(x)$ — на множители методами, изложенными в предыдущем параграфе.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4-2x^2-12x-8=0. \tag{4}$$

Решение. Поскольку

$$x^4-2x^2-12x-8 = x^4+2x^2+1-4x^2-12x-9 =$$
$$= (x^2+1)^2-(2x+3)^2 = (x^2+1-2x-3)(x^2+1+2x+3),$$

то данное уравнение равносильно совокупности двух уравнений

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + 2x + 4 = 0.$$

Второе уравнение этой совокупности решений не имеет, решения первого есть $x_1 = 1 + \sqrt{3}$ и $x_2 = 1 - \sqrt{3}$. Эти числа и являются решениями уравнения (4).

ОТВЕТ: $x_1 = 1 + \sqrt{3}$, $x_2 = 1 - \sqrt{3}$.

ПРИМЕР 3. Решить уравнение

$$x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Будем искать многочлены $x+\alpha$ и $\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$ такие, что справедливо тождественное равенство

$$(x+\alpha)(\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3) = x^3 + 3x + 5\sqrt{2}.$$

Тогда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях неизвестного x в левой и правой частях этого равенства, имеем систему равенств

$$\begin{cases} \beta_1 = 1, \\ \beta_2 + \alpha\beta_1 = 0, \\ \beta_2\alpha + \beta_3 = 3, \\ \alpha\beta_3 = 5\sqrt{2}. \end{cases}$$

Этой системе равенств удовлетворяют числа $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = -\sqrt{2}$, $\beta_3 = 5$, $\alpha = \sqrt{2}$. Поэтому справедливо разложение многочлена на множители:

$$x^3 + 3x + 5\sqrt{2} = \left(x + \sqrt{2}\right)\left(x^2 - \sqrt{2}x + 5\right),$$

откуда следует, что исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x + \sqrt{2} = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - \sqrt{2}x + 5 = 0.$$

Эта совокупность имеет единственное решение $x = -\sqrt{2}$.

ОТВЕТ: $x = -\sqrt{2}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Решение. Поскольку коэффициенты многочлена — целые числа и старший коэффициент равен 1, то рациональные корни многочлена, если они есть, могут быть только среди чисел ±1 и ±2. Легко проверить, что $x = 1$ есть корень многочлена. Значит, данный многочлен делится на $x - 1$. Произведем деление многочлена $x^3 + 3x^2 - 2x - 2$ на двучлен $x - 1$ "столбиком":

$$\begin{array}{r|l} -\begin{array}{l} x^3 + 3x^2 - 2x - 2 \\ x^3 - x^2 \end{array} & \begin{array}{c} x - 1 \\ \hline x^2 + 4x + 2 \end{array} \\ \hline \quad -\begin{array}{r} 4x^2 - 2x - 2 \\ 4x^2 - 4x \\ \hline \end{array} & \\ -\begin{array}{r} 2x - 2 \\ 2x - 2 \\ \hline 0 \end{array} & \end{array}$$

Следовательно, $x^3 + 3x^2 - 2x - 2 = (x - 1)(x^2 + 4x + 2)$, и исходное уравнение равносильно совокупности уравнений $x - 1 = 0$ и $x^2 + 4x + 2 = 0$, откуда получаем, что решения исходного уравнения есть $x_1 = 1$, $x_2 = -2 + \sqrt{2}$, $x_3 = -2 - \sqrt{2}$.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -2 + \sqrt{2}$, $x_3 = -2 - \sqrt{2}$.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^4 - 2\sqrt{3}x^2 - x + 3 - \sqrt{3} = 0. \tag{5}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{3} = a$ и рассмотрим уравнение с параметром: $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = 0$.

Рассматривая это уравнение как квадратное относительно a, разложим его левую часть на множители

$$x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - a = (a - x^2 + x)(a - x^2 - x - 1).$$

Значит, уравнение (5) равносильно совокупности уравнений

$$x^2 - x - \sqrt{3} = 0 \quad \text{и} \quad x^2 + x + 1 - \sqrt{3} = 0.$$

Множество решений первого уравнения есть

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{1-\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}.$$

Множество решений второго уравнения есть

$$x_3 = \frac{-1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2} \quad \text{и} \quad x_4 = \frac{-1-\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}.$$

Следовательно, исходное уравнение имеет четыре корня: x_1, x_2, x_3 и x_4.

Ответ: $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$, $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{4\sqrt{3}-3}}{2}$.

§ 1.3. Симметрические и возвратные уравнения

1.3.1. Симметрические уравнения третьей степени. Уравнения вида

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \tag{1}$$

называются *симметрическими уравнениями третьей степени*. Поскольку $ax^3 + bx^2 + bx + a = a(x^3+1) + bx(x+1) = a(x+1)(x^2-x+1) + bx(x+1) = (x+1)(ax^2+(b-a)x+a)$, то уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad ax^2 + (b-a)x + a = 0,$$

решить которую не представляет труда.

Пример 1. Решить уравнение

$$3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 0. \tag{2}$$

Решение. Уравнение (2) является симметрическим уравнением третьей степени. Поскольку $3x^3 + 4x^2 + 4x + 3 = 3(x^3+1)+4x(x+1) = (x+1)(3x^2-3x+3+4x) = (x+1)(3x^2+x+3)$, то уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$x + 1 = 0 \quad \text{и} \quad 3x^2 + x + 3 = 0.$$

Решение первого из этих уравнений есть $x = -1$, второе уравнение решений не имеет.

ОТВЕТ: $x = -1$.

1.3.2. Симметрические уравнения четвертой степени. Уравнения вида

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0, \quad a \neq 0, \tag{3}$$

называются *симметрическими уравнениями четвертой степени.*

Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (3), то, разделив обе части уравнения (3) на x^2, получим уравнение, равносильное исходному (3):

$$ax^2 + \frac{a}{x^2} + bx + \frac{b}{x} + c = 0. \tag{4}$$

Перепишем уравнение (4) в виде

$$a\left[\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\right] + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

В этом уравнении сделаем замену $x + \dfrac{1}{x} = y$, тогда получим квадратное уравнение

$$ay^2 + by + c - 2a = 0. \tag{5}$$

Если уравнение (5) имеет два корня y_1 и y_2, то исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x^2 - xy_1 + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x^2 - xy_2 + 1 = 0.$$

Если же уравнение (5) имеет один корень y_0, то исходное уравнение равносильно уравнению $x^2 - y_0x + 1 = 0$.

Наконец, если уравнение (5) не имеет корней, то и исходное уравнение также не имеет корней.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0. \tag{6}$$

Решение. Данное уравнение является симметрическим уравнением четвертой степени. Так как $x = 0$ не является его корнем, то, разделив уравнение (6) на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$x^2 - 5x + 8 - \frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} = 0. \tag{7}$$

Сгруппировав слагаемые, перепишем уравнение (7) в виде

$$x^2 + \frac{1}{x^2} - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 8 = 0$$

или в виде

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 5\left(x + \frac{1}{x}\right) + 6 = 0.$$

Положив $x + \dfrac{1}{x} = y$, получим уравнение

$$y^2 - 5y + 6 = 0,$$

имеющее два корня $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{1}{x} = 2 \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{x} = 3.$$

Решение первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = 1$, а решения второго есть $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

Следовательно, исходное уравнение имеет три корня: x_1, x_2 и x_3.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$.

1.3.3. Возвратные уравнения. Уравнения вида

$$
\begin{gathered}
a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+a_2x^{2n-1}+\dots+a_nx^{n+1}+\\
+\lambda a_nx^n+\lambda^3a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0\lambda^{2n+1}=0,
\end{gathered}
\tag{8}
$$

$$
\begin{gathered}
a_0x^{2n}+a_1x^{2n-1}+a_2x^{2n-2}+\dots+a_{n-1}x^{n+1}+a_nx^n+\\
+\lambda a_{n-1}x^{n-1}+\lambda^2a_{n-2}x^{n-2}+\dots+\lambda^na_0=0,
\end{gathered}
\tag{9}
$$

где λ — фиксированное число и $a_0\neq 0$ называются *возвратными уравнениями.*

При $\lambda=1$ уравнения (8) и (9) являются симметрическими уравнениями соответственно нечетной и четной степеней. Возвратное уравнение нечетной степени (8) всегда имеет корень $x=-\lambda$, поскольку это уравнение можно переписать в виде

$$
a_0(x^{2n+1}+\lambda^{2n+1})+a_1x(x^{2n-1}+\lambda^{2n-1})+\dots+a_nx^n(x+\lambda)=0
$$

и при $x=-\lambda$ выражения в каждой скобке обращаются в нуль. Выделив множитель $x+\lambda$ из каждой скобки, можно доказать, что уравнение (8) равносильно совокупности уравнений: уравнения $x+\lambda=0$ и некоторого возвратного уравнения четной степени.

Для решения возвратного уравнения четной степени поступают следующим образом.

Поскольку $x=0$ не есть корень уравнения (9), то, разделив уравнение (9) на x^n и сгруппировав члены, получим уравнение

$$
\begin{gathered}
a_0\left(x^n+\left(\frac{\lambda}{x}\right)^n\right)+a_1\left(x^{n-1}+\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{n-1}\right)+\dots+\\
+a_{n-1}\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)+a_n=0.
\end{gathered}
\tag{10}
$$

Положим $x+\dfrac{\lambda}{x}=u$, тогда имеем

$$
x^2+\left(\frac{\lambda}{x}\right)^2=u^2-2\lambda,
$$

$$
x^3+\left(\frac{\lambda}{x}\right)^3=\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)^3-3\lambda\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)=u^3-3\lambda u,
$$

$$x^4+\left(\frac{\lambda}{x}\right)^4=\left(x+\frac{\lambda}{x}\right)^4-4\lambda\left(x^2+\frac{\lambda^2}{x^2}\right)-6\lambda^2=u^4-4\lambda u^2+2\lambda^2$$

и т. д., и уравнение (10) степени $2n$ относительно x запишем в виде алгебраического уравнения степени n относительно u. Таким образом, мы от уравнения степени $2n$ перешли к уравнению степени n. Если теперь удастся решить полученное уравнение степени n, то найдутся все корни уравнения (9).

Пример 3. Решить уравнение

$$2x^4+3x^3-3x^2-3x+2=0. \tag{11}$$

Решение. Уравнение (11) является возвратным уравнением четвертой степени ($\lambda = -1$). Поскольку $x=0$ не является корнем этого уравнения, то оно равносильно уравнению

$$2x^2+3x-3-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=0.$$

Последнее уравнение перепишем в виде

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0$$

или в виде

$$2\left[\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2\right]+3\left(x-\frac{1}{x}\right)-3=0. \tag{12}$$

Положив $x-\dfrac{1}{x}=y$, запишем уравнение (12) в виде $2y^2+3y+1=0$. Корни этого уравнения есть $y_1=-1$ и $y_2=-1/2$. Следовательно, исходное уравнение (11) равносильно совокупности уравнений

$$x-\frac{1}{x}=-1 \quad \text{и} \quad x-\frac{1}{x}=-\frac{1}{2}.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, а решения второго

$x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ и $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$. Следовательно, эти четыре корня и являются решениями исходного уравнения.

ОТВЕТ: $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$.

ПРИМЕР 4. Решить уравнение

$$x^5 + 3x^4 - x^3 + 2x^2 - 24x - 32 = 0. \tag{13}$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение (13) является возвратным уравнением степени 5 ($\lambda = -2$), так как его можно записать в виде

$$x^5 + 3x^4 - x^3 - x^2(-2) + 3x(-2)^3 + (-2)^5 = 0.$$

Так как по сказанному выше $x = 2$ является его корнем, то, сгруппировав члены уравнения, перепишем его в виде

$$(x^5 - 32) + 3x(x^3 - 8) - x^2(x - 2) = 0. \tag{14}$$

Применяя формулы разности пятых и третьих степеней и выделив множитель $(x-2)$, перепишем уравнение (14) в виде

$$\begin{aligned}(x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) &+ \\ + 3x(x-2)(x^2 + 2x + 4) - x^2(x-2) &= 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Уравнение (15) равносильно совокупности уравнений

$$\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0, \\ x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16 + 3x(x^2+2x+4) - x^2 = 0. \end{array}\right. \tag{16}$$

Уравнение (16) запишем в виде

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 20x + 16 = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) является возвратным уравнением четвертой степени ($\lambda = 4$). В самом деле, уравнение (17) можно записать так:

$$x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 5\cdot x\cdot 4 + 4^2 = 0. \tag{18}$$

Так как $x = 0$ не является корнем уравнения (18), то, разделив его на x^2 и сгруппировав члены, получим уравнение

$$\left(x^2 + \frac{4^2}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{4}{x}\right) + 9 = 0, \tag{19}$$

равносильное уравнению (18).

Положим $x + \frac{4}{x} = y$, тогда уравнение (19) перепишется в виде $y^2 - 8 + 5y + 9 = 0$.

Решения последнего уравнения есть $y_1 = \frac{-5+\sqrt{21}}{2}$ и $y_2 = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}$. Следовательно, уравнение (16) в свою очередь равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{4}{x} = \frac{-5+\sqrt{21}}{2} \quad \text{и} \quad x + \frac{4}{x} = \frac{-5-\sqrt{21}}{2}.$$

Первое из этих уравнений решений не имеет. Решения второго уравнения есть

$$x_2 = \frac{-5-\sqrt{21}+\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4},$$

$$x_3 = \frac{-5-\sqrt{21}-\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4}.$$

Итак, исходное уравнение (13) имеет три корня: x_1, x_2 и x_3.

ОТВЕТ: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{21}+\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4}$, $x_3 = \frac{-5-\sqrt{21}-\sqrt{10\sqrt{21}-18}}{4}$.

1.3.4. Уравнения четвертой степени с дополнительными условиями на коэффициенты. Рассмотрим уравнение четвертой степени

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f = 0, \tag{20}$$

где $a \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$ и $f = \dfrac{d^2 a}{b^2}$.

Так как как $x = 0$ не есть корень этого уравнения, то, разделив его на x^2, получим уравнение

$$ax^2 + \frac{f}{x^2} + bx + \frac{d}{x} + c = 0.$$

Обозначив $bx + \dfrac{d}{x} = y$ и учитывая, что

$$ax^2 + \frac{f}{x^2} = \frac{a}{b^2}\left(b^2x^2 + \frac{d^2}{x^2}\right) = \frac{a}{b^2}\left[\left(bx + \frac{d}{x}\right)^2 - 2bd\right] = \\ = \frac{a}{b^2}(y^2 - 2bd),$$

перепишем уравнение в виде

$$\frac{a}{b^2}y^2 + y + c - 2a\frac{d}{b} = 0.$$

После нахождения решений этого уравнения мы найдем решения исходного уравнения.

Пример 5. Решить уравнение

$$x^4 + 2x^3 - 11x^2 + 4x + 4 = 0. \tag{21}$$

Решение. В данном уравнении $a = 1$, $b = 2$, $d = 4$, $f = 4$. Поскольку $a \neq 0$, $b \neq 0$, $d \neq 0$, $f = \dfrac{ad^2}{b^2}$, то это уравнение рассматриваемого типа. Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (21), то, разделив это уравнение на x^2 и сгруппировав его члены, получим уравнение $\left(x + \dfrac{2}{x}\right)^2 + 2\left(x + \dfrac{2}{x}\right) - 15 = 0$, равносильное уравнению (21). Так как решения уравнения $y^2 + 2y - 15 = 0$ есть $y_1 = -5$ и $y_2 = 3$, то исходное уравнение (21) равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{2}{x} = 3 \quad \text{и} \quad x + \frac{2}{x} = -5,$$

решения которой есть $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}$.

ОТВЕТ: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = \dfrac{-5+\sqrt{17}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-5-\sqrt{17}}{2}$.

§ 1.4. Некоторые искусственные способы решения алгебраических уравнений

В этом параграфе будут приведены некоторые нестандартные способы решения алгебраических уравнений.

1.4.1. Умножение уравнения на функцию. Иногда решение алгебраического уравнения существенно облегчается, если умножить обе его части на некоторую функцию — многочлен от неизвестной. При этом надо помнить, что возможно появление лишних корней — корней многочлена, на который умножали уравнение. Поэтому надо либо умножать на многочлен, не имеющий корней, и получать равносильное уравнение, либо умножать на многочлен, имеющий корни, и тогда каждый из таких корней надо обязательно подставить в исходное уравнение и установить, является ли это число его корнем.

ПРИМЕР 1. Решить уравнение

$$x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1 = 0. \qquad (1)$$

РЕШЕНИЕ. Умножив обе части уравнения на многочлен $x^2 + 1$, не имеющий корней, получим уравнение

$$(x^2 + 1)(x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1) = 0, \qquad (2)$$

равносильное уравнению (1). Уравнение (2) можно записать в виде

$$x^{10} + 1 = 0. \qquad (3)$$

Ясно, что уравнение (3) не имеет действительных корней, поэтому и уравнение (1) их не имеет.

ОТВЕТ: нет решений.

Пример 2. Решить уравнение

$$6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0. \tag{4}$$

Решение. Умножив обе части этого уравнения на многочлен $x + 1/2$, получим уравнение

$$6x^4 + 2x^3 - \frac{41}{2}x^2 + 2x + 6 = 0, \tag{5}$$

являющееся следствием уравнения (4), так как уравнение (5) имеет корень $x = -1/2$, не являющийся корнем уравнения (4).

Уравнение (5) есть симметрическое уравнение четвертой степени. Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения (5), то, разделив обе его части на $2x^2$ и перегруппировав его члены, получим уравнение

$$3\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x + \frac{1}{x}\right) - \frac{41}{4} = 0, \tag{6}$$

равносильное уравнению (5). Обозначив $y = x + \dfrac{1}{x}$, перепишем уравнение (6) в виде

$$3y^2 + y - \frac{65}{4} = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) имеет два корня: $y_1 = -5/2$ и $y_2 = 13/6$. Поэтому уравнение (6) равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{1}{x} = \frac{13}{6} \quad \text{и} \quad x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}.$$

Решив каждое из этих уравнений, найдем четыре корня уравнения (6), а тем самым и уравнения (5):

$$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = \frac{3}{2},\ x_3 = -2,\ x_4 = -\frac{1}{2}.$$

Так как корень $x_4 = -1/2$ является посторонним для уравнения (4), то отсюда получаем, что уравнение (4) имеет три корня: x_1, x_2, x_3.

Ответ: $x_1 = 2/3$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = -2$.

Замечание. Прием, рассмотренный в примере 2, можно применять к уравнениям, которые после умножения на некоторый многочлен превращаются в возвратные или симметрические уравнения.

Например, таким образом можно решать уравнения вида

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{8}$$

где $a \neq 0$, $d \neq 0$, $c \neq a$, $a(c - a) = d(b - d)$. В самом деле, умножив это уравнение на многочлен $x + \frac{a}{d}$, получим симметрическое уравнение четвертой степени, среди корней которого содержится и корень $x = -\frac{a}{d}$. Отметим, что этот корень может быть посторонним корнем для уравнения (8).

1.4.2. Угадывание корня уравнения. Иногда внешний вид уравнения подсказывает, какое число является корнем уравнения.

Пример 3. Решить уравнение

$$x^3 + 3x - 12^3 - 3{\cdot}12 = 0.$$

Решение. Из внешнего вида этого уравнения очевидно, что $x = 12$ есть его корень. Для нахождения остальных корней преобразуем многочлен

$$x^3 + 3x - (12^3 + 3{\cdot}12) = (x^3 - 12^3) + 3(x - 12) =$$
$$= (x - 12)(x^2 + 12x + 12^2 + 3) = (x - 12)(x^2 + 12x + 147).$$

Так как многочлен $x^2 + 12x + 147$ не имеет корней, то исходное уравнение имеет единственный корень $x = 12$.

Ответ: $x = 12$.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^3 - 3x = a^3 + \frac{1}{a^3}, \tag{9}$$

где a — отличное от нуля число.

Решение. Так как

$$a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3a^2 \cdot \frac{1}{a} - 3a \cdot \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right),$$

то отсюда заключаем, что $x_1 = a + \dfrac{1}{a}$ есть один из корней исходного уравнения. Разделив многочлен $x^3 - 3x - a^3 - \dfrac{1}{a^3}$ на двучлен $x - a - \dfrac{1}{a}$, получим, что

$$x^3 - 3x - \left(a^3 + \frac{1}{a^3}\right) = \\ = \left(x - a - \frac{1}{a}\right)\left[x^2 + x\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right],$$

т. е. остальные корни уравнения (9) совпадают со всеми корнями уравнения

$$x^2 + x\left(a + \frac{1}{a}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3 = 0. \qquad (10)$$

Дискриминант квадратного уравнения (10) есть

$$D = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4\left[\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 3\right] = \\ = 3\left[4 - \left(a + \frac{1}{a}\right)^2\right] = -3\left(a - \frac{1}{a}\right)^2.$$

а) $D > 0$ быть не может.

б) $D = 0$ лишь при $a = 1$ и при $a = -1$.

Итак, уравнение (10) не имеет корней при $a^2 \neq 1$, имеет единственный корень $x = -1$ при $a = 1$ и единственный корень $x = 1$ при $a = -1$. Добавляя еще корень $x = a + 1/a$, находим все корни исходного уравнения.

Ответ: при $a = 1$ два корня $x_1 = 2$, $x_2 = -1$;
при $a = -1$ два корня $x_1 = -2$, $x_2 = 1$;
при $a^2 \neq 1$ и $a \neq 0$ один корень $x_1 = a + 1/a$.

Пример 5. Решить уравнение

$$x(x^2 - a) = m(x^2 + 2mx + a), \qquad (11)$$

где a и m — данные числа.

Решение. Из внешнего вида уравнения очевидно, что $x = -m$ является корнем.

Для нахождения остальных корней уравнения перенесем все его члены в одну сторону и разложим полученный многочлен на множители. Тогда получим, что уравнение (11) можно записать в виде

$$(x+m)(x^2-2mx-a)=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) равносильно совокупности уравнений

$$x+m=0 \quad \text{и} \quad x^2-2mx-a=0. \tag{13}$$

Первое уравнение совокупности (13) имеет единственный корень $x_1 = -m$, а второе уравнение имеет решения в зависимости от дискриминанта:

а) если $m^2 + a > 0$, то будет два корня,

б) если $m^2 + a = 0$, то будет один корень,

в) если $m^2 + a < 0$, то корней нет.

Отсюда легко находятся корни уравнения (11).

Ответ: при $m^2 + a < 0$ $x_1 = -m$;

при $m^2 + a = 0$ $x_1 = -m$, $x_2 = m$;

при $m^2 + a > 0$ $x_1 = -m$, $x_2 = m - \sqrt{m^2+a}$,

$x_3 = m + \sqrt{m^2+a}$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\begin{aligned} x(x+1)&+(x+1)(x+2)+(x+2)(x+3)+(x+3)(x+4)+\\ &+(x+4)(x+5)+(x+5)(x+6)+(x+6)(x+7)+\\ &+(x+7)(x+8)+(x+8)(x+9)+(x+9)(x+10)=\\ =\ &1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+4\cdot5+5\cdot6+6\cdot7+7\cdot8+8\cdot9+9\cdot10. \end{aligned}$$

Решение. Легко заметить, что $x_1 = 0$ и $x_2 = -10$ являются решениями этого уравнения. После раскрытия скобок это уравнение перепишется как квадратное. А это означает, что оно может иметь не более двух корней. Так как два корня этого уравнения найдены, то тем самым оно и решено.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -10$.

1.4.3. Использование симметричности уравнения. Иногда внешний вид уравнения — некоторая его симметричность — подсказывает способ решения уравнения.

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{(x^2-x+1)^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\frac{x^2(x-1)^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2}. \tag{14}$$

Решение. Очевидно, что внешний вид уравнения подсказывает, что один из корней уравнения (14) есть $x_1=\sqrt{5}$. Однако для нахождения остальных корней этого уравнения прием, предложенный в предыдущем пункте (разложение многочлена на множители), здесь мало поможет. Перепишем уравнение (14) в несколько ином виде.

Поскольку справедливы тождественные равенства

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4},$$
$$x(x-1)\quad=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4},$$

то уравнение (14) можно переписать так:

$$\frac{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]^3}{\left(5-\sqrt{5}+1\right)^3}=\frac{\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right]^2}{5\left(\sqrt{5}-1\right)^2}. \tag{15}$$

Теперь очевидно, что если x_0 — корень уравнения (15), то $x_1=1-x_0$ также корень уравнения (15), поскольку

$$\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2=\left(x_1-\frac{1}{2}\right)^2.$$

Покажем, что если x_1, $x_1\neq 0$, $x_1\neq 1$, есть корень уравнения (14), то $x_2=\dfrac{1}{x_1}$ также есть корень этого уравнения.

Действительно, так как

$$\frac{(x_2^2-x_2+1)^3}{x_2^2(x_2-1)^2}=\frac{\left(\dfrac{1}{x_1^2}-\dfrac{1}{x_1}+1\right)^3}{\dfrac{1}{x_1^2}\left(\dfrac{1}{x_1}-1\right)^2}=$$

$$=\frac{(1-x_1+x_1^2)^3}{x_1^6\dfrac{1}{x_1^4}(1-x_1)^2}=\frac{(x_1^2-x_1+1)^3}{x_1^2(x_1-1)^2},$$

то отсюда и вытекает это утверждение.

Итак, если x_1, $x_1\neq 0$, $x_1\neq 1$, — корень уравнения (14), то оно имеет еще корни

$$\frac{1}{x_1},\ 1-x_1,\ \frac{1}{1-x_1},\ 1-\frac{1}{x_1},\ \frac{1}{1-\frac{1}{x_1}},$$

т. е. уравнение (14) имеет корни

$$x_1=\sqrt5,\ x_2=\frac{1}{\sqrt5},\ x_3=1-\sqrt5,\ x_4=\frac{1}{1-\sqrt5},$$
$$x_5=1-\frac{1}{\sqrt5},\ x_6=\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt5}}.$$

Поскольку уравнение (14) есть алгебраическое уравнение шестой степени, то оно имеет не более шести корней. Таким образом, мы нашли все корни уравнения (14).

Ответ: $x_1=\sqrt5$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt5}$, $x_3=1-\sqrt5$, $x_4=\dfrac{1}{1-\sqrt5}$, $x_5=1-\dfrac{1}{\sqrt5}$, $x_6=\dfrac{1}{1-\frac{1}{\sqrt5}}$.

1.4.4. Использование суперпозиции функций. Иногда можно найти корень уравнения, если заметить, что функция, находящаяся в одной из частей уравнения, является суперпозицией некоторых более простых функций.

Пример 8. Решить уравнение

$$(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)-5=x. \tag{16}$$

Решение. Обозначим $f(x) = x^2 + 2x - 5$, тогда уравнение (16) можно переписать в виде $f(f(x)) = x$. Теперь очевидно, что если x_0 — корень уравнения $f(x) = x$, то x_0 и корень уравнения $f(f(x)) = x$. Корни уравнения $x^2 + 2x - 5 = x$ есть $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$. Следовательно, и уравнение (16) имеет эти корни. Переписав уравнение (16) в виде

$$x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10 = 0 \tag{17}$$

и разделив многочлен $x^4 + 4x^3 - 4x^2 - 17x + 10$ на многочлен $(x-x_1)(x-x_2)$, получим, что уравнение (17) можно записать в виде $(x^2+x-5)(x^2+3x-2) = 0$. Следовательно, корнями уравнения (16) наряду с x_1 и x_2 являются также корни уравнения $x^2 + 3x - 2 = 0$, т. е. числа $x_3 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$ и $x_4 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$, $x_3 = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{2}$.

1.4.5. Исследование уравнения на промежутках действительной оси. Иногда решения уравнения можно найти, исследуя его на разных числовых промежутках.

Пример 9. Решить уравнение

$$2x^9 - x^5 + x - 2 = 0. \tag{18}$$

Решение. Перепишем уравнение в виде $2(x^9 - 1) - x(x^4 - 1) = 0$ или, используя формулу разности

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

в виде

$$(x-1)(2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2) = 0.$$

Отсюда видно, что один из корней данного уравнения есть $x = 1$. Докажем, что уравнение

$$2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = 0 \tag{19}$$

решений не имеет.

Разобьем числовую ось на промежутки $(-\infty; -1]$, $(-1; 0]$ и $(0; +\infty)$.

Для любого x из промежутка $(0; +\infty)$ имеем, что левая часть уравнения (19) положительна, поэтому на этом промежутке уравнение решений не имеет.

Поскольку

$$\begin{aligned} 2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = \\ = 2x^8 + 2x^6(x+1) + 2x^4(x+1) + \\ + x^2(x+1) + (x+1) + (1 - x^4), \end{aligned}$$

то для любого x из промежутка $(-1; 0]$ этот многочлен положителен. Это означает, что на промежутке $(-1; 0]$ уравнение (19) также не имеет решений.

Поскольку

$$\begin{aligned} 2x^8 + 2x^7 + 2x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 2 = \\ = 2x^7(x+1) + 2x^5(x+1) + x^3(x+1) + x(x+1) + 2, \end{aligned}$$

то для любого x из промежутка $(-\infty; -1]$ этот многочлен положителен. Следовательно, и на промежутке $(-\infty; -1]$ уравнение (19) не имеет решений.

Итак, данное уравнение (19) имеет единственное решение $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

§ 1.5. Решение алгебраических неравенств

1.5.1. Простейшие способы решения алгебраических неравенств. Так как, умножая неравенство (III) на (-1), его можно привести к виду (II), а умножая неравенство (II) на (-1), его можно привести к виду (III), то дальше будем считать, что в неравенствах (II) и (III) положителен коэффициент при старшем члене, т. е. что $a_0 > 0$.

Таким образом, в этом пункте рассматриваются только неравенства вида

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n > 0 \tag{1}$$

и

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n < 0, \tag{2}$$

где $a_0 > 0$.

В случае $n = 1$ неравенства (1) и (2) обычно записывают в виде

$$ax + b > 0, \quad a > 0, \tag{3}$$

$$ax + b < 0, \quad a > 0, \tag{4}$$

и называют *неравенствами первой степени.*

Множество решений неравенства (3) есть промежуток $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$, множество решений неравенства (4) есть промежуток $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.

В случае $n = 2$ неравенства (1) и (2) обычно записывают в виде

$$ax^2 + bx + c > 0, \quad a > 0, \tag{5}$$

$$ax^2 + bx + c < 0, \quad a > 0, \tag{6}$$

и называют *квадратными неравенствами.*

Решения неравенств (5) и (6) зависят от знака дискриминанта $D = b^2 - 4ac$ квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ и приведены в таблице.

В случае $n \geqslant 3$ многочлен (IV) надо сначала разложить на множители и затем либо заменить неравенство равносильной ему совокупностью систем неравенств, либо применить изложенный ниже метод интервалов.

Отметим, что при разложении на множители, конечно, можно пользоваться всеми теми же методами, которые были изложены при решении уравнений.

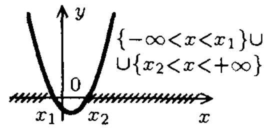
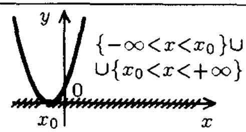
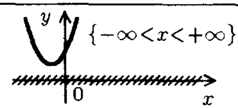
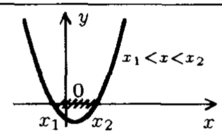
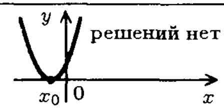
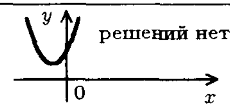
Пример 1. Решить неравенство

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 > 0. \tag{7}$$

Решение. Разложим методом группировки на множители многочлен, находящийся в левой части неравенства

$$x^3 - 3x^2 + 3x - 2 = x^2(x-2) - x(x-2) + (x-2) = \\ = (x-2)(x^2 - x + 1).$$

Таблица

Неравенство	Дискриминант D и корни	Множество решений и график квадратного трехчлена ax^2+bx+c
$ax^2+bx+c>0$, $a>0$	$D>0$, $x_1<x_2$	
	$D=0$, $x_0=x_1=$ $=x_2=-\frac{b}{2a}$	
	$D<0$, корней нет	
$ax^2+bx+c<0$, $a>0$	$D>0$, $x_1<x_2$	
	$D=0$, $x_0=x_1=$ $=x_2=-\frac{b}{2a}$	
	$D<0$	

Тогда неравенство (7) можно переписать в виде

$$(x-2)(x^2-x+1)>0. \tag{8}$$

Так как $x^2-x+1>0$ для любого x, то неравенство (8) равносильно неравенству $x-2>0$.

Решения этого неравенства, а значит, и исходного, есть все $x>2$.

Ответ: $2<x<+\infty$.

1.5.2. Метод интервалов. В основе этого метода лежит следующее свойство двучлена $x - \alpha$: точка α делит числовую ось на две части — справа от точки α двучлен $x - \alpha$ положителен, а слева от точки α — отрицателен.

Пусть требуется решить неравенство

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) > 0, \tag{9}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ — фиксированные числа, среди которых нет равных, причем такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$.

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n). \tag{10}$$

Для любого числа x_0 такого, что $x_0 > \alpha_n$, соответствующее числовое значение любого сомножителя в произведении (10) положительно, а значит, $P(x_0) > 0$. Для любого числа x_1, взятого из интервала (α_{n-1}, α_n), соответствующее числовое значение любого из множителей, кроме множителя $(x - \alpha_n)$, положительно, поэтому число $P(x_1) < 0$ и т. д.

На этом рассуждении и основан метод интервалов, состоящий в следующем: на числовую ось наносят числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; в промежутке справа от наибольшего из них, т. е. числа α_n, ставят знак плюс, в следующем за ним справа налево интервале ставят знак минус, затем — знак плюс, затем — знак минус и т. д. Тогда множеством всех решений неравенства (9) будет объединение всех промежутков, в которых стоит знак плюс, а множеством решений неравенства

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n) < 0, \tag{11}$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$, будет объединение всех промежутков, в которых стоит знак минус.

Пример 2. Решить неравенство

$$(x + 3)(x - 4)(2x + 5) < 0. \tag{12}$$

Решение. Перепишем неравенство в виде

$$2(x - (-3))(x - (-5/2))(x - 4) < 0.$$

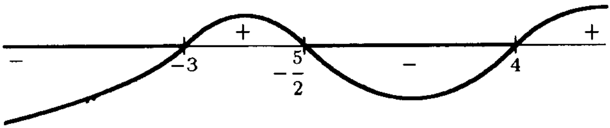


Рис. 1

Отметим на координатной оси числа (-3), $(-5/2)$ и 4 и расставим знаки плюс и минус так, как указано на рис. 1.

Решениями неравенства (12) будут все x из объединения промежутков $(-\infty; -3)$ и $(-5/2; 4)$.

Ответ: $-\infty < x < -3$; $-5/2 < x < 4$.

Пример 3. Решить неравенство

$$x^7 + 8x^4 - x^3 - 8 > 0. \tag{13}$$

Решение. Перепишем неравенство (13) в виде

$$(x^4 - 1)(x^3 + 8) > 0$$

или

$$(x-1)(x+1)(x^2+1)(x+2)(x^2-2x+4) > 0. \tag{14}$$

Поскольку $x^2 + 1 > 0$ и $x^2 - 2x + 4 > 0$ для любого действительного x, то неравенство (14) равносильно неравенству $(x-1)(x+1)(x+2) > 0$. Применяя метод интервалов, находим решения последнего, а значит и исходного, неравенства: это будут все x из двух промежутков $-2 < x < -1$, $1 < x < +\infty$ (рис. 2).

Ответ: $-2 < x < -1$; $1 < x < +\infty$.

Метод интервалов можно применять и при решении неравенств вида

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \tag{15}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, если заметить, что на множестве всех действительных чисел неравенство (15) равносильно неравенству $P(x){\cdot}Q(x) > 0$.

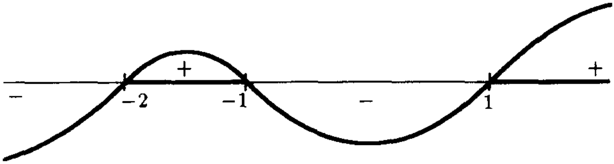


Рис. 2

Пример 4. Решить неравенство

$$\frac{(x^2-5x+6)(4-x)}{x^2+3x+2} < 0. \tag{16}$$

Решение. Неравенство (16) равносильно неравенству

$$(x^2-5x+6)(4-x)(x^2+3x+2) < 0.$$

Перепишем это неравенство в виде

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x+1)(x+2) > 0. \tag{17}$$

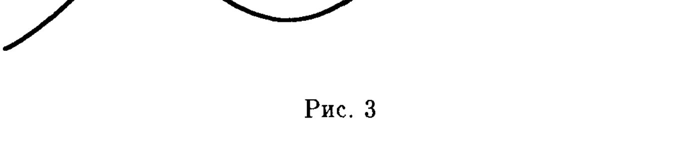


Рис. 3

Применяя метод интервалов (рис. 3), получим, что решениями неравенства (17), а значит, и решениями исходного неравенства, являются все x из трех промежутков $-2 < x < -1$, $2 < x < 3$, $4 < x < +\infty$.

Ответ: $-2 < x < -1$; $2 < x < 3$; $4 < x < +\infty$.

1.5.3. Обобщенный метод интервалов. Иногда алгебраические неравенства степеней более высоких, чем два, путем равносильных преобразований приводятся к виду

$$(x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n} > 0,$$

где k_1, $k_2,\dots$, k_n — целые положительные числа; α_1, $\alpha_2,\dots$, α_n — действительные числа, среди которых нет равных, такие, что $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{n-1} < \alpha_n$.

Такие неравенства могут быть решены с помощью так называемого обобщенного метода интервалов.

В основе его лежит следующее свойство двучлена $(x-\alpha)^n$: точка α делит числовую ось на две части, причем:

а) если n четное, то выражение $(x-\alpha)^n$ справа и слева от точки $x=\alpha$ сохраняет положительный знак,

б) если n нечетное, то выражение $(x-\alpha)^n$ справа от точки $x=\alpha$ положительно, а слева от точки $x=\alpha$ отрицательно.

Рассмотрим многочлен

$$P(x) = (x-\alpha_1)^{k_1}(x-\alpha_2)^{k_2}\dots(x-\alpha_{n-1})^{k_{n-1}}(x-\alpha_n)^{k_n}, \quad (18)$$

где $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$.

Для любого числа x_0 такого, что $x_0 > \alpha_n$, соответствующее значение любого сомножителя в (18) положительно, поэтому числовое значение $P(x_0)$ также положительно.

Для любого x_1, взятого из интервала (α_{n-1}, α_n), соответствующее значение любого сомножителя в (18), кроме последнего, положительно, а соответствующее значение последнего сомножителя положительно, если k_n — четное число, и отрицательно, если k_n — нечетное число. Поэтому число $P(x_1)$ положительно, если k_n — четное число, и $P(x_1)$ отрицательно, если k_n — нечетное число.

Аналогично показывается, что если известен знак $P(x)$ на интервале (α_i, α_{i+1}), то на промежутке (α_{i-1}, α_i) знак $P(x)$ определяется по следующему правилу. Многочлен $P(x)$ при переходе через точку α_i:

а) меняет знак на противоположный знаку $P(x)$ на (α_i, α_{i+1}), если k_i — нечетное число;

б) не меняет знака (тот же знак, что у $P(x)$ на (α_i, α_{i+1})), если k_i — четное число.

На этом рассуждении и основан обобщенный метод интервалов: на числовую ось наносят числа α_1, $\alpha_2, \ldots \alpha_n$; в промежутке справа от наибольшего из корней многочлена ставят знак плюс, а затем, двигаясь справа налево, при переходе через очередной корень α_i меняют знак, если k_i — нечетное число, и сохраняют знак, если k_i — четное число.

Пример 5. Решить неравенство

$$(x+7)(2x-5)^3(6-x)^5(3x+10)^4 < 0. \tag{19}$$

Решение. Перепишем неравенство в равносильном виде

$$(x-(-7))(x-(-10/3))^4(x-5/2)^3(x-6)^5 > 0. \tag{20}$$

Для решения этого неравенства применим обобщенный метод интервалов. На числовой оси отметим числа -7, $-10/3$, $5/2$, 6 (рис. 4). Справа от наибольшего числа (числа 6) ставим знак

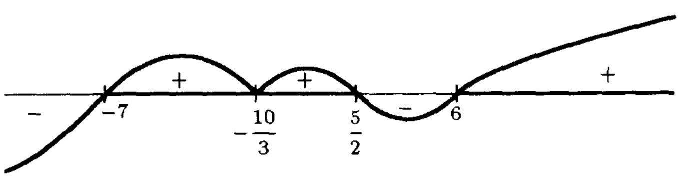


Рис. 4

плюс. При переходе через точку $x = 6$ многочлен

$$P(x) = (x-(-7))(x-(-10/3))^4(x-5/2)^3(x-6)^5 \tag{21}$$

меняет знак, так как двучлен $(x-6)$ содержится в нечетной степени, поэтому в промежутке $(5/2; 6)$ ставим знак минус. При переходе через точку $x = 5/2$ многочлен $P(x)$ меняет знак, так как двучлен $(x-5/2)$ содержится в произведении (21) в нечетной степени, поэтому в промежутке $(-10/3; 5/2)$ ставим знак плюс. При переходе через точку $x = -10/3$ многочлен $P(x)$ не меняет знака, так как двучлен $(x-(-10/3))$ содержится в произведении (21) в четной степени, поэтому в промежутке $(-7; -10/3)$ ставим знак плюс. Наконец, при переходе через точку $x = -7$ многочлен $P(x)$ меняет знак, так как двучлен $(x+7)$ содержится в произведении (21) в первой степени, поэтому в промежутке $(-\infty; 7)$ ставим знак минус. Решением неравенства (20), а значит, и равносильного ему исходного неравенства будет совокупность промежутков, где стоит знак плюс, т. е. объединение множеств $-7 < x < -10/3$, $-10/3 < x < 5/2$ и $6 < x < +\infty$.

Ответ: $-7 < x < -10/3$; $-10/3 < x < 5/2$; $6 < x < +\infty$.

Замечание 1. Обобщенный метод интервалов можно применять и при решении неравенств

$$\frac{P(x)}{Q(x)} > 0, \tag{22}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, если заметить, что на множестве всех действительных чисел неравенство (22) равносильно неравенству

$$P(x)Q(x) > 0.$$

Пример 6. Решить неравенство

$$\frac{(x^2+1)(x^2-1)^2(x-3)^4}{(x+2)^2(2x-3)^5} < 0. \tag{23}$$

Решение. Неравенство (23) равносильно неравенству

$$(x^2+1)(x^2-1)^2(x-3)^4(x+2)^2(2x-3)^5 < 0.$$

Поскольку $x^2+1 > 0$ при любом x, то последнее неравенство равносильно неравенству

$$(x-1)^2(x+1)^2(x-3)^4(x+2)^2(x-3/2)^5 < 0.$$

Применим обобщенный метод интервалов. На числовой оси отметим точки -2, -1, 1, $3/2$ и 3 и расставим знаки, как указано на рис. 5. Те промежутки, где стоит знак минус, и дадут все решения неравенства (23).

Ответ: $-2 < x < -1$; $-1 < x < 1$; $1 < x < 3/2$.

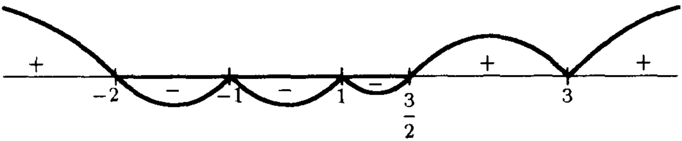


Рис. 5

Замечание 2. Обобщенный метод интервалов можно применять и так:

1) найти все различные корни $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$; $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_k$ $(k \leqslant n)$ многочлена $P_n(x)$;

2) выяснить знак многочлена $P_n(x)$ на каждом из интервалов (α_i, α_{i+1}), $i = 1, 2, \ldots, k-1$, $(-\infty, \alpha_1)$ и $(\alpha_k, +\infty)$, подставляя в $P_n(x)$ вместо x любое число из этого интервала.

Пример 7. Решить неравенство

$$(1+x)(1-3x)(4-x^2)^3(2+5x)(1-x)^2 > 0. \qquad (24)$$

Решение. Многочлен $P(x) = (1-3x)(4-x^2)^3(2+5x) \times \times (1+x)(1-x)^2$ обращается в нуль в точках $x = 1/3$, $x = 2$, $x = -2$, $x = -5/2$, $x = -1$, $x = 1$. Эти точки разделяют числовую ось на семь промежутков (рис. 6). Так как при $x = 3$

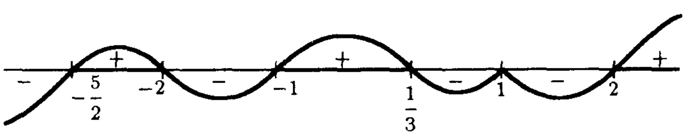


Рис. 6

имеем $1-3x < 0$, $(4-x^2)^3 < 0$, $2+5x > 0$, $1+x > 0$, $(1-x)^2 > 0$, то $P(3) > 0$, поэтому справа от точки $x = 2$, т. е. в промежутке $2 < x < +\infty$, ставим знак плюс. Затем рассмотрим, например, $x = 3/2$ из промежутка $1 < x < 2$. Так как при $x = 3/2$ имеем $1-3x < 0$, $(4-x^2)^3 > 0$, $2+5x > 0$, $1+x > 0$, $(1-x)^2 > 0$, то $P(3/2) < 0$, поэтому справа от точки

$x = 2$ в промежутке $1 < x < 2$ ставим знак минус. Поступая аналогично, расставим знаки плюс или минус, как указано на рис. 6.

Решением неравенства (24) будет объединение всех тех промежутков, в которых поставлен знак плюс, т. е. это будет объединение промежутков $2 < x < +\infty$, $-1 < x < 1/3$, $-5/2 < x < -2$.

Ответ: $2 < x < +\infty$; $-1 < x < 1/3$; $-5/2 < x < -2$.

Задачи

Решить уравнение

1. $x^3 - 2x^2 - 9 = 0$.

2. $6x^3 - x^2 - 20x + 12 = 0$.

3. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$.

4. $(x-1)^3 + (2x+3)^3 = 27x^3 + 8$.

5. $x^3 - \left(\sqrt{2} + 1\right) x^2 + 2 = 0$.

6. $9x^3 - 13x - 6 = 0$.

7. $x^3 - \dfrac{27}{8} = 4\dfrac{1}{2}x$.

8. $4\sqrt{2}x^3 - 22x^2 + 17\sqrt{2}x - 6 = 0$.

9. $x^3 - 3x = 64 + \dfrac{1}{64}$.

10. $x(x+1) + (x+1)(x+2) + (x+2)(x+3) + (x+3)(x+4) + (x+4)(x+5) = 1{\cdot}2 + 2{\cdot}3 + 3{\cdot}4 + 4{\cdot}5$.

11. $x^4 - \left(25 + \dfrac{1}{25}\right) x^2 + 1 = 0$.

12. $x^4 + 2x^3 - x = 2$.

13. $x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 6x + 4 = 0$.

14. $10x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 5x + 8 = 0$.

15. $4x^4 + 4x^3 + 3x^2 - x - 1 = 0$.

16. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$.

17. $x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x - 8 = 0.$

18. $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$

19. $x^4 + x^3 - 15x^2 - 10x + 50 = 0.$

20. $x^4 - 22x^2 - 5x + 2 = 0.$

21. $x^5 - 3x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 1 = 0.$

22. $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 12x^2 + x - 2 = 0.$

23. $x^6(1 - x) - x^3(1 - x^2) + x - x^2 = 0.$

24. $x^6 - 6x^4 + 8x^2 = -3.$

25. $(x + 1)^4 = 2(1 + x^4).$

26. $6(1 + x^2)^2 = 25(1 - x^2).$

27. $x^4 - 2\sqrt{2}x^2 - x + 2 - \sqrt{2} = 0.$

28. $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$

29. $(x + 3)^4 + (x + 5)^4 = 16.$

30. $x^4 + 4x - 1 = 0.$

31. $x^4 - 4x^3 - 1 = 0.$

Решить неравенство

32. $x^3 - 6x^2 + 12x - 10 > 0.$

33. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) < 12.$

34. $x^3 - x > 336.$

35. $2x^3 + x + \sqrt{2} > 0.$

36. $x^3 - \left(\sqrt{3} - 1\right) x^2 - 3 < 0.$

37. $x^4 - 2x^2 - 8x - 3 > 0.$

38. $x^4 - x^2 + 2x - 1 > 0.$

39. $x^4 - 4x + 3 > 0.$

40. $x^4 + 1 - 3x^3 + 3x > 0.$

41. $(5 - x)^4 + (2 - x)^4 > 17.$

42. $(x - 1)(x - 3)(x - 4)(x - 6) > 17.$

43. $(6x + 5)(3x + 2)(x + 1) < 29.$

44. $(x^2 - x)^2 + 3(x^2 - x) + 2 > 0.$

45. $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0.$

46. $x^4 - x^3 - 10x^2 + 2x + 4 < 0.$

47. $(x+1)^4 > 2(1 + x^4).$

48. $3x^2(x-4)^2 < 32 - 5(x-2)^2.$

49. $(x+2)(2-x)^2 < 0.$

50. $(x-1)(x+2)(x-3) < 0.$

51. $(2x-3)(x+4)(2-x) > 0.$

52. $(x+3)(3x-2)^2(x-4) < 0.$

53. $(x-1)^2(x+2)^3 x > 0.$

54. $(x^3-1)(x^4-1)(x^5-1) < 0.$

55. $(x^2-3x+2)(x^2-x) < 0.$

56. $\dfrac{(x^2-1)(4-x^2)}{x^2-9} < 0.$

57. $\dfrac{(2x-3)^4(3x+1)^3(x^2+x)^2}{(x^2+x+1)(x^2-25)} > 0.$

58. $\dfrac{(x+3)^4(x+2)^2}{(x+5)^2} > 0.$

59. $\dfrac{(x^2-1)(x^3+1)^2}{x^4-1} > 0.$

60. $\dfrac{x^8+x^6-4x^4+x^2+1}{x^8-x^5+x^2-x+1} > 0.$

Глава II
Уравнения и неравенства, содержащие радикалы, степени, логарифмы и модули

§ 2.1. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестную под знаком корня

2.1.1. Возведение в степень. Основным методом решения уравнений и неравенств, содержащих радикалы, является возведение, возможно даже неоднократное, обеих частей уравнения или неравенства в соответствующую степень.

При возведении обеих частей уравнения или неравенства в степень надо следить за равносильностью преобразований.

Для уравнений можно не следить за равносильностью, тогда в конце решения надо делать проверку найденных корней.

Пример 1. Решить неравенство

$$\sqrt{8x+7} - \sqrt{x+2} < \sqrt{x+3}. \tag{1}$$

Решение. ОДЗ[1] неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям

$$8x+7 \geqslant 0, \quad x+2 \geqslant 0, \quad x+3 \geqslant 0,$$

т. е. ОДЗ есть все x из промежутка $[-7/8; +\infty)$. Перепишем неравенство (1) в виде

$$\sqrt{8x+7} < \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}. \tag{2}$$

На ОДЗ обе части неравенства (2) неотрицательны, поэтому, возводя обе части этого неравенства в квадрат, получим на ОДЗ исходного неравенства равносильное ему неравенство

$$6x+2 < 2\sqrt{(x+2)(x+3)}. \tag{3}$$

[1] Под знаком ОДЗ (область допустимых значений) уравнения $f(x) = 0$ (неравенства $f(x) > 0$) будем понимать множество всех значений x_0, для каждого из которых выражение $f(x_0)$ имеет смысл.

На ОДЗ неравенства выражение $6x + 2$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, поэтому разобьем ОДЗ на два промежутка $[-7/8; -1/3]$ и $(-1/3; +\infty)$. Для любого x, принадлежащего промежутку $[-7/8; -1/3]$, левая часть неравенства (3) неположительная, а правая — положительная. Это означает, что для каждого из таких x неравенство (3) выполняется.

Если x принадлежит промежутку $(-1/3; +\infty)$, то обе части неравенства (3) положительны и оно на этой области равносильно неравенству

$$(3x + 1)^2 < (x + 2)(x + 3),$$

т. е. неравенству

$$8x^2 + x - 5 < 0. \tag{4}$$

Решениями неравенства (4) являются все x из промежутка $\frac{-1 - \sqrt{161}}{16} < x < \frac{-1 + \sqrt{161}}{16}$. Для x из этого промежутка условию $-1/3 < x < +\infty$ удовлетворяют только x из промежутка

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{-1 + \sqrt{161}}{16}.$$

Объединяя полученные решения в каждом из двух случаев, получаем, что решениями исходного неравенства являются все x из промежутка $-\frac{7}{8} \leqslant x < \frac{-1 + \sqrt{161}}{16}$.

Ответ: $-\frac{7}{8} \leqslant x < \frac{-1 + \sqrt{161}}{16}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x + 2} + \sqrt{x + 1} = 7. \tag{5}$$

Решение. ОДЗ уравнения (5) есть все $x \geqslant -1$. На ОДЗ обе части уравнения (5) положительны, поэтому после возведения в квадрат получим уравнение

$$x + 2 + 2\sqrt{(x + 2)(x + 1)} + x + 1 = 49, \tag{6}$$

равносильное для $x \geqslant -1$ уравнению (5). Перепишем уравнение (6) в виде

$$\sqrt{(x+2)(x+1)} = 23 - x. \tag{7}$$

Для любого $x > 23$ левая часть уравнения (7) положительна, а правая отрицательна. Следовательно, среди $x > 23$ нет решений уравнения (7).

Для $-1 \leqslant x \leqslant 23$ обе части уравнения (7) неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат получим уравнение

$$(x+2)(x+1) = (23-x)^2, \tag{8}$$

равносильное для этих x уравнению (7). Уравнение (8) имеет единственный корень $x_0 = \dfrac{527}{49}$. Так как это число x_0 удовлетворяет условию $-1 \leqslant x \leqslant 23$, то x_0 является корнем уравнения (5), равносильного уравнению (8) для этих x.

Ответ: $x = 527/49$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt{8x+1} + \sqrt{3x-5} = \sqrt{7x+4} + \sqrt{2x-2}. \tag{9}$$

Решение. Перепишем уравнение (9) в виде

$$\sqrt{8x+1} - \sqrt{2x-2} = \sqrt{7x+4} - \sqrt{3x-5}. \tag{10}$$

Возводя обе части уравнения (10) в квадрат, получим уравнение

$$8x + 1 + 2x - 2 - 2\sqrt{8x+1}\sqrt{2x-2} = \\ = 7x + 4 + 3x - 5 - 2\sqrt{7x+4}\sqrt{3x-5},$$

являющееся следствием исходного уравнения (9). Последнее уравнение можно переписать в виде

$$\sqrt{8x+1}\sqrt{2x-2} = \sqrt{7x+4}\sqrt{3x-5}.$$

Следствием этого уравнения является уравнение

$$(8x+1)(2x-2) = (7x+4)(3x-5). \tag{11}$$

Решения уравнения (11) есть $x_1 = 3$ и $x_2 = -6/5$. Так как уравнение (11) — следствие уравнения (9), то надо проверить, являются ли x_1 и x_2 его корнями. Подставляя эти значения x в исходное уравнение, получаем, что $x = 3$ является его решением, а $x = -6/5$ не является.

ОТВЕТ: $x = 3$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если уравнение (5) решать переходом к следствию, то проверка найденного корня была бы затруднительна. Если уравнение (9) решать с помощью равносильных преобразований, то его решение будет намного сложнее, чем приведенное выше.

Поэтому при решении уравнений с радикалами надо уметь пользоваться любым из этих способов.

2.1.2. Уравнения вида $\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x)$. Уравнение

$$\sqrt{f(x)} \pm \sqrt{g(x)} = h(x) \tag{12}$$

можно решать при помощи описанного в пункте 2.1.1 основного метода, но иногда их можно решить следующим образом.

Рассмотрим решение уравнения типа (12) на множестве M — тех значений x, для которых $h(x) \neq 0$.

Пусть x_0 — корень уравнения

$$\sqrt{f(x)} + \sqrt{g(x)} = h(x) \tag{13}$$

и $h(x_0) \neq 0$. Тогда справедливо числовое равенство

$$\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)} = h(x_0). \tag{14}$$

Найдем разность чисел

$$f(x_0) - g(x_0) = \alpha(x_0) \tag{15}$$

и запишем равенство (15) в виде

$$\left(\sqrt{f(x_0)} - \sqrt{g(x_0)}\right)\left(\sqrt{f(x_0)} + \sqrt{g(x_0)}\right) = \alpha(x_0). \tag{16}$$

Используя равенство (14), запишем равенство (16) в виде

$$\sqrt{f(x_0)} - \sqrt{g(x_0)} = \frac{\alpha(x_0)}{h(x_0)}. \tag{17}$$

Равенство (17) означает, что число x_0 есть корень уравнения

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \frac{f(x) - g(x)}{h(x)}. \qquad (18)$$

Таким образом, уравнение (18) является следствием уравнения (13) на множестве M.

Складывая уравнения (13) и (18) и умножая полученное уравнение на $h(x)$, получим уравнение

$$2\sqrt{f(x)}h(x) = f(x) - g(x) + h^2(x), \qquad (19)$$

также являющееся следствием уравнения (13) на множестве M. Возведя уравнение (19) в квадрат и решив полученное уравнение, надо сделать проверку найденных корней, т. е. проверить, являются ли его корни корнями исходного уравнения (13).

Замечание. Если x_1 — корень уравнения (13) и $h(x_1) = 0$, то x_1 также есть корень уравнения (19). Следовательно, уравнение (19) есть следствие уравнения (13).

Отметим, что точно так же показывается, что уравнение (19) есть следствие уравнения

$$\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = h(x).$$

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = 3. \qquad (20)$$

Решение. Поскольку разность подкоренных выражений $3x^2 - 5x + 7$ и $3x^2 - 7x + 2$ есть $2x + 5$ и

$$\left(\sqrt{3x^2 - 5x + 7}\right)^2 - \left(\sqrt{3x^2 - 7x + 2}\right)^2 = \\ = \left(\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2}\right) \times \\ \times \left(\sqrt{3x^2 - 5x + 7} + \sqrt{3x^2 - 7x + 2}\right),$$

то уравнение

$$\sqrt{3x^2 - 5x + 7} - \sqrt{3x^2 - 7x + 2} = \frac{2x + 5}{3} \qquad (21)$$

является следствием исходного уравнения. Тогда, складывая уравнения (20) и (21), получим уравнение

$$2\sqrt{3x^2 - 5x + 7} = \frac{2x + 14}{3}, \tag{22}$$

также являющееся следствием уравнения (20). Возводя обе части уравнения (22) в квадрат, получим уравнение

$$3x^2 - 5x + 7 = \frac{x^2 + 14x + 49}{9}, \tag{23}$$

являющееся следствием исходного уравнения. Решения уравнения (23) есть $x_1 = 2$ и $x_2 = 7/26$. Проверкой убеждаемся, что оба эти числа являются корнями исходного уравнения.

ОТВЕТ: $x_1 = 2$, $x_2 = 7/26$.

2.1.3. Уравнения вида $\sqrt[3]{f(x)} \pm \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x)$. Уравнение

$$\sqrt[3]{f(x)} + \sqrt[3]{g(x)} = \varphi(x) \tag{24}$$

можно решать следующим методом.

Пусть x_0 — корень уравнения (24). Тогда справедливо числовое равенство

$$\sqrt[3]{f(x_0)} + \sqrt[3]{g(x_0)} = \varphi(x_0). \tag{25}$$

После возведения равенства (25) в куб получим равенство

$$f(x_0) + 3\sqrt[3]{f(x_0)}\sqrt[3]{g(x_0)}\left(\sqrt[3]{f(x_0)} + \sqrt[3]{g(x_0)}\right) + g(x_0) = \varphi^3(x_0),$$

откуда в силу (25) имеем равенство

$$3\sqrt[3]{f(x_0)}\sqrt[3]{g(x_0)}\varphi(x_0) = \varphi^3(x_0) - f(x_0) - g(x_0). \tag{26}$$

Равенство (26) означает, что x_0 есть корень уравнения

$$3\sqrt[3]{f(x)}\sqrt[3]{g(x)}\varphi(x) = \varphi^3(x) - f(x) - g(x). \tag{27}$$

Таким образом, уравнение (27) есть следствие уравнения (24). Возведя уравнение (27) в куб и решив полученное уравнение, надо проверить, являются ли найденные корни корнями исходного уравнения.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}=1. \tag{28}$$

Решение. Возведя обе части уравнения в куб, получим уравнение

$$3x-2+\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}\left(\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}\right)=1,$$

равносильное исходному. Подставляя вместо выражения $\sqrt[3]{2x-1}+\sqrt[3]{x-1}$ единицу, получаем уравнение

$$3x-2+3\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1, \tag{29}$$

являющееся следствием исходного уравнения.

Уравнение (29) перепишем так:

$$\sqrt[3]{(2x-1)(x-1)}=1-x. \tag{30}$$

Возводя обе части уравнения (30) в куб, получаем уравнение

$$(2x-1)(x-1)=(1-x)^3, \tag{31}$$

равносильное уравнению (30). Решения уравнения (31) есть $x_1=0$ и $x_2=1$. Проверка показывает, что $x_1=0$ не является корнем исходного уравнения, а $x_2=1$ является его корнем.

Ответ: $x=1$.

Частным случаем уравнения (24) является уравнение вида

$$\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}=\sqrt[3]{h(x)}+\sqrt[3]{r(x)}. \tag{32}$$

Уравнение (32) после возведения обеих его частей в третью степень и замены выражения $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}$ на $\sqrt[3]{h(x)}+\sqrt[3]{r(x)}$, приводится к уравнению

$$\begin{aligned}f(x)+g(x)-h(x)-r(x)&=\\&=3\left(\sqrt[3]{h(x)r(x)}-\sqrt[3]{f(x)g(x)}\right)\left(\sqrt[3]{h(x)}+\sqrt[3]{r(x)}\right),\end{aligned} \tag{33}$$

которое есть следствие исходного уравнения. В некоторых случаях уравнение (33) можно решить и тем самым найти числа, среди которых содержатся корни исходного уравнения. Подставляя их в исходное уравнение (32) и отбирая среди них те, которые являются его корнями, получим решение уравнения (32).

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}=\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}. \tag{34}$$

Решение. Возводя обе части уравнения (34) в третью степень, имеем уравнение

$$\begin{aligned} x+x^3-x+1+3\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^3-x+1}\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}\right)= \\ =x+1+x^3-x+3\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x^3-x}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}\right), \end{aligned} \tag{35}$$

равносильное исходному. Заменяя выражение $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^3-x+1}$ выражением $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}$, получим уравнение, являющееся следствием исходного

$$\left(\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^3-x+1}-\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x^3-x}\right)\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}\right)=0. \tag{36}$$

Уравнение (36) равносильно совокупности двух уравнений

$$\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{x^3-x+1}-\sqrt[3]{x+1}\sqrt[3]{x^3-x}=0$$

и

$$\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x^3-x}=0. \tag{37}$$

Решения первого уравнения совокупности (37) есть $x=0$, $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$. Решение второго уравнения совокупности (37) есть $x=-1$.

Проверка показывает, что $x=0$, $x=-\sqrt{2}$, $x=\sqrt{2}$ и $x=-1$ являются корнями исходного уравнения.

Ответ: $x=-\sqrt{2}$, $x=-1$, $x=0$, $x=\sqrt{2}$.

Замечание. Уравнение вида

$$\sqrt[3]{f^2(x)}-\sqrt[3]{f(x)g(x)}+\sqrt[3]{g^2(x)}=\varphi(x) \tag{38}$$

можно решать следующим образом.

Умножая обе части уравнения на $\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}$, перейдем к уравнению

$$f(x)+g(x)=\left(\sqrt[3]{f(x)}+\sqrt[3]{g(x)}\right)\varphi(x), \qquad (39)$$

являющемуся следствием уравнения (38). Далее уравнение (39) можно решать так, как это предлагалось в этом пункте. Только надо помнить, что уравнение (39) есть следствие уравнения (38).

2.1.4. Умножение уравнения или неравенства на функцию. В некоторых случаях полезно умножение обеих частей уравнения или неравенства, содержащих радикалы, на некоторую функцию $f(x)$, имеющую смысл на их ОДЗ.

При решении уравнения этим способом надо либо следить за равносильностью преобразований на ОДЗ исходного уравнения, либо в конце решения надо делать проверку, так как могут появиться посторонние корни.

При решении неравенства надо следить за равносильностью преобразований неравенства на его ОДЗ, и поэтому можно умножать обе части неравенства на функцию, принимающую на ОДЗ неравенства только значения одного знака либо разбивать ОДЗ на промежутки, на которых функция знакопостоянна, и делать равносильные преобразования на этих промежутках.

Пример 7. Решить уравнение

$$x=\left(\sqrt{1+x}+1\right)\left(\sqrt{1+x}+x^2+x-7\right). \qquad (40)$$

Решение. Умножив обе части уравнения на функцию $\sqrt{1+x}-1$, получим уравнение

$$x\left(\sqrt{1+x}-1\right)=x\left(\sqrt{1+x}+x^2+x-7\right), \qquad (41)$$

являющееся следствием уравнения (40). Перепишем уравнение (41) в виде

$$x\left(-\sqrt{1+x}+1+\sqrt{1+x}+x^2+x-7\right)=0. \qquad (42)$$

Следствием уравнения (42) является уравнение

$$x(x^2+x-6)=0. \qquad (43)$$

Решениями уравнения (43) являются $x_1 = 0$, $x_2 = 2$ и $x_3 = -3$. Проверка показывает, что $x_2 = 2$ является корнем исходного уравнения, а $x = 0$ и $x = -3$ не являются его корнями.

ОТВЕТ: $x = 2$.

ПРИМЕР 8. Решить уравнение

$$\sqrt{(x+2)(2x-1)} - 3\sqrt{x+6} = \\ = 4 - \sqrt{(x+6)(2x-1)} + 3\sqrt{x+2}. \qquad (44)$$

РЕШЕНИЕ. ОДЗ уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих одновременно условиям $x + 2 \geqslant 0$, $x + 6 \geqslant 0$, $(x+6)(2x-1) \geqslant 0$, $(x+2)(2x-1) \geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть все $x \geqslant 1/2$. На ОДЗ уравнение (44) можно переписать в виде

$$\sqrt{x+2}\sqrt{2x-1} - 3\sqrt{x+6} = 4 - \sqrt{x+6}\sqrt{2x-1} + 3\sqrt{x+2}$$

или в виде

$$\left(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x-1} - 3\right) = 4. \qquad (45)$$

После умножения обеих частей уравнения (45) на функцию $\sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}$, принимающую на ОДЗ уравнения (44) только положительные значения, получим уравнение

$$\sqrt{2x-1} - 3 = \sqrt{x+6} - \sqrt{x+2}, \qquad (46)$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Поскольку выражение $\sqrt{2x-1} - 3$ обращается в нуль при $x = 5$, то разобьем множество $x \geqslant 1/2$ на два множества: $1/2 \leqslant x \leqslant 5$ и $x > 5$. Для любого $x \in [1/2; 5]$ левая часть уравнения (46) неположительна, а правая положительна. Значит, ни одно из этих x не может быть решением уравнения (46), а значит, и исходного уравнения.

Для любого $x \in (5; +\infty)$ обе части уравнения (46) положительны, и оно на этом множестве равносильно уравнению

$$2x - 1 + 9 - 6\sqrt{2x-1} = x + 6 + x + 2 - 2\sqrt{x+6}\sqrt{x+2},$$

т. е. уравнению

$$3\sqrt{2x-1} = \sqrt{x+6}\sqrt{x+2}. \qquad (47)$$

Уравнение (47) на множестве $x > 5$ равносильно уравнению

$$9(2x - 1) = x^2 + 8x + 12,$$

т. е. уравнению

$$x^2 - 10x + 21 = 0. \tag{48}$$

Решения уравнения (48) есть $x_1 = 7$ и $x_2 = 3$. Из этих значений x условию $x > 5$ удовлетворяет только $x = 7$, оно и является решением исходного уравнения.

Ответ: $x = 7$.

Пример 9. Решить неравенство

$$\sqrt{4 - x^2} - x - |x| - 1 > 0. \tag{49}$$

Решение. ОДЗ неравенства (49) состоит из всех x, для которых $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Поскольку на ОДЗ $\sqrt{4 - x^2} + x + |x| + 1 > 0$, то, умножив неравенство (49) на функцию $\sqrt{4 - x^2} + x + |x| + 1 > 0$, получим неравенство

$$(4 - x^2) - (x + |x| + 1)^2 > 0, \tag{50}$$

равносильное исходному на множестве $-2 \leqslant x \leqslant 2$.

При $0 < x \leqslant 2$ имеем $|x| = x$ и неравенство (50) перепишется в виде

$$4 - x^2 - 4x^2 - 4x - 1 > 0. \tag{51}$$

Решения неравенства (51) составляют промежуток $\dfrac{-2 - \sqrt{19}}{5} < x < \dfrac{-2 + \sqrt{19}}{5}$. Поэтому для этих x решения неравенства (50) составляют промежуток $0 < x < \dfrac{-2 + \sqrt{19}}{5}$.

При $-2 \leqslant x \leqslant 0$ неравенство (50) перепишется в виде

$$4 - x^2 - 1 > 0. \tag{52}$$

Решения неравенства (52) составляют промежуток $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$. Поэтому для этих x решения неравенства (50) составляют промежуток $-\sqrt{3} < x \leqslant 0$. Следовательно, множеством решений неравенства (49) является объединение промежутков

$$0 < x < \frac{-2+\sqrt{19}}{5} \quad \text{и} \quad -\sqrt{3} < x \leqslant 0,$$

т. е. интервал

$$-\sqrt{3} < x < \frac{\sqrt{19}-2}{5}$$

Ответ: $-\sqrt{3} < x < \dfrac{\sqrt{19}-2}{5}$.

§ 2.2. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестную в основании логарифмов

В этом параграфе рассматриваются уравнения и неравенства вида

$$\log_{\varphi(x)} f(x) = \log_{\psi(x)} g(x), \tag{1}$$

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\psi(x)} g(x). \tag{2}$$

При решении таких уравнений и неравенств надо учитывать, что их ОДЗ определяется из условий:

1) на ОДЗ все функции $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют смысл;

2) на ОДЗ основания логарифмов, т. е. функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, должны удовлетворять условиям $\varphi(x) > 0$, $\psi(x) > 0$, $\varphi(x) \neq 1$, $\psi(x) \neq 1$;

3) на ОДЗ функции, находящиеся под знаком логарифма, должны быть положительны, т. е. на ОДЗ должны выполняться неравенства $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

2.2.1. Переход к числовому основанию. Одним из основных способов решения уравнений и неравенств вида (1) и (2) является следующий.

1. Найти ОДЗ уравнения или неравенства.

2. Перейти в логарифмах к некоторому основанию a, где a — фиксированное число, $a > 0$ и $a \neq 1$, т. е. заменить уравнение (1) равносильным ему на ОДЗ уравнением

$$\frac{\log_a f(x)}{\log_a \varphi(x)} = \frac{\log_a g(x)}{\log_a \psi(x)}, \tag{3}$$

а неравенство (2) — равносильным ему на ОДЗ неравенством

$$\frac{\log_a f(x)}{\log_a \varphi(x)} > \frac{\log_a g(x)}{\log_a \psi(x)}. \tag{4}$$

3. Решить полученное стандартное по внешнему виду уравнение (3) (или неравенство (4)) на ОДЗ исходного уравнения (или неравенства). Его решения и будут решениями исходного уравнения (или неравенства).

Заметим, что ОДЗ уравнений (1) и (3) и неравенств (2) и (4) совпадают, поэтому можно сразу переходить от уравнения (1) к уравнению (3) и от неравенства (2) к неравенству (4) и решать их на своей ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение

$$\log_x(2x+1) = \log_{2x^3+x^2}(4x^3+4x^2+x). \tag{5}$$

Решение. ОДЗ уравнения (5) состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x > 0$, $x \neq 1$, $2x+1 > 0$, $2x^3+x^2 > 0$, $2x^3+x^2 \neq 1$, $4x^3+4x^2+x > 0$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков $0 < x < 1$ и $1 < x < +\infty$. Переходя в (5) к логарифмам по основанию, например, 2, получим уравнение

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2(4x^3+4x^2+x)}{\log_2(2x^3+x^2)}, \tag{6}$$

равносильное уравнению (5) на ОДЗ. Поскольку для этих x имеем $\log_2(4x^3+4x^2+x) = \log_2 x + 2\log_2(2x+1)$ и $\log_2(2x^3+x^2) = 2\log_2 x + \log_2(2x+1)$, то уравнение (6) можно записать в виде

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = \frac{\log_2 x + 2\log_2(2x+1)}{2\log_2 x + \log_2(2x+1)}$$

или, так как на ОДЗ $\log_2 x \neq 0$, в виде

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = \frac{1 + \dfrac{2\log_2(2x+1)}{\log_2 x}}{2 + \dfrac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}}. \tag{7}$$

Обозначим $\dfrac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x}$ через t, тогда уравнение (7) можно переписать в виде $t = \dfrac{1+2t}{2+t}$. Решения последнего уравнения есть $t_1 = 1$ и $t_2 = -1$. Следовательно, уравнение (7) равносильно на ОДЗ исходного уравнения совокупности уравнений

$$\frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = 1 \quad \text{и} \quad \frac{\log_2(2x+1)}{\log_2 x} = -1.$$

Первое из уравнений этой совокупности не имеет решений, а решение второго уравнения есть $x = 1/2$. Это число принадлежит ОДЗ исходного уравнения и, следовательно, является единственным его решением.

Ответ: $x = 1/2$.

Пример 2. Решить неравенство

$$\log_x(2+x) > \log_{x^2}(x^2+2x). \tag{8}$$

Решение. ОДЗ неравенства (8) состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $2+x>0$, $x^2+2x>0$, $x>0$, $x \neq 1$, $x^2>0$, $x^2 \neq 1$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков: $0<x<1$ и $1<x<+\infty$.

Перейдем в логарифмах неравенства (8) к логарифмам по основанию, например, 2. В результате получим неравенство

$$\frac{\log_2(2+x)}{\log_2 x} > \frac{\log_2(x^2+2x)}{\log_2 x^2}, \tag{9}$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Поскольку на ОДЗ исходного неравенства имеем $\log_2(x^2+2x) = \log_2 x + \log_2(2+x)$

и $\log_2 x^2 = 2\log_2 x$, то неравенство (9) для этих x можно переписать в виде

$$\frac{\log_2(2+x)}{\log_2 x} > \frac{\log_2 x + \log_2(2+x)}{2\log_2 x},$$

или в виде

$$\frac{\log_2(2+x) - \log_2 x}{\log_2 x} > 0,$$

или, наконец, в виде

$$\frac{\log_2 \frac{2+x}{x}}{\log_2 x} > 0. \qquad (10)$$

Так как $\dfrac{2+x}{x} = \dfrac{2}{x} + 1$, то на ОДЗ исходного неравенства $\dfrac{2+x}{x} > 1$, следовательно, $\log_2 \dfrac{2+x}{x} > 0$. Поэтому неравенство (10) равносильно неравенству $\log_2 x > 0$. Решения последнего неравенства есть все $x > 1$. Поскольку все $x > 1$ входят в ОДЗ исходного неравенства, то все они являются его решениями.

Ответ: $1 < x < +\infty$.

Отметим, что иногда при решении уравнений и неравенств вида (1) и (2) нецелесообразно переходить к некоторому постоянному основанию, так как это может сделать более громоздкой запись уравнения (или неравенства) и не облегчит процесс его решения.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_{1-2x}(6x^2 - 5x + 1) - \log_{1-3x}(4x^2 - 4x + 1) = 2. \qquad (11)$$

Решение. Поскольку $4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 = (1-2x)^2$, $6x^2 - 5x + 1 = (1-3x)(1-2x)$, то ОДЗ исходного уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$1 - 2x > 0,\ 1 - 2x \neq 1,\ 1 - 3x > 0,\ 1 - 3x \neq 1,$$

т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков: $-\infty < x < 0$ и $0 < x < 1/3$. Легко видеть, что переход в логарифмах к некоторому основанию a приведет к громоздким выражениям.

Поэтому поступим иначе: преобразуем уравнение на его ОДЗ. Исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно уравнению

$$\log_{1-2x}(1-3x)+\log_{1-2x}(1-2x)-2\log_{1-3x}(1-2x)=2,$$

т. е. уравнению

$$\log_{1-2x}(1-3x)-2\log_{1-3x}(1-2x)=1. \qquad (12)$$

Обозначим $\log_{1-2x}(1-3x)$ через z. Тогда поскольку на ОДЗ

$$\log_{1-3x}(1-2x)=\frac{1}{\log_{1-2x}(1-3x)},$$

то уравнение (12) можно переписать в виде

$$z-\frac{2}{z}=1.$$

Это уравнение имеет корни $z_1=-1$ и $z_2=2$. Следовательно, исходное уравнение на своей ОДЗ равносильно совокупности двух уравнений:

$$\log_{1-2x}(1-3x)=-1 \quad \text{и} \quad \log_{1-2x}(1-3x)=2. \qquad (13)$$

Первое из этих уравнений равносильно на рассматриваемой области $x<1/3$, $x\neq 0$, уравнению

$$\log_{1-2x}(1-3x)=\log_{1-2x}\frac{1}{1-2x},$$

т. е. уравнению

$$1-3x=\frac{1}{1-2x}.$$

Это уравнение имеет два корня: $x_1=0$ и $x_2=5/6$, из которых ни один не входит в рассматриваемую область, и поэтому не является решением исходного уравнения. Второе уравнение совокупности (13) равносильно на области $x<1/3$, $x\neq 0$, уравнению $1-3x=(1-2x)^2$, решения которого есть $x_3=0$ и $x_4=1/4$. Из этих значений только $x_4=1/4$ входит в рассматриваемую область и потому является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=1/4$.

2.2.2. Переход к основанию, содержащему неизвестную. Иногда при решении уравнений и неравенств вида (1) и (2) переходят к логарифмам по другому основанию, содержащему x. При этом надо помнить, что может произойти сужение ОДЗ, а следовательно, и потеря корня. Поэтому при переходе в уравнении (или неравенстве) к логарифмам по некоторому основанию $h(x)$, содержащему x, вначале надо проверить, что $h(x) > 0$ для рассматриваемых x, а также проверить, не являются ли значения x, при которых $h(x) = 1$, решениями исходного уравнения, после чего уже переходить к основанию $h(x)$, но уже для тех x, для которых $h(x) > 0$ и $h(x) \neq 1$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\log_{\frac{x}{4}} x^2 - \log_{8x} x^3 = 0. \tag{14}$$

Решение. ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 1/8$.

Будем решать это уравнение, переходя к логарифмам по основанию x. Прежде чем сделать этот переход, проверим, является ли $x = 1$ корнем исходного уравнения. Подставляя 1 вместо x в уравнение (14), получаем, что $x = 1$ есть его корень. Перейдя теперь в уравнении (14) к логарифмам по основанию x (учитывая, что $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$, $x \neq 1/8$), получим уравнение

$$\frac{\log_x x^2}{\log_x \frac{x}{4}} - \frac{\log_x x^3}{\log_x 8x} = 0, \tag{15}$$

равносильное исходному уравнению на множестве $x > 0$, $x \neq 4$, $x \neq 1/8$ и $x \neq 1$. Уравнение (15) для этих x можно переписать так:

$$\frac{2}{1 - \log_x 4} - \frac{3}{\log_x 8 + 1} = 0. \tag{16}$$

Поскольку $1 - \log_x 4 \neq 0$ и $1 + \log_x 8 \neq 0$ для рассматриваемых x, то уравнение (16) равносильно уравнению

$$2(1 + \log_x 8) - 3(1 - \log_x 4) = 0$$

или уравнению

$$12 \log_x 2 = 1,$$

имеющему единственный корень $x = 2^{12}$. Так как этот корень входит в рассматриваемое множество $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$, $x \neq 1/8$, то он и является решением исходного уравнения на этом множестве.

Ответ: $x = 2^{12}$, $x = 1$.

2.2.3. Уравнения вида $\log_{\varphi(x)} h(x) = \log_{\varphi(x)} g(x)$, $\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x)$. Уравнения

$$\log_{\varphi(x)} h(x) = \log_{\varphi(x)} g(x), \tag{17}$$

$$\log_{f(x)} \varphi(x) = \log_{g(x)} \varphi(x) \tag{18}$$

можно решать и таким способом:

1. Перейти от этих уравнений к их следствиям, т. е. от уравнения (17) к уравнению

$$h(x) = g(x), \tag{19}$$

а от уравнения (18) к совокупности уравнений (20)

$$f(x) = g(x) \quad \text{и} \quad \varphi(x) = 1.$$

2. Решить уравнение (19) или совокупность уравнений (20).

3. Проверить, какие из найденных корней будут корнями исходного уравнения.

Пример 5. Решить уравнение

$$\log_{1+x+\sin x}(x^2 + x - 1) = \log_{1+x+\sin x}(3x + 2). \tag{21}$$

Решение. Уравнение

$$x^2 + x - 1 = 3x + 2 \tag{22}$$

является следствием уравнения (21). Переписав уравнение (22) в виде $x^2 - 2x - 3 = 0$, находим его корни $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$. При $x_2 = -1$ функция, находящаяся в основании логарифмов, принимает отрицательное значение $1 + x_2 + \sin x_2 = -\sin 1 < 0$, т. е. x_2 не удовлетворяет уравнению (21). При $x_1 = 3$ функция, находящаяся в основании логарифмов, принимает значение, большее нуля и не равное 1, так как $1 + x_1 + \sin x_1 = 4 + \sin 3 > 4$, т. е. x_1 удовлетворяет уравнению (21).

Ответ: $x = 3$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\log_{\sin x+\cos^2 x+\sqrt{\cos x}}\left(1-\sqrt{x^2-x}\right) = \log_{\sin x+1+\sqrt{\cos x}}\left(1-\sqrt{x^2-x}\right). \tag{23}$$

Решение. Совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l} \sin x + \cos^2 x + \sqrt{\cos x} = \sin x + 1 + \sqrt{\cos x}, \\ 1 - \sqrt{x^2 - x} = 1, \end{array}\right. \tag{24}$$

является следствием уравнения (23). Ясно, что все решения первого уравнения совокупности (24) есть решения уравнения $\cos x = 1$, т. е. $x_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. При любом $x_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, функция $\sin x + \cos^2 x + \sqrt{\cos x}$ равна 2, т. е. при этих x_k основания логарифмов в уравнении (23) равны 2. Поэтому решениями уравнения (23) будут те $x_k = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, для которых $1 - \sqrt{x_k^2 - x_k} > 0$. Легко видеть, что только $x_0 = 0$ удовлетворяет этому условию, а следовательно, является решением уравнения (23).

Решения уравнения $1 - \sqrt{x^2 - x} = 1$ есть $x' = 0$ и $x'' = 1$. Так как $\sin 1 > \sin \pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\cos 1 > \cos \pi/3 = 1/2$, то $\sin 1 + 1 + \sqrt{\cos 1} > 1$, $\sin 1 + \cos^2 1 + \sqrt{\cos 1} > \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 1$. Значит, $x'' = 1$ удовлетворяет уравнению (23). Следовательно, решениями уравнения (23) являются $x' = 0$ и $x'' = 1$.

Ответ: $x = 0$, $x = 1$.

2.2.4. Уравнения вида $\log_{f(x)} g(x) = a$. Если в уравнении

$$\log_{f(x)} g(x) = a \tag{25}$$

$a = n$, где n — натуральное число, то следствием уравнения (25) является уравнение

$$g(x) = [f(x)]^n. \tag{26}$$

Если же $a = 0$, то следствием уравнения (25) является уравнение

$$g(x) = 1. \tag{27}$$

Уравнение вида (25) можно решать, следовательно, так:

1. Перейти от этого уравнения при натуральном n к уравнению (26), а при $n = 0$ к уравнению (27).

2. Решить уравнение (26) или уравнение (27).

3. Проверить, какие из найденных корней будут корнями исходного уравнения.

Замечание. Конечно, можно считать, что при любом действительном числе a следствием уравнения (25) является уравнение

$$g(x) = [f(x)]^a,$$

но тогда надо уточнять, что понимается под функцией $[f(x)]^a$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\log_{2x-1}(2x^2 + 4x + 1) = 2. \tag{28}$$

Решение. Уравнение

$$2x^2 + 4x + 1 = (2x - 1)^2 \tag{29}$$

является следствием уравнения (28). Переписав уравнение (29) а виде $2x^2 - 8x = 0$, находим его корни $x_1 = 4$ и $x_2 = 0$. Легко видеть, что $x_1 = 4$ является корнем уравнения (28), а $x_2 = 0$ не является его корнем.

Ответ: $x = 4$.

Пример 8. Решить уравнение

$$\log_x \cos x = 0. \tag{30}$$

Решение. Следствием уравнения (30) является уравнение $\cos x = 1$, решения которого есть $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Ясно, что из этих x уравнению (30) будут удовлетворять лишь $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

Ответ: $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{N}$.

2.2.5. Неравенства вида $\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x)$. Согласно общему методу решения неравенств, содержащих неизвестную в основании логарифмов, неравенство

$$\log_{\varphi(x)} f(x) > \log_{\varphi(x)} g(x) \tag{31}$$

равносильно при $a > 1$ неравенству

$$\frac{\log_a f(x)}{\log_a \varphi(x)} > \frac{\log_a g(x)}{\log_a \varphi(x)},$$

которое можно переписать в виде

$$\frac{\log_a f(x) - \log_a g(x)}{\log_a \varphi(x)} > 0.$$

Последнее неравенство равносильно совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} \log_a f(x) - \log_a g(x) > 0, \\ \log_a \varphi(x) > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} \log_a f(x) - \log_a g(x) < 0, \\ \log_a \varphi(x) < 0 \end{cases}$$

или совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} f(x) > g(x) > 0, \\ \varphi(x) > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} 0 < f(x) < g(x), \\ 0 < \varphi(x) < 1. \end{cases} \tag{32}$$

Поэтому неравенство вида (31) можно решать следующим образом:

1. Перейти от неравенства (31) к равносильной совокупности неравенств (32).

2. Решить совокупность неравенств (32), ее решения и будут решениями неравенства (31).

Пример 9. Решить неравенство

$$\log_{x^2}(x^2 - 4x + 3) > \log_{x^2} x^2. \tag{33}$$

Решение. Неравенство (33) равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\begin{cases} x^2 > 1, \\ x^2 - 4x + 3 > x^2 > 0, \end{cases} \tag{34}$$

$$\begin{cases} 0 < x^2 < 1, \\ 0 < x^2 - 4x + 3 < x^2. \end{cases} \qquad (35)$$

Система (34) равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x > 1, \\ -4x + 3 > 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x < -1 \\ -4x + 3 > 0, \end{cases}$$

из которых первая не имеет решений, а решения второй составляют промежуток $-\infty < x < -1$.

Система (35) равносильна совокупности систем неравенств

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x^2 - 4x + 3 > 0, \\ -4x + 3 < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} -1 < x < 0, \\ x^2 - 4x + 3 > 0, \\ -4x + 3 < 0. \end{cases}$$

Решения первой системы этой совокупности есть множество $\frac{3}{4} < x < 1$, а вторая система решений не имеет.

Следовательно, решениями исходного неравенства являются все x из объединения двух промежутков $-\infty < x < -1$ и $\frac{3}{4} < x < 1$.

Ответ: $-\infty < x < -1$; $\frac{3}{4} < x < 1$.

Процесс решения неравенства вида (31) иногда оформляют следующим образом:

1. Находят ОДЗ неравенства (31).

2. Разбивают ОДЗ неравенства (31) на два множества M_1 и M_2: M_1 — та часть ОДЗ, где $\varphi(x) > 1$, M_2 — та часть ОДЗ, где $0 < \varphi(x) < 1$.

3. На M_1 решают неравенство $f(x) > g(x)$, равносильное на M_1 исходному неравенству.

4. На M_2 решают неравенство $f(x) < g(x)$, равносильное на M_2 исходному неравенству.

Объединяя решения, найденные на M_1 и M_2, получают все решения исходного неравенства.

Пример 10. Решить неравенство

$$\log_x \frac{3x+2}{x+2} > 1. \qquad (36)$$

Решение. ОДЗ неравенства (36) определяется из условий $x > 0$, $\frac{3x+2}{x+2} > 0$, $x \neq 1$, т. е. ОДЗ состоит из двух промежутков: $x > 1$ и $0 < x < 1$.

а) Пусть $x > 1$. Для этих x исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{3x+2}{x+2} > x. \tag{37}$$

Так как $x+2 > 0$ для рассматриваемых x, то неравенство (37) равносильно неравенству $3x+2 > x(x+2)$, которое можно записать в виде

$$x^2 - x - 2 < 0. \tag{38}$$

Решениями неравенства (38) являются все x из промежутка $-1 < x < 2$. Из этих x условию $x > 1$ удовлетворяют x из промежутка $1 < x < 2$.

Следовательно, в случае а) решения исходного неравенства составляют промежуток $1 < x < 2$.

б) Пусть $0 < x < 1$. Для этих x исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{3x+2}{x+2} < x. \tag{39}$$

Так как $x+2 > 0$ для рассматриваемых x, то неравенство (39) равносильно неравенству $3x+2 < x(x+2)$, которое можно переписать в виде

$$x^2 - x - 2 > 0. \tag{40}$$

Решениями неравенства (40) являются все x из двух промежутков $-\infty < x < -1$ и $2 < x < +\infty$. Ни одно из этих x не удовлетворяет условию $0 < x < 1$. Следовательно, в случае б) исходное неравенство не имеет решений.

Ответ: $1 < x < 2$.

§ 2.3. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестную в основании и показателе степени

В этом параграфе рассматриваются уравнения и неравенства вида

$$f(x)^{\varphi(x)} = g(x)^{h(x)}, \tag{1}$$

$$f(x)^{\varphi(x)} > g(x)^{h(x)}, \tag{2}$$

в том случае, когда обе функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны на общей части (пересечении) областей существования функций $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ и $h(x)$ и хотя бы одна из двух функций $\varphi(x)$ или $h(x)$ не является числом.

Общим способом решения таких уравнений и неравенств является следующий.

1. Отыскивается множество M — общая часть (пересечение) областей существования функций $f(x)$, $g(x)$, $\varphi(x)$ и $h(x)$.

2. Проверяется, что на множестве M функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны.

3. Затем путем логарифмирования левой и правой частей уравнения или неравенства по некоторому основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) уравнение (1) заменяется равносильным ему на M уравнением

$$\varphi(x)\log_a f(x) = h(x)\log_a g(x), \tag{3}$$

а неравенство (2) — равносильным ему на M неравенством

$$\varphi(x)\log_a f(x) > h(x)\log_a g(x), \quad a > 1. \tag{4}$$

4. На множестве M решается стандартное по внешнему виду уравнение (3) или неравенство (4).

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{3x-5}} = (3x-5)^{\log_{\frac{1}{25}}(2+5x-x^2)}.$$

Решение. Множество M — общая часть (пересечение) областей существования функций $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{3x-5}}$,

$g(x) = 3x - 5$, $h(x) = \log_{1/25}(2 + 5x - x^2)$ — состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} 3x - 5 > 0, \\ 2 + 5x - x^2 > 0. \end{cases}$$

Решая эту систему неравенств, находим, что множество M есть интервал $\frac{5}{3} < x < \frac{5 + \sqrt{33}}{2}$. Пользуясь формулами

$$\log_{1/25} z = -\frac{1}{2}\log_5 z \quad \text{и} \quad \frac{1}{\sqrt{3x - 5}} = (3x - 5)^{-1/2},$$

перепишем исходное уравнение в виде

$$(3x - 5)^{-1/2} = (3x - 5)^{-1/2\log_5(2+5x-x^2)}.$$

Логарифмируя это уравнение, например, по основанию 2, получим уравнение

$$-\frac{1}{2}\log_2(3x - 5) = -\frac{1}{2}\log_5(2 + 5x - x^2)\cdot\log_2(3x - 5), \qquad (5)$$

равносильное исходному уравнению на M.

Уравнение (5) можно переписать в виде

$$\log_2(3x - 5)\cdot(\log_5(2 + 5x - x^2) - 1) = 0,$$

откуда следует, что оно равносильно на M совокупности двух уравнений

$$\log_2(3x - 5) = 0 \quad \text{и} \quad \log_5(2 + 5x - x^2) = 1.$$

Первое уравнение имеет единственный корень $x_1 = 2$, который входит в множество M. Второе уравнение равносильно на M квадратному уравнению $2 + 5x - x^2 = 5$, которое имеет два корня $x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$ и $x_3 = \frac{5 - \sqrt{13}}{2}$. Из этих чисел в M лежит только $x_2 = \frac{5 + \sqrt{13}}{2}$. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня x_1 и x_2.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(x^2 + x + 1)^{x-5\sqrt{x}+6} = (x+3)^{x-5\sqrt{x}+6}.$$

Решение. Множество M — общая часть (пересечение) областей существования функций $f(x) = x^2 + x + 1$, $g(x) = x + 3$, $\varphi(x) = x - 5\sqrt{x} + 6$ есть все $x \geqslant 0$. На множестве M функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны. Поэтому логарифмируя обе части уравнения, например, по основанию 2, получим уравнение

$$(x - 5\sqrt{x} + 6)\log_2(x^2 + x + 1) = (x - 5\sqrt{x} + 6)\log_2(x+3),$$

равносильное исходному на M.

Полученное уравнение можно переписать в виде

$$(x - 5\sqrt{x} + 6)(\log_2(x^2 + x + 1) - \log_2(x+3)) = 0,$$

откуда следует, что оно равносильно на M совокупности двух уравнений

$$x - 5\sqrt{x} + 6 = 0 \quad \text{и} \quad \log_2(x^2 + x + 1) - \log_2(x+3) = 0.$$

Первое уравнение имеет два корня $x_1 = 4$ и $x_2 = 9$, входящие в M. Второе уравнение равносильно на M уравнению $x^2 + x + 1 = x + 3$, имеющему два корня $x_3 = \sqrt{2}$ и $x_4 = -\sqrt{2}$, из которых в M входит только $x_3 = \sqrt{2}$. Итак, решениями исходного уравнения являются $x_1 = 4$, $x_2 = 9$ и $x_3 = \sqrt{2}$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 9$, $x_3 = \sqrt{2}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$x^{\log_2\sqrt{x}} < 2^{2+\frac{1}{4}\log_2^2 x}. \tag{6}$$

Решение. Множество M — общая часть (пересечение) областей существования функций $f(x) = x$, $\varphi(x) = \log_2\sqrt{x}$, $h(x) = 2 + \dfrac{1}{4}\log_2^2 x$ — состоит из всех x из промежутка $0 < x < +\infty$. На этом множестве M положительны функции

$f(x) = x$ и $g(x) = 2$. Поэтому, логарифмируя неравенство (6) по основанию 2, получим равносильное ему на M неравенство

$$\log_2 \sqrt{x} \log_2 x < 2 + \frac{1}{4} \log_2^2 x.$$

Перепишем это неравенство в виде $(\log_2 x)^2 < 8$ или в виде

$$-\sqrt{8} < \log_2 x < \sqrt{8}. \tag{7}$$

Решениями неравенства (7) являются все x из промежутка $2^{-\sqrt{8}} < x < 2^{\sqrt{8}}$. Все эти x входят в M и поэтому являются решениями исходного неравенства.

Ответ: $2^{-\sqrt{8}} < x < 2^{\sqrt{8}}$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x^2-\sqrt{x}+2} > \left(\frac{x}{x+2}\right)^{x^2-\sqrt{x}+2}. \tag{8}$$

Решение. Множество M— общая часть областей существования функций $f(x) = \dfrac{x+2}{x+1}$, $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$, $\varphi(x) = x^2 - \sqrt{x} + 2$ — есть все x из промежутка $0 \leqslant x < \infty$. На этом множестве функции $f(x)$ и $g(x)$ положительны, поэтому, логарифмируя неравенство (8) по основанию 2, получим равносильное ему на M неравенство

$$(x^2 - \sqrt{x} + 2) \log_2 \left(\frac{x+2}{x+1}\right) > (x^2 - \sqrt{x} + 2) \log_2 \frac{x}{x+2}. \tag{9}$$

Неравенство (9) равносильно на M совокупности

$$\begin{cases} x^2 - \sqrt{x} + 2 > 0, \\ \dfrac{x+2}{x+1} > \dfrac{x}{x+2} > 0, \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} x^2 - \sqrt{x} + 2 < 0, \\ \dfrac{x}{x+2} > \dfrac{x+2}{x+1} > 0. \end{cases} \tag{11}$$

Докажем, что для любого $x \geqslant 0$ выполняется неравенство $x^2 - \sqrt{x} + 2 > 0$. В самом деле, при любом x, $0 \leqslant x \leqslant 1$, имеем $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$ и $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, поэтому

$$x^2 - \sqrt{x} + 2 = x^2 + 1 + (1 - \sqrt{x}) > 0.$$

При любом $x > 1$ имеем $x^2 > \sqrt{x}$, поэтому $x^2 - \sqrt{x} + 2 > 0$. Следовательно, на множестве $x \geqslant 0$ система (11) решений не имеет, а система (10) равносильна системе неравенств

$$\begin{cases} x > 0, \\ \dfrac{x+2}{x+1} > \dfrac{x}{x+2}. \end{cases} \tag{12}$$

Поскольку при $x > 0$ имеем $x + 1 > 0$ и $x + 2 > 0$, то второе неравенство системы (12) для $x > 0$ равносильно неравенству $(x+2)^2 > x(x+1)$, которое можно переписать в виде $3x+4 > 0$. Последнее неравенство справедливо для любого $x > 0$. Следовательно, система неравенств (12) справедлива для любого $x > 0$. Поэтому множество решений исходного неравенства есть все $x > 0$.

ОТВЕТ: $0 < x < +\infty$.

§ 2.4. Уравнения и неравенства, содержащие неизвестную под знаком абсолютной величины

2.4.1. Раскрытие знаков модулей. Основной метод решения уравнений и неравенств, содержащих модули, состоит в следующем: надо разбить ОДЗ уравнения или неравенства на множества, на каждом из которых каждое из выражений, стоящих под знаком модуля, сохраняет знак. На каждом таком множестве уравнение или неравенство записывается без знака модуля и затем решается на этом множестве. Объединение решений, найденных на всех этих множествах — частях ОДЗ уравнения или неравенства, составляет множество всех его решений.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^2 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} = x^2 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}. \qquad (1)$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из всех действительных x. Разобьем ОДЗ на два промежутка:

а) $x - 3 \geqslant 0$;

б) $x - 3 < 0$.

а) Пусть $x \geqslant 3$, тогда $|x-3| = x - 3$ и уравнение (1) запишется на этом множестве так:

$$x^2 2^{x+1} + 2^{x-1} = x^2 2^{x+1} + 2^{x-1}.$$

Это уравнение превращается в верное числовое равенство для любого действительного x, т. е. его решениями являются все действительные x. Из них условию $x \geqslant 3$ удовлетворяют все x из промежутка $[3; +\infty)$. Они и являются решениями уравнения (1) в случае а).

б) Пусть $x < 3$, тогда $|x-3| = -x+3$ и уравнение (1) запишется на этом множестве так:

$$x^2 2^{x+1} + 2^{-x+5} = x^2 2^{-x+7} + 2^{x-1}$$

или

$$(2^x - 64 \cdot 2^{-x})(4x^2 - 1) = 0. \qquad (2)$$

Решения этого уравнения есть $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/2$, $x_3 = 3$. Из этих значений условию $x < 3$ удовлетворяют только $x_1 = 1/2$ и $x_2 = -1/2$. Итак, решения уравнения (1) есть $x_1 = 1/2$, $x_2 = -1/2$ и все x из промежутка $[3; +\infty)$.

Ответ: $x_1 = -1/2$; $x_2 = 1/2$; $3 \leqslant x < \infty$.

Пример 2. Решить неравенство

$$|x^2 - x| + \left|1 - \sqrt{\log_2(1+x)}\right| > \sqrt{\log_2(1+x)} - x^2 + x. \qquad (3)$$

Решение. ОДЗ неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условию $x \geqslant 0$. Так как функции $y = x^2 - x$ и $y = 1 - \sqrt{\log_2(1+x)}$ меняют знак на области $x \geqslant 0$, проходя через точку $x = 1$, то разобьем ОДЗ на два промежутка: $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $1 < x < +\infty$.

а) Если $0 \leqslant x \leqslant 1$, то $x^2 - x \leqslant 0$ и $1 - \sqrt{\log_2(1+x)} \geqslant 0$. Поэтому неравенство (3) запишется для этих x в виде

$$-x^2 + x + 1 - \sqrt{\log_2(1+x)} > \sqrt{\log_2(1+x)} - x^2 + x,$$

т. е. в виде

$$\sqrt{\log_2(1+x)} < \frac{1}{2}.$$

Решения этого неравенства есть $0 \leqslant x < 2^{\frac{1}{4}} - 1$. Все эти x удовлетворяют условию $0 \leqslant x \leqslant 1$, а значит, являются решениями исходного неравенства (3).

б) Если $1 < x < +\infty$, то $x^2 - x > 0$ и $1 - \sqrt{\log_2(1+x)} < 0$. Поэтому неравенство (3) перепишется в виде

$$x^2 - x + \sqrt{\log_2(1+x)} - 1 > \sqrt{\log_2(1+x)} - x^2 + x,$$

т. е. в виде $2x^2 - 2x - 1 > 0$. Решения этого неравенства составляют два промежутка: $-\infty < x < \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ и $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < x < +\infty$. Из этих x условию $x > 1$ удовлетворяют все x из промежутка $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < x < +\infty$, поэтому все они являются решениями неравенства (3). Множеством всех решений исходного неравенства (3) будет объединение решений, найденных в случаях а) и б).

Ответ: $0 \leqslant x < 2^{\frac{1}{4}} - 1$; $\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < x < +\infty$.

2.4.2. Уравнения вида $|f(x)| = g(x)$. Уравнение

$$|f(x)| = g(x) \tag{4}$$

можно решать основным методом. Однако в некоторых случаях полезно уравнение (4) решать следующим образом:

1. Найти ту часть ОДЗ уравнения (4), где $g(x) \geqslant 0$.

2. На этой области уравнение (4) равносильно совокупности двух уравнений

$$f(x) = g(x) \quad \text{и} \quad -f(x) = g(x).$$

Решения этой совокупности, принадлежащие рассматриваемой области, и дадут решение уравнения (4).

Пример 3. Решить уравнение

$$|2^x - \cos x - 5| = 2^x + 2 + \cos x. \tag{5}$$

Решение. ОДЗ этого уравнения есть все действительные x. Очевидно, что на ОДЗ, т. е. для любого действительного x,

$$2^x + 2 + \cos x > 0.$$

Поэтому уравнение (5) равносильно совокупности уравнений

$$2^x - \cos x - 5 = 2^x + 2 + \cos x,$$

и

$$-(2^x - \cos x - 5) = 2^x + 2 + \cos x.$$

Первое уравнение решений не имеет, а второе равносильно уравнению $2^x = 3/2$, имеющему единственный корень $x = \log_2 \frac{3}{2}$.

Ответ: $x = \log_2 3/2$.

2.4.3. Неравенства вида $|f(x)| < g(x)$. Неравенство

$$|f(x)| < g(x) \tag{6}$$

можно решать основным методом. Однако иногда бывает полезно заменить неравенство (6) равносильной ему системой неравенств

$$\begin{cases} f(x) < g(x), \\ -f(x) < g(x). \end{cases}$$

Пример 4. Решить неравенство

$$|x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3| < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3. \tag{7}$$

Решение. Данное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3 < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3, \\ -(x^7 + 4x^5 + x^2 + 2x - 3) < x^7 + 4x^5 - x^2 - 2x + 3, \end{cases}$$

которую можно переписать в виде

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 3 < 0, \\ x^5(x^2 + 4) > 0. \end{cases} \tag{8}$$

Решения первого неравенства системы (8) составляют промежуток $-3 < x < 1$, решения второго составляют промежуток $0 < x < +\infty$. Следовательно, решения системы неравенств (8), а значит, и исходного неравенства (7) составляют промежуток $0 < x < 1$.

Ответ: $0 < x < 1$.

2.4.4. Неравенства вида $|f(x)| > g(x)$. Неравенство

$$|f(x)| > g(x) \tag{9}$$

можно решать основным способом. Однако иногда бывает полезно разбить ОДЗ неравенства (9) на две части иначе, а именно:

1. Найти область, где $g(x) < 0$. Все x из этой области дают решение неравенства (9).

2. Найти область, где $g(x) \geqslant 0$ и на ней рассмотреть неравенство

$$f^2(x) > g^2(x).$$

Объединение найденных решений и дает все решения неравенства (9).

Пример 5. Решить неравенство

$$\left|\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x + 1\right| > \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x. \tag{10}$$

Решение. ОДЗ неравенства (10) состоит из всех действительных x.

а) Найдем те x, для которых

$$\sqrt{x^2 - x + 1} + 2x < 0. \tag{11}$$

Перепишем неравенство (11) в виде

$$\sqrt{x^2 - x + 1} < -2x. \tag{12}$$

Ясно, что никакое x из промежутка $0 \leqslant x < +\infty$ не является решением неравенства (12). Пусть $x < 0$, для этих x неравенство (12) равносильно неравенству

$$x^2 - x + 1 < 4x^2. \tag{13}$$

Решения неравенства (13) составляют два промежутка: $-\infty < x < \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$ и $\dfrac{-1+\sqrt{13}}{6} < x < +\infty$. Из этих x условию $x < 0$ удовлетворяют лишь x из промежутка $-\infty < x < \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$. Следовательно, решениями неравенства (11) являются все x из промежутка $-\infty < x < -\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$, все эти x являются решениями исходного неравенства (10).

б) Теперь на множестве $x \geqslant -\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$ рассмотрим неравенство

$$\left(\sqrt{x^2-x+1} - 2x + 1\right)^2 > \left(\sqrt{x^2-x+1} + 2x\right)^2. \tag{14}$$

Неравенство (14) можно переписать в виде

$$2(1-4x)\sqrt{x^2-x+1} > -(1-4x). \tag{15}$$

Ясно, что $x = 1/4$ не есть решение неравенства (15). Для любого $x > 1/4$ левая часть неравенства (15) отрицательна, а правая положительна, следовательно, среди $x > 1/4$ нет решений неравенства (15). Для любого $x < 1/4$ левая часть неравенства (15) положительна, а правая отрицательна, следовательно, любое из этих x является решением неравенства (15). Из этих x в множество $x \geqslant \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$ входят все x из промежутка $-\dfrac{1+\sqrt{13}}{6} \leqslant x < \dfrac{1}{4}$. Все они являются решениями исходного неравенства (10).

Объединяя решения, найденные в пунктах а) и б), получаем решения исходного неравенства.

Ответ: $-\infty < x < 1/4$.

2.4.5. Уравнения и неравенства вида $|f(x)| = |g(x)|$, $|f(x)| < |g(x)|$. Уравнение

$$|f(x)| = |g(x)| \tag{16}$$

и неравенство

$$|f(x)| < |g(x)| \tag{17}$$

можно решать согласно общему методу. Однако иногда бывает полезно заменить уравнение (16) уравнением $f^2(x) = g^2(x)$, т. е. уравнением $(f(x) + g(x))(f(x) - g(x)) = 0$, равносильным ему на его ОДЗ, а неравенство (17) неравенством $f^2(x) < g^2(x)$, т. е. неравенством $(f(x)+g(x))(f(x)-g(x)) < 0$, равносильным ему на его ОДЗ.

Пример 6. Решить неравенство

$$|x^3 - \sin x| < |2x^3 + \sin x|. \tag{18}$$

Решение. ОДЗ этого неравенства есть все действительные x. Неравенство (18) равносильно неравенству

$$(x^3 - \sin x + 2x^3 + \sin x)(x^3 - \sin x - 2x^3 - \sin x) < 0,$$

которое можно переписать в виде $x^3(x^3 + 2\sin x) > 0$. Решением этого неравенства является любое действительное x, кроме $x = 0$. В самом деле, для любого x, принадлежащего промежутку $(-\infty; -\pi]$, имеем $x^3 < 0$ и $x^3 + 2\sin x \leqslant -\pi^3 + 2 < 0$, поэтому $x^3(x^3 + 2\sin x) > 0$ для любого такого x. Для любого x, принадлежащего промежутку $(-\pi; 0)$, имеем $x^3 < 0$ и $\sin x < 0$, поэтому $x^3 + \sin x < 0$ и $x^3(x^3 + \sin x) > 0$. В силу четности функции $x^3(x^3 + 2\sin x)$ получаем, что все $x > 0$ также являются решениями неравенства. Очевидно, что $x = 0$ неравенству не удовлетворяет.

Ответ: $-\infty < x < 0$; $0 < x < +\infty$.

Пример 7. Решить уравнение

$$|x^3 + x + 1| = |x^2 + 3x - 1|. \tag{19}$$

Решение. ОДЗ уравнения (19) есть все действительные x. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$(x^3 + x + 1 - x^2 - 3x + 1)(x^3 + x + 1 + x^2 + 3x - 1) = 0,$$

равносильное исходному. Это уравнение можно переписать в виде $(x^3 - x^2 - 2x + 2)(x^3 + x^2 + 4x) = 0$, откуда следует, что оно равносильно совокупности уравнений

$$x^3 + x^2 + 4x = 0, \tag{20}$$

и

$$x^3 - x^2 - 2x + 2 = 0. \tag{21}$$

Так как $x^3 + x^2 + 4x = x(x^2 + x + 4)$ и дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + x + 4$ отрицателен, то уравнение (20) имеет единственный корень $x_1 = 0$. Поскольку $x^3 - x^2 - 2x + 2 = x^2(x - 1) - 2(x - 1) = (x - 1)(x^2 - 2) = (x - 1)\left(x - \sqrt{2}\right)\left(x + \sqrt{2}\right)$, то решения уравнения (21) есть $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{2}$ и $x_4 = -\sqrt{2}$.

Итак, исходное уравнение имеет четыре корня: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{2}$ и $x_4 = -\sqrt{2}$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = \sqrt{2}$, $x_4 = -\sqrt{2}$.

2.4.6. Использование свойств абсолютной величины. При решении уравнений и неравенств с модулем иногда бывает полезно решать их не по основному методу, а применять свойства модуля, в основном неотрицательность на ОДЗ выражения, находящегося под знаком модуля.

Пример 8. Решить уравнение

$$\left|\sqrt{x^2 - x} - x\right| + \left|x + \sqrt{x}\right| = \sqrt{x^2 - x} + \sqrt{x}. \tag{22}$$

Решение. Обозначим $\sqrt{x^2 - x} - x$ через a и $x + \sqrt{x}$ через b. Тогда уравнение (22) можно записать в виде

$$|a| + |b| = a + b. \tag{23}$$

Из свойств абсолютной величины вытекает, что равенство (23) возможно тогда и только тогда, когда одновременно $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$. Поэтому исходное уравнение (22) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - x} - x \geqslant 0, \\ x + \sqrt{x} \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение этой системы неравенств, а значит, и исходного уравнения есть $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\left|\frac{\log_2 x}{1-\log_2 x}\right| + |\log_2 x| = \frac{\log_2^2 x}{|\log_2 x - 1|}. \qquad (24)$$

Решение. ОДЗ уравнения (24) есть все $x > 0$, кроме $x = 2$. Поскольку для любого x из ОДЗ

$$\frac{\log_2^2 x}{\log_2 x - 1} = \frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1} + \log_2 x,$$

$$\frac{\log_2^2 x}{|\log_2 x - 1|} = \left|\frac{\log_2^2 x}{\log_2 x - 1}\right|,$$

то уравнение (24) можно переписать так:

$$\left|\frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1}\right| + |\log_2 x| = \left|\frac{\log_2 x}{\log_2 x - 1} + \log_2 x\right|. \qquad (25)$$

Обозначим $\dfrac{\log_2 x}{\log_2 x - 1}$ через a и $\log_2 x$ через b, тогда уравнение (25) можно переписать так:

$$|a| + |b| = |a + b|. \qquad (26)$$

Из свойств абсолютной величины вытекает, что равенство (26) имеет место тогда и только тогда, когда

$$ab \geqslant 0.$$

Это означает, что решения уравнения (24) совпадают с решениями неравенства

$$\frac{\log_2^2 x}{\log_2 x - 1} \geqslant 0. \qquad (27)$$

Решениями неравенства (27), а значит, и исходного уравнения, являются $x = 1$ и все x из промежутка $2 < x < +\infty$.

Ответ: $x = 1$; $2 < x < +\infty$.

Пример 10. Решить неравенство

$$|x| + |7 - x| + 2|x - 2| < 4. \qquad (28)$$

Решение. Для любого $x \leqslant 2$ имеем $7 - x \geqslant 5$, поэтому $|x| + |7 - x| + 2|x - 2| \geqslant 5$, а это означает, что ни одно из $x \leqslant 2$ не является решением неравенства (28).

Для любого $x \geqslant 4$ имеем $|x| \geqslant 4$, и поэтому $|x| + |7 - x| + 2|x - 2| \geqslant 4$, а это означает, что ни одно $x \geqslant 4$ также не является решением неравенства (28).

Для любого x из промежутка $2 < x < 4$ имеем $3 < 7 - x < 5$, поэтому $|7 - x| > 3$ и $|x| > 2$. Следовательно, $|x| + |7 - x| + 2|x - 2| > 5$, а это означает, что ни одно x из промежутка $2 < x < 4$ не является решением неравенства (28).

Итак, неравенство (28) не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Задачи

Решить уравнение

1. $\sqrt{x+3} + \sqrt{x+2} = 7$.

2. $\sqrt{3x+19} + \sqrt{3x-2} = \sqrt{7x+11} + \sqrt{2x}$.

3. $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x} = \sqrt{x-3}$.

4. $\sqrt{11x+3} - \sqrt{2-x} = \sqrt{9x+7} - \sqrt{x-2}$.

5. $\sqrt{22-x^4} - \sqrt{10-x^4} = 2$.

6. $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x+15} = 2$.

7. $\sqrt{x^3-x+5} = \sqrt{x^3+x^2-1}$.

8. $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{2-x} = \sqrt[4]{3-2x}$.

9. $\sqrt[3]{x+59} - \sqrt[3]{x+22} = 1$.

10. $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{x} = 1$.

11. $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x} = \sqrt{2x^2+4x-23}$.

12. $x + \sqrt{x} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x^2+2x} = 7/2$.

13. $\sqrt{2x^2+5x-2} - \sqrt{2x^2+5x-9} = 1$.

14. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

15. $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x-1}=1$.

16. $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$.

17. $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1}=1$.

18. $\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x-16}=\sqrt[3]{x-8}$.

19. $\sqrt{3x^2-7x+3}-\sqrt{x^2-2}=\sqrt{3x^2-5x-1}-\sqrt{x^2-3x+4}$.

20. $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$.

21. $\sqrt[3]{(1+x)^2}-\sqrt[3]{1-x^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}=1$.

22. $\sqrt{x^2-1}=(x+7)\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

23. $x+1=\left(\sqrt{2+x}+1\right)\left(\sqrt{2+x}+x^2+x-7\right)$.

24. $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$.

25. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{(x-1)^3-x+2}=\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{(x-1)^3-x+1}$.

26. $\dfrac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}=\dfrac{2}{x}$.

27. $\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-3x+7}=\sqrt{x^2-x+2}-\sqrt{x^2-5x+8}$.

28. $x=\left(\sqrt{x+4}+2\right)\left(\sqrt{2x+6}-1\right)$.

29. $|x^3-2x-3|=|x^3-2x+5|$.

30. $\log_2\left(x^4-\sqrt{x^4-4}+x^2+2\right)=$

$=\log_2\left(x^8-\sqrt{x^4-4}+x^2-10\right)$.

31. $(\log_x 2)(\log_{2x} 2)(\log_2 4x)=1$.

32. $\log_3\left(\sqrt{x}+\left|\sqrt{x}-1\right|\right)=\log_9\left(4\sqrt{x}-3+4\left|\sqrt{x}-1\right|\right)$.

33. $13x-3x^2-\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{|4-x|}{\sqrt{x-1}}+|4-x|=3x|4-x|-\dfrac{4}{\sqrt{x-1}}+4$.

34. $2\log_x 3+\log_{3x} 3+3\log_{9x} 3=0$.

35. $(\log_4^2 x+2)\log_{16x} 4=\log_x 4\cdot\log_4\dfrac{x^2}{4}$.

36. $\log_{\sqrt{x}}(x+|x-2|)=\log_x(5x-6+5|x-2|)$.

37. $\log_{2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}+2}(4x-4\sqrt[3]{x}-4\sqrt[6]{x^5}+84)=2$.

38. $\log_{(x-2)^2}(4-4x+x^2)=2+\log_{(x-2)^2}(x+5)^2$.

39. $\log_{1-2x}(6x^2-5x+1)-\log_{1-3x}(4x^2-4x+1)=2$.

40. $\log_{\frac{1}{2}x}x^2-14\log_{16x}x^3+40\log_{4x}\sqrt{x}=0$.

41. $|x|^{\log_3(x^2+3x)}=(x^2+3x)^{\log_3(1-x)}$.

42. $(2+\sin x)^{x^2-x}=(2+\cos x)^{x^2-x}$.

43. $(1+x^2+x^4+\sin^2 x)^{2x-1}=(1+x^2+x^4+\sin^2 x)^{2-x}$.

44. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=(1-x^2)^{\frac{-\sin^2 x}{1+\sin x}}$.

45. $(1+x^4+\cos x)^{\sqrt{1-x^2}}=(1+x^4+\sin x)^{\sqrt{1-x^2}}$.

Решить неравенство

46. $\sqrt{2x-3}+\sqrt{4x+1}>4$.

47. $\sqrt{x-1}+\sqrt{2x+2}>4$.

48. $\sqrt{x+3}>\sqrt{x-9}+\sqrt{5-x}$.

49. $\sqrt{8x-1}-\sqrt{x+1}<\sqrt{x+2}$.

50. $\sqrt{2x-1}+\sqrt{3x-2}<\sqrt{4x-3}+\sqrt{5x-4}$.

51. $\sqrt{x^4+2x^2-1}-\sqrt{2x^4+x^2+1}<\sqrt{x^2+x}$.

52. $\left|\sqrt{x^2-x+1}-2x+1\right|>\sqrt{x^2-x+1}+2x$.

53. $\sqrt{x+2}-\sqrt{5x}>4x-2$.

54. $\sqrt{x+1}+1<4x^2+\sqrt{3x}$.

55. $\log_2(2^x+1-x^2)\geqslant\log_2(2^{x-1}+1-x)+1$.

56. $\log_{\frac{x}{6}}\left(\log_x\sqrt{6-x}\right)>0$.

57. $\log_x 2x\leqslant\sqrt{\log_x(2x^3)}$.

58. $(x^2+x+1)^{x^2-5x+6}>(x^2+2)^{x^2-5x+6}$.

59. $(x^2+1)^{2+x}>(x^2+1)^{5x-3}$.

60. $x^{2-\log_2^2 x+2\log_{\frac{1}{2}}x}>\dfrac{1}{x}$.

Глава III
Способ замены неизвестных при решении уравнений

Если дано уравнение

$$F(f(x)) = 0, \tag{I}$$

то заменой неизвестной $y = f(x)$ оно сначала сводится к уравнению

$$F(y) = 0, \tag{II}$$

а потом после нахождения всех решений уравнения (II)

$$y_1,\ y_2, \ldots,\ y_n, \ldots$$

сводится к решению совокупности уравнений

$$f(x) = y_1,\ f(x) = y_2, \ldots,\ f(x) = y_n, \ldots. \tag{III}$$

Этот прием достаточно хорошо известен, и поэтому в этой главе ему уделяется мало внимания. В основном в этой главе рассматриваются замены неизвестных для различных частных случаев уравнений, не записанных в виде (I).

§ 3.1. Алгебраические уравнения

3.1.1. Понижение степени уравнения. Некоторые алгебраические уравнения заменой в них некоторого многочлена одной буквой могут быть сведены к алгебраическим уравнениям, степень которых меньше степени исходного уравнения и решение которых проще.

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^2 + x + 2)(x^2 + x + 3) = 6. \tag{1}$$

Решение. Обозначим $x^2 + x + 2$ через t, тогда уравнение (1) можно переписать в виде $t(t + 1) = 6$. Последнее уравнение имеет корни $t_1 = 2$ и $t_2 = -3$. Следовательно, уравнение (1) равносильно совокупности уравнений $x^2 + x + 2 = 2$ и $x^2 + x + 2 = -3$. Решения первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = 0$, $x_2 = -1$. Решения второго уравнения есть $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$. Решениями уравнения (1) являются x_1, x_2, x_3 и x_4.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -1$, $x_3 = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$, $x_4 = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

Пример 2. Решить уравнение

$$(6x + 7)^2(3x + 4)(x + 1) = 1. \tag{2}$$

Решение. Умножив обе части уравнения на 12 и обозначив $6x + 6$ через z, получим уравнение $(z + 1)^2(z + 2)z = 12$. Переписав это уравнение в виде

$$(z^2 + 2z + 1)(z^2 + 2z) = 12 \tag{3}$$

и обозначив $z^2 + 2z$ через u, перепишем уравнение (3) в виде $(u + 1)u = 12$. Последнее уравнение имеет корни $u_1 = 3$ и $u_2 = -4$. Поэтому получаем, что уравнение (3) равносильно совокупности двух уравнений $z^2 + 2z = 3$ и $z^2 + 2z = -4$. Решения этой совокупности уравнений есть $z_1 = -3$ и $z_2 = 1$, т. е. уравнение (2) равносильно совокупности уравнений

$$6x + 6 = -3 \quad \text{и} \quad 6x + 6 = 1. \tag{4}$$

Решениями совокупности (4) являются $x_1 = -\dfrac{3}{2}$ и $x_2 = -\dfrac{5}{6}$, они и являются решениями уравнения (2).

Ответ: $x_1 = -3/2$, $x_2 = -5/6$.

3.1.2. Уравнения вида $(x+\alpha)^4+(x+\beta)^4 = c$. Уравнение

$$(x + \alpha)^4 + (x + \beta)^4 = c, \tag{5}$$

где α, β и c — данные числа, можно свести к биквадратному уравнению с помощью замены неизвестной

$$y = \frac{(x + \alpha) + (x + \beta)}{2},$$

т. е. замены
$$y = x + \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Пример 3. Решить уравнение
$$(x-1)^4 + (x+3)^4 = 82. \tag{6}$$

Решение. Обозначим $\dfrac{(x-1)+(x+3)}{2}$ через y, т. е. сделаем замену переменных $y = x+1$ или $x = y-1$. Тогда уравнение (6) можно переписать в виде $(y-2)^4 + (y+2)^4 = 82$ или, применяя формулу $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$, в виде
$$2y^4 + 48y^2 + 2\cdot 16 = 82. \tag{7}$$

Поскольку корни квадратного уравнения $z^2+24z-25=0$ есть $z_1 = 1$ и $z_2 = -25$, то решения уравнения (7) есть решения совокупности уравнений $y^2 = 1$ и $y^2 = -25$. Эта совокупность уравнений имеет два решения $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$. Следовательно, решения уравнения (6) есть $x_1 = 0$ и $x_2 = -2$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = -2$.

3.1.3. Уравнения вида $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = A$. Уравнение
$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = A, \tag{8}$$
где числа α, β, γ, δ и A таковы, что $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ и $\beta - \alpha = \delta - \gamma$, заменой неизвестных
$$y = \frac{x-\alpha+x-\beta+x-\gamma+x-\delta}{4}$$
сводится к биквадратному уравнению.

Пример 4. Решить уравнение
$$(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 10. \tag{9}$$

Решение. Сделаем замену неизвестных
$$y = \frac{x+1+x+2+x+4+x+5}{4},$$

т. е. $y = x + 3$ или $x = y - 3$. Тогда уравнение (9) можно переписать в виде $(y-2)(y-1)(y+1)(y+2) = 10$, т. е. в виде

$$(y^2 - 4)(y^2 - 1) = 10. \tag{10}$$

Биквадратное уравнение (10) имеет два корня: $y_1 = -\sqrt{6}$ и $y_2 = \sqrt{6}$. Следовательно, уравнение (9) также имеет два корня: $x_1 = -\sqrt{6} - 3$ и $x_2 = \sqrt{6} - 3$.

Ответ: $x_1 = -\sqrt{6} - 3$, $x_2 = \sqrt{6} - 3$.

3.1.4. Уравнения вида $(ax^2+b_1x+c)(ax^2+b_2x+c)=Ax^2$**.** Уравнение

$$(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = Ax^2, \tag{11}$$

где $c \neq 0$ и $A \neq 0$, не имеет корня $x = 0$, поэтому, разделив уравнение (11) на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$\left(ax + \frac{c}{x} + b_1\right)\left(ax + \frac{c}{x} + b_2\right) - A = 0,$$

которое после замены неизвестной $y = ax + \dfrac{c}{x}$ перепишется в виде квадратного уравнения, решение которого не представляет трудностей.

Пример 5. Решить уравнение

$$(x^2 + x + 2)(x^2 + 2x + 2) = 2x^2. \tag{12}$$

Решение. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения (12), то, разделив его на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$\left(x + 1 + \frac{2}{x}\right)\left(x + 2 + \frac{2}{x}\right) = 2.$$

Делая замену неизвестной $y = x + \dfrac{2}{x}$, получим уравнение $(y+1)(y+2) = 2$, которое имеет два корня: $y_1 = 0$ и $y_2 = -3$. Следовательно, исходное уравнение (12) равносильно совокупности уравнений

$$x + \frac{2}{x} = 0 \quad \text{и} \quad x + \frac{2}{x} = -3.$$

Эта совокупность имеет два корня: $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$.

Ответ: $x_1 = -1$, $x_2 = -2$.

Замечание. Уравнение вида

$$\alpha x^4 + \beta x^3 + \gamma x^2 + \delta x + \lambda = 0,$$

у которого $\dfrac{\beta}{\delta} = \sqrt{\dfrac{\alpha}{\lambda}}$ и $\alpha\lambda > 0$, всегда можно привести к виду (11) и, более того, считая $\alpha > 0$ и $\lambda > 0$, к виду

$$\left(\sqrt{\alpha}x^2 + \sqrt{\lambda}\right)\left(\sqrt{\alpha}x^2 + \frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}x + \sqrt{\lambda}\right) = \left(-\gamma + 2\sqrt{\alpha\lambda}\right)x^2.$$

3.1.5. Уравнения вида $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = Ax^2$. Уравнение

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta) = Ax^2, \qquad (13)$$

где числа α, β, γ, δ и A таковы, что $\alpha\beta = \gamma\delta \neq 0$, можно переписать, перемножив первую скобку со второй, а третью с четвертой, в виде

$$(x^2 - x(\alpha+\beta) + \alpha\beta)(x^2 - x(\gamma+\delta) + \gamma\delta) = Ax^2,$$

т. е. уравнение (13) теперь записано в виде (11), и его решение можно проводить так же, как решение уравнения (11).

Пример 6. Решить уравнение

$$(x-2)(x-1)(x-8)(x-4) = 7x^2. \qquad (14)$$

Решение. Уравнение (14) имеет вид (13), поэтому перепишем его в виде

$$[(x-2)(x-4)][(x-1)(x-8)] = 7x^2$$

или в виде

$$(x^2 - 6x + 8)(x^2 - 9x + 8) = 7x^2.$$

Так как $x = 0$ не есть решение этого уравнения, то, разделив его обе части на x^2, получим равносильное исходному уравнение $\left(x - 6 + \dfrac{8}{x}\right)\left(x - 9 + \dfrac{8}{x}\right) = 7$. Делая замену переменных

$x+\dfrac{8}{x}=y$, получаем квадратное уравнение $(y-6)(y-9)=7$, решения которого есть $y_1=\dfrac{15+\sqrt{37}}{2}$ и $y_2=\dfrac{15-\sqrt{37}}{2}$. Следовательно, исходное уравнение (14) равносильно совокупности уравнений

$$x+\frac{8}{x}=\frac{15+\sqrt{37}}{2} \quad \text{и} \quad x+\frac{8}{x}=\frac{15-\sqrt{37}}{2}.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть

$$x_1=\frac{\dfrac{15+\sqrt{37}}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{15+\sqrt{37}}{2}\right)^2-32}}{2},$$

$$x_2=\frac{\dfrac{15+\sqrt{37}}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{15+\sqrt{37}}{2}\right)^2-32}}{2}.$$

Второе уравнение этой совокупности решений не имеет. Итак, исходное уравнение имеет корни x_1 и x_2.

Ответ:

$$x_1=\frac{15+\sqrt{37}+\sqrt{30\sqrt{37}+134}}{4},$$

$$x_2=\frac{15+\sqrt{37}-\sqrt{30\sqrt{37}+134}}{4}.$$

3.1.6. Уравнения вида $a(cx^2+p_1x+q)^2+b(cx^2+p_2x+q)^2=Ax^2$. Уравнение

$$a(cx^2+p_1x+q)^2+b(cx^2+p_2x+q)^2=Ax^2, \tag{15}$$

где числа a, b, c, q, A таковы, что $q\neq 0$, $A\neq 0$, $c\neq 0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$, не имеет корня $x=0$, поэтому, разделив уравнение (15) на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$a\left(cx+\frac{q}{x}+p_1\right)^2+b\left(cx+\frac{q}{x}+p_2\right)^2=A,$$

которое после замены неизвестной $y = cx + \dfrac{q}{x}$ перепишется в виде квадратного уравнения, решение которого не представляет трудностей.

Пример 7. Решить уравнение

$$3(x^2 + 2x - 1)^2 - 2(x^2 + 3x - 1)^2 + 5x^2 = 0. \tag{16}$$

Решение. Так как $x = 0$ не является корнем уравнения (16), то, разделив обе его части на x^2, получим уравнение

$$3\left(x + 2 - \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(x + 3 - \frac{1}{x}\right)^2 + 5 = 0, \tag{17}$$

равносильное уравнению (16). Сделав замену неизвестной $x - \dfrac{1}{x} = y$, уравнение (17) перепишем в виде

$$3(y + 2)^2 - 2(y + 3)^2 + 5 = 0. \tag{18}$$

Квадратное уравнение (18) имеет два корня: $y_1 = 1$ и $y_2 = -1$. Поэтому уравнение (17) равносильно совокупности уравнений

$$x - \frac{1}{x} = 1 \quad \text{и} \quad x - \frac{1}{x} = -1. \tag{19}$$

Совокупность уравнений (19) имеет четыре корня: $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Они будут корнями уравнения (16).

Ответ: $x_1 = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_3 = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$, $x_4 = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

3.1.7. Уравнения вида $P(x) = 0$, где $P(x) = P(a - x)$. Пусть многочлен $P(x)$ обладает свойством: для некоторого фиксированного числа a справедливо тождественное равенство $P(x) \equiv P(a - x)$. Тогда можно показать, что существует многочлен $Q(y)$ такой, что справедливо тождественное равенство $P(x) \equiv Q\left[\left(x-\frac{a}{2}\right)^2\right]$, при этом многочлен $P(x)$ должен быть четной степени.

Поэтому уравнение $P(x) = 0$ можно переписать в этом случае в виде уравнения $Q(y) = 0$, где $y = \left(x-\frac{a}{2}\right)^2$, степень которого меньше степени уравнения $P(x) = 0$.

Для решения таких уравнений можно поступить следующим образом: сначала сделать замену неизвестной $x = y + \frac{a}{2}$, тогда получим алгебраическое уравнение той же степени $2k$, что и уравнение $P(x) = 0$, но уже содержащее только четные степени y. Делая затем замену неизвестной $t = y^2$, получим алгебраическое уравнение уже степени k.

Пример 8. Решить уравнение

$$x^8 + (2-x)^8 - 48(x-1)^2(x^2-2x+2)^2 - 32(x-1)^4 = 32. \quad (20)$$

Решение. Рассмотрим многочлен

$$P(x) = x^8 + (2-x)^8 - 48(x-1)^2(x^2-2x+2)^2 - 32(x-1)^4 - 32.$$

Поскольку легко проверить, что $P(2-x) \equiv P(x)$, то уравнение (20) есть уравнение рассматриваемого вида. Сделаем замену неизвестной $y = x - 1$ или $x = y + 1$, тогда уравнение (20) перепишется в виде

$$[(y+1)^2]^4 + [(y-1)^2]^4 - 48y^2(y^2+1)^2 - 32y^4 - 32 = 0. \quad (21)$$

Так как $(y+1)^2 = y^2 + 1 + 2y$, а $(y-1)^2 = y^2 + 1 - 2y$, то, подставляя эти выражения в левую часть уравнения (21) и раскрывая четвертые степени по формуле

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

получим, что уравнение (21) перепишется в виде

$$(y^2+1)^4 = 16. \quad (22)$$

Уравнение (22) имеет два корня: $y_1 = -1$ и $y_2 = 1$. Следовательно, исходное уравнение имеет также два корня: $x_1 = 0$ и $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

§ 3.2. Рациональные уравнения

Уравнения вида

$$\frac{H(x)}{Q(x)} = 0, \tag{I}$$

где $H(x)$ и $Q(x)$ — многочлены, называются ***рациональными***.

Найдя корни уравнения $H(x) = 0$, затем надо проверить, какие из них не являются корнями уравнения $Q(x) = 0$. Эти корни и только они будут решениями уравнения (I).

В этом параграфе приводятся некоторые специальные методы решения уравнений вида (I).

3.2.1. Упрощение уравнения. При помощи замены неизвестных рациональное уравнение часто сводится к алгебраическому или более простому рациональному уравнению.

Пример 1. Решить уравнение

$$\frac{x^2+1}{2x+3} + \frac{2x+3}{x^2+1} = \frac{29}{10}. \tag{1}$$

Решение. Обозначив $\frac{x^2+1}{2x+3}$ через y, данное уравнение перепишем в виде $y + \frac{1}{y} = \frac{29}{10}$. Поскольку $y = 0$ не есть решение этого уравнения, то это уравнение равносильно уравнению $10y^2 - 29y + 10 = 0$. Решения этого уравнения есть $y_1 = 5/2$ и $y_2 = 2/5$. Следовательно, уравнение (1) равносильно совокупности уравнений

$$\frac{x^2+1}{2x+3} = \frac{5}{2} \quad \text{и} \quad \frac{x^2+1}{2x+3} = \frac{2}{5}. \tag{2}$$

Первое из этих уравнений на множестве всех $x \neq -3/2$ равносильно уравнению

$$2x^2 - 10x - 13 = 0, \tag{3}$$

а второе — уравнению

$$5x^2 - 4x - 1 = 0. \tag{4}$$

Решения уравнения (3) есть $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{51}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{51}}{2}$. Решения уравнения (4) есть $x_3 = 1$ и $x_4 = -1/5$. Следовательно, решениями уравнения (1) будут числа x_1, x_2, x_3, x_4.

ОТВЕТ: $x_1 = \dfrac{5+\sqrt{51}}{2}$, $x_2 = \dfrac{5-\sqrt{51}}{2}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -\dfrac{1}{5}$.

ПРИМЕР 2. Решить уравнение

$$\frac{x^2}{3} + \frac{48}{x^2} = 10\left(\frac{x}{3} - \frac{4}{x}\right). \tag{5}$$

РЕШЕНИЕ. Обозначим $\dfrac{x}{3} - \dfrac{4}{x}$ через u, тогда уравнение (5) перепишется в виде

$$3u^2 - 10u + 8 = 0. \tag{6}$$

Уравнение (6) имеет два корня: $u_1 = 2$ и $u_2 = 4/3$. Поэтому уравнение (5) равносильно совокупности уравнений

$$\frac{x}{3} - \frac{4}{x} = 2 \quad \text{и} \quad \frac{x}{3} - \frac{4}{x} = \frac{4}{3}.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$. Решения второго уравнения есть $x_3 = -2$ и $x_4 = 6$. Следовательно, решениями исходного уравнения (5) являются числа x_1, x_2, x_3, x_4.

ОТВЕТ: $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{21}}{2}$, $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{21}}{2}$, $x_3 = -2$, $x_4 = 6$.

3.2.2. Уравнения вида $\dfrac{\alpha_1}{x+\beta_1} + \dfrac{\alpha_2}{x+\beta_2} + \cdots + \dfrac{\alpha_m}{x+\beta_m} = A$.

Уравнение

$$\frac{\alpha_1}{x+\beta_1} + \frac{\alpha_2}{x+\beta_2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{x+\beta_m} = A \tag{7}$$

при некоторых условиях на числа α_i, A, β_i может быть решено следующим образом. Группируя члены уравнения (7) по два и суммируя каждую пару, надо получить в числителях многочлены первой или нулевой степени, отличающиеся только числовыми множителями, а в знаменателях — трехчлены с одинаковыми двумя членами, содержащими x, тогда после замены переменных полученное уравнение будет либо иметь также вид (7), но с меньшим числом слагаемых, либо будет равносильно совокупности двух уравнений, одно из которых будет первой степени, а второе будет уравнением вида (7), но с меньшим числом слагаемых.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x+4}=0. \tag{8}$$

Решение. Сгруппировав в левой части уравнения (8) первый член с последним, а второй с предпоследним, перепишем уравнение (8) в виде

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+3}\right)+\frac{1}{x+2}=0. \tag{9}$$

Суммируя в каждой скобке слагаемые, перепишем уравнение (9) в виде

$$\frac{2(x+2)}{x^2+4x}+\frac{2(x+2)}{x^2+4x+3}+\frac{1}{x+2}=0. \tag{10}$$

Так как $x=-2$ не есть решение уравнения (10), то, разделив это уравнение на $2(x+2)$, получим уравнение

$$\frac{1}{x^2+4x}+\frac{1}{x^2+4x+3}+\frac{1}{2(x^2+4x+4)}=0, \tag{11}$$

равносильное уравнению (10). Сделаем замену неизвестного $x^2+4x=u$, тогда уравнение (11) перепишется в виде

$$\frac{1}{u}+\frac{1}{u+3}+\frac{1}{2(u+4)}=0. \tag{12}$$

Таким образом, решение уравнения (8) с пятью слагаемыми в левой части сведено к решению уравнения (12) того же вида.

но с тремя слагаемыми в левой части. Суммируя все члены в левой части уравнения (12), перепишем его в виде

$$\frac{5u^2+25u+24}{2u(u+3)(u+4)}=0. \tag{13}$$

Решения уравнения $5u^2+25u+24=0$ есть $u_1=\dfrac{-25+\sqrt{145}}{10}$ и $u_2=\dfrac{-25-\sqrt{145}}{10}$. Ни одно из этих чисел не обращает в нуль знаменатель рациональной функции в левой части уравнения (13). Следовательно, уравнение (13) имеет эти два корня, и поэтому исходное уравнение (8) равносильно совокупности уравнений

$$x^2+4x=\frac{-25+\sqrt{145}}{10} \quad \text{и} \quad x^2+4x=\frac{-25-\sqrt{145}}{10}.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть

$$x_1=-2+\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}} \quad \text{и} \quad x_2=-2-\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}.$$

Решения второго уравнения из этой совокупности есть

$$x_3=-2+\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}} \quad \text{и} \quad x_4=-2-\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}.$$

Поэтому исходное уравнение имеет корни x_1, x_2, x_3, x_4.

Ответ:

$$x_1=-2+\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}}, \quad x_2=-2-\sqrt{\frac{15+\sqrt{145}}{10}},$$

$$x_3=-2+\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}, \quad x_4=-2-\sqrt{\frac{15-\sqrt{145}}{10}}.$$

3.2.3. Уравнения вида $\frac{\alpha_1 x + a_1}{x + b_1} + \frac{\alpha_2 x + a_2}{x + b_2} + \dots + \frac{\alpha_n x + a_n}{x + b_n} = D$. Уравнение

$$\frac{\alpha_1 x + a_1}{x + b_1} + \frac{\alpha_2 x + a_2}{x + b_2} + \dots + \frac{\alpha_n x + a_n}{x + b_n} = D \tag{14}$$

при некоторых условиях на числа α_i, b_i, a_i и D можно решить так: надо выделить целую часть в каждой из дробей уравнения, т. е. заменить уравнение (14) уравнением

$$\alpha_1 + \frac{\beta_1}{x + b_1} + \alpha_2 + \frac{\beta_2}{x + b_2} + \dots + \alpha_n + \frac{\beta_n}{x + b_n} = D,$$

свести его к виду (7) и затем решить его способом, описанным в предыдущем пункте.

Пример 4. Решить уравнение

$$\frac{x+4}{x-1} + \frac{x-4}{x+1} - \frac{x+8}{x-2} - \frac{x-8}{x+2} = -\frac{8}{3}. \tag{15}$$

Решение. Запишем уравнение (15) в виде

$$1 + \frac{5}{x-1} + 1 - \frac{5}{x+1} = 1 + \frac{10}{x-2} + 1 + \frac{-10}{x+2} - \frac{8}{3}$$

или в виде

$$\left(\frac{5}{x-1} - \frac{5}{x+1}\right) = \left(\frac{10}{x-2} - \frac{10}{x+2}\right) - \frac{8}{3}. \tag{16}$$

Суммируя слагаемые в скобках, перепишем уравнение (16) в виде

$$\frac{10}{x^2-1} - \frac{40}{x^2-4} + \frac{8}{3} = 0. \tag{17}$$

Делая замену неизвестного $x^2 = u$, перепишем уравнение (17) в виде

$$\frac{10}{u-1} - \frac{40}{u-4} + \frac{8}{3} = 0. \tag{18}$$

Суммируя члены в левой части уравнения (18), перепишем его в виде

$$\frac{4u^2 - 65u + 16}{(u-1)(u-4)} = 0. \tag{19}$$

Легко видеть, что уравнение (19) имеет два корня: $u_1 = 16$ и $u_2 = 1/4$. Следовательно, исходное уравнение (15) имеет четыре корня: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1/2$ и $x_4 = -1/2$.

Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = -4$, $x_3 = 1/2$, $x_4 = -1/2$.

3.2.4. Уравнения вида $\frac{a_1x + b_1}{p_1x^2 + q_1x + r_1} + \frac{a_2x + b_2}{p_2x^2 + q_2x + r_2} + \dots + \frac{a_nx + b_n}{p_nx^2 + q_nx + r_n} = A.$

Уравнение вида

$$\frac{a_1x + b_1}{p_1x^2 + q_1x + r_1} + \frac{a_2x + b_2}{p_2x^2 + q_2x + r_2} + \dots + \frac{a_nx + b_n}{p_nx^2 + q_nx + r_n} = A \tag{20}$$

при некоторых условиях на числа a_i, b_i, p_i, q_i, r_i и A можно решать так: разложив (если это, конечно, возможно) каждую из дробей в левой части уравнения (20) в сумму простейших дробей

$$\frac{a_ix + b_i}{p_ix^2 + q_ix + r_i} = \frac{A_i}{x + \beta_i} + \frac{B_i}{x + \gamma_i},$$

свести уравнение (20) к виду (7), затем, проведя удобную перегруппировку членов полученного уравнения, решать его методом, изложенным в пункте 3.2.2.

Пример 5. Решить уравнение

$$\frac{x+1}{x^2+2x} + \frac{x+6}{x^2+12x+35} = \frac{x+2}{x^2+4x+3} + \frac{x+5}{x^2+10x+24}. \tag{21}$$

Решение. Поскольку $x^2 + 2x = x(x+2)$, $x^2 + 12x + 35 = (x+5)(x+7)$, $x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$ и $x^2 + 10x + 24 = (x+4)(x+6)$, то, умножив числитель каждой дроби в уравнении (21) на 2 и заметив, что $2(x+1) = x+x+2$, $2(x+6) =$

$= x+7+x+5$, $2(x+2) = x+1+x+3$, $2(x+5) = x+4+x+6$, уравнение (21) можно записать в виде

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5} + \frac{1}{x+7} = \\ = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+6}. \tag{22}$$

Уравнение (22) имеет вид (7). Перегруппировав слагаемые в этом уравнении, перепишем его в виде

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+7}\right) + \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+5}\right) = \\ = \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+6}\right) + \left(\frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4}\right)$$

или в виде

$$\frac{2x+7}{x^2+7x} + \frac{2x+7}{x^2+7x+10} = \frac{2x+7}{x^2+7x+6} + \frac{2x+7}{x^2+7x+12}. \tag{23}$$

Уравнение (23) равносильно совокупности уравнений

$$2x+7=0$$

и (24)

$$\frac{1}{x^2+7x} + \frac{1}{x^2+7x+10} = \frac{1}{x^2+7x+6} + \frac{1}{x^2+7x+12}.$$

Для решения второго уравнения совокупности (24) сделаем замену неизвестного $x^2+7x+6 = z$. Тогда оно перепишется в виде

$$\frac{1}{z-6} + \frac{1}{z+4} = \frac{1}{z} + \frac{1}{z+6}$$

или в виде

$$\frac{2z-2}{(z-6)(z+4)} - \frac{2z+6}{z(z+6)} = 0. \tag{25}$$

Суммируя все члены в левой части уравнения (25), перепишем его в виде

$$\frac{z^2+6z+18}{z(z+4)(z+6)(z-6)} = 0. \tag{26}$$

Так как уравнение $z^2+6z+18=0$ не имеет корней, то уравнение (26) их также не имеет.

Первое уравнение совокупности (24) имеет единственный корень $x=-7/2$. Поскольку этот корень входит в ОДЗ второго уравнения совокупности (24), то он является единственным корнем совокупности (24), а значит, и исходного уравнения.

Ответ: $x=-7/2$.

3.2.5. Уравнения вида $\dfrac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\alpha_1x+\beta_1}+\dfrac{a_2x^2+b_2x+c_2}{\alpha_2x+\beta_2}+\dots+\dfrac{a_nx^2+b_nx+c_n}{\alpha_nx+\beta_n}=A.$

Уравнение

$$\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{\alpha_1x+\beta_1}+\frac{a_2x^2+b_2x+c_2}{\alpha_2x+\beta_2}+\dots+\frac{a_nx^2+b_nx+c_n}{\alpha_nx+\beta_n}=A \tag{27}$$

при некоторых условиях на числа a_i, b_i, c_i, α_i, β_i и A после представления каждого слагаемого в левой части в виде

$$\frac{a_ix^2+b_ix+c_i}{\alpha_ix+\beta_i}=\gamma_ix+\delta_i+\frac{B_i}{\alpha_ix+\beta_i}$$

может быть сведено к виду (7).

Пример 6. Решить уравнение

$$\frac{x^2+x+1}{x+1}+\frac{x^2+2x+2}{x+2}-\frac{x^2+3x+3}{x+3}-\frac{x^2+4x+4}{x+4}=0. \tag{28}$$

Решение. Перепишем уравнение (28) в виде

$$x+\frac{1}{x+1}+x+\frac{2}{x+2}-x-\frac{3}{x+3}-x-\frac{4}{x+4}=0$$

или в виде

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}-\frac{3}{x+3}-\frac{4}{x+4}=0. \tag{29}$$

Таким образом, уравнение (28) сведено к виду (7). Теперь, группируя первый член с последним, а второй с третьим, перепишем уравнение (29) в виде

$$\frac{-3x}{x^2+5x+4}-\frac{x}{x^2+5x+6}=0.$$

Это уравнение равносильно совокупности уравнений

$$x = 0 \quad \text{и} \quad \frac{3}{x^2+5x+4} + \frac{1}{x^2+5x+6} = 0. \tag{30}$$

Последнее уравнение совокупности (30) можно переписать в виде

$$\frac{2x^2+10x+11}{(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)} = 0.$$

Решения этого уравнения есть $x_1 = \frac{-5+\sqrt{3}}{2}$ и $x_2 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, так как $x = 0$ входит в ОДЗ второго уравнения совокупности (30), то совокупность (30) имеет три корня: $x_1 = \frac{-5+\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 0$. Все они есть решения исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = \frac{-5+\sqrt{3}}{2}$, $x_2 = \frac{-5-\sqrt{3}}{2}$, $x_3 = 0$.

3.2.6. Уравнения вида $\frac{A_1 x}{ax^2+b_1x+c} + \dots + \frac{A_k x}{ax^2+b_kx+c} = B$.

Уравнения вида

$$\frac{A_1 x}{ax^2+b_1x+c} + \dots + \frac{A_k x}{ax^2+b_kx+c} = B \tag{31}$$

при некоторых условиях на числа a, c, b_i и A заменой неизвестного $ax + \frac{c}{x} = y$ можно свести к уравнению вида

$$\frac{A_1}{y+b_1} + \dots + \frac{A_k}{y+b_k} = B.$$

Пример 7. Решить уравнение

$$\frac{4x}{4x^2-8x+7} + \frac{3x}{4x^2-10x+7} = 1. \tag{32}$$

Решение. Так как $x = 0$ не является решением уравнения (32), то, разделив числитель и знаменатель каждой дроби в левой части на x, перепишем его в виде

$$\frac{4}{4x - 8 + \frac{7}{x}} + \frac{3}{4x - 10 + \frac{7}{x}} = 1. \qquad (33)$$

Сделав замену переменных $4x + \frac{7}{x} = y$, перепишем уравнение (33) в виде

$$\frac{4}{y - 8} + \frac{3}{y - 10} = 1. \qquad (34)$$

Решения уравнения (34) есть $y_1 = 16$ и $y_2 = 9$. Поэтому уравнение (33) равносильно совокупности уравнений

$$4x + \frac{7}{x} = 16 \quad \text{и} \quad 4x + \frac{7}{x} = 9. \qquad (35)$$

Корни первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = \frac{1}{2}$ и $x_2 = \frac{7}{2}$. Второе уравнение решений не имеет. Следовательно, совокупность (35), а значит, и исходное уравнение имеют два корня: x_1 и x_2.

Ответ: $x_1 = 1/2$, $x_2 = 7/2$.

§ 3.3. Иррациональные уравнения

3.3.1. Уравнения вида $\sqrt{ax+b} \pm \sqrt{cx+d} = f(x)$. Уравнение

$$\sqrt{ax+b} + \sqrt{cx+d} = f(x) \qquad (1)$$

при некоторых условиях на числа a, b, c, d и функцию $f(x)$ можно решать так: возведя уравнение (1) в квадрат, получить уравнение

$$2\sqrt{(ax+b)(cx+d)} = f^2(x) - (ax + b + cx + d), \qquad (2)$$

являющееся следствием уравнения (1). Если окажется, что $f^2(x)-(ax+b+cx+d) = (ax+b)(cx+d)+A$, где A — некоторое число, то, делая замену неизвестного $y = \sqrt{(ax+b)(cx+d)}$, перепишем уравнение (2) в виде

$$y^2 - 2y + A = 0. \qquad (3)$$

Если уравнение (3) имеет решения y_1 и y_2 (включая случай $y_1 = y_2$), то совокупность уравнений

$$(ax+b)(cx+d) = y_1^2, \quad (ax+b)(cx+d) = y_2^2$$

является следствием уравнения (1) и, найдя ее корни, надо проверить, какие из них являются корнями уравнения (1). Если же уравнение (3) не имеет решений, то не имеет решений и уравнение (1).

Отметим, что при решении уравнения (1) можно не переходить к следствиям, а на каждом этапе следить за равносильностью переходов. Отметим еще, что иногда таким же способом может быть решено уравнение вида

$$\sqrt{ax+b} - \sqrt{cx+d} = f(x). \qquad (4)$$

Приведем примеры решения уравнений вида (1) и (4) переходом к следствию и равносильными переходами.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{12-x} = \sqrt{-x^2+11x-23}. \qquad (5)$$

Решение. Возводя обе части уравнения (5) в квадрат, получаем уравнение

$$13 - 2\sqrt{-x^2+11x+12} = -x^2+11x-23, \qquad (6)$$

являющееся следствием исходного уравнения. Сделав замену неизвестного $\sqrt{-x^2+11x+12} = y$, уравнение (6) можно переписать в виде $13-2y = y^2-35$. Решения этого квадратного уравнения есть $y_1 = 6$ и $y_2 = -8$. Поэтому совокупность уравнений

$$\sqrt{-x^2+11x+12} = 6 \quad \text{и} \quad \sqrt{-x^2+11x+12} = -8$$

есть следствие уравнения (5). Уравнение $\sqrt{-x^2+11x+12}=-8$ решений не имеет. Решения уравнения $\sqrt{-x^2+11x+12}=6$ есть $x_1=3$ и $x_2=8$. Проверка показывает, что $x=8$ есть решение исходного уравнения, а $x=3$ не есть его решение. Следовательно, исходное уравнение имеет один корень $x=8$.

Ответ: $x=8$.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7}-\sqrt{9-x}=\sqrt{-x^2+2x+63}. \tag{7}$$

Решение. ОДЗ уравнения состоит из x, удовлетворяющих одновременно условиям $x+7\geqslant 0$, $9-x\geqslant 0$, $-x^2+2x+63\geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть промежуток $-7\leqslant x\leqslant 9$. Для x из ОДЗ, удовлетворяющих условию $x+7<9-x$, т. е. для x из промежутка $-7\leqslant x<1$ левая часть уравнения (7) отрицательна, а правая неотрицательна, значит, ни одно из этих x решением уравнения быть не может.

Пусть $x\in[1;9]$. Для таких x обе части уравнения (7) неотрицательны, и поэтому оно равносильно на этом множестве уравнению

$$16-2\sqrt{-x^2+2x+63}=\left(\sqrt{-x^2+2x+63}\right)^2. \tag{8}$$

Сделав замену неизвестной $\sqrt{-x^2+2x+63}=u$, перепишем уравнение (8) в виде $u^2+2u-16=0$. Решения этого уравнения есть $u_1=-1+\sqrt{17}$ и $u_2=-1-\sqrt{17}$. Следовательно, уравнение (8) равносильно совокупности уравнений

$$\sqrt{-x^2+2x+63}=-1-\sqrt{17}$$

и

$$\sqrt{-x^2+2x+63}=-1+\sqrt{17}. \tag{9}$$

Первое уравнение совокупности (9) решений не имеет. Второе уравнение для $x\in[1;9]$ равносильно уравнению $-x^2+2x+63=$ $=18-2\sqrt{17}$, имеющему корни $x_1=1+\sqrt{46+2\sqrt{17}}$ и $x_2=$ $=1-\sqrt{46+2\sqrt{17}}$. Из этих чисел только x_1 попадает в промежуток $1\leqslant x\leqslant 9$. Следовательно, только x_1 является корнем исходного уравнения.

Ответ: $x=1+\sqrt{46+2\sqrt{17}}$.

3.3.2. Уравнения вида $\sqrt[4]{a-x} \pm \sqrt[4]{x-b} = d$. Уравнение

$$\sqrt[4]{a-x} + \sqrt[4]{x-b} = d, \tag{10}$$

где a, b, d — данные числа, $a > b$, $d > 0$, можно решать следующим образом.

1. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение

$$\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b} = d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}, \tag{11}$$

являющееся следствием уравнения (10).

2. Возведя обе части уравнения (11) в квадрат, получим уравнение

$$a - b + 2\sqrt{(a-x)(x-b)} = \left[d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}\right]^2, \tag{12}$$

являющееся следствием уравнения (11).

3. Сделав замену неизвестной $y = \sqrt[4]{(a-x)(x-b)}$, перепишем уравнение (12) в виде

$$a - b + 2y^2 = (d^2 - 2y)^2. \tag{13}$$

Уравнение (13) есть квадратное уравнение относительно y. Если оно имеет два корня y_1 и y_2, то получим совокупность уравнений

$$(a-x)(x-b) = y_1^4 \quad \text{и} \quad (a-x)(x-b) = y_2^4,$$

являющуюся следствием уравнения (10). Решив эти квадратные относительно x уравнения, надо проверить, являются ли найденные корни корнями уравнения (10). Если уравнение (13) имеет одно решение y_0, то получаем уравнение $(a-x)(x-b) = y_0^4$, являющееся следствием уравнения (10). Решив это уравнение, надо проверить, являются ли найденные его корни корнями уравнения (10). Наконец, если уравнение (13) не имеет корней, то и уравнение (10) не имеет корней.

Заметим, что аналогично решаются и уравнения вида

$$\sqrt[4]{a-x} - \sqrt[4]{x-b} = d. \tag{14}$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{17-x}+\sqrt[4]{x+15}=4. \tag{15}$$

Решение. Возведя обе части уравнения (15) в квадрат, получим уравнение

$$\sqrt{17-x}+\sqrt{x+15}=16-2\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}, \tag{16}$$

являющееся следствием уравнения (15). Если возведем уравнение (16) в квадрат, то получим уравнение

$$112-32\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}+\sqrt{(17-x)(x+15)}=0, \tag{17}$$

являющееся следствием уравнения (16). Сделав замену неизвестной $\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=u$, уравнение (17) перепишем в виде $u^2-32u+112=0$. Решения этого уравнения есть $u_1=4$ и $u_2=28$. Следовательно, имеем совокупность уравнений

$$\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=4 \quad \text{и} \quad \sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=28, \tag{18}$$

являющуюся следствием исходного уравнения (15). Первое уравнение из совокупности (18) имеет единственное решение $x_1=1$. Второе уравнение этой совокупности решений не имеет. Следовательно, совокупность (18) имеет единственное решение $x=1$. Проверка показывает, что $x=1$ есть решение исходного уравнения.

Ответ: $x=1$.

В некоторых случаях проверка найденных корней уравнения-следствия затруднительна, поэтому приведем еще способ решения уравнений типа (10), основанный на его равносильных преобразованиях.

1. Найдем ОДЗ уравнения (10). ОДЗ есть промежуток $b\leqslant x\leqslant a$.

2. На ОДЗ обе части уравнения (10) неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат уравнения (10) получим уравнение

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}=d^2-2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}, \tag{19}$$

равносильное уравнению (10) на его ОДЗ.

3. На области $b \leqslant x \leqslant a$ уравнение (19) равносильно уравнению

$$\left(\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}\right)^2 = \left[d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}\right]^2. \tag{20}$$

Действительно, любое решение уравнения (19) есть решение уравнения (20), так как при возведении в квадрат корни уравнения не теряются. Любое решение уравнения (20) есть либо решение уравнения (19), либо решение уравнения

$$\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b} = -\left[d^2 - 2\sqrt[4]{(a-x)(x-b)}\right]. \tag{21}$$

Перепишем уравнение (21) в виде

$$\left(\sqrt[4]{a-x}-\sqrt[4]{x-b}\right)^2 = -d^2. \tag{22}$$

Так как $d \neq 0$, то уравнение (22) не имеет решений, ибо на ОДЗ левая часть неотрицательна, а правая отрицательна. Следовательно, любое решение уравнения (20) есть решение уравнения (19).

Итак, уравнение (20) равносильно уравнению (10) на его ОДЗ.

4. Обозначив $y = \sqrt[4]{(a-x)(x-b)}$, перепишем уравнение (20) в виде

$$a - b + 2y^2 = (d^2 - 2y)^2. \tag{23}$$

Уравнение (23) квадратное относительно y. Если оно имеет два решения y_1 и y_2 (не исключая случая $y_1 = y_2$), то получаем совокупность уравнений

$$\sqrt[4]{(a-x)(x-b)} = y_1 \quad \text{и} \quad \sqrt[4]{(a-x)(x-b)} = y_2, \tag{24}$$

равносильную исходному уравнению (10) на его ОДЗ. Если уравнение (23) не имеет решений, то и уравнение (10) не имеет решений.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{17-x}+\sqrt[4]{x+15} = 3. \tag{25}$$

Решение. ОДЗ уравнения есть промежуток $-15 \leqslant x \leqslant 17$. На ОДЗ обе части уравнения (25) неотрицательны, поэтому после возведения в квадрат, получим уравнение

$$\sqrt{17-x}+\sqrt{x+15}=9-2\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}, \qquad (26)$$

равносильное исходному на его ОДЗ. Уравнение

$$\left(\sqrt{17-x}+\sqrt{x+15}\right)^2=\left(9-2\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}\right)^2 \qquad (27)$$

равносильно уравнению (26) на его ОДЗ. Перепишем уравнение (27) в виде

$$32+2\sqrt{(17-x)(x+15)}=\left(9-2\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}\right)^2. \qquad (28)$$

Сделав замену неизвестной $\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=z$, перепишем уравнение (28) в виде

$$2z^2-36z+49=0.$$

Решения этого уравнения есть $z_1=\frac{18+\sqrt{226}}{2}$ и $z_2=\frac{18-\sqrt{226}}{2}$. Следовательно, имеем совокупность уравнений

$$\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=\frac{18+\sqrt{226}}{2}$$

и (29)

$$\sqrt[4]{(17-x)(x+15)}=\frac{18-\sqrt{226}}{2},$$

равносильную исходному уравнению на его ОДЗ.

Первое уравнение совокупности (29) решений не имеет, второе уравнение имеет два корня:

$$x_1=1+\sqrt{256-\left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^4},$$

$$x_2=1-\sqrt{256-\left(\frac{18-\sqrt{226}}{2}\right)^4}.$$

Оба эти корня входят в ОДЗ исходного уравнения и поэтому являются его корнями.

ОТВЕТ:

$$x_1 = 1 + \sqrt{256 - \left(\frac{18 - \sqrt{226}}{2}\right)^4},$$

$$x_2 = 1 - \sqrt{256 - \left(\frac{18 - \sqrt{226}}{2}\right)^4}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Уравнение вида $\sqrt[4]{a - f(x)} \pm \sqrt[4]{f(x) - b} = d$ заменой неизвестной $y = f(x)$ сводится к уравнению вида (10) или вида (14).

3.3.3. Сведение решения иррационального уравнения к решению тригонометрического уравнения. Заменой неизвестной решение иррациональных уравнений иногда можно свести к решению тригонометрических уравнений. При этом полезными могут оказаться следующие замены неизвестной.

1. Если в уравнение входит радикал $\sqrt{a^2 - x^2}$, то можно сделать замену $x = a\sin t$ или $x = a\cos t$.

2. Если в уравнение входит радикал $\sqrt{a^2 + x^2}$, то можно сделать замену $x = a\,\mathrm{tg}\,t$.

3. Если в уравнение входит радикал $\sqrt{x^2 - a^2}$, то можно сделать замену $x = \dfrac{a}{\sin t}$.

ПРИМЕР 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2+1} - x = \frac{5}{2\sqrt{x^2+1}}. \tag{30}$$

РЕШЕНИЕ. ОДЗ уравнения (30) есть все действительные x. Сделаем замену неизвестной $x = \mathrm{tg}\,t$, где можно считать, что $-\pi/2 < t < \pi/2$. Тогда уравнение (30) запишется в виде

$$\frac{1}{\cos t} - \mathrm{tg}\,t = \frac{5}{2}\cos t. \tag{31}$$

Поскольку $\cos t \neq 0$ для рассматриваемых t, то уравнение (31) для этих t равносильно уравнению

$$2 - 2\sin t = 5(1 - \sin^2 t). \tag{32}$$

Уравнение (32) равносильно совокупности уравнений

$$\sin t = 1 \quad \text{и} \quad \sin t = -\frac{3}{5}. \tag{33}$$

Из решений этих уравнений промежутку $-\pi/2 < t < \pi/2$ принадлежит только $t = \arcsin(-3/5)$. Поэтому соответствующее x есть

$$x = \operatorname{tg}\arcsin(-3/5) = \frac{\sin(\arcsin(-3/5))}{\cos(\arcsin(-3/5))} = \frac{-3/5}{\sqrt{1 - 9/25}} = -3/4.$$

Ответ: $x = -3/4$.

Пример 6. Решить уравнение

$$x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12}. \tag{34}$$

Решение. ОДЗ уравнения (34) состоит из всех x, удовлетворяющих условию $|x| > 1$. Ясно, что никакое отрицательное x из ОДЗ не может быть решением уравнения (34). Следовательно, все решения уравнения (34) лежат в области $1 < x < +\infty$. Сделаем замену неизвестной $x = \dfrac{1}{\sin t}$, где можно считать, что $0 < t < \pi/2$ Тогда уравнение (34) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sin t} + \frac{1}{\cos t} = \frac{35}{12}. \tag{35}$$

Это уравнение для рассматриваемых t равносильно уравнению

$$12(\sin t + \cos t) = 35\sin t\cos t, \tag{36}$$

которое для этих t равносильно уравнению

$$24(\sin t + \cos t) = 35[(\sin t + \cos t)^2 - 1]. \tag{37}$$

Делая замену неизвестной $\sin t + \cos t = z$, уравнение (37) можно переписать в виде

$$35z^2 - 24z - 35 = 0. \tag{38}$$

Уравнение (38) имеет корни $z_1 = -\frac{5}{7}$ и $z_2 = \frac{7}{5}$. Поэтому уравнение (37) равносильно совокупности уравнений

$$\cos t + \sin t = -5/7 \quad \text{и} \quad \cos t + \sin t = 7/5. \tag{39}$$

Первое уравнение совокупности (39) не имеет решений из промежутка $0 < t < \pi/2$, так как для любого t_0 из этого промежутка $\cos t_0 + \sin t_0 > 0$. Следовательно, все решения уравнения (35), удовлетворяющие условию $0 < t < \pi/2$, содержатся среди решений второго уравнения совокупности (39). Обозначая $y = \sin t$, это уравнение для рассматриваемых t можно записать в виде

$$y + \sqrt{1 - y^2} = 7/5. \tag{40}$$

Уравнение (40) имеет два корня: $y_1 = 3/5$ и $y_2 = 4/5$. Поэтому уравнение (35) на промежутке $0 < t < \pi/2$ имеет два решения: $t_1 = \arcsin\frac{3}{5}$ и $t_2 = \arcsin\frac{4}{5}$, а это означает, что уравнение (34) имеет два корня: $x_1 = 5/3$ и $x_2 = 5/4$.

Ответ: $x_1 = 5/3$, $x_2 = 5/4$.

Пример 7. Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение

$$8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1? \tag{41}$$

Решение. Так как искомые корни удовлетворяют условию $0 \leqslant x \leqslant 1$, то делаем замену неизвестной $x = \cos t$. Тогда каждому корню $x_0 \in [0; 1]$ исходного уравнения будет соответствовать ровно один корень $t_0 \in [0; \pi/2]$, где $x_0 = \cos t_0$, уравнения

$$8\cos t(2\cos^2 t - 1)(8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1) = 1, \tag{42}$$

и, наоборот, каждому корню $t_1 \in [0; \pi/2]$ уравнения (42) соответствует ровно один корень $x_1 \in [0; 1]$ уравнения (41). Таким образом, задача может быть переформулирована так: сколько корней на промежутке $0 \leqslant t \leqslant \pi/2$ имеет уравнение (42)?

Поскольку $2\cos^2 t - 1 = \cos 2t$, $8\cos^4 t - 8\cos^2 t + 1 = \cos 4t$, то перепишем уравнение (42) в виде

$$8\cos t\cos 2t\cos 4t = 1. \tag{43}$$

Так как $t = 0$ не есть корень уравнения (43), то оно равносильно на промежутке $t \in (0; \pi/2]$ уравнению

$$8\sin t\cos t\cos 2t\cos 4t = \sin t,$$

или уравнению $\sin 8t = \sin t$, или, наконец, уравнению

$$\sin\frac{7t}{2}\cos\frac{9t}{2} = 0. \tag{44}$$

Решения уравнения (44) есть

$$t = \frac{2}{7}\pi n,\ n \in \mathbb{Z}, \quad \text{и} \quad t = \frac{2}{9}\left(\frac{\pi}{2} + \pi m\right),\ m \in \mathbb{Z}.$$

Из этих чисел условию $0 < t \leqslant \pi/2$ удовлетворяют только три числа $t_1 = \dfrac{2}{7}\pi$, $t_2 = \pi/9$ и $t_3 = \pi/3$. Следовательно, исходное уравнение (41) имеет на отрезке $[0; 1]$ три корня.

Ответ: три корня.

§ 3.4. Уравнения вида $a_0 f^n(x) + a_1 f^{n-1}(x)g(x) + \dots + a_{n-1}f(x)g^{n-1}(x) + a_n g^n(x) = 0$

Уравнения вида

$$a_0 f^n(x) + a_1 f^{n-1}(x)g(x) + \dots + a_{n-1}f(x)g^{n-1}(x) + a_n g^n(x) = 0, \tag{1}$$

где $a_0 \neq 0$ и хотя бы один из коэффициентов $a_1, a_2, \dots, a_n$ отличен от нуля, можно решать следующим образом.

1. Решить уравнение

$$g(x) = 0. \tag{2}$$

Найти те решения уравнения (2), которые являются решениями уравнения $f(x) = 0$. Все эти решения являются решениями уравнения (1).

2. На множестве всех действительных чисел, исключая найденные корни уравнения (1), его надо заменить равносильным ему на этом множестве уравнением

$$a_0\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^n + a_1\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{n-1} + \dots + a_{n-1}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) + a_n = 0. \quad (3)$$

Сделав замену неизвестной $y = f(x)/g(x)$, переписать уравнение (3) в виде

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \dots + a_{n-1} y + a_n = 0. \quad (4)$$

Алгебраическое уравнение (4) имеет не более чем n корней y_1, $y_2, \dots$, y_m, где $m \leqslant n$, найдя их, уравнение (3) заменить совокупностью уравнений

$$\frac{f(x)}{g(x)} = y_1, \dots, \ \frac{f(x)}{g(x)} = y_m. \quad (5)$$

Все решения совокупности (5), принадлежащие рассматриваемому множеству, являются решениями уравнения (1).

3. Объединение решений, найденных в п. 1 и п. 2, и есть множество всех решений уравнения (1).

Приведем несколько примеров решения уравнений вида (1).

Пример 1. Решить уравнение

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x^3 + 14x^2 + 24x = 0. \quad (6)$$

Решение. Перепишем уравнение (6) в виде

$$(x^2 + 4x + 8)^2 + 3x(x^2 + 4x + 8) + 2x^2 = 0. \quad (7)$$

Теперь очевидно, что уравнение (7) — уравнение вида (1). Поскольку $x = 0$ не является корнем уравнения $x^2+4x+8 = 0$, то, разделив уравнение (7) на x^2, получим равносильное ему уравнение

$$\left(\frac{x^2 + 4x + 8}{x}\right)^2 + 3\left(\frac{x^2 + 4x + 8}{x}\right) + 2 = 0. \quad (8)$$

Сделав замену неизвестной $\dfrac{x^2+4x+8}{x} = y$, перепишем уравнение (8) в виде

$$y^2+3y+2=0. \tag{9}$$

Так как уравнение (9) имеет два корня: $y_1=-1$ и $y_2=-2$, то уравнение (8) равносильно совокупности уравнений

$$\frac{x^2+4x+8}{x} = -1 \quad \text{и} \quad \frac{x^2+4x+8}{x} = -2.$$

Первое уравнение этой совокупности не имеет решений. Второе уравнение этой совокупности имеет два корня: $x_1=-4$ и $x_2=-2$. Поэтому уравнение (8), а следовательно, и равносильное ему уравнение (6) имеют два корня: x_1 и x_2.

Ответ: $x_1=-4$, $x_2=-2$.

Пример 2. Решить уравнение

$$4^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} + 3\cdot 6^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = 4\cdot 9^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}}. \tag{10}$$

Решение. Разделив обе части уравнения (10) на $9^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}}$, получим уравнение

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{2\cdot\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} + 3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = 4, \tag{11}$$

равносильное уравнению (10). Сделав замену неизвестной $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = y$, перепишем уравнение (11) в виде

$$y^2+3y-4=0. \tag{12}$$

Уравнение (12) имеет два корня: $y_1=1$ и $y_2=-4$. Следовательно, уравнение (11), а значит, и равносильное ему уравнение (10) равносильны совокупности уравнений

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = 1 \quad \text{и} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2+x+1}} = -4.$$

Решения первого уравнения этой совокупности есть $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Второе уравнение решений не имеет.

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2^3(x^2+x) + \log_2^2(x^2+x)\log_4 4x + \\ + 2\log_2(x^2+x)\log_4^2 4x - 4\log_4^3 4x = 0. \tag{13}$$

Решение. Поскольку $x = 1/4$ (корень уравнения $\log_4 4x = 0$) не является корнем уравнения $\log_2(x^2+x) = 0$, то уравнение (13) равносильно уравнению

$$\frac{\log_2^3(x^2+x)}{\log_4^3 4x} + \frac{\log_2^2(x^2+x)}{\log_4^2 4x} + 2\frac{\log_2(x^2+x)}{\log_4 4x} - 4 = 0. \tag{14}$$

Сделав замену неизвестной $\dfrac{\log_2(x^2+x)}{\log_4 4x} = y$, перепишем уравнение (14) в виде

$$y^3 + y^2 + 2y - 4 = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) имеет единственный корень $y = 1$. Следовательно, исходное уравнение (13) равносильно уравнению

$$\log_2(x^2+x) = \log_4 4x. \tag{16}$$

ОДЗ уравнения (16) есть $x > 0$, поэтому на этом множестве оно равносильно уравнению $(x^2+x)^2 = 4x$, т. е. уравнению $x^4 + 2x^3 + x^2 = 4x$, или, наконец, поскольку $x \neq 0$, уравнению

$$x^3 + 2x^2 + x - 4 = 0. \tag{17}$$

Уравнение (17) имеет единственный корень $x = 1$. Этот корень содержится в множестве $x > 0$. Следовательно, исходное уравнение (13) также имеет этот же единственный корень.

Ответ: $x = 1$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{(2x+\sqrt{1+x^2})^2} - 5\sqrt[3]{3x^2-1} + \\ + 6\sqrt[3]{(2x-\sqrt{1+x^2})^2} = 0. \tag{18}$$

Решение. Поскольку $3x^2-1=(2x+\sqrt{1+x^2})(2x-\sqrt{1+x^2})$, то уравнение (18) можно переписать в виде

$$\sqrt[3]{(2x+\sqrt{1+x^2})^2}-5\sqrt[3]{(2x+\sqrt{1+x^2})(2x-\sqrt{1+x^2})}+\\+6\sqrt[3]{(2x-\sqrt{1+x^2})^2}=0.$$

Так как $x=1/\sqrt{3}$ — корень уравнения $2x-\sqrt{1+x^2}=0$ — не является корнем уравнения $2x+\sqrt{1+x^2}=0$, то исходное уравнение (18) равносильно уравнению

$$\sqrt[3]{\left(\frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{2x-\sqrt{1+x^2}}\right)^2}-5\sqrt[3]{\frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{2x-\sqrt{1+x^2}}}+6=0. \qquad (19)$$

Сделав замену неизвестной $\sqrt[3]{\dfrac{2x+\sqrt{1+x^2}}{2x-\sqrt{1+x^2}}}=y$, перепишем уравнение (19) в виде

$$y^2-5y+6=0. \qquad (20)$$

Уравнение (20) имеет два корня $y_1=2$ и $y_2=3$. Следовательно, исходное уравнение равносильно совокупности уравнений

$$\sqrt[3]{\frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{2x-\sqrt{1+x^2}}}=2 \quad \text{и} \quad \sqrt[3]{\frac{2x+\sqrt{1+x^2}}{2x-\sqrt{1+x^2}}}=3. \qquad (21)$$

Первое уравнение совокупности (21) равносильно уравнению $2x+\sqrt{1+x^2}=8\left(2x-\sqrt{1+x^2}\right)$, т. е. уравнению

$$14x=9\sqrt{1+x^2}. \qquad (22)$$

Уравнение (22) имеет единственный корень $x_1=9/\sqrt{115}$. Второе уравнение совокупности (21) равносильно уравнению $2x+\sqrt{1+x^2}=27\left(2x-\sqrt{1+x^2}\right)$, т. е. уравнению

$$13x=7\sqrt{1+x^2}. \qquad (23)$$

Уравнение (23) имеет единственный корень $x_2 = \dfrac{7}{\sqrt{120}}$. Следовательно, совокупность (21), а значит, и исходное уравнение имеют два корня: x_1 и x_2.

ОТВЕТ: $x_1 = 9/\sqrt{115}$, $x_2 = 7/\sqrt{120}$.

К уравнению вида (1) приводятся уравнения вида

$$A\cos^2\alpha x + B\sin\alpha x\cos\alpha x + C\cos^2\alpha x + \\ + E\sin 2\alpha x + F\cos 2\alpha x + D = 0$$

после применения формул синуса и косинуса двойного угла: $\sin 2\alpha x = 2\sin\alpha x\cos\alpha x$, $\cos 2\alpha x = \cos^2\alpha x - \sin^2\alpha x$ и тождества $D = D(\sin^2\alpha x + \cos^2\alpha x)$.

ПРИМЕР 5. Решить уравнение

$$3\cos^2 5x - 7\sin 10x + 4\sin^2 5x = 6. \qquad (24)$$

РЕШЕНИЕ. Применяя формулу синуса двойного угла и тождество $6 = 6\sin^2 5x + 6\cos^2 5x$, уравнение (24) можно переписать в виде

$$2\sin^2 5x + 14\sin 5x\cos 5x + 3\cos^2 5x = 0. \qquad (25)$$

Поскольку те x, для которых $\cos 5x = 0$ не есть решения уравнения $\sin 5x = 0$, то, разделив уравнение (25) на $\cos^2 5x$, получим уравнение

$$2\operatorname{tg}^2 5x + 14\operatorname{tg} 5x + 3 = 0, \qquad (26)$$

равносильное уравнению (24). Сделав замену неизвестной $\operatorname{tg} 5x = z$, перепишем уравнение (26) в виде

$$2z^2 + 14z + 3 = 0. \qquad (27)$$

Так как уравнение (27) имеет два корня: $z_1 = \dfrac{-7+\sqrt{43}}{2}$ и $z_2 = \dfrac{-7-\sqrt{43}}{2}$, то уравнение (24) равносильно совокупности уравнений

$$\operatorname{tg} 5x = \frac{-7+\sqrt{43}}{2}, \quad \operatorname{tg} 5x = \frac{-7-\sqrt{43}}{2}.$$

Решения этой совокупности уравнений есть

$$x = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{-7+\sqrt{43}}{2}\right) + \frac{\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{-7-\sqrt{43}}{2}\right) + \frac{\pi n}{5}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Эти решения и есть решения исходного уравнения.

Ответ:

$$x = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{-7+\sqrt{43}}{2}\right) + \frac{\pi k}{5},\ k \in \mathbb{Z},$$

$$x = \frac{1}{5}\operatorname{arctg}\left(\frac{-7-\sqrt{43}}{2}\right) + \frac{\pi n}{5},\ n \in \mathbb{Z}.$$

§ 3.5. Решение некоторых уравнений сведением их к решению систем уравнений относительно новых неизвестных

В некоторых случаях решение уравнения можно свести к решению системы уравнений относительно вводимых новых неизвестных. Этот прием мы проиллюстрируем на примерах.

Пример 1. Решить уравнение

$$(2-x)^5 + (x-3)^5 + 1 = 0. \tag{1}$$

Решение. Пусть x_0 — решение уравнения (1). Вводим новые неизвестные $u = 2 - x_0$, $v = x_0 - 3$. Ясно, что u и v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} u + v = -1, \\ u^5 + v^5 = -1. \end{cases} \tag{2}$$

Поскольку, как легко проверить,

$$u^5 + v^5 = (u+v)(((u+v)^2 - 2uv)^2 - uv(u+v)^2 + u^2v^2),$$

то систему (2) можно переписать в виде

$$\begin{cases} u+v=-1, \\ (u+v)(((u+v)^2-2uv)^2-uv(u+v)^2+u^2v^2)=-1. \end{cases} \tag{3}$$

Подставляя во второе уравнение системы (3) число -1 вместо $u+v$, получаем уравнение $(1-2uv)^2-uv+u^2v^2=1$, которое можно переписать в виде $5(uv)^2-5(uv)=0$, откуда либо $uv=0$, либо $uv=1$.

Таким образом, для нахождения u и v имеем две системы уравнений:

$$\begin{cases} u+v=-1, \\ uv=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} u+v=-1, \\ uv=1. \end{cases}$$

Вторая система решений не имеет. Решения первой системы есть $u_1=0$, $v_1=-1$ и $u_2=-1$, $v_2=0$, откуда следует, что решения уравнения (1) содержатся среди чисел $x_0'=2$ и $x_0''=3$. Проверка показывает, что оба эти числа являются решениями уравнения (1).

Ответ: $x_1=2$, $x_2=3$.

Пример 2. Решить уравнение

$$x^2+\frac{9x^2}{(3+x)^2}=40. \tag{4}$$

Решение. Пусть x_0 — решение уравнения (4). Введем новую неизвестную $y_0=\dfrac{3x_0}{3+x_0}$. Тогда для нахождения x_0 и y_0 имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 3(x_0-y_0)-x_0y_0=0, \\ x_0^2+y_0^2=40. \end{cases} \tag{5}$$

Поскольку $x_0^2+y_0^2=(x_0-y_0)^2+2x_0y_0$, то, вводя новые неизвестные $u_0=x_0-y_0$, $v_0=x_0y_0$, систему (5) можно переписать в виде

$$\begin{cases} 3u_0-v_0=0, \\ u_0^2+2v_0=40. \end{cases}$$

Решения этой системы есть пары чисел $u_0 = 4$, $v_0 = 12$ и $u_0 = -10$, $v_0 = -30$, откуда для нахождения x_0 и y_0 получаем системы уравнений

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = 4, \\ x_0 y_0 = 12, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_0 - y_0 = -10, \\ x_0 y_0 = -30. \end{cases}$$

Решения первой из этих систем есть $x_0 = -2$, $y_0 = -6$ и $x_0 = 6$, $y_0 = 2$. Вторая система решений не имеет. Итак, все решения уравнения (4) содержатся среди чисел $x_0 = -2$ и $x_0 = 6$.

Проверка показывает, что эти числа являются решениями уравнения (4).

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 6$.

Пример 3. Решить уравнение

$$\frac{30}{x\sqrt[3]{35 - x^3}} = x + \sqrt[3]{35 - x^3}. \tag{6}$$

Решение. Пусть x_0 — решение уравнения (6). Введем новую неизвестную $\sqrt[3]{35 - x_0^3} = y_0$, тогда x_0 и y_0 являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{30}{x_0 y_0} = x_0 + y_0, \\ x_0^3 + y_0^3 = 35. \end{cases} \tag{7}$$

Вводя новые неизвестные $u = x_0 + y_0$, $v = x_0 y_0$, перепишем систему (7) в виде

$$\begin{cases} uv = 30, \\ u^3 - 3uv = 35. \end{cases} \tag{8}$$

Решения системы (8) есть $u = 5$, $v = 6$. Следовательно, для нахождения x_0 и y_0 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x_0 + y_0 = 5, \\ x_0 y_0 = 6. \end{cases}$$

Эта система имеет две пары решений: $x_0' = 2$, $y_0' = 3$ и $x_0'' = 3$, $y_0'' = 2$. Итак, все решения уравнения (6) содержатся среди чисел $x = 2$ и $x = 3$. Проверка показывает, что оба эти числа являются корнями уравнения (6).

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Пример 4. Решить уравнение

$$\sqrt[3]{x+45} - \sqrt[3]{x-16} = 1. \tag{9}$$

Решение. Пусть x_0 — решение уравнения (9). Введем новые неизвестные $\sqrt[3]{x_0+45} = u$, $\sqrt[3]{x_0-16} = v$. Тогда u и v являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ u^3 - v^3 = 61. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2) = 61 \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} u = v + 1, \\ (v+1)^2 + v(v+1) + v^2 = 61. \end{cases} \tag{10}$$

Решения системы (10) есть $v_1 = 4$, $u_1 = 5$; $v_2 = -5$, $u_2 = -4$, а это означает, что решениями уравнения (9) могут быть только числа $x_0' = 80$ и $x_0'' = -109$. Проверка показывает, что эти числа являются решениями уравнения (9).

Ответ: $x_1 = 80$, $x_2 = -109$.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt{x} + \sqrt[3]{x+4} = 4. \tag{11}$$

Решение. Пусть x_0 — решение уравнения (11). Введем новые неизвестные $x_0 = u^2$ и $x_0 + 4 = v^3$, тогда u и v удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} |u| + v = 4, \\ v^3 - u^2 = 4. \end{cases} \tag{12}$$

Из первого уравнения $|u| = 4 - v$. Подставляя вместо $|u|$ выражение $4 - v$ во второе уравнение системы (12), имеем уравнение $v^3 - (4-v)^2 - 4 = 0$. Это уравнение имеет единственное решение $v = 2$, но тогда $x_0 = 4$. Итак, возможное значение корня уравнения (11) есть $x_0 = 4$. Подставляя это значение x_0 в уравнение (11), получаем, что оно есть его решение.

Ответ: $x = 4$.

Пример 6. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{10 + x^2 + x} + \sqrt[4]{7 - x^2 - x} = 3. \tag{13}$$

Решение. Пусть x_0 — решение уравнения (13). Введем новые неизвестные $\sqrt[4]{10 + x_0^2 + x_0} = u$ и $\sqrt[4]{7 - x_0^2 - x_0} = v$, тогда u и v являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} u + v = 3, \\ u^4 + v^4 = 17. \end{cases}$$

Решениями этой системы являются $u_1 = 1$, $v_1 = 2$ и $u_2 = 2$, $v_2 = 1$, откуда следует, что x_0 удовлетворяет либо уравнению $\sqrt[4]{10 + x_0^2 + x_0} = 1$, либо уравнению $\sqrt[4]{10 + x_0^2 + x_0} = 2$. Первое из этих уравнении решений не имеет. Решения второго уравнения есть $x_0' = 2$ и $x_0'' = -3$. Итак, решения уравнения (13) содержатся среди чисел $x_0' = 2$ и $x_0'' = -3$. Подставляя эти числа в уравнение (13), видим, что они являются его решениями.

Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = -3$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{87 + [\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6)]^2 - 5\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6)} &+ \\ + \sqrt[4]{7 + [\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6)]^2 - 5\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6)} &= 4.\end{aligned} \tag{14}$$

Решение. Обозначим

$$f(x) = [\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6)]^2 - 5\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6).$$

Тогда уравнение (14) перепишется в виде

$$\sqrt[4]{87 + f(x)} + \sqrt[4]{7 + f(x)} = 4. \tag{15}$$

Пусть x_0 — решение уравнения (15). Введем новые неизвестные $\sqrt[4]{87+f(x_0)} = u$, $\sqrt[4]{7+f(x_0)} = v$. Тогда u и v являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} u+v=4, \\ u^4-v^4=80. \end{cases} \tag{16}$$

Из первого уравнения этой системы $u = 4 - v$. Подставляя вместо u во второе уравнение $4 - v$, получаем уравнение $v^3 - 6v^2+16v-11 = 0$. Это уравнение имеет единственный корень $v = 1$, откуда следует, что x_0 удовлетворяет уравнению

$$[\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6)]^2 - 5\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6) + 6 = 0. \tag{17}$$

Так как уравнение $y^2 - 5y + 6 = 0$ имеет два корня $y_1 = 2$ и $y_2 = 3$, то уравнение (17) равносильно совокупности уравнений

$$\log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6) = 2 \quad \text{и} \quad \log_2(4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6) = 3,$$

которая в свою очередь равносильна совокупности уравнений

$$4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6 = 4 \quad \text{и} \quad 4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 6 = 8.$$

Перепишем последнюю совокупность уравнений в виде

$$4^{2x} - 3{\cdot}4^x + 2 = 0 \quad \text{и} \quad 4^{2x} - 3{\cdot}4^x - 2 = 0. \tag{18}$$

Так как уравнение $z^2 - 3z + 2 = 0$ имеет два корня: $z_1 = 1$ и $z_2 = 2$, то первое уравнение совокупности (18) равносильно совокупности двух уравнений: $4^x = 1$ и $4^x = 2$, решения которой есть $x_1 = 0$ и $x_2 = 1/2$. Так как уравнение $z^2 - 3z - 2 = 0$ имеет два корня: $z_1 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$ и $z_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, то второе уравнение совокупности (18) равносильно совокупности двух уравнений:

$$4^x = \frac{3+\sqrt{17}}{2} \quad \text{и} \quad 4^x = \frac{3-\sqrt{17}}{2},$$

имеющей единственное решение $x_3 = \log_4 \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. Итак, все корни уравнения (14) содержатся среди чисел $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = \log_4 \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

Подставляя эти числа в уравнение (14), убеждаемся в том, что они есть его решения.

ОТВЕТ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = \log_4 \frac{3+\sqrt{17}}{2}$.

ПРИМЕР 8. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{2\sin x - 1} + \sqrt[4]{3\sin x - 2} = 2. \tag{19}$$

РЕШЕНИЕ. Пусть x_0 — решение уравнения (19). Введем новые неизвестные $u = \sqrt[4]{2\sin x_0 - 1}$ и $v = \sqrt[4]{3\sin x_0 - 2}$. Тогда u и v являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} u + v = 2, \\ 3u^4 - 2v^4 = 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения этой системы $u = 2 - v$. Подставляя $2 - v$ вместо u во второе уравнение, получаем уравнение

$$v^4 - 24v^3 + 72v^2 - 96v + 47 = 0. \tag{20}$$

Легко видеть, что уравнение (20) имеет корень $v = 1$. Разделив многочлен, находящийся в левой части уравнения (20), на $v-1$, получим тождество $v^4 - 24v^3 + 72v^2 - 96v + 47 = (v-1)(v^3 - 23v^2 + 49v - 47)$, откуда следует, что кроме $v = 1$ остальные корни уравнения (20) есть корни уравнения

$$v^3 - 23v^2 + 49v - 47 = 0. \tag{21}$$

Ясно, что надо искать лишь те корни уравнения (20), которые удовлетворяют условию $0 \leqslant v \leqslant 2$. Поскольку $v^3 - 23v^2 + 49v - 47 = (v^3 - 8) - (23v^2 - 49v + 39)$, то очевидно, что при $0 \leqslant v \leqslant 2$ имеем $v^3 - 8 \leqslant 0$ и $23v^2 - 49v + 39 > 0$. Поэтому $v^3 - 23v^2 + 49v - 47 < 0$ при любом v из промежутка $0 \leqslant v \leqslant 2$. Следовательно, уравнение (21) не имеет корней на отрезке $0 \leqslant v \leqslant 2$.

Таким образом, все корни уравнения (19) содержатся среди корней уравнения

$$3\sin x - 2 = 1. \tag{22}$$

Перепишем уравнение (22) в виде

$$\sin x = 1. \tag{23}$$

Уравнение (23) имеет решения $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Итак, все корни уравнения (19) содержатся среди чисел $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Подставляя эти числа в уравнение (19), убеждаемся в том, что все они являются его решениями.

ОТВЕТ: $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Конечно, уравнение (19) можно решить проще. Действительно, поскольку $2\sin x - 1 \leqslant 1$ и $3\sin x - 2 \leqslant 1$, то уравнение (19) равносильно уравнению $\sin x = 1$.

Задачи

Решить уравнение

1. $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) = 12$.

2. $(8x + 7)^2(4x + 3)(x + 1) = 9/2$.

3. $(6x + 5)^2(3x + 2)(x + 1) = 35$.

4. $(x^2 + 2x + 7) = (4 + 2x + x^2)(x^2 + 2x + 3)$.

5. $(1 + x + x^2)(6 - x - x^2) = 10$.

6. $(x - 1)(x + 2)(x - 3)(x + 4) = 144$.

7. $x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 24$.

8. $(x - 4)^4 + x^4 = 82$.

9. $(x - 1)^4 + (x + 3)^4 = 626$.

10. $(x^2 + 3x + 4)(x^2 + 4x + 5) = 2(x + 1)^2$.

11. $(x - 1)(x - 2)(x - 4)(x - 5) = 7(x - 3)^2$.

12. $(x^2 - 16)(x - 3)^2 + 9x^2 = 0$.

13. $x^4 + (1-x)^4 - (x - 1/2)^2 - 25/8 = 0.$

14. $(x^2 - 3x + 1)(x^2 + 3x + 2)(x^2 - 9x + 20) = -30.$

15. $(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$

16. $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2.$

17. $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0.$

18. $x^4 - 8x^3 - 4x^2 + 16x + 4 = 0.$

19. $(x^2 - 6x - 9)^2 = x^3 - 4x^2 - 9x.$

20. $(x^3 + x^2 + 1)^2 + (x^3 - x^2 + 1)^2 = 2x^4.$

21. $9x^4 - 6x^3 - 18x^2 - 2x + 1 = 0.$

22. $x^6 - 6x^4 + x^3 + 9x^2 - 3x - 1 = 0.$

23. $(1+x)^8 + (1+x^2)^4 = 2x^4.$

24. $1 + x^5 = 2(1+x)^5.$

25. $(x^2 - x + 1)^4 - 8x^2(x^2 - x + 1)^2 + 16x^4 = 0.$

26. $x^3 + 1/x^3 + x^2 + 1/x^2 + x + 1/x = 6.$

27. $x^3 + 1/x^3 = 6(x + 1/x).$

28. $\dfrac{4x}{4x^2 - 8x + 7} + \dfrac{3x}{4x^2 - 10x + 7} = 1.$

29. $\dfrac{1}{2x^2 - x + 1} + \dfrac{3}{2x^2 - x + 3} = \dfrac{10}{2x^2 - x + 7}.$

30. $\dfrac{x-1}{x+2} + \dfrac{x+2}{x-1} = \dfrac{x+5}{x+3} + \dfrac{x+3}{x+5}.$

31. $\dfrac{x(x+1)(x+4)(x+3)+1}{(x+2)^2(x+5)(x-1)+2} = 3.$

32. $\dfrac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1} + \dfrac{x^2 + 3x + 1}{x^2 + 4x + 1} = \dfrac{5}{6}.$

33. $\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1} + \dfrac{x^2 + 8x + 20}{x+4} = \dfrac{x^2 + 4x + 6}{x+2} + \dfrac{x^2 + 6x + 12}{x+3}.$

34. $\dfrac{x^2 - 8{,}5x + 15}{x^2 - 9x + 15} = \dfrac{3x}{x^2 - 8x + 15}.$

35. $\dfrac{x^2 + 2x + 3}{x-1} + \dfrac{x-1}{x^2 + 2x + 3} = x + \dfrac{1}{x}.$

36. $x^2+\left(\dfrac{2x}{x-2}\right)^2=5.$

37. $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11.$

38. $\left(\dfrac{x+6}{x-6}\right)\left(\dfrac{x+4}{x-4}\right)^2+\left(\dfrac{x-6}{x+6}\right)\left(\dfrac{x+9}{x-9}\right)^2=2\cdot\dfrac{x^2+36}{x^2-36}.$

39. $\dfrac{5}{x-1}+\dfrac{4}{x+2}+\dfrac{21}{x-3}=\dfrac{5}{x+1}+\dfrac{4}{x-2}+\dfrac{21}{x+3}.$

40. $x^2+\dfrac{x^2}{(1+x)^2}=1.$

41. $\dfrac{x^2}{2-x^2}+\dfrac{x}{2-x}=2.$

42. $\dfrac{(x+1)^5}{x^5+1}=\dfrac{81}{11}.$

43. $\dfrac{x^4+13x^2+36}{x^2(x^4+36)}=\dfrac{1}{2}.$

44. $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}=\dfrac{7}{9}\cdot\dfrac{x+1}{x-1}.$

45. $\dfrac{2+\sqrt{2}x+x^2}{2-\sqrt{2}x+x^2}=\dfrac{2}{x^2}.$

46. $\dfrac{2}{x^2+2x-2}+\dfrac{3}{x^2-2x+3}=\dfrac{x}{2}.$

47. $\sin 2x(\sin x+\cos x)=\sqrt{2}.$

48. $\sin^3 x-\cos^3 x=1+\sin x\cos x.$

49. $\sin^3 x+\cos^3 x=\sin x+\cos x.$

50. $3\cos x+\sin x=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}.$

51. $5\cos 3x+3\cos x=3\sin 4x.$

52. $4x^2-7\sqrt{x^2-2x}=8x-3.$

53. $\sqrt{x}-\sqrt{13-x}=\sqrt{-x^2+13x-35}.$

54. $\sqrt{x+6}-\sqrt{10-x}=\sqrt{-x^2+4x+62}.$

55. $\sqrt[4]{18-x}+\sqrt[4]{x+14}=4.$

56. $\sqrt[4]{77+x}+\sqrt[4]{20-x}=5$.

57. $\sqrt[4]{100-x}+\sqrt[4]{x-18}=4$.

58. $\sqrt[5]{\frac{1}{2}+x}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}-x}=1$.

59. $\sqrt[3]{(8+x)^2}-\sqrt[3]{(x+8)(8-x)}+\sqrt[3]{(8-x)^2}=4$.

60. $\sqrt[3]{(x-2)^2}-\sqrt[3]{(2-x)(7+x)}+\sqrt[3]{(7+x)^2}=3$.

61. $8x^2(1-x^2)+8x\sqrt{1-x^2}=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^2$.

62. $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[3]{2x-3}$.

63. $\sqrt[3]{13-x}+\sqrt[3]{22+x}=5$.

64. $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$.

65. $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$.

66. $\sqrt[5]{33-x}+\sqrt[5]{x}=3$.

67. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}$.

68. $\sqrt{x-2}=\dfrac{5x^2-10x+16}{x^2+6x+4}$.

69. $8\sqrt{x+5}=\dfrac{x^2+34x+161}{x+9}$.

70. $\dfrac{3+2\sqrt{x^2+3x-4}}{5+3\sqrt{x^2+3x-4}}=\dfrac{2x+5}{3x+8}$.

Глава IV

Решение уравнений и неравенств с использованием свойств входящих в них функций

§ 4.1. Применение основных свойств функций

4.1.1. Использование ОДЗ. Иногда знание ОДЗ позволяет доказать, что уравнение (или неравенство) не имеет решений, а иногда позволяет найти решения уравнения (или неравенства) непосредственной подстановкой чисел из ОДЗ.

Пример 1. Решить уравнение

$$\sqrt{3-x} = \log_5(x-3).$$

Решение. ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $3-x \geqslant 0$ и $x-3 > 0$, т. е. ОДЗ есть пустое множество. Этим решение уравнения и завершается, так как установлено, что ни одно число не может являться решением, т. е. что уравнение не имеет корней.

Ответ: решений нет.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{|\sin x|} = \sqrt[4]{-|\sin x|} + \operatorname{tg} x. \qquad (1)$$

Решение. ОДЗ этого уравнения состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $|\sin x| \geqslant 0$, $-|\sin x| \geqslant 0$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, т. е. ОДЗ есть $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя эти значения x в уравнение (1), получаем, что его левая и правая части равны 0, а это означает, что все $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, являются его решениями.

Ответ: $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 3. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[6]{x^4-1} < 2^x - \log_2(1+x^4). \qquad (2)$$

Решение. ОДЗ неравенства (2) состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $1 - x^2 \geqslant 0$, $x^4 - 1 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ состоит из двух чисел $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Подставляя $x_1 = 1$ в неравенство (2), получаем, что его левая часть равна 0, правая равна $2 - \log_2 2 = 1$, т. е. $x_1 = 1$ есть решение неравенства (2). Подставляя $x_2 = -1$ в неравенство (2), получаем, что $x_2 = -1$ не является его решением, поскольку левая часть неравенства (2) равна 0, а правая часть равна $2^{-1} - \log_2 2 = -1/2$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 4. Решить неравенство

$$\log_5 x < \sqrt{1 - x^4}. \tag{3}$$

Решение. ОДЗ неравенства (3) есть все x, удовлетворяющие условию $0 < x \leqslant 1$. Ясно, что $x = 1$ не является решением неравенства (3). Для x из промежутка $0 < x < 1$ имеем $\log_5 x < 0$, а $\sqrt{1 - x^4} > 0$. Следовательно, все x из промежутка $0 < x < 1$ являются решениями неравенства (3).

Ответ: $0 < x < 1$.

Пример 5. Решить неравенство

$$\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}. \tag{4}$$

Решение. ОДЗ неравенства (4) есть все x из промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 9$. Разобьем это множество на два промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 0$ и $0 < x \leqslant 9$.

Для x из промежутка $-3 \leqslant x \leqslant 0$ имеем $\sqrt{x+3} \geqslant 0$, $\sqrt[4]{9-x} \geqslant \sqrt[4]{9} = \sqrt{3}$. Следовательно, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} \geqslant \sqrt{3}$ на этом промежутке, и поэтому неравенство (4) не имеет решений на этом промежутке.

Пусть x принадлежит промежутку $0 < x \leqslant 9$, тогда $\sqrt{x+3} > \sqrt{3}$ и $\sqrt[4]{9-x} \geqslant 0$. Следовательно, $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$ для таких x, и, значит, на этом промежутке неравенство (4) также не имеет решений.

Итак, неравенство (4) решений не имеет.

Ответ: решений нет.

Замечания. 1. При решении уравнений необязательно находить ОДЗ. Иногда проще перейти к следствию и проверить найденные корни (соответствующие примеры уже были в предыдущих главах).

2. При решении неравенств иногда можно не находить ОДЗ, а решать неравенство переходом к равносильной ему системе неравенств, в которой либо одно из неравенств не имеет решений, либо знание его решения помогает решить систему неравенств.

Пример 6. Решить неравенство

$$\log_2(2^x + 1 - x^2) > \log_2(2^{x-1} + 1 - x) + 1. \tag{5}$$

Решение. Отыскание ОДЗ неравенства есть непростая задача, поэтому поступим иначе. Неравенство (5) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} 2^x + 1 - x^2 > 0, \\ 2^{x-1} + 1 - x > 0, \\ 2^x + 1 - x^2 > 2(2^{x-1} + 1 - x). \end{cases} \tag{6}$$

Третье неравенство этой системы равносильно неравенству $x^2 - 2x + 1 < 0$, не имеющему решений. Следовательно, система неравенств (6) не имеет решений, значит, и неравенство (5) не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 7. Решить неравенство

$$\sqrt{\sin x} < \sqrt{1 - |x| + \sin x}. \tag{7}$$

Решение. Нахождение ОДЗ неравенства (7) есть трудная задача. Поэтому поступим иначе. Неравенство (7) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \sin x \geqslant 0, \\ 1 - |x| + \sin x \geqslant 0, \\ \sin x < 1 - |x| + \sin x. \end{cases} \tag{8}$$

Третье неравенство этой системы имеет решениями все x из промежутка $-1 < x < 1$. Первое неравенство системы (8) справедливо не для всех x из этого промежутка, а лишь для x из промежутка $0 \leqslant x < 1$. Для всех x из промежутка $0 \leqslant x < 1$ второе неравенство справедливо. Следовательно, множеством решений системы (8) является промежуток $0 \leqslant x < 1$.

Ответ: $0 \leqslant x < 1$.

4.1.2. Использование ограниченности функций. При решении уравнений и неравенств свойство ограниченности снизу или сверху функции на некотором множестве часто играет определяющую роль.

Например, если для всех x из некоторого множества M справедливы неравенства $f(x) > A$ и $g(x) < A$, где A — некоторое число, то на множестве M уравнение $f(x) = g(x)$ и неравенство $f(x) < g(x)$ решений не имеют.

Заметим, что роль числа A часто играет нуль, в этом случае говорят о сохранении знака функций $f(x)$ и $g(x)$ на множестве M.

Пример 8. Решить уравнение

$$\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3.$$

Решение. Для любого действительного числа x имеем $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) \leqslant 1$, $x^2 + 2x + 3 = (x+1)^2 + 2 \geqslant 2$. Поскольку для любого значения x левая часть уравнения не превосходит единицы, а правая часть всегда не меньше двух, то данное уравнение не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 9. Решить уравнение

$$x^3 - x - \sin \pi x = 0. \tag{9}$$

Решение. Очевидно, что $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$ являются решениями уравнения (9). Для нахождения других решений уравнения (9) в силу нечетности функции $f(x) = x^3 - x - \sin \pi x$ достаточно найти его решения в области $x > 0$, $x \neq 1$, поскольку если $x_0 > 0$ является его решением, то и $(-x_0)$ также является его решением.

Разобьем множество $x > 0$, $x \neq 1$, на два промежутка: $(0; 1)$ и $(1; +\infty)$.

Перепишем уравнение (9) в виде $x^3 - x = \sin \pi x$. На промежутке $(0; 1)$ функция $g(x) = x^3 - x$ принимает только отрицательные значения, поскольку $x^3 < x$, а функция $h(x) = \sin \pi x$ только положительные. Следовательно, на этом промежутке уравнение (9) не имеет решений.

Пусть x принадлежит промежутку $(1; +\infty)$. Для каждого из таких значений x функция $g(x) = x^3 - x$ принимает положительные значения, функция $h(x) = \sin \pi x$ принимает значения разных знаков, причем на промежутке $(1; 2]$ функция $h(x) = \sin \pi x$ неположительна. Следовательно, на промежутке $(1; 2]$ уравнение (9) решений не имеет.

Если же $x > 2$, то $|\sin \pi x| \leqslant 1$, $x^3 - x = x(x^2 - 1) > 2 \cdot 3 = 6$, а это означает, что и на промежутке $(2; +\infty)$ уравнение (9) также не имеет решений.

Итак, $x = 0$, $x = 1$ и $x = -1$ и только они являются решениями исходного уравнения.

Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Пример 10. Решить неравенство

$$\frac{1-x}{1+x} < 2^x. \tag{10}$$

Решение. ОДЗ неравенства (10) есть все действительные x, кроме $x = -1$. Разобьем ОДЗ на три множества: $-\infty < x < -1$, $-1 < x \leqslant 0$, $0 < x < +\infty$ и рассмотрим неравенство (10) на каждом из этих промежутков.

Пусть $-\infty < x < -1$. Для каждого из этих x имеем $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x} < 0$, а $f(x) = 2^x > 0$. Следовательно, все эти x являются решениями неравенства (10).

Пусть $-1 < x \leqslant 0$. Для каждого из этих x имеем $g(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x} \geqslant 1$, а $f(x) = 2^x \leqslant 1$. Следовательно, ни одно из этих x не является решением неравенства (10).

Пусть $0 < x < +\infty$. Для каждого из этих x имеем $g(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x} < 1$, а $f(x) = 2^x > 1$. Следовательно, все эти x являются решениями неравенства (10).

Ответ: $-\infty < x < -1$; $0 < x < +\infty$.

Пример 11. Решить уравнение

$$2\pi \sin x = |x - \pi/2| - |x + \pi/2|. \tag{11}$$

Решение. Обозначим $|x - \pi/2| - |x + \pi/2|$ через $f(x)$. Из определения абсолютной величины следует, что $f(x) = \pi$ при $x \leqslant -\pi/2$, $f(x) = -2x$ при $-\pi/2 < x < \pi/2$ и $f(x) = -\pi$ при $x \geqslant \pi/2$. Поэтому, если $x \leqslant -\pi/2$, то уравнение (11) можно переписать в виде $2\pi \sin x = \pi$, т. е. в виде $\sin x = 1/2$.

Это уравнение имеет решения $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Из этих значений x условию $x \leqslant -\pi/2$ удовлетворяют только $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n = -1, -2, \ldots$. Если $x \geqslant \pi/2$, то уравнение (11) можно переписать в виде $2\pi \sin x = -\pi$, т. е. в виде $\sin x = -1/2$. Это уравнение имеет решения $x = (-1)^{m+1}\pi/6 + \pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Из этих значений x условию $x \geqslant \pi/2$ удовлетворяют только $x = (-1)^{m+1}\pi/6 + \pi m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Рассмотрим x из промежутка $(-\pi/2; \pi/2)$. На этом промежутке уравнение (11) можно переписать в виде $2\pi \sin x = -2x$, т. е. в виде

$$\sin x = -\frac{x}{\pi}. \tag{12}$$

Ясно, что $x = 0$ есть решение уравнения (12), а значит, и исходного уравнения. Докажем, что других решений уравнение (12) на промежутке $(-\pi/2; \pi/2)$ не имеет.

Для $x \neq 0$ уравнение (12) равносильно уравнению

$$\frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{\pi}.$$

Для любого значения $x \in (-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2)$, функция $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ принимает только положительные значения, поэтому уравнение (12) не имеет решений на множестве $(-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2)$.

Ответ: $x = 0$, $x = (-1)^n \pi/6 + \pi n$, $n = -1, -2, \ldots$; $x = (-1)^{m+1}\pi/6 + \pi m$, $m = 1, 2, \ldots$.

Пример 12. Решить уравнение

$$\sin^5 x + \frac{1}{\cos^7 x} = \cos^5 x + \frac{1}{\sin^7 x}. \tag{13}$$

Решение. Пусть x_0 есть решение уравнения (13), тогда справедливы равенство

$$\frac{1}{\cos^7 x_0} - \cos^5 x_0 = \frac{1}{\sin^7 x_0} - \sin^5 x_0 \tag{14}$$

и неравенства $|\cos x_0| < 1$ и $|\sin x_0| < 1$. Из справедливости неравенств получаем, что левая часть равенства (14) имеет тот же знак, что и $\dfrac{1}{\cos^7 x_0}$, т. е. тот же знак, что и $\cos x_0$, а правая часть — тот же знак, что и $\sin x_0$. Но так как $\sin x_0$ и $\cos x_0$ удовлетворяют равенству (14), то они имеют одинаковые знаки.

Перепишем равенство (14) в виде

$$\cos^7 x_0 \sin^7 x_0(\sin^5 x_0 - \cos^5 x_0) = \cos^7 x_0 - \sin^7 x_0. \qquad (15)$$

Применяя формулу сокращенного умножения

$$a^{2l+1} - b^{2l+1} = (a-b)(a^{2l} + a^{2l-1}b + \dots + b^{2l}),$$

перепишем равенство (15) в виде

$$(\sin x_0 - \cos x_0) f(x_0) = 0, \qquad (16)$$

где

$$f(x_0) = (\sin x_0 \cos x_0)^7(\sin^4 x_0 + \sin^3 x_0 \cos x_0 + \dots + \cos^4 x_0) + \\ + (\sin^6 x_0 + \sin^5 x_0 \cos x_0 + \dots + \cos^6 x_0).$$

Так как $\sin x_0$ и $\cos x_0$ имеют одинаковые знаки, то $f(x_0) > 0$. Поэтому из равенства (16) следует, что для любого решения уравнения (13) справедливо равенство $\sin x_0 = \cos x_0$.

Таким образом, любое решение уравнения (13) удовлетворяет уравнению

$$\sin x = \cos x. \qquad (17)$$

Очевидно, что любое решение уравнения (17) есть решение уравнения (13). Следовательно, уравнение (13) равносильно уравнению (17). Решения уравнения (17) есть $x = \pi/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, они и только они есть решения уравнения (13).

ОТВЕТ: $x = \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Точно так же, как в примере 12, можно доказать, что уравнение

$$\sin^{2n-1} x + \frac{1}{\cos^{2m-1} x} = \cos^{2n-1} x + \frac{1}{\sin^{2m-1} x},$$

где n, m — любые натуральные числа, равносильно уравнению $\sin x = \cos x$, и затем решать это более простое уравнение.

4.1.3. Использование монотонности. Решение уравнений и неравенств с использованием свойства монотонности основывается на следующих утверждениях.

1. Пусть $f(x)$ — непрерывная и строго монотонная функция на промежутке $\mathcal{I}$, тогда уравнение $f(x) = C$, где C — данная константа, может иметь не более одного решения на промежутке $\mathcal{I}$.

2. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — непрерывные на промежутке $\mathcal{I}$ функции, $f(x)$ строго возрастает, а $g(x)$ строго убывает на этом промежутке, тогда уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного решения на промежутке $\mathcal{I}$.

Отметим, что в качестве промежутка $\mathcal{I}$ могут быть бесконечный промежуток $(-\infty; +\infty)$, промежутки $(a; +\infty)$, $(-\infty; a)$, $[a; +\infty)$, $(-\infty; b]$, отрезки, интервалы и полуинтервалы.

Пример 13. Решить уравнение

$$x \cdot 2^{x^2+2x+3} = 64. \qquad (18)$$

Решение. Очевидно, что $x \leqslant 0$ не может являться решением уравнения (18), так как тогда $x \cdot 2^{x^2+2x+3} \leqslant 0$. Для $x > 0$ функция $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ непрерывна и строго возрастает, как произведение двух непрерывных положительных строго возрастающих для этих x функций $f = x$ и $g = 2^{x^2+2x+3}$. Значит, в области $x > 0$ функция $y = x \cdot 2^{x^2+2x+3}$ принимает каждое свое значение ровно в одной точке. Легко видеть, что $x = 1$ является решением уравнения (18), следовательно, это его единственное решение.

Ответ: $x = 1$.

Пример 14. Решить неравенство

$$2^x + 3^x + 4^x < 3. \qquad (19)$$

Решение. Каждая из функций $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$ непрерывная и строго возрастающая на всей оси. Значит, такой же является и исходная функция $y = 2^x + 3^x + 4^x$. Легко видеть, что при $x = 0$ функция $y = 2^x + 3^x + 4^x$ принимает значение 3. В силу непрерывности и строгой монотонности этой функции при $x > 0$ имеем $2^x + 3^x + 4^x > 3$, при $x < 0$ имеем

$2^x + 3^x + 4^x < 3$. Следовательно, решениями неравенства (19) являются все $x < 0$.

Ответ: $-\infty < x < 0$.

Пример 15. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{18 - x} - \sqrt[8]{x - 2} = 2. \tag{20}$$

Решение. Область допустимых значений уравнения (20) есть промежуток $2 \leqslant x \leqslant 18$. На ОДЗ функции $f(x) = -\sqrt[8]{x-2}$ и $g(x) = \sqrt[4]{18 - x}$ непрерывны и строго убывают, следовательно, непрерывна и убывает функция $h(x) = \sqrt[4]{18 - x} - \sqrt[8]{x - 2}$. Поэтому каждое свое значение функция $h(x)$ принимает только в одной точке. Так как $h(2) = 2$, то $x = 2$ является единственным корнем исходного уравнения.

Ответ: $x = 2$.

Пример 16. Решить неравенство

$$\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x + 2) - \sqrt{1 - x} < 4. \tag{21}$$

Решение. ОДЗ неравенства (21) есть промежуток $0 \leqslant x \leqslant 1$. На ОДЗ функция $f(x) = \sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x + 2) - \sqrt{1 - x}$ является непрерывной и строго возрастающей. Так как $f(1) = 4$, то все значения x из множества $[0; 1)$ удовлетворяют исходному неравенству.

Ответ: $0 \leqslant x < 1$.

Пример 17. Решить уравнение

$$\log_2(|x - 1| + 1) + \sqrt[3]{(x - 1)^4} = 2. \tag{22}$$

Решение. Перепишем уравнение (22) в виде

$$\log_2(|x - 1| + 1) = 2 - \sqrt[3]{(x - 1)^4}.$$

Рассмотрим функции $f(x) = \log_2(|x - 1| + 1)$ и $g(x) = -\sqrt[3]{(x - 1)^4} + 2$. Функция $f(x)$ убывает на промежутке $(-\infty; 1]$ и возрастает на промежутке $[1; +\infty)$. Функция $g(x)$ убывает на промежутке $[1; +\infty)$ и возрастает на промежутке $(-\infty; 1]$. Так как на промежутке $[1; +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает, а функция $g(x)$ убывает, то на этом промежутке уравнение $f(x) = g(x)$ может иметь не более одного корня.

Легко проверить, что таким корнем является число $x = 2$. Так как на промежутке $(-\infty; 1]$ функция $f(x)$ убывает, а функция $g(x)$ возрастает, то на этом промежутке уравнение $f(x) = g(x)$ также может иметь не более одного корня. Легко видеть, что таким числом является число $x = 0$. Итак, данное уравнение (22) имеет два корня $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

ОТВЕТ: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

ПРИМЕР 18. Решить неравенство

$$\sqrt[8]{2 - x^2} > x^3 + x - 1. \tag{23}$$

РЕШЕНИЕ. ОДЗ неравенства (23) есть все x из промежутка $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant \sqrt{2}$. Все x из промежутка $-\sqrt{2} \leqslant x \leqslant 0$ являются решениями исходного неравенства (23), так как для каждого такого x имеем, что функция $f(x) = \sqrt[8]{2 - x^2}$ неотрицательна, а функция $g(x) = x^3 + x - 1$ отрицательна.

Рассмотрим неравенство (23) на промежутке $(0; \sqrt{2}]$. Поскольку функция $g(x)$ непрерывна и строго возрастает на этом промежутке, а функция $f(x)$ непрерывна и строго убывает, то, если уравнение $f(x) = g(x)$ имеет корень на этом промежутке, то он единственный. Легко видеть, что таким корнем является число $x = 1$.

Для каждого x из промежутка $(0; 1)$ имеем, что $f(x) = \sqrt[8]{2 - x^2} > 1$, а $g(x) = x^3 + x - 1 < 1$. Поэтому все x из этого промежутка являются решениями исходного неравенства (23).

Для каждого x из промежутка $(1; \sqrt{2}]$ имеем $f(x) = \sqrt[8]{2 - x^2} < 1$, а $g(x) = x^3 + x - 1 > 1$. Поэтому такие x не удовлетворяют данному неравенству (23).

Итак, решениями исходного неравенства (23) являются все x из промежутка $[-\sqrt{2}; 1)$.

ОТВЕТ: $-\sqrt{2} \leqslant x < 1$.

ПРИМЕР 19. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$ax^3 + bx + c = 0, \tag{24}$$

если числа a и b одного знака?

РЕШЕНИЕ. Так как числа a и b одного знака, то $b/a > 0$ для любого x и $x^2 + b/a \neq 0$. При $c = 0$ и $ab > 0$ очевидно, что уравнение (24) имеет единственный корень $x = 0$. Пусть $c \neq 0$. Перепишем данное уравнение в виде

$$-\frac{a}{c}x = \frac{1}{x^2 + \dfrac{b}{a}}. \tag{25}$$

Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + b/a}$ для каждого $x \in (-\infty; +\infty)$ принимает положительные значения и является непрерывной и строго возрастающей на промежутке $(-\infty; 0]$ и непрерывной и строго убывающей на промежутке $[0; +\infty)$. Если $a/c > 0$, то функция $g(x) = -\dfrac{a}{c}x$ непрерывна и строго убывает на всей оси $-\infty < x < +\infty$ и принимает все положительные значения для $x \in (-\infty; 0)$ и отрицательные значения для $x \in (0; +\infty)$. Поэтому уравнение (25) имеет единственный корень на промежутке $(-\infty; 0)$. Если $a/c < 0$, то функция $g(x) = -\dfrac{a}{c}x$ непрерывна и строго возрастает на всей оси $-\infty < x < +\infty$ и принимает все положительные значения для $x \in (0; +\infty)$ и отрицательные значения для $x \in (-\infty; 0)$. Поэтому уравнение (25) имеет единственный корень на промежутке $(0; +\infty)$.

Ответ: единственный корень.

4.1.4. Использование графиков. При решении уравнений или неравенств иногда полезно рассмотреть эскиз графиков их правой и левой частей. Тогда этот эскиз графиков поможет выяснить, на какие множества надо разбить числовую ось, чтобы на каждом из них решение уравнения (или неравенства) было очевидно.

Обратим внимание, что эскиз графика лишь помогает найти решение, но писать, что из графика следует ответ, нельзя, ответ еще надо обосновать.

Пример 20. Решить неравенство

$$\sqrt{1 - x^2} < \sqrt[8]{5 - x}. \tag{26}$$

Решение. ОДЗ неравенства (26) есть все x из промежутка $[-1; 1]$. Эскизы графиков функций $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ и

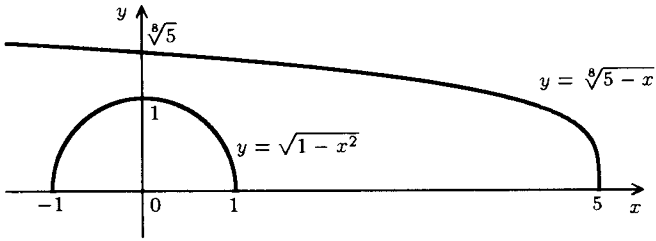


Рис. 7

$g(x) = \sqrt[8]{5 - x}$ представлены на рис. 7. Из рисунка следует, что для всех x из ОДЗ неравенство (26) справедливо. Докажем это. Для каждого $x \in [-1; 1]$ имеем $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$, а для каждого такого x имеем, что $\sqrt[8]{5 - x} \geqslant \sqrt[8]{4} > 1$. Значит, для каждого $x \in [-1; 1]$ имеем $f(x) \leqslant 1 < g(x)$. Следовательно, решениями неравенства (26) будут все x из промежутка $[-1; 1]$.

Ответ: $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Пример 21. Решить уравнение

$$x^2 + 2x + 3 = \sqrt{4 - x^2}. \qquad (27)$$

Решение. ОДЗ уравнения (27) есть все x из промежутка $-2 \leqslant x \leqslant 2$. Эскизы графиков функций $f(x) = x^2 + 2x + 3$ и $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ представлены на рис. 8. Проведем прямую $y = 2$. Из рисунка следует, что график функции $f(x)$ лежит не ниже этой прямой, а график функции $g(x)$ не выше. При этом эти графики касаются прямой $y = 2$ в разных точках. Следовательно, уравнение не имеет решений. Докажем это. Для каждого $x \in [-2; 2]$ имеем $\sqrt{4 - x^2} \leqslant 2$, а $x^2 + 2x + 3 = (x + 1)^2 + 2 \geqslant 2$. При этом $f(x) = 2$ только для $x = -1$, а $g(x) = 2$ только для $x = 0$. Это означает, что уравнение (27) не имеет решений.

Ответ: нет решений.

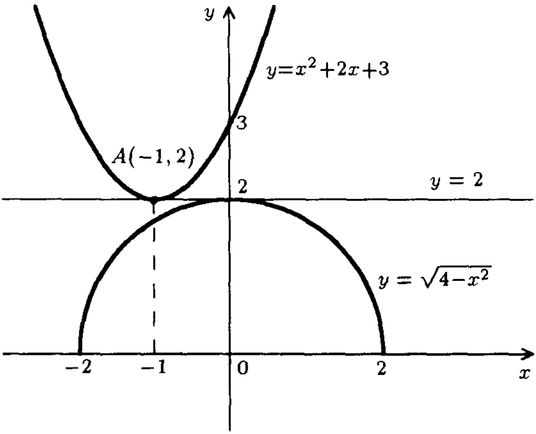


Рис. 8

Пример 22. Решить уравнение

$$x^5 + x = \sqrt[3]{x-7}. \tag{28}$$

Решение. Эскизы графиков функций $f(x) = x^5 + x$ и $g(x) = \sqrt[3]{x-7}$ представлены на рис. 9. Легко проверяется, что точка $(-1; -2)$ является точкой пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$, т. е. $x = -1$ есть решение уравнения (28). Проведем прямую $y = x - 1$. Из рисунка следует, что она расположена между графиками функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$. Это наблюдение и помогает доказать, что других решений уравнение (28) не имеет.

Для этого докажем, что для x из промежутка $(-1; +\infty)$ справедливы неравенства $x^5 + x > x - 1$ и $x - 1 > \sqrt[3]{x-7}$, а для x из промежутка $(-\infty; -1)$ справедливы неравенства $\sqrt[3]{x-7} > x - 1$ и $x^5 + x < x - 1$.

Очевидно, что неравенство $x^5 + x > x - 1$ справедливо для $x > -1$, а неравенство $x^5 + x < x - 1$ для $x < -1$. Решим неравенство $\sqrt[3]{x-7} > x - 1$. Это неравенство равносильно неравенству $x - 7 > (x-1)^3$, которое можно переписать в виде

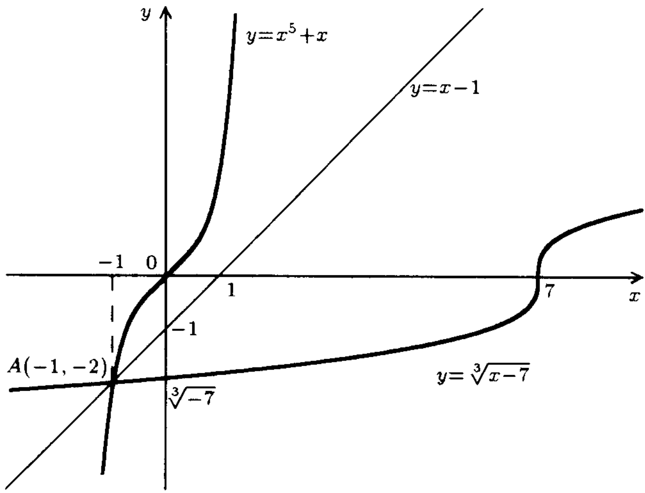


Рис. 9

$(x+1)[(x-2)^2+2] < 0$. Решениями этого неравенства являются все $x < -1$. Точно так же показывается, что решениями неравенства $\sqrt[3]{x-7} < x-1$ являются все $x > -1$.

Следовательно, требуемое утверждение доказано, и уравнение (28) имеет единственный корень $x = -1$.

Ответ: $x = -1$.

Пример 23. Решить неравенство

$$\frac{6}{2x+1} > \frac{1+\log_2(2+x)}{x}. \tag{29}$$

Решение. Область допустимых значений данного неравенства состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $x > -2$, $x \neq -1/2$, $x \neq 0$, т. е. ОДЗ состоит из трех промежутков $-2 < x < -1/2$, $-1/2 < x < 0$, $0 < x < +\infty$. Рассмотрим неравенство (29) на каждом из этих промежутков. Отметим, что в области $-2 < x < 0$, $x \neq -1/2$, оно равносильно неравенству

$$\log_2(2+x) > \frac{4x-1}{2x+1}, \tag{30}$$

а в области $x > 0$ оно равносильно неравенству

$$\log_2(2+x) < \frac{4x-1}{2x+1}. \tag{31}$$

Эскизы графиков функций $f(x) = \log_2(2+x)$ и $g(x) = \dfrac{4x-1}{2x+1}$ приведены на рис. 10. Из рисунка видно, что $g(x) > f(x)$ на

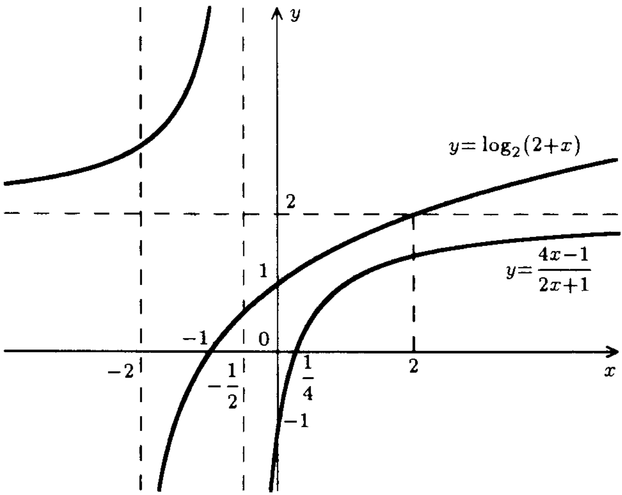


Рис. 10

промежутке $(-2; -1/2)$ и $f(x) > g(x)$ на каждом из промежутков $(-1/2; 0)$ и $(0; +\infty)$. Поэтому неравенство (31) не имеет решений, а неравенство (30) будет иметь решениями все x из промежутка $(-1/2, 0)$.

Докажем это.

а) Пусть $-2 < x < -1/2$. Неравенство (29) равносильно на этом промежутке неравенству (30). Легко видеть, что для каждого x из этого интервала справедливы неравенства

$$\log_2(2+x) < \log_2 \frac{3}{2} < 1,$$
$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} > 2.$$

Следовательно, неравенство (30), а вместе с ним и исходное неравенство (29) не имеют решений на интервале $-2 < x < -1/2$.

б) Пусть $-1/2 < x < 0$. Тогда неравенство (29) также равносильно неравенству (30). Для каждого x из этого интервала

$$\log_2(2+x) > \log_2\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \log_2 \frac{3}{2} > 0,$$
$$\frac{4x-1}{2x+1} < 0.$$

Следовательно, любое такое x является решением неравенства (30), а поэтому и исходного неравенства (29).

в) Пусть $x > 0$. На этом множестве исходное неравенство равносильно неравенству (31). Очевидно, что для любого x из этого множества справедливы неравенства

$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2,$$
$$1 < \log_2(2+x).$$

Отсюда следует: 1) неравенство (31) не имеет решений на том множестве, где $\log_2(x+2) \geqslant 2$, т. е. неравенство (31) не имеет решений на множестве $2 \leqslant x < +\infty$; 2) неравенство (31) не имеет решений на том множестве, где $\dfrac{4x-1}{2x+1} \leqslant 1$. Учитывая, что в рассматриваемом случае $x > 0$, получаем, что неравенство (31) не имеет решений на множестве $0 < x \leqslant 1$. Остается найти решения неравенства (31), принадлежащие интервалу $1 < x < 2$.

На этом интервале

$$\log_2(2+x) > \log_2 3,$$
$$\frac{4x-1}{2x+1} = 2 - \frac{3}{2x+1} < 2 - \frac{3}{5} = \frac{7}{5}.$$

Покажем теперь, что справедливо числовое неравенство

$$\log_2 3 > 7/5. \tag{32}$$

Действительно, поскольку $3^5 > 2^7$, то $3 > 2^{7/5}$, откуда и очевидна справедливость неравенства (32). Итак, на интервале $1 < x < 2$ имеем

$$\log_2(2+x) > \log_2 3 > 7/5 > \frac{4x-1}{2x+1}.$$

Значит, неравенство (31) не имеет решений на интервале $1 < x < 2$. Подводя итог, получаем, что множество решений исходного неравенства есть интервал $-1/2 < x < 0$.

Ответ: $-1/2 < x < 0$.

4.1.5. Метод интервалов для непрерывных функций. Пусть надо решить неравенство $f(x) > 0$ (или неравенство $f(x) < 0$). Пусть ОДЗ этого неравенства состоит из объединения конечного числа промежутков $\mathcal{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, занумерованных в порядке следования слева направо. При этом, если $n > 1$, то $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_n$ могут быть соответственно бесконечными промежутками $(-\infty; a)$ ($(-\infty; a]$) и $(b; +\infty)$ ($[b; +\infty)$). Промежутки $\mathcal{I}_2, \ldots, \mathcal{I}_{n-1}$ соответственно могут быть отрезками $[c; d]$, интервалами $(c; d)$ и полуинтервалами $[c; d)$, $(c; d]$. В случае же $n = 1$ $\mathcal{I}$ может быть любым из перечисленных промежутков, а также промежутком $(-\infty; +\infty)$. Предположим также, что на каждом из промежутков $\mathcal{I}_k$ функция $f(x)$ непрерывна и имеет конечное число нулей. Отметим на числовой прямой нули функции $f(x)$ и выбросим из ОДЗ неравенства эти точки. При этом некоторые из промежутков $\mathcal{I}_k$ могут разбиться на некоторое число промежутков. На каждом из полученных промежутков функция $f(x)$ непрерывна и не обращается в нуль. Значит, на каждом из них она сохраняет постоянный знак, т. е. для каждого x из этого промежутка она принимает только либо положительные, либо отрицательные значения. Выбирая в каждом из промежутков некоторую точку x_0 и вычисляя знак $f(x_0)$, этот знак ставят над этим промежутком. Тогда решением неравенства $f(x) > 0$ будет объединение тех промежутков, над которыми поставлен знак плюс, а решением неравенства $f(x) < 0$ будет объединение тех промежутков, над которыми поставлен знак минус.

Пример 24. Решить неравенство

$$\sqrt{x^2-1}(4-x)\log_3(3+x) > 0. \qquad (33)$$

Решение. ОДЗ неравенства (33) состоит из всех x, одновременно удовлетворяющих условиям $x^2 - 1 \geqslant 0$ и $3 + x > 0$, т. е. ОДЗ есть объединение двух промежутков: $(-3; -1]$ и $[1; +\infty)$. Нули функции $f(x) = \sqrt{x^2-1}(4-x)\log_3(3+x)$ есть $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$, $x_4 = -2$. Выбросив их из ОДЗ, получим промежутки $(-3; -2)$, $(-2; -1)$, $(1; 4)$ и $(4; +\infty)$ (рис. 11). Определим знаки функции на каждом из этих промежутков.

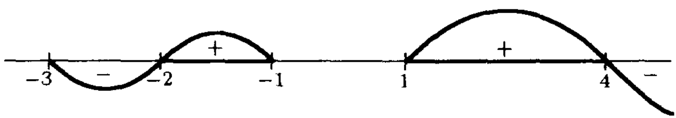


Рис. 11

Поскольку $f(-2{,}5) < 0$, $f(-1{,}5) > 0$, $f(2) > 0$, $f(5) < 0$, то на промежутке $(4; +\infty)$ функция f принимает отрицательные значения, на промежутках $(-2; -1)$, $(1; 4)$ — положительные значения, а на промежутке $(-3; -2)$ — отрицательные значения.

Следовательно, множеством решений неравенства (33) является объединение промежутков $(-2; -1)$, $(1; 4)$.

Ответ: $-2 < x < -1$; $1 < x < 4$.

Пример 25. Решить неравенство

$$\frac{(|x+3|-1)(4-2^{2x-1})(x^2+\sqrt[3]{x})}{\log_2(-x+x^2+1)} < 0. \qquad (34)$$

Решение. ОДЗ неравенства (34) состоит из всех x, удовлетворяющих условиям $1-x+x^2>0$ и $\log_2(1-x+x^2)\neq 0$, т. е. ОДЗ состоит из трех промежутков: $(-\infty;0)$, $(0;1)$ и $(1;+\infty)$. Нули функции

$$f(x)=\frac{(|x+3|-1)(4-2^{2x-1})(x^2+\sqrt[3]{x})}{\log_2(-x+x^2+1)}$$

есть $x_1=-1$, $x_2=3/2$, $x_3=-2$, $x_4=-4$. Выбросив их из ОДЗ, получим промежутки $\mathcal{I}_1=(-\infty;-4)$, $\mathcal{I}_2=(-4;-2)$, $\mathcal{I}_3=(-2;-1)$, $\mathcal{I}_4=(-1;0)$, $\mathcal{I}_5=(0;1)$, $\mathcal{I}_6=(1;3/2)$, $\mathcal{I}_7=(3/2;+\infty)$ (рис. 12). Легко видеть, что

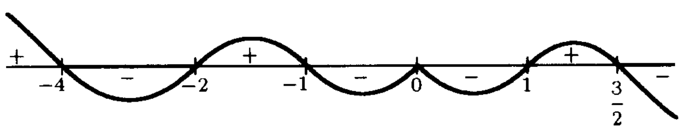


Рис. 12

$$f(-5)>0,\ -5\in\mathcal{I}_1;\quad f(-3)<0,\ -3\in\mathcal{I}_2;$$

$$f(-3/2)>0,\ -3/2\in\mathcal{I}_3;\quad f(-1/2)<0,\ -1/2\in\mathcal{I}_4;$$

$$f(5/4)>0,\ 5/4\in\mathcal{I}_6;\ f(1/2)<0,\ 1/2\in\mathcal{I}_5; f(2)<0,\ 2\in\mathcal{I}_7.$$

Следовательно, множеством решений неравенства (34) является объединение четырех промежутков: $-4<x<-2$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $\dfrac{3}{2}<x<+\infty$.

Ответ: $-4<x<-2$; $-1<x<0$; $0<x<1$; $\dfrac{3}{2}<x<+\infty$.

§ 4.2. Решение некоторых уравнений и неравенств сведением их к решению систем уравнений или неравенств относительно той же неизвестной

4.2.1. Уравнения вида $f_1^2(x) + f_2^2(x) + \cdots + f_k^2(x) = 0$, $|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_k(x)| = 0$. Уравнения вида

$$f_1^2(x) + f_2^2(x) + \cdots + f_k^2(x) = 0, \tag{1}$$

$$|f_1(x)| + |f_2(x)| + \cdots + |f_k(x)| = 0 \tag{2}$$

равносильны системе уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \quad\vdots \\ f_k(x) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Пример 1. Решить уравнение

$$x^4 + 5{\cdot}4^x + 4x^2{\cdot}2^x - 2{\cdot}2^x + 1 = 0. \tag{4}$$

Решение. Перепишем уравнение (4) в виде

$$(x^2 + 2{\cdot}2^x)^2 + (2^x - 1)^2 = 0, \tag{5}$$

откуда очевидно, что уравнение (5) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} 2^x - 1 = 0, \\ x^2 + 2{\cdot}2^x = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Первое уравнение этой системы имеет единственное решение $x = 0$, которое не удовлетворяет второму уравнению системы (6). Следовательно, система (6) не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 2. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 - 6x + 9} + \sqrt{\log^2_{1/7}(x^2 - 4x + 4)} = 0. \tag{7}$$

Решение. Перепишем уравнение (7) в виде

$$|x-3| + |\log_{1/7}(x^2-4x+4)| = 0.$$

Это уравнение равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} x-3=0, \\ \log_{1/7}(x^2-4x+4)=0. \end{cases} \tag{8}$$

Решение первого из этих уравнений есть $x = 3$. Проверка показывает, что это число также является и решением второго уравнения системы (8). Следовательно, $x = 3$ является решением исходного уравнения (7).

Ответ: $x = 3$.

Отметим, что к системе (3) сводится и ряд других уравнений. Приведем пример.

Пример 3. Решить уравнение

$$\log_2\left(1+\sqrt{x^4+x^2}\right) + \log_2(1+x^2) = 0. \tag{9}$$

Решение. Для любых x справедливы неравенства

$$\log_2\left(1+\sqrt{x^4+x^2}\right) \geqslant 0,$$
$$\log_2(1+x^2) \geqslant 0.$$

Поэтому уравнение (9) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \log_2\left(1+\sqrt{x^4+x^2}\right) = 0, \\ \log_2(1+x^2) = 0, \end{cases}$$

имеющей единственное решение $x = 0$.

Ответ: $x = 0$.

4.2.2. Неравенства вида $f_1^2(x)+f_2^2(x)+\dots+f_n^2(x)>0$, $|f_1(x)|+|f_2(x)|+\dots+|f_n(x)|>0$. Решениями неравенств вида

$$f_1^2(x)+f_2^2(x)+\dots+f_n^2(x)>0, \tag{10}$$

$$|f_1(x)|+|f_2(x)|+\dots+|f_n(x)|>0 \tag{11}$$

являются все x из их ОДЗ, за исключением тех x, которые являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} f_1(x) = 0, \\ \quad\vdots \\ f_n(x) = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Пример 4. Решить неравенство

$$(\log_2 x - 1)^2 + (x - 2)^2 > 0. \tag{13}$$

Решение. ОДЗ неравенства (13) есть все $x > 0$. Для нахождения решений неравенства (13) надо исключить из ОДЗ все решения системы уравнений

$$\begin{cases} \log_2 x - 1 = 0, \\ x - 2 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет единственное решение $x = 2$, следовательно, решениями неравенства (13) являются все $x > 0$, кроме $x = 2$.

Ответ: $0 < x < 2$; $2 < x < +\infty$.

Пример 5. Решить неравенство

$$|\sin^2 x - \sin^4 x| + \sqrt{\left(\frac{x^2 - \pi^2}{1 + x^2}\right)^2} > 0. \tag{14}$$

Решение. Перепишем неравенство (14) в виде

$$|\sin^2 x - \sin^4 x| + \left|\frac{x^2 - \pi^2}{1 + x^2}\right| > 0.$$

Для любого x справедливы неравенства

$$|\sin^2 x - \sin^4 x| \geqslant 0, \quad \left|\frac{x^2 - \pi^2}{1 + x^2}\right| \geqslant 0.$$

Поэтому неравенство (14) не выполняется лишь для таких x, что одновременно

$$\sin^2 x - \sin^4 x = 0, \quad \frac{x^2 - \pi^2}{1 + x^2} = 0,$$

т. е. для $x = \pi$ и $x = -\pi$.

Следовательно, решениями исходного неравенства (14) являются все x, кроме $x = \pi$ и $x = -\pi$.

Ответ: $-\infty < x < -\pi$; $-\pi < x < \pi$; $\pi < x < +\infty$.

Отметим, что к системе (12) сводятся иногда и другие неравенства.

Пример 6. Решить неравенство

$$\sqrt[4]{1 - \cos^4\left(\frac{x^2+x}{4}\pi\right)} + 2^{\sqrt{1-x^4}} - 1 > 0. \tag{15}$$

Решение. ОДЗ неравенства (15) являются все x, удовлетворяющие условию $1 - x^4 \geqslant 0$, т. е. ОДЗ есть все $x \in [-1; 1]$. На ОДЗ справедливы неравенства

$$\sqrt[4]{1 - \cos^4\left(\frac{x^2+x}{4}\pi\right)} \geqslant 0, \quad 2^{\sqrt{1-x^4}} - 1 \geqslant 0.$$

Поэтому неравенство (15) выполняется для всех x из ОДЗ, кроме тех, которые удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \sqrt[4]{1 - \cos^4\left(\frac{x^2+x}{4}\pi\right)} = 0, \\ 2^{\sqrt{1-x^4}} - 1 = 0. \end{cases}$$

Решениями второго уравнения этой системы являются $x_1 = 1$ и $x_2 = -1$. Из них первому уравнению удовлетворяет только $x = -1$. Итак, решениями данного неравенства (15) являются все x из промежутка $-1 < x \leqslant 1$.

Ответ: $-1 < x \leqslant 1$.

4.2.3. Использование ограниченности функций.

Если при решении уравнения

$$f(x) = g(x) \tag{16}$$

удается показать, что для всех x из некоторого множества M справедливы неравенства $f(x) \leqslant A$ и $g(x) \geqslant A$, то на множестве M уравнение (16) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} f(x) = A, \\ g(x) = A. \end{cases} \tag{17}$$

Пример 7. Решить уравнение

$$4x^2 + 4x + 17 = \frac{12}{x^2 - x + 1}.$$

Решение. Перепишем это уравнение в виде

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}. \tag{18}$$

Очевидно, что для любых действительных x имеем

$$g(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 \geqslant 4, \quad f(x) = \frac{3}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leqslant 4.$$

Следовательно, уравнение (18) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 4 = 4, \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Эта система уравнений не имеет решений, поэтому исходное уравнение также не имеет решений.

Ответ: нет решений.

Пример 8. Решить уравнение

$$\cos^2(x \sin x) = 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1}. \tag{19}$$

Решение. ОДЗ уравнения (19) являются все действительные x. Для любых x имеем

$$\cos^2(x \sin x) \leqslant 1, \quad 1 + \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} \geqslant 1.$$

Следовательно, уравнение (19) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos^2(x \sin x) = 1 \\ \log_5^2 \sqrt{x^2 + x + 1} = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Решения второго уравнения системы (20) есть $x = 0$ и $x = -1$. Из этих значений первому уравнению удовлетворяет только $x = 0$, которое, следовательно, является единственным решением исходного уравнения.

Ответ: $x = 0$.

Пример 9. Решить уравнение

$$\cos^7 x + \sin^5 x = 1. \tag{21}$$

Решение. Поскольку $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, то уравнение (21) можно переписать в виде $\cos^7 x + \sin^5 x = \cos^2 x + \sin^2 x$ или в виде

$$\cos^2 x(\cos^5 x - 1) = \sin^2 x(1 - \sin^3 x). \tag{22}$$

Поскольку для любого действительного x имеем $\sin^2 x \geqslant 0$, $\cos^2 x \geqslant 0$, $\cos^5 x - 1 \leqslant 0$, $1 - \sin^3 x \geqslant 0$, то уравнение (22) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \cos^2 x(\cos^5 x - 1) = 0, \\ \sin^2 x(1 - \sin^3 x) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Система (23) равносильна совокупности систем уравнений

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} \sin x = 0, \\ \cos x = 1. \end{cases} \tag{24}$$

Решения первой из этих систем есть $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, второй $x = 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Все эти решения и будут решениями исходного уравнения.

Ответ: $x = 2\pi m$, $x = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k$; $m,\ k \in \mathbb{Z}$.

4.2.4. Использование свойств синуса и косинуса. Решение большого количества тригонометрических уравнений может быть сведено к решению систем уравнений. Примерами таких уравнений могут служить следующие:

$$\begin{aligned} &\sin \alpha x \cdot \sin \beta x = \pm 1, \\ &\sin \alpha x \cdot \cos \beta x = \pm 1, \\ &A(\sin \alpha x)^m + B(\cos \beta x)^n = \pm(|A| + |B|), \\ &A(\sin \alpha x)^m + B(\sin \beta x)^n = \pm(|A| + |B|), \end{aligned} \tag{25}$$

где α, β, A и B — данные действительные числа, n и m — данные натуральные числа. При решении таких уравнений используется следующее свойство синуса: если для некоторого числа x_0 справедливо строгое неравенство $|\sin\alpha x_0| < 1$, то такое число x_0 не может быть корнем ни одного из уравнений (25). Аналогично, при решении уравнений

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x = \pm 1,$$
$$A(\cos\alpha x)^m + B(\cos\beta x)^n = \pm(|A| + |B|)$$

используется свойство косинуса: если для некоторого числа x_0 справедливо строгое неравенство $|\cos\alpha x_0| < 1$, то такое число x_0 не может быть корнем ни одного из этих уравнений.

Пример 10. Решить уравнение

$$\sin x\cdot\cos 4x = 1. \tag{26}$$

Решение. Если x_0 — решение уравнения (26), то либо $\sin x_0{=}1$, либо $\sin x_0{=}{-1}$. Действительно, если бы $|\sin x_0| < 1$, то из уравнения (26) следовало бы, что $|\cos 4x_0| > 1$, что, естественно, невозможно. Но если $\sin x_0 = 1$, то из уравнения (26) следует, что $\cos 4x_0 = 1$, если же $\sin x_0 = -1$, то $\cos 4x_0 = -1$. Следовательно, любое решение уравнения (26) является решением одной из следующих двух систем уравнений:

$$\begin{cases} \sin x_0 = 1, \\ \cos 4x_0 = 1, \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} \sin x_0 = -1, \\ \cos 4x_0 = -1. \end{cases} \tag{28}$$

Легко видеть, что любое решение системы (27) и любое решение системы (28) есть решение уравнения (26). Следовательно, уравнение (26) равносильно совокупности систем уравнений (27) и (28). Решим эти системы.

Первое уравнение системы (27) имеет решения

$$x = \pi/2 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Все они удовлетворяют второму уравнению этой системы, т. е. являются решениями системы (27).

Первое уравнение системы (28) имеет решения

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Ни одно из этих чисел не удовлетворяет второму уравнению этой системы. Поэтому система (28) не имеет решений.

Итак, решения исходного уравнения (26) совпадают с решениями системы (27).

Ответ: $x = \pi/2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 11. Решить уравнение

$$3\cos^4 2x - 2\sin^5 x = 5. \tag{29}$$

Решение. Если x_0 есть решение уравнения (29), то $|\cos 2x_0| = 1$, ибо в противном случае было бы справедливо неравенство $|\sin x_0| > 1$, что невозможно. Но если $|\cos 2x_0| = 1$, то из уравнения (29) следует, что $\sin x_0 = -1$. Поэтому любое решение уравнения (29) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} \sin x = -1, \\ |\cos 2x| = 1. \end{cases} \tag{30}$$

Легко видеть, что любое решение системы (30) есть решение уравнения (29). Следовательно, уравнение (29) равносильно системе уравнений (30).

Первое уравнение системы (30) имеет решения

$$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Все они удовлетворяют второму уравнению системы (30), т. е. являются решениями уравнения (29).

Ответ: $x = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Пример 12. Решить уравнение

$$\cos^3 3x + \cos^{11} 7x = -2. \tag{31}$$

Решение. Если x_0 — решение уравнения (31), то $\cos 3x_0 =$ $= -1$ (в противном случае $\cos 7x_0 < -1$, что невозможно).

Но тогда $\cos 7x_0 = -1$. Следовательно, любое решение уравнения (31) есть решение системы уравнений

$$\begin{cases} \cos 3x = -1, \\ \cos 7x = -1. \end{cases} \tag{32}$$

Легко видеть, что любое решение системы (32) есть решение уравнения (31). Поэтому уравнение (31) равносильно системе (32).

Первое уравнение системы (32) имеет решения

$$x_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Найдем те из этих решений, которые будут удовлетворять второму уравнению системы (32). Это будут те x_k, для каждого из которых найдется число $m \in \mathbb{Z}$ такое, что будет справедливо равенство

$$\frac{7\pi}{3} + \frac{14\pi k}{3} = \pi + 2\pi m. \tag{33}$$

Перепишем равенство (33) в виде

$$k = \frac{3m - 2}{7}. \tag{34}$$

Поскольку k и m целые числа, то равенство (34) справедливо лишь тогда, когда $m = 7t + 3$, $t \in \mathbb{Z}$, но тогда $k = 3t + 1$, $t \in \mathbb{Z}$.

Итак, решениями системы (32) являются x_k, где $k = 3t+1$, $t \in \mathbb{Z}$, т. е. $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi t + \dfrac{2\pi}{3}$, $t \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $x = \pi + 2\pi t$, $t \in \mathbb{Z}$.

4.2.5. Использование числовых неравенств. Иногда, применяя то или иное числовое неравенство к одной из частей уравнения (неравенства), его можно заменить равносильной ему системой уравнений. Примером такого неравенства является неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, где a и b — положительные числа, причем равенство здесь возможно лишь при $a = b$.

Часто бывает полезно пользоваться следствиями из этих неравенств, например, $a + \dfrac{1}{a} \geqslant 2$ при $a > 0$, причем $a + \dfrac{1}{a} = 2$ тогда и только тогда, когда $a = 1$, $a + \dfrac{1}{a} \leqslant -2$ при $a < 0$, причем $a + \dfrac{1}{a} = -2$ тогда и только тогда, когда $a = -1$.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sqrt{x^2 + 2x + 4} + \frac{4}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} = 4 - \log_3^4(x^2 + x^4 + 1). \quad (35)$$

Решение. ОДЗ этого уравнения есть все действительные числа. Переписав левую часть уравнения (35) в виде

$$2\left(\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}{2} + \frac{2}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}\right),$$

замечаем, что она не меньше четырех, как сумма двух взаимно обратных положительных величин, и только при $x = 0$ она равна четырем. В то же время правая часть при $x = 0$ также равна четырем, а для всех $x \neq 0$ меньше четырех. Следовательно, $x = 0$ есть единственное решение уравнения (35).

Ответ: $x = 0$.

Пример 14. Решить уравнение

$$\left(\frac{1}{\sin^8 x} + \frac{1}{\cos^2 2x}\right)(\sin^8 x + \cos^2 2x) = 4\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} - x^2}. \quad (36)$$

Решение. Докажем, что для любых положительных чисел a и b справедливо неравенство

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)(a + b) \geqslant 4. \quad (37)$$

В самом деле, применяя неравенство о среднем арифметическом и среднем геометрическом сначала к числам $1/a$ и $1/b$, а затем к числам a и b, имеем

$$\frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}{2} \geqslant \sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} \quad \text{и} \quad \frac{a + b}{2} \geqslant \sqrt{ab},$$

откуда

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{a+b}{2}\right) \geqslant 1, \text{ т. е. } \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a+b) \geqslant 4.$$

Поскольку на ОДЗ уравнения (36) имеем $\sin^8 x>0$, $\cos^2 2x > 0$, то, применяя неравенство (37), получаем, что для любого такого x левая часть уравнения (36) не меньше 4. В то же время на ОДЗ уравнения (36) $4\cos^2\sqrt{\frac{\pi^2}{4}-x^2} \leqslant 4$. Следовательно, уравнение (36) равносильно системе уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{\sin^8 x}+\dfrac{1}{\cos^2 2x}\right)(\sin^8 x+\cos^2 2x)=4, \\ \cos^2\sqrt{\dfrac{\pi^2}{4}-x^2}=1. \end{cases} \tag{38}$$

Из последнего уравнения системы (38) находим его решения $x_1 = \pi/2$ и $x_2 = -\pi/2$. Подставляя эти значения в первое уравнение системы (38), получаем, что они являются его решениями. Следовательно, $x_1 = \pi/2$ и $x_2 = -\pi/2$ являются решениями исходного уравнения (36).

Ответ: $x_1 = \pi/2$, $x_2 = -\pi/2$.

§ 4.3. Применение производной

В предыдущих параграфах были рассмотрены применения некоторых свойств функций, входящих в уравнение, например, свойства монотонности, ограниченности, существование наибольшего и наименьшего значений и т. д. Иногда вопрос о монотонности, об ограниченности и в особенности о нахождении наибольшего и наименьшего значений функций элементарными методами требует трудоемких и тонких исследований, однако он существенно упрощается при применении производной. В этом параграфе будет показано применение производной при решении уравнений и неравенств.

4.3.1. Использование монотонности. В дальнейшем будем пользоваться следующими утверждениями.

1. Если функция $f(x)$ имеет положительную производную на промежутке $\mathcal{I}$ ($(a;b)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;a)$, $(-\infty;+\infty)$), то эта функция возрастает на этом промежутке.

2. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\mathcal{I}$ ($[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$ $[a;+\infty)$, $(-\infty;a]$) и имеет внутри промежутка положительную производную, то эта функция возрастает на промежутке $\mathcal{I}$.

3. Если функция $f(x)$ имеет на интервале $(a;b)$ тождественно равную нулю производную, то эта функция $f(x)$ есть постоянная на этом интервале.

Пример 1. Решить уравнение

$$x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4 = 0. \tag{1}$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = x^5 + x^3 - \sqrt{1-3x} + 4.$$

Область определения этой функции есть промежуток $\mathcal{I} = \left(-\infty; \frac{1}{3}\right]$. На этом промежутке $f(x)$ непрерывна, внутри его имеет производную

$$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + \frac{3}{2\sqrt{1-3x}}.$$

Эта производная положительна внутри промежутка $\mathcal{I}$. Поэтому функция $f(x)$ возрастает на промежутке $\mathcal{I}$. Следовательно, она принимает каждое свое значение ровно в одной точке. А это означает, что уравнение (1) имеет не более одного корня. Легко видеть, что $x = -1$ является корнем уравнения (1) и по сказанному выше других корней не имеет.

Ответ: $x = -1$.

Пример 2. Решить неравенство

$$20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x > 0. \tag{2}$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 20x^7 + 28x^5 + 210x - 35\sin 2x$. Поскольку эта функция на промежутке $\mathcal{I} = (-\infty; +\infty)$ имеет производную $f'(x) = 140x^6 + 140x^4 + 210 - 70\cos 2x$, которая положительна на этом промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на промежутке $\mathcal{I}$ и потому принимает каждое свое значение ровно в одной точке. Следовательно, уравнение $f(x) = 0$ может иметь не более одного корня. Легко видеть, что таким корнем уравнения $f(x) = 0$ является $x = 0$. Поскольку функция $f(x)$ определена на всей прямой и непрерывна на ней, то для $x < 0$ имеем $f(x) < 0$, а при $x > 0$ имеем $f(x) > 0$. Поэтому решениями неравенства (2) являются все x из промежутка $(0; +\infty)$.

Ответ: $0 < x < +\infty$.

Пример 3. Решить неравенство

$$e^x > 1 + x. \tag{3}$$

Решение. ОДЗ неравенства (3) есть промежуток $\mathcal{I} = (-\infty; +\infty)$. Рассмотрим функцию $f(x) = e^x - 1 - x$. Эта функция на промежутке $\mathcal{I}$ имеет производную $f'(x) = e^x - 1$. Легко видеть, что $f'(x) > 0$ для любых x из промежутка $0 < x < +\infty$. Так как на промежутке $0 \leqslant x < +\infty$ функция $f(x)$ непрерывна, то это означает, что на промежутке $0 \leqslant x < +\infty$ функция $f(x)$ возрастает. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для любого $x \in (0; +\infty)$. Поэтому любое $x \in (0; +\infty)$ является решением неравенства (3).

Так как $f'(x) < 0$ для любого $x \in (-\infty; 0)$ и $f(x)$ непрерывна на промежутке $-\infty < x \leqslant 0$, то функция $f(x)$ убывает на промежутке $-\infty < x \leqslant 0$. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для любого $x \in (-\infty; 0)$. Следовательно, любое $x \in (-\infty; 0)$ является решением неравенства (3). Поскольку $f(0) = 0$, то $x = 0$ не есть решение неравенства (3).

Таким образом, все решения неравенства (3) составляют два промежутка $(0; +\infty)$ и $(-\infty; 0)$.

Ответ: $0 < x < +\infty$; $-\infty < x < 0$.

4.3.2. Использование наибольшего и наименьшего значений функции. Справедливы следующие утверждения.

1. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции, имеющей на интервале $(a; b)$ конечное число критичеких точек, достаточно вычислить значения функции во всех критических точках, принадлежащих интервалу $(a; b)$, а также в концах отрезка и из полученных чисел выбрать наибольшее и наименьшее.

2. Наибольшее (наименьшее) значение функции, принимаемое ею на интервале $\mathcal{I}$: $(a;b)$ ($(-\infty;+\infty)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;a)$), может достигаться в тех точках интервала $\mathcal{I}$, в которых производная функция равна нулю или не существует (каждая такая точка называется критической точкой).

3. Если в критической точке x_0 функция непрерывна, а ее производная, проходя через эту точку, меняет знак с минуса на плюс, то точка x_0 — точка минимума, а если ее производная меняет знак с плюса на минус, то x_0 — точка максимума.

4. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $\mathcal{I}$, где $\mathcal{I}$ либо $[a;b]$, либо $[a;b)$, либо $[a;+\infty)$, и имеет внутри $\mathcal{I}$ производную и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) внутри $\mathcal{I}$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $\mathcal{I}$.

Пример 4. Решить уравнение

$$x^2 + 2x + 3 = (x^2 + x + 1)(x^4 + x^2 + 4). \qquad (4)$$

Решение. ОДЗ уравнения (4) есть промежуток $\mathcal{I} = (-\infty;+\infty)$. Так как $x^2 + x + 1 > 0$ для любого x, то уравнение (4) можно переписать в виде

$$\frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1} = x^4 + x^2 + 4$$

или в виде

$$\frac{x + 2}{x^2 + x + 1} = x^4 + x^2 + 3. \qquad (5)$$

Наименьшее значение функции $f(x) = x^4 + x^2 + 3$ на промежутке $(-\infty;+\infty)$ есть 3. Найдем наибольшее значение на промежутке $(-\infty;+\infty)$ функции $g(x) = \dfrac{x+2}{x^2+x+1}$. Так как на промежутке $(-\infty;-2)$ функция $g(x)$ отрицательна, а на промежутке $(-2;+\infty)$ положительна, то наибольшее значение функция $g(x)$ может принимать лишь на промежутке $(-2;+\infty)$.

Эта функция на промежутке $(-\infty;+\infty)$ имеет производную

$$g'(x) = \frac{x^2 + x + 1 - (x+2)(2x+1)}{(x^2 + x + 1)^2} = -\frac{x^2 + 4x + 1}{(x^2 + x + 1)^2},$$

которая обращается в нуль в точках $x_1 = -2+\sqrt{3}$ и $x_2 = -2-\sqrt{3}$. Поскольку на промежутке $(-2+\sqrt{3}; +\infty)$ имеем $g'(x) < 0$, а на промежутке $(-2; -2+\sqrt{3})$ имеем $g'(x) > 0$, то в силу непрерывности функции $g(x)$ заключаем, что она на промежутке $[-2+\sqrt{3}; +\infty)$ убывает, а на промежутке $[-2; -2+\sqrt{3}]$ возрастает. Следовательно, в точке $x_2 = -2+\sqrt{3}$ функция $g(x)$ принимает наибольшее значение, причем $g(x_2) = \dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$.

Поскольку $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3} < 3$, то для любого x справедливы неравенства

$$f(x) \geqslant 3 > \frac{2\sqrt{3}+3}{3} \geqslant g(x),$$

из которых следует, что уравнение (5) решений не имеет.

Следовательно, не имеет решений и равносильное ему уравнение (4).

Ответ: решений нет.

Пример 5. Решить уравнение

$$\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} = 2. \qquad (6)$$

Решение. ОДЗ уравнения (6) есть промежуток $2 \leqslant x \leqslant 4$. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = \sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x}$ на отрезке $[2; 4]$. Функция $f(x)$ на интервале $(2; 4)$ имеет производную

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x-2)^{-3/4} - \frac{1}{4}(4-x)^{-3/4},$$

обращающуюся в нуль только при $x = 3$. Так как функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[2; 4]$, то ее наибольшее и наименьшее значения находятся среди чисел $f(3)$, $f(2)$ и $f(4)$. Так как $f(3) = 2$, $f(2) = f(4) = \sqrt[4]{2} < 2$, то наибольшее значение $f(x)$ есть $f(3) = 2$. Следовательно, уравнение (6) имеет единственный корень $x = 3$.

Ответ: $x = 3$.

Пример 6. Решить неравенство

$$x^{3/2}(1-x) < \frac{2}{5}\sqrt{\frac{27}{125}}. \qquad (7)$$

Решение. ОДЗ неравенства (7) есть промежуток $\mathcal{I} = [0; +\infty)$. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x) = \sqrt{x^3}(1-x)$ на промежутке $[0; +\infty)$. Эта функция имеет внутри промежутка $(0; +\infty)$ производную

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}(1-x) - x^{3/2} = x^{1/2}\left(\frac{3}{2}(1-x) - x\right).$$

Эта производная внутри промежутка $\mathcal{I}$ обращается в нуль только в точке $x_0 = \frac{3}{5}$. Поскольку для любой точки x, находящейся слева от точки $x_0 = \frac{3}{5}$, имеем, что $f'(x) > 0$, а для любой точки справа от x_0 имеем $f'(x) < 0$, то в силу непрерывности функции, $f(x)$ на отрезке $[0; 3/5)$ возрастает, на промежутке $[3/5; +\infty)$ убывает и точка $x_0 = \frac{3}{5}$ есть точка максимума функции $f(x)$. Это означает, что для любого x из $\mathcal{I}$, кроме x_0, справедливо неравенство $f(x) < f(3/5)$, $f(3/5) = \frac{2}{5}\sqrt{27/125}$. Следовательно, решениями исходного неравенства (7) являются все x из двух промежутков $\left[0; \frac{3}{5}\right)$ и $\left(\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

Ответ: $0 \leqslant x < 3/5$; $3/5 < x < +\infty$.

Пример 7. Решить неравенство

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}. \tag{8}$$

Решение. ОДЗ неравенства (8) есть промежуток $\mathcal{I} = (-1; +\infty)$. Рассмотрим функцию

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

Эта функция на промежутке $\mathcal{I}$ имеет производную

$$f'(x) = \frac{x^2}{1+x},$$

которая обращается в нуль в точке $x_0 = 0$.

Рассмотрим функцию $f(x)$ сначала на промежутке $\mathcal{I}_1 = (-1; 0]$. Так как $f(x)$ непрерывна на промежутке $\mathcal{I}_1$ и для любой точки x внутри промежутка $\mathcal{I}_1$ имеем $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает на $\mathcal{I}_1$. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) < 0$ для любого x внутри $\mathcal{I}_1$, т. е. ни одно x из промежутка $\mathcal{I}_1$ не есть решение неравенства (8).

На промежутке $\mathcal{I}_2 = [0; +\infty)$ функция $f(x)$ непрерывна, для любой точки x внутри промежутка $\mathcal{I}_2$ имеем $f'(x) > 0$, поэтому $f(x)$ возрастает на $\mathcal{I}_2$. Поскольку $f(0) = 0$, то $f(x) > 0$ для любого x внутри $\mathcal{I}_2$, т. е. любое x из промежутка $0 < x < +\infty$ есть решение неравенства (8).

Ответ: $0 < x < +\infty$.

4.3.3. Применение теоремы Лагранжа.

Теорема (Лагранжа). *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную на интервале $(a; b)$, то найдется такая точка c внутри интервала $(a; b)$, что $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.*

Пример 8. Решить уравнение

$$3\cdot 2^{x+2} - 7x = 17. \tag{9}$$

Решение. Заметим, что $x = -2$ и $x = 1$ являются корнями уравнения (9). Докажем, что других корней уравнение (9) не имеет. Предположим, что уравнение (9) имеет три корня $x_1 < x_2 < x_3$. Рассмотрим функцию $f(x) = 3\cdot 2^{x+2} - 7x - 17$. Данная функция непрерывна на всей прямой и имеет всюду производную. По теореме Лагранжа имеем

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= f'(c_1)(x_2 - x_1) = 0, \quad x_1 < c_1 < x_2, \\ f(x_3) - f(x_2) &= f'(c_2)(x_3 - x_2) = 0, \quad x_2 < c_2 < x_3. \end{aligned}$$

Следовательно, существуют хотя бы две точки c_1 и c_2, в которых производная функции $f(x)$ равна нулю. Однако функция $f'(x) = 3\cdot 2^{x+2}\ln 2 - 7$ имеет только один корень. Этим доказано, что данное уравнение (9) имеет только два корня: $x = -2$ и $x = 1$.

Ответ: $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

Задачи

Доказать, что следующее уравнение не имеет решений

1. $\sqrt{1-x}+\sqrt[4]{x-1}=1.$

2. $\sqrt{2-x}=\log_5(x-2).$

3. $|x-2|+|x^2-3|=0.$

4. $|x^4+1|+|x^2+4x-5|=1.$

5. $\sqrt{2x+5}+\sqrt[4]{x+2}=0.$

6. $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-7}=2.$

7. $\sqrt[3]{x-4}-\sqrt{-1-x}=0.$

8. $\sqrt[6]{x}+\sqrt{x+5}=2.$

9. $\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}}=\sqrt[4]{-x}-1.$

10. $2^{x^2+1}=1-x^8.$

11. $\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{x+3}=2.$

12. $\sin x=x^2+x+1.$

13. $\log_3 x=1+\dfrac{-3}{2x-1}.$

14. $\sqrt{x}=-x^2+8x-15.$

15. $\sqrt{10+3\sqrt{x^2-1}}+x^4\sqrt{5-x}=3.$

16. $\sqrt{5-x}+\sqrt{x-4}=(x-1)^2(x-8).$

17. $(x^2+x+1)(x^2+2x+3)=1.$

18. $\log_5(x+1)+2\log_5(x-1)=\log_5(1-x^2)+1.$

19. $2\log_3(4+x^2)=\log_2(1-(x+3)^2).$

20. $\log_4\left(x^4+1+\dfrac{1}{x^4+1}\right)=\log_4(2-\sqrt{x+5}).$

21. $\sin^4 x-\sin^2 3x+\sin x=3.$

22. $(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x=2.$

23. $x^3(\log_2 x-2^x)+\log_2^3 x(2^x-x)+8^x(x-\log_2 x)=0.$

24. $\sqrt{x^2-x-2}=\log_2(1-x^4).$

25. $(x^2+2x+2)(x^2-x+1)=1$.

26. $\sqrt{9-x^2}-\log_3(|x|-3)=0$.

27. $\cos(\sin x)=1/2$.

28. $\sin^2 x+\sin^2\sqrt{2}x+(1+x)^2=0$.

29. $(x+8)(4-x)(\sqrt{x-8}+2)=1$.

30. $\sqrt[4]{5-x}+\sqrt{x-2}=(x-1)^2(x-6)$.

Решить уравнение

31. $\cos x=1+x^8$.

32. $x2^x=8$.

33. $\log_\pi\cos^2 x=x^4$.

34. $2^{|x|(x-2\pi)^2}=|\cos x|$.

35. $\log_5(x+1)=x$.

36. $\log_2 x=3-x$.

37. $\left(\frac{1}{3}\right)^x=x+4$.

38. $\log_{1/3}x=x-4$.

39. $12^x+5^x=13^x$.

40. $3^x+4^x=7$.

41. $x^x=27$.

42. $\frac{1}{x}+2\sqrt{x}=3x(1-\ln x)$.

43. $\sqrt[3]{x-9}=(x-3)^3+6$.

44. $\log_3(1+x^3)=2x^2-3x$.

45. $\sin\frac{\pi x}{2\sqrt{3}}=x^2-2\sqrt{3}x+4$.

46. $3^x-1-|3^x-1|=2\log_5|6-x|$.

47. $\sqrt{x+7}+\sqrt{11-x}=6$.

48. $|x-1|+|x-3|=2-\left(x-\frac{\pi^2}{4}\right)^4$.

49. $\dfrac{x^2}{x^4+25} = -\dfrac{9}{10} + 2^{(x-\sqrt{5})^2}.$

50. $4\sin \pi x = 4x^2 - 4x + 5.$

51. $2^{-|x|} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}(|x+1| + |x-1|).$

52. $x\sqrt{-x^2+x} = \sqrt{x-x^2}\sin\left(\pi\left(\dfrac{x+1}{3}\right)\right)\sin\left(\pi\left(\dfrac{1-x}{3}\right)\right).$

53. $\sin^4 x - \cos^4 x = -1 - x^4.$

54. $\sin^3 x - \sin^6 x = \dfrac{1}{4}\cdot(1+\sin^{10} x).$

55. $\sin^5 x + \cos^5 x = 1.$

56. $\sin x \cos 4x = 1.$

57. $2\cos^{11} 4x - \sin^{13} 9x = 3.$

58. $(\cos 4x - \cos 2x)^2 = \sin 3x + 5.$

59. $\cos^2 9x + \dfrac{1}{4}\cos^2 x = \cos 3x \cos^4 x.$

60. $x\log_2(x+1) = \log_{1/3} x + 7.$

61. $(3-2\sqrt{2})^x + (3+2\sqrt{2})^x = 6^x.$

62. $\sin^2 4x + \cos^2 x = 2\sin 4x \cos^4 x.$

63. $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x.$

64. $\sqrt[5]{x-2} + \sqrt{x+1} = 3.$

65. $\sqrt{x} + \sqrt{2-x} + \sqrt{x^2-3x} = \sqrt{2}.$

66. $2\cos^2 \dfrac{x^2+x}{6} = \log_5(5+x) + \dfrac{1}{\log_5(5+x)}.$

67. $4|x| + \dfrac{9\pi^2}{|x|} - |\sin x| = 12\pi - 1.$

68. $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$

69. $2^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2) = 1.$

70. $(4x-x^2-3)\log_2(1+\cos^2 \pi x) = 1.$

Доказать, что следующее неравенство не имеет решений

71. $\sqrt{x^6+x^4+1} < -1$.

72. $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+4} \geqslant 2$.

73. $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{x-1} > 0$.

74. $|x^2 - x^4 + 5\sin x| < -1$.

75. $|x-1| + |2x+3| \leqslant 0$.

76. $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-4} < 1$.

77. $|x^2-1| + |x^2-4x+7| < 1$.

78. $\sqrt{x^2+x+1} + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} < 2$.

79. $\sqrt[4]{x+1} + \sqrt{\sqrt{x+1}+3} < \sqrt{2\sqrt{x+1}+2}$.

80. $\dfrac{1}{x^2-2x+3} > 1 + \sqrt{x^2-2x+3}$.

81. $2^{x^2-4x+9} < \dfrac{1}{1+|x-3|}$.

82. $\sqrt[4]{x} + \sqrt{x+5} < 2{,}2$.

83. $\sqrt[3]{x+\dfrac{1}{x}} > \sqrt{-2x} - 1$.

84. $\sqrt{2x^2-4x+3} + \sqrt{x^2-4x+5} < 3/2$.

85. $(x^2+x+4)(x^2+2x+5) < 1$.

86. $2\log_3(4+x^2) < \log_2(1-(x+5)^2)$.

87. $\log_4(2+\sqrt[4]{x}) + \log_2(1+x^2+x^4) < 0$.

88. $2^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}} + 4^{1+\sqrt{x}} < 5$.

89. $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-3} < (x-1)^4(x-5)$.

90. $\sqrt{x+3} + \sqrt[4]{9-x} < \sqrt{3}$.

91. $\sqrt{4+x} + \sqrt[4]{16-x} < 2$.

92. $\sqrt{x} + \sqrt{3-x} + \sqrt{x^2-5x} > \sqrt{3}$.

93. $\left|\sqrt{2}|x|-1\right| \log_2(2-2x^2) > 1$.

94. $3^{-|x-2|}\log_2(4x-x^2-2) > 1$.

95. $2^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}} + 4^{\sqrt{x}+0,1} < 3$.

Решить неравенство

96. $x \cdot 4^x > 4$.

97. $5^x + 2^x > 7$.

98. $\sqrt[4]{x-2} + \sqrt[4]{4-x} > \sqrt[4]{2}$.

99. $\sqrt[4]{x-1} + \sqrt[4]{x+14} > 3$.

100. $\sqrt{2-x-x^2} < 2^x + 1$.

101. $\ln(1-x^2) \leqslant x + 1/4$.

102. $\cos x \geqslant 1 - \dfrac{x^2}{2}$.

103. $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

104. $\ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2} > 0$.

105. $\sqrt{x-1} + x - 3 \geqslant \sqrt{2(x-3)^2 + 2x - 2}$.

106. $e^x - 1 - \ln(1+x) > 0$.

107. $\sqrt{1+x} - 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{8} > 0$.

108. $\log_2 x < 3 - x$.

109. $x\log_3 x < 18$.

110. $2^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}+1} + 4^{\sqrt{x}+2} > 20$.

111. $(x+5)(3-x)(\sqrt{x-4}+2) < 0$.

112. $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} > (x-1)^4(x-7)$.

113. $\dfrac{6-3^{x+1}}{x} > \dfrac{10}{2x+1}$.

114. $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1} < \dfrac{6}{2x-1}$.

115. $\sqrt[5]{x} - \sqrt[5]{x-1} \leqslant 1$.

Ответы

Глава I.

1. 3. **2.** -2; $2/3$; $3/2$. **3.** -1; 3; 4. **4.** $-1/2$; $-2/3$; 3. **5.** $\sqrt{2}$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{2}}}{2}$. **6.** $-2/3$; $\dfrac{1 \pm \sqrt{10}}{3}$. **7.** $-3/2$; $\dfrac{3 \pm 3\sqrt{5}}{4}$. **8.** $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$; $\sqrt{2}$; $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. **9.** $17/4$. **10.** 0; -5. **11.** ± 5; $\pm 1/5$. **12.** 1; -2. **13.** -1; -2. **14.** Нет решений. **15.** $\pm 1/2$. **16.** $\pm\sqrt{3}$. **17.** 4; 1; -1; 2. **18.** $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **19.** $\pm\sqrt{10}$; $\dfrac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$. **20.** $\dfrac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$; $\dfrac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$. **21.** -1; $\dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **22.** 2; $\sqrt{2} \pm 1$; $-\sqrt{2} \pm 1$. **23.** 0; ± 1. **24.** $\pm\sqrt{3}$; $\pm\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{13}}{2}}$. **25.** $1+\sqrt{3} \pm \sqrt{3+2\sqrt{3}}$. **26.** -3; -2; $1/2$; $1/3$. **27.** $\dfrac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}+1}}{2}$; $\dfrac{-1 \pm \sqrt{4\sqrt{2}-3}}{2}$. **28.** $\dfrac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$; $\dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$. **29.** -3; -5. **30.** $\dfrac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2}-1}}{\sqrt{2}}$. **31.** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2\sqrt{2}-1}-1}$; $\dfrac{-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2\sqrt{2}-1}}$. **32.** $2+\sqrt[3]{2} < x < +\infty$. **33.** $-2 < x < 1$. **34.** $7 < x < +\infty$. **35.** $-1/\sqrt{2} < x < +\infty$. **36.** $-\infty < x < \sqrt{3}$. **37.** $1+\sqrt{2} < x < +\infty$; $-\infty < x < 1-\sqrt{2}$. **38.** $-\infty < x < \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < +\infty$. **39.** $-\infty < x < 1$; $1 < x < +\infty$. **40.** $-\infty < x < \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; $1-\sqrt{2} < x < \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$; $1+\sqrt{2} < x < +\infty$. **41.** $-\infty < x < 3$; $4 < x < +\infty$. **42.** $-\infty < x < \dfrac{7-\sqrt{13+4\sqrt{26}}}{2}$; $\dfrac{7+\sqrt{13+4\sqrt{26}}}{2} < x < +\infty$.

43. $-\infty < x < 1/3$. **44.** $-\infty < x < +\infty$. **45.** $-\infty < x < +\infty$. **46.** $-1-\sqrt{3} < x < \frac{3-\sqrt{17}}{2}$; $\sqrt{3}-1 < x < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$. **47.** $1+\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}} < x < 1+\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}$. **48.** $2-\frac{4}{\sqrt{3}} < x < 1$; $3 < x < 2+\frac{4}{\sqrt{3}}$. **49.** $-\infty < x < -2$. **50.** $-\infty < x < -2$; $1 < x < 3$. **51.** $-\infty < x < -4$; $3/2 < x < 2$. **52.** $-3 < x < 2/3$; $2/3 < x < 4$. **53.** $-\infty < x < -2$; $0 < x < 1$; $1 < x < +\infty$. **54.** $-1 < x < 1$. **55.** $0 < x < 1$; $1 < x < 2$. **56.** $-\infty < x < -3$; $-2 < x < -1$; $1 < x < 2$; $3 < x < +\infty$. **57.** $-5 < x < -1$; $-1 < x < -1/3$; $5 < x < +\infty$. **58.** $-\infty < x < -5$; $-5 < x < -3$; $-3 < x < -2$; $-2 < x < +\infty$. **59.** $-\infty < x < -1$; $-1 < x < 1$; $1 < x < +\infty$. **60.** $-\infty < x < -1$; $-1 < x < 1$; $1 < x < +\infty$.

Глава II.

1. $478/49$. **2.** 2. **3.** 4. **4.** 2. **5.** $\pm\sqrt[4]{6}$. **6.** 1. **7.** 2. **8.** 1. **9.** 5; -86. **10.** 0. **11.** 4. **12.** $25/28$. **13.** 2; $-9/2$. **14.** 1. **15.** 0; 1. **16.** -1; 5. **17.** 1; $-8/3$. **18.** 8; $4\left(2\pm\frac{3\sqrt{21}}{7}\right)$. **19.** 2. **20.** -2. **21.** 0. **22.** -1; -3. **23.** 2. **24.** $5 \leqslant x \leqslant 10$. **25.** 1; $\pm\sqrt{2}+1$; 0. **26.** ± 2. **27.** $1/2$; $3/2$. **28.** -3. **29.** 1. **30.** $\pm\sqrt{2}$. **31.** $2^{\sqrt{2}}$; $2^{-\sqrt{2}}$. **32.** $0 \leqslant x \leqslant 1$; 4. **33.** $1 < x \leqslant 4$. **34.** $3^{-4/3}$; $1/\sqrt{3}$. **35.** 4; $1/4$; 16. **36.** $5/2$; $0 < x < 1$; $1 < x \leqslant 2$. **37.** 64. **38.** $\frac{-3\pm\sqrt{45}}{2}$; $\frac{-3\pm\sqrt{53}}{2}$. **39.** $1/4$. **40.** 1; 4; $\sqrt{2}/2$. **41.** $\frac{1}{2}$; $\frac{-3+\sqrt{13}}{2}$; $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$; $\frac{3}{2}$. **42.** 0; 1; $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **43.** 0; 1. **44.** 0; $-\pi/6$. **45.** ± 1; $\pi/4$. **46.** $2 < x < +\infty$. **47.** $45-16\sqrt{7} < x < +\infty$. **48.** Нет решений. **49.** $\frac{1}{8} \leqslant x < \frac{15+\sqrt{161}}{16}$. **50.** $1 < x < +\infty$. **51.** $-\infty < x \leqslant -1$; $\sqrt{\sqrt{2}-1} \leqslant x < +\infty$. **52.** $-\infty < x < 1/4$. **53.** $0 \leqslant x < 1/2$. **54.** $1/2 < x < +\infty$. **55.** 1. **56.** $2 < x < 5$. **57.** $0 < x \leqslant \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$;

$2 \leqslant x < +\infty$. **58.** $-1 < x < 2$; $3 < x < +\infty$. **59.** $-\infty < x < 0$; $0 < x < \frac{5}{4}$. **60.** $0 < x < 1/8$; $1 < x < 2$.

Глава III.

1. -2; 1. **2.** $-5/4$; $-1/2$. **3.** $\frac{-5 \pm \sqrt{21}}{6}$. **4.** -1. **5.** $\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$; $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. **6.** 4; -5. **7.** 4; -1. **8.** 3; 1. **9.** 2; -4. **10.** -2; -3. **11.** $3 \pm \sqrt{2(3 \pm 2\sqrt{2})}$. **12.** $-1 \pm \sqrt{7}$. **13.** $\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{7}-1}{2}}$. **14.** $\frac{3 \pm \sqrt{29}}{2}$; $\frac{3 \pm \sqrt{25 + 4\sqrt{30}}}{2}$; $\frac{3 \pm \sqrt{25 - 4\sqrt{30}}}{2}$. **15.** $\frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$; $\frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$. **16.** -4; -6; $\frac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$. **17.** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **18.** $\pm\sqrt{2}$; $4 \pm \sqrt{18}$. **19.** -1; 9; $\frac{5 \pm \sqrt{61}}{2}$. **20.** -1. **21.** -1; $-1/3$; $\frac{3 \pm \sqrt{6}}{3}$. **22.** $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{1 + \sqrt{5} \pm \sqrt{6(5 - \sqrt{5})}}{4}$; $\frac{1 - \sqrt{5} \pm \sqrt{6(5 + \sqrt{5})}}{4}$. **23.** Нет решений. **24.** -1. **25.** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **26.** 1. **27.** $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$; $\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$. **28.** $1/2$; $7/2$. **29.** $-1/2$; 1. **30.** $-13/5$; -11. **31.** $-2 \pm \sqrt{4 + \frac{3 + \sqrt{119}}{2}}$; $-2 \pm \sqrt{4 + \frac{3 - \sqrt{119}}{2}}$. **32.** $\frac{-(15 + \sqrt{85}) \pm \sqrt{114 + 30\sqrt{85}}}{14}$. **33.** 0; $-5/2$. **34.** 2; $\frac{15}{2}$; $5 \pm \sqrt{10}$. **35.** -1. **36.** 1; -2. **37.** $\frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$. **38.** 0; $6 \pm \sqrt{27}$; $\frac{18 \pm \sqrt{504}}{5}$. **39.** $\pm\sqrt{2}$; $\pm\sqrt{3}$. **40.** $\frac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$. **41.** 1; $\frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$. **42.** $1/2$; 2. **43.** ± 2. **44.** 2. **45.** $\frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{10}}{2}$. **46.** 0; $\pm\sqrt{5}$. **47.** $\pi/4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. **48.** $(-1)^n \pi/4 + \pi/4 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

49. $-\pi/4+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $\pi m/2$, $m\in\mathbb{Z}$. **50.** $\pi/2+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $-\pi/2+2\pi l$, $l\in\mathbb{Z}$; $2\operatorname{arctg}3+2\pi p$, $p\in\mathbb{Z}$. **51.** $\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$; $(-1)^n\pi/6+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $(-1)^{m+1}\arcsin\dfrac{2}{3}+\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$. **52.** $1\pm\sqrt{5}$; $9/4$; $-1/4$. **53.** 9. **54.** $2\pm\sqrt{50+2\sqrt{15}}$. **55.** 2. **56.** 4; -61. **57.** 99; 19. **58.** $\pm1/2$. **59.** 0. **60.** -6; 1. **61.** $\dfrac{\sqrt{6}\pm\sqrt{2}}{4}$. **62.** 1; 2; 3/2. **63.** -14; 5. **64.** 16/25. **65.** 1; 2; 10. **66.** 1; 32. **67.** 15. **68.** 3. **69.** -1. **70.** 5.

Глава IV.

31. 0. **32.** 2. **33.** 0. **34.** 0; 2π. **35.** 0. **36.** 2. **37.** -1. **38.** 3. **39.** 2. **40.** 1. **41.** 3. **42.** 1. **43.** 1. **44.** 0; 2. **45.** $\sqrt{3}$. **46.** 1; 11. **47.** 2. **48.** $\pi^2/4$. **49.** $\sqrt{5}$. **50.** 1/2. **51.** $\pm1/2$. **52.** 1/2. **53.** 0. **54.** Нет решений. **55.** $\pi/2+2\pi k$, $2\pi m$, $k\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$. **56.** $\pi/2+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **57.** $\pi/2\,(4m+3)$, $m\in\mathbb{Z}$. **58.** $\pi/2+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **59.** $\pi/2+\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. **60.** 3. **61.** 1. **62.** $\pi/2+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. **63.** 2. **64.** 3. **65.** 0. **66.** 0. **67.** $\pm3\pi/2$. **68.** $1\pm\sqrt{11+4\sqrt{3}}$. **69.** 2. **70.** 2. **96.** $1<x<+\infty$. **97.** $1<x<+\infty$. **98.** $2<x<4$. **99.** $2<x<+\infty$. **100.** $-2\leqslant x\leqslant 1$. **101.** $-1<x<1$. **102.** $-\infty<x<+\infty$. **103.** $0<x<+\infty$. **104.** $0<x<+\infty$. **105.** $x=5$. **106.** $-1<x<+\infty$. **107.** $0<x<+\infty$. **108.** $0<x<2$. **109.** $0<x<9$. **110.** $0<x<+\infty$. **111.** $4\leqslant x<+\infty$. **112.** $1\leqslant x\leqslant 3$. **113.** $0<x<1/2$. **114.** $1/2<x<1$. **115.** $1\leqslant x<+\infty$.

Дополнение 1
Некоторые задачи из вариантов вступительных экзаменов по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова

1. Решить уравнение

а) $\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}} = (2x-1)^{\log_{1/4}(1+7x-2x^2)}$.

Ответ: $x_1 = 1,\ x_2 = \dfrac{7+\sqrt{41}}{4}$.

б) $\left|x+\sqrt{1-x^2}\right| = \sqrt{2}(2x^2-1)$.

Ответ: $x_1 = -\sqrt{2}/2;\ x_2 = \left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)/4$.

в) $\log_2(x^2+3) + \log_{1/2} 5 = 2\log_{1/4}(x-1) - \log_2(x+1)$.

Ответ: $x_1 = \sqrt{2}$.

г) $\sqrt{x}\left(9^{\sqrt{x^2-3}} - 3^{\sqrt{x^2-3}}\right) = 3^{2\sqrt{x^2-3}+1} - 3^{\sqrt{x^2-3}+1} + 6\sqrt{x} - 18$.

Ответ: $x_1 = 2,\ x_2 = 9$.

д) $\sqrt{4-x^2}(\sin 2\pi x - 3\cos \pi x) = 0$.

Ответ: $x_1 = -2,\quad x_2 = -3/2,\quad x_3 = -1/2,$
$x_4 = 1/2,\quad x_5 = 3/2,\quad x_6 = 2$.

е) $\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2) = \log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$.

Ответ: $x_1 = 1+\sqrt{11+4\sqrt{3}},\ x_2 = 1-\sqrt{11+4\sqrt{3}}$.

ж) $\log_9(x^2-5x+6)^2 = 2^{-1}\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x-1}{2} + \log_3|x-3|$.

Ответ: $x_1 = 5/3$.

з) $\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = \sqrt{2x-3}$.

Ответ: $x_1 = 2$.

и) $(x+1)\sqrt{16x+17}=(x+1)(8x-23)$.

Ответ: $x_1=-1,\ x_2=4$.

к) $(x-4)^2\log_4(x-1)-2\log_4(x-1)^2=$
$=(x-4)^2\log_{x-1}4-2\log_{x-1}16$.

Ответ: $x_1=5/4,\ x_2=5,\ x_3=6$.

2. Решить неравенство

а) $\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{x-11}\geqslant\dfrac{\sqrt{12+x-x^2}}{2x-9}$.

Ответ: $x=-3,\ -2\leqslant x\leqslant 4$.

б) $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geqslant 0$.

Ответ: $x=-2,\ x=1,\ x\geqslant 3$.

в) $\dfrac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}\geqslant 2$.

Ответ: $-\infty<x<0;\ 1\leqslant x\leqslant 2$.

г) $\dfrac{3(4x^2-9)}{\sqrt{3x^2-3}}\leqslant 2x+3$.

Ответ: $-3/2\leqslant x\leqslant -1;\ 1<x\leqslant 2$.

д) $(\sqrt{5}+2)^{x-1}\geqslant(\sqrt{5}-2)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

Ответ: $-1<x\leqslant 2,\ x\geqslant 3$.

е) $\left(\sqrt{x^2-4x+3}+1\right)\log_5\dfrac{x}{5}+\dfrac{1}{x}\left(\sqrt{8x-2x^2-6}+1\right)\leqslant 0$.

Ответ: $x_1=1$.

ж) $\left(\sqrt{14x-2x^2-24}+2\right)\log_x\dfrac{2}{x}\geqslant$
$\geqslant\left(2+\sqrt{x^2-7x+12}\right)\left(\dfrac{2}{x}-1\right)$.

Ответ: $x_1=4$.

з) $8+6|3-\sqrt{x+5}|>x$.

Ответ: $-5\leqslant x<20$.

и) $\dfrac{\log_5(x^2-4x-11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}\geqslant 0$.

Ответ: $-2<x<2-\sqrt{5};\ -\infty<x<-2;\ 6\leqslant x<+\infty$.

3. Доказать, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство

$$4(p-3)^4 + 2 + (2 - 4(p-3)^4)\cos t \geqslant 0,$$

и найти все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

Ответ: $(3; \pi + 2\pi n)$, где $n \in \mathbb{Z}$.

4. Найти все значения параметра b, при каждом из которых неравенство

$$\cos^2 x + 2b\sin x - 2b < b^2 - 4$$

выполняется для любых чисел x.

Ответ: $b < -2(1+\sqrt{2})$, $b > 2$.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\log_3(9^x + 9a^3) = x$$

имеет два решения.

Ответ: $0 < a < 1/\sqrt[3]{36}$.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$x - a = 2\left|2|x| - a^2\right|$$

имеет три различных корня. Найти эти корни.

Ответ: $a = -2$, $a = -1/2$;

при $a = -2$: $x_1 = -2$; $x_2 = 6/5$; $x_3 = 10/3$;

при $a = -1/2$: $x_1 = -1/2$; $x_2 = -1/5$; $x_3 = 1/3$.

7. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$3 - |x - a| > x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Ответ: $-13/4 < a < 3$.

8. Найти все значения параметра α, при каждом из которых уравнение

$$x^2 + \frac{2x}{\sqrt{\sin\alpha}} + \frac{1}{\cos\alpha} + 2\sqrt{2} = 0$$

имеет единственное решение.

Ответ: $\alpha = 3\pi/4 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $\alpha = \pi/12 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

9. Построить на координатной плоскости множество точек, координаты каждой из которых удовлетворяют условию

$$\left|y+\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{1}{x}\right|=1-\frac{2}{x},$$

и среди точек этого множества найти все такие, в каждой из которых координата y принимает наименьшее значение.

Ответ: $y_{\min}=-1$ при $x<0$.

10. Найти все неотрицательные числа x, при каждом из которых из неравенств

$$abx\geqslant 4a+7b+x,\quad a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$$

следует неравенство $ab\geqslant 5$.

Ответ: $0<x\leqslant\sqrt{35}$.

11. Найти все значения параметра a, при каждом из которых оба неравенства

$$2a(a+1)\sin(x+y)-4(a+1)\cos^2(x+y)+(a+1)^3>13(a+1),$$
$$x^2+(a^2+1)y^2>2xy+a+1$$

выполняются при любых x и y.

Ответ: $-2\sqrt{3}<a<-1$.

12. Найти пары чисел x и y, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases}\left(\sqrt{3}+1\right)(1+\cos(xy)\sin(xy))=\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2(xy)+\cos(2xy),\\ x^2y^2-y^2+1=0,\\ \dfrac{1}{x^2}+y^2\leqslant 6.\end{cases}$$

Ответ: $\left(-\pi/\sqrt{16+\pi^2};\sqrt{16+\pi^2}/4\right)$;

$\left(\pi/\sqrt{16+\pi^2};-\sqrt{16+\pi^2}/4\right)$;

$\left(-\pi/\sqrt{9+\pi^2};\sqrt{9+\pi^2}/3\right)$;

$\left(\pi/\sqrt{9+\pi^2};-\sqrt{9+\pi^2}/3\right)$.

13. Найти все значения параметра s, при каждом из которых корни уравнений $x^2 + \dfrac{3x}{s} + 2s = 0$ и $x^2 + \dfrac{12x}{s} - s = 0$ не перемежаются, т. е. оба уравнения имеют по два корня и между двумя корнями одного из уравнений нет ни одного корня другого уравнения.

Ответ: $-\sqrt[3]{36} < s \leqslant -3;\ 0 < s < \sqrt[3]{9}/2$.

14. Найти все значения параметра a, для каждого из которых существует ровно два значения x, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0, \\ x^2 - 2(a-2)x + a(a-4) = 0. \end{cases}$$

Ответ: $a = 1;\ a = 2;\ 5 \leqslant a \leqslant 6$.

15. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\left(a - x^2 - \cos\frac{11\pi x}{4}\right)\sqrt{8 - ax} = 0$$

имеет на отрезке $[-2; 3]$ нечетное число различных корней.

Ответ: $a \leqslant -4;\ a = 1;\ 8/3 \leqslant a < 4;\ a > 4$.

16. Найти все пары чисел (x, y), удовлетворяющие условию

$$\sqrt{x^2 - 9}\left(7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 3\sqrt[3]{15}\right) = \\ = \frac{7\pi^3}{8} - (\arcsin y)^3 - (\arccos y)^3.$$

Ответ: $(3; -1),\ (-3; -1)$.

17. Найти все значения параметра a, при каждом из которых имеет хотя бы одно решение система уравнений

$$\begin{cases} \left|12\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{2}} - 5\right| - \left|12\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{2}} - 7\right| + \\ \quad + \left|24\sqrt{\cos\dfrac{\pi y}{2}} + 13\right| = 11 - \sqrt{\sin\dfrac{\pi(x - 2y - 1)}{3}}, \\ 2(x^2 + (y-a)^2) - 1 = 2\sqrt{x^2 + (y-a)^2 - 3/4}. \end{cases}$$

Ответ: $a = 6n - 1,\ a = 6n,\ a = 6n + 2,\ a = 6n + 3,\ n \in \mathbb{Z}$.

18. Найти все значения x, для каждого из которых выражение

$$\sqrt{4x^4 - 3 - x^8}\left(1 - \cos(2\pi(2x + 21x^2))\right)$$

имеет смысл и не обращается в нуль.

Ответ: $1 < x < \sqrt[4]{3}$ и $x \neq \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 21n}}{21}$,
где $n = 24,\ 25,\ 26, \ldots,\ 38,\ 39$;
$-\sqrt[4]{3} < x < -1$ и $x \neq \dfrac{-1 - \sqrt{1 + 21m}}{21}$,
где $m = 20,\ 21,\ 22, \ldots,\ 32,\ 33$.

19. Найти все целые значения n, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} 6x^2 + 24y(x + y) + 2(3n - 2)x + 4(3n - 2)y + 3 = 0, \\ 4(x^2 + y^2) + (4n + 2)y + 2n^2 = 8xy + (4n + 2)x + 5/2 \end{cases}$$

имеет решения. При найденных значениях решить эту систему.

Ответ: $n = -1$;

при $n = -1$ имеется четыре решения:

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

$$\left(\frac{1}{9} + \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} + \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right),$$

$$\left(\frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6}; \frac{13}{36} - \frac{\sqrt{7}}{18} + \frac{\sqrt{3}}{12}\right).$$

20. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$(x - p)^2\left(p(x - p)^2 - p - 1\right) = -1$$

имеет больше положительных корней, чем отрицательных.

Ответ: $p \geqslant 1$.

21. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\left(a^3 + (1-\sqrt{2})a^2 - (3+\sqrt{2})a + 3\sqrt{2}\right)x^2 + \\ + 2(a^2-2)x + a > -\sqrt{2}$$

выполняется для каждого $x > 0$.

Ответ: $-\sqrt{2} \leqslant a < 1$; $\sqrt{2} \leqslant a < +\infty$.

22. Найти все значения параметра a, при каждом из которых число решений уравнения

$$3(x^2 + a^2) = 1 - (9a^2 - 2)x$$

не превосходит числа решений уравнения

$$x + (3a-2)^2 3^x = (8^a - 4)\log_3(3^a - 1/2) - 3x^3.$$

Ответ: $a = 2/3$.

23. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y\sin x = \log_2\left|\dfrac{y\sin x}{1+3y}\right|, \\ (6y^2+2y)(4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x}) = 25y^2 + 6y + 1, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $|y| = 1$.

Ответ: система имеет бесконечно много решений $(x; -1)$, где $x = \pi/2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

24. Определить, сколько точек с целочисленными координатами находится внутри криволинейной трапеции, образованной осью абсцисс, прямыми $x = 3/2$, $x = 129$ и графиком функции $y = \log_2 x$. Точки, лежащие на границе указанной криволинейной трапеции, не учитывать.

Ответ: 642.

25. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\dfrac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\dfrac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

Ответ: 11.

26. Число b подобрано так, что уравнение

$$\sqrt{x-\sqrt{3}}+b^2x^2+2bx\left(\sqrt{6}-\sqrt{3}\right)=6\sqrt{2}-9$$

имеет решение. Найти это решение.

Ответ: $x=\sqrt{3}$.

Дополнение 2
Образцы вариантов письменных работ, предлагавшихся на вступительных экзаменах по математике в МГУ им. М. В. Ломоносова в 1992–1994 гг.

§ 1. Механико-математический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$7\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right) + \left|\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)\right| = 1.$$

2. Диагонали четырехугольника $PQRS$, вписанного в окружность, пересекаются в точке D. На прямой PR взята точка A, причем $\angle SAD = 50^\circ$, $\angle PQS = 70^\circ$, $\angle RQS = 60^\circ$. Где расположена точка A: на диагонали PR или на ее продолжении? Ответ обосновать.

3. Даны числа p и q такие, что $p = \log_z y$, $q = \log_x y$. Найти $\log_{\left(\frac{xz}{y^2}\right)} \sqrt[3]{xyz}$.

4. Один рабочий на новом станке производит за 1 час целое число деталей, большее 8, а на старом станке — на 3 детали меньше. На новом станке один рабочий выполняет дневную норму за целое число часов, а два рабочих вместе выполняют норму на старых станках на 1 час быстрее. Из какого количества деталей состоит дневная норма, если производительность рабочих одинакова?

5. На прямой p в пространстве последовательно расположены точки A, B и C такие, что $AB = 27$ и $BC = 18$. Найти расстояние между прямыми p и q, если расстояния от точек A, B и C до прямой q равны 17, 10 и 8 соответственно.

6. Найти все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$(2-a)x^3+(1-2a)x^2-6x+(5+4a-a^2)<0$$

хотя бы при одном значении a, принадлежащем отрезку $[-1;2]$.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt[3]{7}}{\log_{(x-1)}17}\geqslant\frac{\log_{17}(x-1)}{\log_{291}17}.$$

2. Найти все значения параметра b, при каждом из которых уравнение

$$9^x+(b^2+6)3^x-b^2+16=0$$

не имеет решения.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(\sin y-\cos x+1)\left(\operatorname{tg}^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\operatorname{tg}^2\left(y+\frac{2\pi}{3}\right)\right)=0,\\(\cos x+\sin y)(2+\sin 2y+\cos y)=0.\end{cases}$$

4. В треугольнике PQR медиана, проведенная из вершины Q, имеет длину $\frac{3\sqrt{21}}{4}$. Окружности с центрами в вершинах P и R и радиусами 5 и 1 соответственно касаются друг друга, а вершина Q лежит на прямой, касающейся каждой из окружностей. Найти площадь S треугольника PQR, если известно, что $S<7$.

5. Точки P, Q, R и S расположены в пространстве так, что середины отрезков SQ и PR лежат на сфере радиуса a, отрезки PS, PQ, QR и SR делятся сферой на три части в отношении $1:2:1$ каждый. Найти расстояние от точки P до прямой QR.

6. Из пункта A в пункт B с постоянными скоростями выехали два мотоциклиста, а из B в A одновременно с ними выехал третий мотоциклист с постоянной скоростью 80 км/час.

Через 40 минут расстояние между первым и вторым было в два раза меньше, чем между первым и третьим. Через 1 час после старта расстояние между первым и вторым было равно расстоянию между первым и третьим, а также было равно половине расстояния, которое осталось проехать третьему до A. Через 1 час 20 минут после старта расстояние между первым и вторым было равно $\frac{2}{5}$ расстояния между первым и третьим. Найти расстояние между пунктами A и B.

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\frac{4\sin x - 2\cos 2x - 1}{\cos 2x + \sqrt{3}\cos x - 2} = 0.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x + 2y = 1, \\ 3y - 6y^2 = 2^{x-1}. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$\log_{(2-5x)} 3 + \frac{1}{\log_2(2-5x)} \leqslant \frac{1}{\log_6(6x^2 - 6x + 1)}.$$

4. В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC диагонали AC и BD пересекаются в точке E. Вокруг треугольника ECB описана окружность, а касательная к этой окружности, проведенная в точке E, пересекает прямую AD в точке F таким образом, что точки A, D и F лежат последовательно на этой прямой. Известно, что $AF = a$, $AD = b$. Найти EF.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сфера касается ребер AD, DD_1, CD и прямой BC_1. Найти радиус сферы, если длины ребер куба равны 1.

6. При каждом значении параметра a решить уравнение

$$2x^2 + 2ax - a^2 = \sqrt{4x + 2a + 3a^2}.$$

§ 2. Факультет вычислительной математики и кибернетики

1992

Вариант 1

1. Какое из двух чисел $\sqrt[3]{\dfrac{1990}{1991}}$ или $\sqrt[3]{\dfrac{1991}{1992}}$ больше?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{1+\cos 4x}\sin x = 2\sin\frac{\pi}{4}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_2(11-x)+\log_2(x+1)\leqslant \log_2[(x+1)(x^2+5x-5)].$$

4. Из города A в город B выехал автомобиль. Спустя некоторое время из B в A выехал мотоцикл. Автомобиль и мотоцикл движутся по одному шоссе, их скорости на всем пути постоянные. Автомобиль до встречи с мотоциклом находился в пути 7 часов 30 минут, а мотоцикл до встречи ехал 3 часа. Мотоцикл прибыл в A в 23 часа, а автомобиль прибыл в B в 16 часов 30 минут. Найти время отправления мотоцикла из города B.

5. Две окружности пересекаются в точках A и K. Их центры расположены по разные стороны от прямой, содержащей отрезок AK. Точки B и C лежат на разных окружностях. Прямая, содержащая отрезок AB, касается одной окружности в точке A. Прямая, содержащая отрезок AC, касается другой окружности также в точке A. Длина отрезка BK равна 1, длина отрезка CK равна 4, а тангенс угла CAB равен $\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. Найти площадь треугольника ABC.

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{4}{3}(x^2-ax)-\frac{\pi}{3}<\sin(x^2-ax)+\cos\left(2x^2-2ax+\frac{\pi}{4}\right)$$

выполняется для всех x из отрезка $[\pi; 2\pi]$.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_{\sqrt{8-2\sqrt{7}}+1-\sqrt{3}}(4x - x^2 - 2) \geqslant 0.$$

2. На отрезке $0 \leqslant x \leqslant \pi$ найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{1 + 2\cos^2 x - \sqrt{3}\sin 2x}.$$

3. Решить неравенство

$$|3^x - 4| + |x^2 - 4x + 3| \leqslant 3^x + 4x - x^2 - 7.$$

4. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC точка D делит сторону BC в отношении $2:1$, считая от вершины B, а точка E — середина стороны AB. Известно, что медиана CQ треугольника CED равна $\dfrac{\sqrt{23}}{2}$ и $DE = \dfrac{\sqrt{23}}{2}$. Найти радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

5. Точка $M(x; y)$, декартовы координаты которой удовлетворяют условиям

$$a^2 x - y = 2a^2 - 2b, \quad x - by = 2 - 2a^2,$$

лежит на прямой $y = 2 - x$. При каких a и b эта точка наиболее близко расположена к точке $N(3; -1)$?

6. Найти все значения a, при каждом из которых область определения функции

$$y = \frac{1}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}$$

совпадает с областью определения функции

$$y = \frac{1}{\sin^3 x + \cos^3 x - a} - \frac{\sqrt{2}}{3\cos x - 2\cos^3 x - \sqrt{2}a}.$$

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$8\sin 5x + \cos 10x + 1 = 0.$$

2. Решить неравенство

$$|x-7| \leqslant 3 - \sqrt{x-4}.$$

3. Найти все отрицательные значения v, при каждом из которых выполнено неравенство

$$\frac{1}{\log_5\left(\frac{\cos v}{5}\right)} - \frac{1}{\log_{5\cos v}\left(\frac{1}{5}\right)} \geqslant 0.$$

4. В треугольнике ABC длина стороны AB равна 18, длина биссектрисы AE равна $4\sqrt{15}$, а длина отрезка EC равна 5. Определить периметр треугольника ABC.

5. В начальный момент лечения пациенту была произведена первая инъекция: 8 единиц некоторого лекарства, а во время каждой последующей инъекции ему вводится 5 единиц того же лекарства. За время между инъекциями количество лекарства в организме уменьшается в 6 раз. Какое количество лекарства будет содержаться в организме пациента после 25-ой инъекции?

6. Все высоты пирамиды $EFGH$, грани которой являются остроугольными треугольниками, равны между собой. Известно, что $FG = 17$, $HG = 14$, а $\angle EHG = 60°$. Найти длину ребра HF.

§ 3. Физический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$8x - 1 < 4x^2.$$

2. Решить уравнение

$$8\cos x - 3\cos 2x = 5.$$

3. Решить уравнение

$$3\log_3 x^5 = 6 + \log_3 x.$$

4. В треугольнике ABC $\angle BAC = \alpha$, $\angle BCA = \gamma$, $AB = c$. Найти площадь треугольника ABC.

5. В арифметической прогрессии девятый член в 2 раза больше десятого, а сумма шестого и двенадцатого членов равна 8. Найти первый член и разность прогрессии.

6. Радиус окружности, описанной около треугольника KLM, равен R. Через вершину L проведена прямая, перпендикулярная стороне KM. Эту прямую пересекают в точках A и B серединные перпендикуляры к сторонам KL и LM. Известно, что $AL = a$. Найти BL.

7. Про некоторую нечетную функцию известно, что при $x > 0$ она задается формулой $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Найти, какой формулой задается функция $f(x)$ при $x < 0$. Решить уравнение $f(x) = \dfrac{1}{2}$.

8. В конусе угол между высотой и образующей равен φ. Боковой поверхности конуса касаются три шара радиуса r, каждый из которых касается двух других. Шары находятся вне конуса. Плоскость β, проходящая через центры шаров, перпендикулярна высоте конуса. Найти расстояние от вершины конуса до плоскости β.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$(1 - 4^x)(4 - x) > 0.$$

2. Решить уравнение

$$\sin 3x = \sin(3 + x).$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_5 x} + 3 = 7 \log_5 \sqrt[7]{x}.$$

4. В равнобедренном треугольнике KLM ($KL = LM$) угол KLM равен φ. Найти отношение радиусов вписанной и описанной окружностей для треугольника KLM.

5. Решить неравенство

$$\frac{|x-1|}{x+2} < 1.$$

6. Через точку O проведены две прямые, касающиеся окружности в точках M и N. На окружности взята точка K (точки O и K — по разные стороны от прямой MN). Расстояния от точки K до прямых OM и MN равны соответственно p и q. Найти расстояние от точки K до прямой ON.

7. Число $x = 5$ является одним из корней уравнения $3x^2 + px + q = 0$, где $q < 0$. Найти действительные корни уравнения $3x^4 + px^2 + q = 0$.

8. Два шара радиуса r и цилиндр радиуса R ($R > r$) лежат на плоскости. Шары касаются друг друга и боковой поверхности цилиндра. Цилиндр касается плоскости по своей образующей. Найти радиус шара, меньшего, чем данные, касающегося обоих данных шаров, цилиндра и плоскости.

1994

Вариант 3

1. Решить неравенство

$$\frac{2x-1}{\log_2 x} < 0.$$

2. Решить уравнение

$$5\cos x + 2\sin x = 3.$$

3. Решить уравнение

$$5^{x-1} + 5\cdot(0{,}2)^{x-2} = 26.$$

4. В равнобедренном треугольнике высоты, опущенные на основание и на боковую сторону, равны соответственно m и n. Найти стороны треугольника.

5. Решить уравнение

$$\log^2_{\frac{1}{2}}(4x) + \log_2\left(\frac{x^2}{8}\right) = 8.$$

6. В окружности пересекающиеся хорды AB и CD перпендикулярны, $AD = m$, $BC = n$. Найти диаметр окружности.

7. Для каких значений a система неравенств

$$\begin{cases} -x^2 + 12x - a \geqslant 0, \\ x \leqslant 2 \end{cases}$$

выполняется хотя бы при одном значении x?

8. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ (S — вершина) угол между боковым ребром и плоскостью основания равен α, сторона основания равна a, SH — высота пирамиды. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через точку H параллельно ребрам SA и BC.

§ 4. Химический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$x + 1 + \log_{\frac{1}{3}}(-2 + 3^{-x}) = 0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{2\sin x} < 1.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ угол BCD равен $150°$, а основание AD равно 8. Найти радиус окружности, касающейся прямой CD и проходящей через вершину A, а также пересекающей основание AD на расстоянии 2 от D.

4. Даны три сплава. Состав первого сплава: 55% хрома и 45% никеля. Состав второго сплава: 60% никеля, 25% хрома и 15% кобальта. Состав третьего сплава: 70% хрома и 30% кобальта. Из них нужно приготовить новый сплав, содержащий 20% кобальта. Какие значения может принимать процентное содержание никеля в этом новом сплаве?

5. Найти все значения параметра k, при каждом из которых уравнение

$$2x - |x - k^2| = 11k - 3 \cdot |x + 4k|$$

1) не имеет решений, 2) имеет конечное непустое множество решений.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{4}{(x-1)^2} \geqslant 1.$$

2. Решить уравнение

$$(\log_2 x)^2 + 3\log_{\frac{1}{2}} x + 2 = 0.$$

3. Решить уравнение

$$\cos x = 1 + \cos 2x.$$

4. В квадрат площадью 18 см^2 вписан прямоугольник так, что на каждой стороне квадрата лежит одна вершина прямоугольника. Длины сторон прямоугольника относятся, как 1 : 2. Найти площадь прямоугольника.

5. Найти число решений уравнения

$$2^{x+1} + 2^{1-x} = 1 - 4x - x^2$$

и дать обоснование ответа.

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\log_4(x+1) + \log_4(x+4) = 1.$$

2. Решить неравенство

$$4x - 1 > 3|x|.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\sin 2x} = \sqrt{1 - \sin x - \cos x}.$$

4. Прямоугольные треугольники имеют общую гипотенузу $KL = 5$. Вершины их прямых углов M и N лежат по разные стороны от прямой, проходящей через точки K и L, $LM = LN = 3$. Отрезок KP содержит точку M, и $MP = 1$. Отрезок KQ содержит точку N, и $NQ = 6$. Найти разность между площадью треугольника KPQ и суммарной площадью треугольников KLM и KLN.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} y^2 + 4y\cos x + 4 = 0, \\ x|y|(x^2 + 3y^2) = 2\pi^3 + 24\pi. \end{cases}$$

§ 5. Биологический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$4\cos^2\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) = 1.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2\left(\frac{x-9}{x-4}\right) + \log_2(x^2 - 14x + 40) = 2 + \log_2 3.$$

3. Дана окружность, диаметр MN которой равен 16 см. На касательной к этой окружности в точке M отложен отрезок MP, длина которого больше чем 15 см. Из точки P проведена вторая касательная к окружности, пересекающая прямую MN в точке Q. Найти площадь треугольника MPQ, если его периметр равен 72 см.

4. Найти все пары целых чисел p, q, удовлетворяющие одновременно двум неравенствам

$$\begin{cases} p^2 + q^2 < 18p - 20q - 166, \\ 32p - q^2 > p^2 + 12q + 271. \end{cases}$$

5. Найти наименьшее значение величины

$$\frac{1}{r}\left(\frac{4p}{u} + \frac{q}{\sqrt{1 - v^2}}\right),$$

где p, q, r, u, v — положительные числа, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} pv + q\sqrt{1 - u^2} \leqslant r, \\ p^2 + 2qr\sqrt{1 - u^2} \geqslant q^2 + r^2, \\ 2qr\sqrt{1 - u^2} + q^2 \dfrac{1 - v^2 - u^2}{v^2 - 1} \geqslant r^2. \end{cases}$$

1993

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\cos 2x - 2\cos x - 3 = 0.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2(9^x + 2\cdot 3^x - 5) = 1 + 2\log_4(3^{x+1} - 4).$$

3. Решить неравенство

$$5\sqrt{1 - \frac{1}{z}} > \frac{7z - 1}{z}.$$

4. Даны две различные геометрические прогрессии, первые члены которых равны единице. Известно, что сумма вторых членов прогрессий равна 3, а сумма пятых равна 161. Найти сумму шестых членов прогрессий.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ длина отрезка, соединяющего середины диагоналей, равна длине отрезка, соединяющего середины сторон AD и BC. Найти величину угла, образованного продолжением сторон AB и CD.

6. Найти все решения системы

$$\begin{cases} y+2=(3-x)^3, \\ (2z-y)(y+2)=9+4y, \\ x^2+z^2=4x, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$.

1994

Вариант 3

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-y=6, \\ 4x^2+xy+3y^2=48. \end{cases}$$

2. Какое из двух чисел больше

$$\sqrt{14} \quad \text{или} \quad 4^{2\log_{16}\left(1-\frac{1}{16}\right)+\frac{2}{3}\log_4 8} \ ?$$

Ответ обосновать.

3. Найти все решения уравнения

$$3\,\mathrm{tg}^2\left(\pi x+\frac{\pi}{8}\right)=1,$$

удовлетворяющие условию $\dfrac{5}{3}<x<3$.

4. В трапеции $ABCD$ даны длины оснований $AD=3$, $BC=2$ и углы A и D при основании, равные соответственно $\mathrm{arctg}\,2$ и $\mathrm{arctg}(1/3)$. Найти радиус окружности, вписанной в треугольник CBE, где E — точка пересечения диагоналей трапеции.

5. Найти все такие значения величины x, при каждом из которых неравенство

$$(4-2a)x^2+(9a-19)x+(10-2a)>0$$

выполняется для всех a, удовлетворяющих условию

$$1<a<3.$$

§ 6. Факультет почвоведения

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2(\cos 6x + \sin 2x \cdot \cos 4x) = \sin 6x + \sin 2x.$$

2. Самолет, осуществляя полет по заданному маршруту, может лететь в метеоусловиях A, $Б$ или $В$ с одной и той же скоростью, но по-разному расходуя горючее. В первый раз самолет находился в метеоусловиях A половину полетного времени, в метеоусловиях $Б$ — треть времени, в метеоусловиях $В$ — $1/6$ полетного времени. Во второй раз он находился четверть времени в метеоусловиях A и $3/4$ — в метеоусловиях $В$. В третий раз — по четверти полетного времени в метеоусловиях A и $Б$, а половину времени — в метеоусловиях $В$. На сколько процентов израсходует самолет полетный норматив горючего, двигаясь весь путь в метеоусловиях $В$, если в первый раз он израсходовал его на $101\frac{2}{3}\%$, во второй — на 92,5, а в третий — на 97,5%.

3. Решить уравнение

$$\frac{9^x - 82 \cdot 3^x + 162 - 3^{x/2+2}}{3^{x/2} - 9} = -9.$$

4. Две окружности с центрами O_1 и O_2, лежащими на стороне MN треугольника MPN, касаются друг друга и пересекают стороны MP и PN в точках M, D и N, C соответственно, причем $MO_1 = O_1D = 3$ и $NO_2 = CO_2 = 6$. Найти площадь треугольника MNP, если известно, что отношение площади треугольника MCO_2 к площади треугольника O_1DN равно $\frac{8}{5}\sqrt{3}$ и $PN = MP \cdot \sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

5. При каких значениях параметра a все числа из отрезка $1 \leqslant x \leqslant 5$ удовлетворяют неравенству

$$3ax + 2\sqrt{3x+1} - 6x + a - 5 < 0?$$

1993

Вариант 2

1. Разделить число 128 на четыре части так, чтобы первая часть относилась во второй как 2 : 3, вторая к третьей — как 3 : 5, третья к четвертой — как 5 : 6.

2. Решить уравнение

$$\sin^3 x - \cos^3 x + \sin x - \cos x = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{9x^2+1} 37 > 1.$$

4. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основанию и пересекающая боковые стороны в точках E и F. Длина отрезка EF равна 2. Определить длины оснований трапеции, если их отношение равно 4.

5. Найти все действительные числа a, при каждом из которых неравенство

$$x + \frac{7a^2 + a - 2}{x + a + 1} < 7a - 1$$

не имеет положительных решений x.

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$2(\cos^2 x - \sin^2 x) = (\cos x - \sin x)\cdot(2\sin x + \cos x - \cos^2 x).$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^{x-1} + y = 2, \\ 3^{2x-1} + 2y = 5. \end{cases}$$

3. Решить неравенство

$$2\ln\frac{1}{3x-2} + \ln(5-2x) \geqslant 0.$$

4. При каких значениях параметров a и b система неравенств

$$\begin{cases} b + \cos ax \leqslant 2, \\ x^2 + 2bx + 9 \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение?

5. В четырехугольнике $ABCD$, вписанном в окружность, диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке Q. Длина отрезка, соединяющего вершину C с серединой отрезка AD, равна 3. Расстояние от точки Q до отрезка BC равно 1, длина стороны AD равна 2. Найти длину отрезка AQ.

§ 7. Географический факультет

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\cos 2x + 4\cos x + 3 = 0.$$

2. Найти три числа a, b и c, если известно, что их сумма равна 2, а квадратное уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0$$

имеет единственное решение $x = 2$.

3. Решить неравенство

$$(\log_x 9 - 1)\log_3(9x) \leqslant 3.$$

4. В треугольнике ABC медиана AD и биссектриса BE перпендикулярны и пересекаются в точке F. Известно, что площадь треугольника DEF равна 5. Найти площадь треугольника ABC.

5. Найти все значения параметра c, при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - 2x| + |x^2 - 3x + 2| = x^2 - 4x + c$$

имеет ровно три различных решения.

1993

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{13-2x} = 5 - x.$$

2. Решить уравнение

$$\sin x = \cos^2 x + \frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}\right).$$

3. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{4x - x^2 - 4}{x^2 + x - 2}}.$$

4. В треугольник со сторонами $AB = 4$, $BC = 2$, $AC = 3$ вписана окружность. Найти площадь треугольника AMN, где M, N — точки касания этой окружности со сторонами AB и AC соответственно.

5. При каких значениях параметра a четыре корня уравнения

$$x^4 + (a-5)x^2 + (a+2)^2 = 0$$

являются последовательными членами арифметической прогрессии?

1994

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$\sin 2x = \sqrt{2}\sin x.$$

2. Сумма первых двадцати членов арифметической прогрессии (a_n) в пять раз меньше суммы первых двадцати пяти членов арифметической прогрессии (b_n). Найти отношение разности прогрессии (a_n) к разности прогрессии (b_n), если известно, что

$$4a_{12} = b_{19}.$$

3. Решить неравенство

$$\log_x(2 - x - x^2) > 0.$$

4. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найти длину отрезка CN, если длины катетов равны 1 и 4.

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a + \sqrt{6x - x^2 - 8} = 3 + \sqrt{1 + 2ax - a^2 - x^2}$$

имеет ровно одно решение.

§ 8. Геологический факультет

1992

Вариант 1

1. Четвертый член арифметической прогрессии равен 16, а сумма седьмого и десятого равна 5. Найти сумму первых восемнадцати членов этой арифметической прогрессии.

2. Решить неравенство

$$\sqrt{5 - 8x} + 2x \leqslant 1.$$

3. Решить уравнение

$$|\log_7 3 \cdot \log_3 x^4 - 7\log_x x^2| = 4\log_x 49.$$

4. Решить уравнение

$$4\cos x \cdot \cos 3x - 10\cos^2 x - 16\sin x \cdot \sin 3x = 4\sin^2 x + 3.$$

5. В окружность с центром O вписана трапеция $ABCD$, в которой $AB \parallel DC$, $AB = 5$, $DC = 1$, угол ABC равен $60°$. Точка K лежит на отрезке AB, причем $AK = 2$. Прямая CK пересекает окружность в точке F, отличной от C. Найти площадь треугольника OFC.

6. Найти все тройки чисел (x, y, z), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{64-3x^2-xz}+1+y^2+2y\sin(\pi z)=(xz-73)(\cos(\pi x)-\cos(2\pi z))^2.$$

1993

Вариант 2

1. Найти численное значение выражения

$$\left(\frac{a\sqrt{a}+27b\sqrt{b}}{3\sqrt{a}+9\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{3\sqrt{a}+9\sqrt{b}}{a-9b}\right)^2.$$

2. Решить уравнение

$$15(\cos 2x)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}=7.$$

3. На берегу озера расположены пункты A и B. Из пункта A в пункт B отправился катер, а через 1 час после этого из пункта B в пункт A вышла моторная лодка. Еще через 1 час они встретились и, не останавливаясь, продолжили движение. Катер прибыл в пункт B через 2 часа 20 минут после того, как в пункт A прибыла моторная лодка. Через какое время после начала движения произошла бы их встреча, если бы они одновременно отправились навстречу друг другу?

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{4}\log_{2\sin\frac{\pi}{7}}(x^2)>\log_{2\sin\frac{\pi}{7}}(\sqrt[4]{3x+4}).$$

5. Точка M, лежащая вне круга с диаметром AB, соединена с точками A и B. Отрезки MA и MB пересекают окружность в точках C и D соответственно. Площадь круга, вписанного в треугольник AMB, в 4 раза больше, чем площадь круга, вписанного в треугольник CMD. Найти меры углов треугольника AMB, если известно, что один из них в 2 раза больше другого.

6. Найти все неотрицательные действительные значения параметра a, при каждом из которых в области $(y+2)^2-4x\leqslant 0$ лежат ровно три точки графика функции

$$y=2x(\sqrt{\cos(2a\pi x)-\cos^4(a\pi x)}-1)+2.$$

1994

Вариант 3

1. Какое из чисел больше $2\sqrt{7}$ или 5,(29)?
2. Упростить до целого числа выражение

$$2\cdot\frac{\sqrt{6+2\sqrt{5}}}{\sqrt{6-2\sqrt{5}}}-\frac{\sqrt{7+\sqrt{5}}}{\sqrt{7-\sqrt{5}}}\cdot 2\sqrt{11}.$$

3. Решить уравнение

$$y+8\sqrt{y^2+y-6}-6+y^2=0.$$

4. Решить уравнение

$$\cos 3x+\cos 9x+\cos 15x=0.$$

5. Решить неравенство

$$\sqrt{11z-z^2-28}\neq 0.$$

6. Решить неравенство

$$6\cos x+\sin 2x<0.$$

7. Геологическая информационная система поставляется на четырех дискетах. При установке их на компьютер каждая из дискет увеличивает объем этой системы на определенное количество % по отношению к предыдущему объему: первая дискета — на 10%, вторая дискета — на 12%, третья дискета — на 25%, четвертая дискета — на 30%. На сколько % в результате увеличится объем этой системы?

8. Четырехугольник $ABCD$ таков, что в него можно вписать и около него можно описать окружности. Диаметр описанной окружности совпадает с диагональю BD. Доказать, что модули разностей длин его противоположных сторон равны.

9. Четыре бригады разрабатывали месторождение нефти в течение трех лет, работая с постоянной для каждой бригады производительностью. В течение пяти последних месяцев второго года и первых трех месяцев третьего года работа не

проводилась, а все остальное время работала только одна из бригад. Отношения времен работы первой, второй, третьей и четвертой бригад и количества выработанной продукции соответственно равны:

в первый год	$4:5:2:1$	и	17 млн. т.;
во второй год	$2:3:1:1$	и	10 млн. т.;
в третий год	$1:2:2:4$	и	11 млн. т..

Сколько млн. т. нефти выработали бы за 2 месяца четыре бригады, работая все вместе?

10. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$, в нем через вершину C проведена диагональ. Найти отношение площади сечения этого куба плоскостью, перпендикулярной этой диагонали и проходящей через ее середину, к площади его боковой поверхности.

§ 9. Экономический факультет

1992

Вариант 1

1. Вычислить $\log_{\frac{18}{7}}|\sin(\gamma+\pi/4)| + \log_{\frac{18}{7}}|\cos(3\gamma+\pi/4)|$, если известно, что $\cos\gamma+\sin\gamma = -\sqrt{\frac{1}{3}}$.

2. Решить неравенство

$$(4^{x-1}+4^{1-x}-2)^{-1}\cdot(x^2-5x+4)\sqrt{7-x} \leqslant 0.$$

3. Фабрика получила заказ на изготовление 1005 деталей первого типа и 2010 деталей второго типа. Каждый из 192 рабочих фабрики затрачивает на изготовление 2 деталей первого типа время, за которое он может изготовить 1 деталь второго типа. Каким образом следует разделить рабочих фабрики на две бригады, чтобы выполнить заказ за наименьшее время, при условии, что обе бригады приступят к работе одновременно, и каждая из бригад будет занята изготовлением деталей только одного типа?

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ плоские углы BAC, BAD и CAD при вершине A равны $\pi/3$, $3\pi/4$ и $\pi/2$ соответственно. Определить угол между гранями BAD и CAD.

5. Продолжения сторон AD и BC выпуклого четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке M, а продолжения сторон AB и CD — в точке O. Отрезок MO перпендикулярен биссектрисе угла AOD. Найти отношение площадей треугольника AOD и четырехугольника $ABCD$, если $OA = 12$, $OD = 8$, $CD = 2$.

6. Найти все значения параметра q, при каждом из которых число целочисленных решений неравенства $x^2 - 5(x - 1) + 3|x - q| - q \leqslant 0$ максимально.

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\log_{7x-6} 25 < 2.$$

2. Решить уравнение

$$\frac{\sin 3x}{\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)} = 1.$$

3. Решить неравенство

$$3\sqrt{x+2} \leqslant 6 - |x - 2|.$$

4. Найти периметр плоской фигуры, заданной на координатной плоскости условиями

$$\begin{cases} 2|x+2|\arcsin((y-1)^2) \leqslant \pi(x+2), \\ 2|y-1| - x \geqslant 0. \end{cases}$$

5. За время хранения вклада в банке проценты по нему прибавлялись к вкладу ежемесячно сначала в размере 5% в месяц, затем $11\frac{1}{9}$%, потом $7\frac{1}{7}$% и, наконец, 12% в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на 180%. Определить срок хранения вклада.

6. Отрезки, соединяющие основания высот остроугольного треугольника, равны 5, 12 и 13. Найти площадь треугольника.

1994

Вариант 3

1. Найти все целые числа x и y, удовлетворяющие условиям

$$\begin{cases} 3625x^3 = 9947y^3, \\ |y| \leqslant 6. \end{cases}$$

2. Найти область значений функции

$$y = \sqrt{30 - 12x - 6x^2}.$$

3. Решить уравнение

$$\log_4\left(\frac{x-14}{\sin x}\right) = \log_4((x-14)\cdot\sin x).$$

4. Составить уравнение окружности наименьшего радиуса, внутри которой помещается множество, заданное на координатной плоскости условием

$$|2y + x - 1| + |2y + 4| < 4.$$

5. Предприятие производит детскую обувь и является убыточным. Известно, что при изготовлении m пар обуви в месяц расходы предприятия на выпуск одной пары обуви составляют не менее $\dfrac{126000}{m} + 9 - \left|3 - \dfrac{54000}{m}\right|$ тыс. руб., а цена реализации каждой пары обуви при этом не превосходит $18 - \dfrac{1}{4000}m$ тыс. руб. Определить ежемесячный объем производства, при котором ежемесячные убытки могут быть снижены до наименьшего из возможных в данных условиях уровня. Вариант полной остановки производства исключен.

6. В выпуклом четырехугольнике $KLMN$ отрезок MS, соединяющий вершину M с точкой S, расположенной на стороне KN, пересекает диагональ LN в точке O. Известно, что $KL : MN = 6 : 7$, $KM : ON = 2 : 1$ и $\angle KLN + \angle KMN = 180°$. Найти отношение длин отрезков MO и OS.

§ 10. Факультет психологии

1992

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$3\sin 2\pi x \geqslant \sqrt{2}\sin 4\pi x + 3\cos 2\pi x + \sqrt{32}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2^{x+y}\cdot 3^y\cdot 6^{x+y}\cdot 9^x = 144, \\ \log_{(0,2x+0,1y)}(27^x 9^y + 4^{x+y})\cdot \log_5(0{,}2x+0{,}1y) = 2. \end{cases}$$

3. Точки K, L, M, N, P расположены последовательно на окружности радиуса $2\sqrt{2}$. Найти площадь треугольника KLM, если $LM \parallel KN$, $KM \parallel NP$, $MN \parallel LP$, а угол LOM равен 45°, где O — точка пересечения хорд LN и MP.

4. Найти все значения параметров a и b, при которых найдутся два различных корня уравнения

$$x^3 - 5x^2 + 7x = a,$$

которые будут также корнями уравнения

$$x^3 - 8x + b = 0.$$

5. В тетраэдре $ABCD$ на ребре AB взята точка K, на ребре AC — точка L, на ребре BD — точка N, на ребре CD — точка M. Точки E и G — середины ребер AD и BC соответственно. Прямые EG, KM, LM пересекаются в одной точке. Найти площадь четырехугольника $KLMN$, если $AK : KB = 5$, $AD = 9$, $BC = 8$, а угол между скрещивающимися прямыми AD и BC равен 45°.

1993

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$3^{\frac{x+2}{3x-4}} - 7 = 2\cdot 3^{\frac{5x-10}{3x-4}}.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{12}\right)+\sin 3x=\cos 3x-\sqrt{2},$$

принадлежащие отрезку $[-2\pi; 2\pi]$.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты CC_1 и AA_1. Известно, что $AC = 1$ и $\angle C_1CA_1 = \alpha$. Найти площадь круга, описанного около треугольника C_1BA_1.

5. Уравнение $(a-1)x^2-(2a+1)x+2+5a=0$ имеет действительные корни x_1, x_2.

1) Найти все значения параметра a, при каждом из которых оба корня больше единицы.

2) Найти все значения параметра b, при каждом из которых выражение

$$(x_1-b)(x_2-b)$$

не зависит от параметра a.

1994

Вариант 3

1. Верно ли неравенство

$$\log_2 27>\sqrt{6\log_2 9+5}.$$

(таблицами и калькулятором не пользоваться).

2. Известно, что $y=1$, $z=1$ одно из решений системы

$$\begin{cases} ay-bz+2a=0, \\ (b-1)y^2-az^2+2\cos\left(\dfrac{1000\pi}{3}\right)=0. \end{cases}$$

Найти все решения данной системы уравнений.

3. Из вершины C квадрата $ABCD$ проведена прямая, пересекающая луч AD в точке K. Точка L на прямой AK равноудалена от прямой CK и прямой AC, причем AL на 1 м длиннее чем LK. Известно, что треугольник ACK тупоугольный, а $AK = 9$ м. Найти косинус угла ACK.

4. Через вершины A и B треугольной пирамиды $SABC$ проведена сфера, пересекающая ребра AS и BS в точках M и N соответственно. Через точки B и N проведена вторая сфера, пересекающая ребро SC в точках P и Q, причем $PQ = \frac{1}{3}SC$. Найти, какую часть ребра SC составляет отрезок QC $(QC < PC)$, если M — середина SA и $SC = \frac{3}{2}SA$.

5. Партия деталей была изготовлена цехом в течение нескольких дней, причем каждый день изготовлялось одно и то же число деталей. Когда треть продукции одного дня была упакована в ящики, то в каждом ящике оказалось столько деталей, сколько ящиков понадобилось для упаковки, причем число ящиков было равно числу дней работы цеха. После отсылки половины всех деталей заказчикам выяснилось, что куб числа заказчиков был равен числу деталей, высланных каждому из заказчиков. Какое минимальное число деталей мог при этих условиях изготовить цех?

§ 11. Институт стран Азии и Африки

1992

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2^{x+5} + 2^3 \cdot 2^{x-1} - 2^2 = 0.$$

2. Решить уравнение

$$3\sin^2 x - 3\cos 2x - 12\sin x + 7 = 0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{|x-5|-1}{2|x-6|-4} \leqslant 1.$$

4. Дан треугольник со сторонами 4; 8; 9. Найти длину биссектрисы, проведенной к большей стороне.

5. Решить неравенство

$$\log_{1/2}|\cos x|\cdot\log_5(x^2-9)<0.$$

6. При каких значениях параметра a сумма S квадратов корней уравнения

$$x^2+2ax+2a^2+4a+3=0$$

является наибольшей? Чему равна эта сумма?

1993

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x}\geqslant 1.$$

2. Сумма третьего и пятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых семи членов этой прогрессии.

3. На боковой стороне BC равнобедренного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая основание этого треугольника в точке D. Найти расстояние от вершины A до центра окружности, если $AD=\sqrt{3}$, а угол ABC равен 120°.

4. Решить уравнение

$$\log_x(3x-2)-2=\sqrt{\log_x^2(3x-2)+4\log_x\left(\frac{x}{3x-2}\right)}.$$

5. Решить уравнение

$$\sin^2 x+3x^2\cos x+3x^2=0.$$

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$x^2+2|x-a|\geqslant a^2$$

справедливо для всех действительных x.

1994

Вариант 3

1. Суммарный доход двух предприятий возрастет втрое, если доход первого предприятия останется неизменным, а доход второго увеличится в четыре раза. Найти отношение первоначальных доходов этих предприятий и выяснить, во сколько раз надо увеличить доход первого предприятия, оставляя первоначальный доход второго, чтобы их суммарный доход возрос в четыре раза.

2. Решить уравнение

$$3^{x\cdot\log_3 5}\cdot 5^{x^2-3x}=1.$$

3. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD прямого угла ACB; DM и DN являются соответственно высотами треугольников ADC и BDC. Найти AC, если известно, что $AM=4$, $BN=9$.

4. Решить неравенство

$$2\cos x-1\leqslant\sqrt{8\cos^2 x-8\cos x-16}.$$

5. Решить неравенство

$$\left|x-7^{1+\sqrt{6-x}}\right|\leqslant\frac{4}{3}x-7\cdot 7^{\sqrt{6-x}}.$$

6. Найти все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$a^2x^2+2a(\sqrt{3}-1)x+\sqrt{x-4}=2\sqrt{3}-4$$

имеет решение.

Ответы к дополнению 2

§ 1. Механико-математический факультет

Вариант 1

1. $\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. На продолжении. 3. $\frac{1}{6}\,\frac{p+q+pq}{p+q-2pq}$ при $p \neq 0$; $\frac{1}{6}$ при $p = 0$. 4. 36. 5. 8. 6. $(-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (1; +\infty)$.

Вариант 2

1. $(1; 2)$. 2. $[-4; 4]$.

3. $(-\pi/3 + 2\pi k; -5\pi/6 + 2\pi m)$; $(-\pi/6 + \pi n; -2\pi/3 + \pi(n + 2l))$; k, m, n, $l \in \mathbb{Z}$. 4. $\frac{3\sqrt{5}}{2}$. 5. $9\sqrt{3}a$. 6. 120 км.

Вариант 3

1. $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. $x = \log_2 2/3$, $y = 1/6$. 3. $-\frac{1}{3} \leqslant x < 0$; $\frac{1}{5} < x < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$. 4. $2\sqrt{2} - \sqrt{5}$. 5. $x \in \{0; 1\}$ при $a = 0$; $x = \frac{1 - a + \sqrt{1 + 3a^2}}{2}$ при $a \in \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}; 0\right) \cup \left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$; $x = \frac{1 - a + \sqrt{1 + 3a^2}}{2}$, $x = \frac{-1 - a - \sqrt{3a^2 - 3}}{2}$ при $a \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{3}}; +\infty\right)$.

§ 2. Факультет вычислительной математики и кибернетики

Вариант 1

1. $\sqrt[3]{\frac{1991}{1992}}$. 2. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $x \in [2; 11)$.

4. 11 часов. 5. $\frac{1}{4}(5 + \sqrt{15})$. 6. $a \in (2\pi - 1/8; \infty)$.

Вариант 2

1. $2-\sqrt{2} < x \leqslant 1$; $3 \leqslant x < 2+\sqrt{2}$. 2. $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{3}$.
3. $\log_3 4 \leqslant x \leqslant 3$. 4. $\dfrac{12}{5}$. 5. $a = b = 0$, $b = -a^2 = 1$, $a \in \mathbb{R}$.

Вариант 3

1. $\dfrac{(-1)^n}{5}\arcsin(2-\sqrt{5}) + \dfrac{\pi n}{5}$, $n \in \mathbb{Z}$. 2. $x = 4$, $5 \leqslant x \leqslant 8$.
3. $v = 2\pi n$; $n = -1, -2, -3, \ldots$. 4. 44. 5. $6 + 2\cdot(1/6)^{24}$.
6. $\sqrt{247}$.

§ 3. Физический факультет

Вариант 1

1. $x < \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$, $x > \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$.
2. $2\pi k$, $\pm\arccos\dfrac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. 3. $3^{3/7}$.
4. $\dfrac{1}{2}c^2\dfrac{\sin(\alpha+\gamma)\sin\alpha}{\sin\gamma}$. 5. $a_1 = 20$, $d = -2$. 6. $\dfrac{R^2}{a}$. 7. 4; $-\dfrac{4}{9}$.
8. $\dfrac{r\left|\frac{2\sqrt{3}}{3}\cos\varphi - 1\right|}{\sin\varphi}$.

Вариант 2

1. $x > 4$, $x < 0$. 2. $\dfrac{\pi-3}{4} + \dfrac{\pi}{2}n$; $\dfrac{3}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
3. $5\dfrac{\sqrt{13}+7}{2}$. 4. $\sin\varphi \operatorname{tg}\dfrac{\pi-\varphi}{4}$. 5. $x < -2$; $x > -\dfrac{1}{2}$. 6. $\dfrac{q^2}{p}$.
7. $-\sqrt{5}$, $\sqrt{5}$. 8. $\left(\dfrac{2R\sqrt{r} - r\sqrt{3R+r}}{2(R-r)}\right)^2$.

Вариант 3

1. $1/2 < x < 1$. 2. $\pm\arccos\dfrac{3}{\sqrt{29}} + \arccos\dfrac{5}{\sqrt{29}} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.
3. $x = 1$, $x = 3$. 4. $\dfrac{2mn}{\sqrt{4m^2-n^2}}$; $\dfrac{2m^2}{\sqrt{4m^2-n^2}}$.
5. $x = 2$, $x = 2^{-7}$. 6. $\sqrt{m^2+n^2}$. 7. $a \leqslant 20$. 8. $\dfrac{2a^2}{9\sqrt{3}\cos\alpha}$.

§ 4. Химический факультет

Вариант 1

1. -1. 2. $2\pi n \leqslant x < \frac{\pi}{6} + 2\pi n$; $\frac{5\pi}{6} + 2\pi n < x \leqslant \pi + 2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$. 3. $10 \pm 4\sqrt{3}$. 4. $[15; 40]$ в процентах. 5. (1) $(-23; 0)$, (2) $(-\infty; -23) \cup (0; +\infty)$.

Вариант 2

1. $[-1; 1) \cup (1; 3]$. 2. 2; 4. 3. $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi m$; $\frac{\pi}{2} + \pi k$; $m, k \in \mathbb{Z}$. 4. 8. 5. Решений нет.

Вариант 3

1. $x = 0$. 2. $1 < x < +\infty$. 3. $2\pi n$, $\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$. 4. 12. 5. $x = \pi$, $y = 2$.

§ 5. Биологический факультет

Вариант 1

1. $-\frac{\pi}{36} \pm \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{6}$, $k \in \mathbb{Z}$. 2. 13. 3. 216 см^2. 4. $(12; -8)$. 5. 5.

Вариант 2

1. $2\pi n$; $n \in \mathbb{Z}$. 2. 1. 3. $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{8}\right)$. 4. 573. 5. 90°. 6. $(4; -3; 0)$; $(2; -1; 2)$.

Вариант 3

1. $(1; -4)$; $\left(\frac{10}{3}; \frac{2}{3}\right)$. 2. Второе больше. 3. $\frac{41}{24}$; $\frac{49}{24}$; $\frac{65}{24}$. 4. $\frac{4}{35 + 2\sqrt{101} + \sqrt{229}}$. 5. $2 - \sqrt{6} \leqslant x \leqslant 1$; $4 \leqslant x \leqslant 2 + \sqrt{6}$.

§ 6. Факультет почвоведения

Вариант 1

1. $-\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$, $\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbb{Z}$. 2. 90%. 3. 0. 4. $\frac{81}{2}(2\sqrt{3}-3)$. 5. $\left(-\infty;+\frac{5}{3}\right)$.

Вариант 2

1. 16, 24, 40, 48. 2. $\frac{\pi}{4}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$. 3. $(-2;0)\cup(0;2)$. 4. 5; 5/4. 5. $\left[-1;-\frac{1}{5}\right]$.

Вариант 3

1. $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $\frac{\pi}{2}+\pi n$, $\pi+2\pi m$, $k\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, $m\in\mathbb{Z}$. 2. $x=1$, $y=1$. 3. $\frac{2}{3}<x\leqslant\frac{5+\sqrt{34}}{9}$. 4. $b=3$, $a=\frac{\pi}{3}+\frac{2}{3}\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$; $b=-3$, $a\in(-\infty;+\infty)$. 5. $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

§ 7. Географический факультет

Вариант 1

1. $\pi+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 2. $(2;-8;8)$. 3. $\left[\frac{1}{81};1\right)\cup[3;+\infty)$. 4. 60. 5. 4; $\frac{19}{4}$.

Вариант 2

1. $x=2$. 2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$. 3. $-2<x<1$, $x=2$. 4. $\frac{25}{64}\sqrt{15}$. 5. $a=-\frac{5}{13}$, $a=-5$.

Вариант 3

1. πn, $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k$, $n\in\mathbb{Z}$, $k\in\mathbb{Z}$. 2. 1. 3. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<x<1$. 4. $\frac{4}{\sqrt{17}}$. 5. $2\leqslant a<3$; $3<a\leqslant 4$.

§ 8. Геологический факультет

Вариант 1

1. -9. 2. $x \in \left(-\infty; \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\right]$.
3. $x = 7^{\frac{1}{4}(7+\sqrt{17})}$, $x = 7^{\frac{1}{4}(7-\sqrt{17})}$, $x = 7^4$.
4. $\pm\dfrac{1}{2}\left(\pi - \arccos\dfrac{4}{5}\right) + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 5. $\dfrac{19\sqrt{3}}{52}$.
6. $\left(x = -128, y = 1, z = -\dfrac{1}{2} + 384\right)$, $\left(x = 128, y = -1, z = \dfrac{1}{2} - 384\right)$.

Вариант 2

1. 3. 2. $x = \pm\arccos 5/6 + \pi n$. 3. $5/4$ часа. 4. $-1 < x < 0$; $0 < x < 4$. 5. $80°$, $60°$, $40°$. 6. $3/4 < a < 1$, $1 < a < 5/4$.

Вариант 3

1. 5,(29) больше.
2. 4. 3. $y = -3$, $y = 2$. 4. $\dfrac{\pi}{18} + \dfrac{\pi n}{9}$, $\pm\dfrac{\pi}{9} + \dfrac{\pi k}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.
5. $4 < z < 7$. 6. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n < x < \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 7. 100,2%.
9. 10 млн. т. 10. $3\sqrt{3}$.

§ 9. Экономический факультет

Вариант 1

1. -1. 2. $x = 7$; $1 < x \leqslant 4$. 3. 39 и 153 человек. 4. $\pi/4$. 5. 2. 6. $q = 5$; $\dfrac{13}{4} \leqslant q \leqslant \dfrac{7}{2}$.

Вариант 2

1. $\log_7 6 < x < 1$, $x > \log_7 11$. 2. $x = \pi/6 + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. 3. $-2 \leqslant x \leqslant -1$; $x = 2$. 4. $10 + 2\sqrt{5}$. 5. 12 месяцев. 6. 195.

Вариант 3

1. $(-7; -5)$, $(0; 0)$, $(7; 5)$. 2. $0 \leqslant y \leqslant 6$.
3. $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi m$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}$. 4. $(x-5)^2 + (y+2)^2 = 20$.
5. 12000 или 24000 пар обуви. 6. 4/3.

§ 10. Факультет психологии

Вариант 1

1. $\frac{3}{8} + n,\ n \in \mathbb{Z}$.
2. $x = -2\log_2 3 + 4\log_3 2,\ y = 3\log_2 3 - 4\log_3 2$. 3. 4. 4. $a = 2$, $b = 3$. 5. $5\sqrt{2}$.

Вариант 2

1. 2. 2. $\left[0; \frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$. 3. $-\frac{\pi}{12};\ 2\pi - \frac{\pi}{12}$. 4. $\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}^2\alpha$.
5. 1) $\left(1; \frac{2+\sqrt{13}}{4}\right]$; 2) $\frac{7}{3}$.

Вариант 3

1. Нет, неверно. 2. $(1;1)$; $\left(-\frac{13}{17}; \frac{7}{17}\right)$. 3. $\frac{5+\sqrt{7}}{8}$. 4. $\frac{1}{3}$.
5. 41472.

§ 11. Институт стран Азии и Африки

Вариант 1

1. $-2\log_2 3$. 2. $(-1)^k \arcsin\frac{2}{3} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
3. $(-\infty; 4) \cup (4; 8) \cup [10; \infty)$. 4. $\sqrt{14}$.
5. $(-\sqrt{10}; -\pi) \cup (-\pi; -3) \cup (3; \pi) \cup (\pi; \sqrt{10})$.
6. $a = -3,\ S = 18$.

Вариант 2

1. $1 \leqslant x < 3$. 2. 28. 3. $\sqrt{7}$. 4. $2/3 < x < 1;\ 1 < x \leqslant 2$.
5. $x = 0;\ x = \pi + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$. 6. $-1 \leqslant a \leqslant 1$.

Вариант 3

1. 1:2; 10. 2. $x_1 = 0;\ x_2 = 2$. 3. 10. 4. $x = \pi + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.
5. $x_1 = 6$. 6. $a = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$.