

**Пойа Дж. и Килпатрик Д.**

Сборник задач по математике Стэнфордского университета: с подсказками и решениями. – М.: НО Научный Фонд «Первая Исследовательская Лаборатория имени академика В.А. Мельникова», 2002. – 96 с.

ISBN 5–901171–04–7

Книга выдающегося американского математика и педагога Дж. Пойи, автора таких известных книг, как «Математическое открытие», «Как решать задачу», «Математика и правдоподобные рассуждения», и Д. Килпатрика, содержит оригинальные задачи повышенной трудности по элементарной математике, которые предлагались американским школьникам на протяжении ряда лет на конкурсах в Стэнфордском университете США.

Все задачи снабжены подсказками к решениям и подробными решениями.

Для широких кругов читателей, учителей и всех любителей математики.

---

# Содержание

Часть первая.	
Введение .....	4
Часть вторая.	
Задачи .....	9
Часть третья.	
Подсказки к решению задач .....	34
Часть четвертая.	
Решения задач .....	48
Литература .....	90

## Часть первая

---

# Введение

В течение двадцати лет, с 1946 по 1965 год, Департамент Математики Стэнфордского университета проводил конкурсные экзамены для выпускников старших классов средней школы. Непосредственной и принципиальной целью экзаменов было определить среди выпускников средней школы каждого года особенно способных и одаренных студентов и привлечь их в Стэнфордский университет. Более широкой целью было стимулировать интерес к математике среди учащихся старших классов средних школ и учителей.

Экзамены проводились по образцу конкурсов Этвеша [23], проводимых в Венгрии в 1894 г., который, в свою очередь, был принят для конкурсов в Англии и во Франции. Габор Же-го, председатель Стэнфордского Департамента Математики в 1946г. и победитель конкурса Этвеша в 1912 году, явился инициатором Стэнфордских экзаменов.

Экзамены были учреждены в надежде, что раннее проявление математических способностей является определенным показателем исключительного интеллекта и соответственно интеллектуального превосходства в любой другой области приложения усилий. Более того, математические способности могут

быть определены в сравнительно раннем возрасте; потому что они доказываются "не столько большим количеством накопленных знаний, сколько оригинальностью мышления, проявляющейся в игровой схватке с трудными, хотя и элементарными задачами" [2, с. 406].

Как заметил Бук [1] несколько лет назад в обзоре математических конкурсов, экзамен может быть предназначен, вообще говоря, или для проверки знаний, или для проверки способностей. Конкурсные экзамены по математике в Стэнфордском университете были последнего типа. Ударение делалось

на оригинальность и интуицию более, нежели на шаблонные навыки... Типичный вопрос мог требовать специальных знаний, но мог требовать и применения необычных путей, требующих высокого уровня изобретательности. Вопрос может в действительности вводить определенное понятие, которое является совершенно незнакомым учащемуся. Короче говоря, от учащегося требуется продемонстрировать свои исследовательские способности [1, с. 204 – 205].

Первый Стэнфордский экзамен в 1946 году был проведен в 60 Калифорнийских школах в старших классах с 322 участниками. Победителю была присуждена одногодичная стипендия Стэнфордского университета; похвальный отзыв и книга по математике были даны трем другим участникам. В 1953 году экзамен был распространен за пределы Калифорнии – в Аризоне, Орегоне и Вашингтоне; количество стипендий было увеличено до двух, а количество присужденных похвальных отзывов и книг было увеличено до десяти и более. С 1958 по 1962 г. соучередителем экзаменов была компания Сильвания Электрик Продактс Инкорпорейтид. Последний экзамен в 1965 году был проведен среди 1200 участников в 151 центре в Калифорнии, Аризоне, Айдахо, Монтане, Неваде, Орегоне и Вашингтоне. Денежные премии в 500, 250 и 250 долларов США были присуждены трем победителям; почетные отзывы и математические книги были вручены восемнадцати участникам. Экзамены были прерваны после 1965 года главным образом потому,

что Стэнфордский Департамент Математики переключил свои интересы на обучение окончивших школу.

Уведомления об экзамене посылались каждый год всем государственным и частным школам, в которых должны были проводиться экзамены. Большинство школ были назначены центрами, учащиеся из других школ были свободны в своем выборе где экзаменоваться согласно удобству их расположения для них.

Экзамены проводились учителями и школьным персоналом по субботам, днем, в марте или апреле. Участникам давалось три часа на решение от трех до пяти задач. Была дана следующая инструкция:

Нельзя использовать какие-либо книги или тетради. Вы можете не сделать все задачи за три часа, но все, что вы сделаете, следует внимательно обдумать. Нельзя задавать вопросов, касающихся решения задач. Решения задач должны быть написаны ясно, кратко и исчерпывающе.

Работы читались в два этапа: на первом этапе они читались бригадой аспирантов в Департаменте Математики, включая, когда это было возможно, аспирантов, которые имели опыт работы в старших классах средней школы. Каждой бригаде из двух студентов была поручена задача прочитать как можно больше работ. Работы, содержащие установленный минимум хороших решений (например, одно и половину или два из четырех) или некоторые оригинальные черты, направлялись на проверку второго этапа. На втором этапе каждая работа, которая выдержала первый отсев, прочитывалась, по крайней мере, одним из членов профессорско-преподавательского состава департамента. Работы, претендующие на победителя, прочитывались всеми участвовавшими членами профессорско-преподавательского состава.

Чтобы упростить выбор победителя, задачи были придуманы так, что только очень немногие участники смогли бы решить все из них. С другой стороны, для того, чтобы избежать слишком большого разочарования, первая задача была обычно более доступна по уровню нежели другие, особенно в послед-

ние годы, так что многие участники были способны решить ее.

Хотя математическая сущность задач не выходила за пределы школьной программы, задачи относились к типу редко встречающихся в учебниках. Целью такой задачи являлась не только проверка оригинальности учащегося, но также обогащение программы по математике средней школы посредством предложения некоторых новых направлений для работы учащихся и учителей. Задачи включали следующие типы: (1) "предложение и доказательство", в которых сначала делается предположение, а затем доказывается математический факт; (2) "проверка следствий", в которых проверяется следствие из общих утверждений; (3) "вы можете сделать ложное предположение", в котором весьма вероятное предположение является неверным; (4) "небольшая теория", в которой последовательность подзадач иллюстрирует теоретическое построение; (5) "отвлекающий маневр", в котором очевидное соотношение, оказывается, не имеет никакого отношения к решению [9, 19, с. 160 – 161, пример 1; 21, с. 139, пример 14.23].

Задачи были того же уровня, что и в книгах *Как решать задачу* [17], *Математика и правдоподобные рассуждения* [18, 19] и *Математическое открытие* [20, 21]. Действительно, многие из задач и обычно с решениями, появляются в одной или нескольких из этих книг.

Большинство задач опубликовано в журналах. Задачи и список победителей каждого экзамена с 1946 по 1953 г. (кроме 1952 г.) были опубликованы в *American Mathematical Monthly* [2 – 8], а полный набор задач вместе с Введением, приведенным здесь, появился в июне – июле 1973 г. в [24]. Статьи, содержащие задачи, решения, комментарии и список победителей с 1953 по 1961 г. (кроме 1959 г.), были опубликованы в *California Mathematics Council Bulletin* [9 – 16].

Полный набор задач вместе с подсказками и решениями всех задач никогда не публиковался.

Часть вторая содержит полный набор задач, предлагавшихся на конкурсных экзаменах по математике в Стэнфордском университете. Они пронумерованы последовательно, с указанием года и номера задачи, как например: 46.1 означает задачу

1 на экзамене 1946 года<sup>1</sup>.

Часть третья содержит подсказки к решению каждой задачи, которые пронумерованы в соответствии с номерами задач во второй части. Стиль подсказок подобен подсказкам в части IV книги *Как решать задачу* [17] и большинство подсказок используют один или более наводящих вопросов и предположений.

Четвертая часть содержит решения всех задач (иногда два решения); нумерация – как прежде. Решения намечают в общих чертах используемые подходы, но некоторые детали, конечно, оставляют читателю. Некоторые решения заканчиваются указанием взаимосвязей с другими проблемами или общениями.

Многие подсказки к решениям и решения задач появились в результате дискуссии на семинарах по решению задач, которые проводились в Стэнфордском университете и Учительском колледже. Задачи использовались для иллюстрации техники проблемных решений с первокурсниками, будущими учителями и учителями, имеющими опыт. Учителя и учителя учителей могут найти некоторые полезные предложения по вопросу, как использовать задачи в *Математическом Открытии* [20, с. 209 – 212].

Ссылки на статьи и книги, в которых та или иная задача появилась впервые (с решением или без), приводятся в квадратных скобках, с соответствующими решениями в четвертой части.

---

<sup>1</sup>В данном издании принята сквозная нумерация, в которой указывается номер группы задач и номер задачи в группе, например: 2.3 означает задачу 3 во второй группе.

# Задачи

## Задачи 1

**1.1.** В теннисном турнире принимают участие  $2n$  участников. В первом круге турнира каждый участник играет только один раз, так что оказывается сыгранными  $n$  игр парами игроков. Показать, что количество пар в первом круге может быть составлено в точности

$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times 9 \times \cdots \times (2n - 1)$$

различными способами.

**1.2.** В тетраэдре (необязательно правильном) два противоположных ребра имеют одинаковую длину  $a$  и они перпендикулярны друг другу. Кроме того, каждое из них перпендикулярно линии длиной  $b$ , которая соединяет их середины. Выразить объем тетраэдра через  $a$  и  $b$  и обосновать полученное выражение.

**1.3.** Рассмотреть следующие четыре утверждения, которые необязательно являются истинными:



- I. Если многоугольник, вписанный в окружность, является равносторонним, то он также является и равноугольным.
- II. Если многоугольник, вписанный в окружность, является равноугольным, то он также является и равносторонним.
- III. Если многоугольник, описанный около окружности, является равносторонним, то он является также и равноугольным.
- IV. Если многоугольник, описанный около окружности, является равноугольным, то он является также и равносторонним.

(А) Установите, какие из четырех утверждений являются истинными, а какие ложными, давая доказательство вашего утверждения в каждом случае.

(В) Если вместо многоугольников общего вида мы рассмотрим только четырехугольники, какие из четырех утверждений истинны, а какие ложные? А если мы рассматриваем только пятиугольники?

При ответе на (В) вы можете строить догадки, но докажите это как можно полнее и ясно отделите что доказано, а что не доказано.

## Задачи 2

**2.1.** Чтобы пронумеровать страницы объемистого тома, печатник использовал 1890 цифр. Сколько страниц содержит том?

**2.2.** Среди дедушкиных бумаг был обнаружен счет:

72 индюшки      — 67,9 — долларов.

Первая и последняя цифры числа, которое, очевидно, представляло собой общую цену этих птиц, заменены здесь тире, поскольку они стерлись и стали неразборчивыми.

Каковы две стершиеся цифры, и сколько стоил один индюк?

**2.3.** Определить  $m$ , при которых уравнение относительно  $x$

$$x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2 = 0$$

имеет четыре действительных корня, являющиеся членами арифметической прогрессии.

**2.4.** Пусть  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  являются углами треугольника. Показать, что

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2},$$

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$$

и

$$\sin 4\alpha + \sin 4\beta + \sin 4\gamma = -4 \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma.$$

## Задачи 3

**3.1.** Рассмотрим таблицу:

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 1, \\ 2 + 3 + 4 & = & 1 + 8, \\ 5 + 6 + 7 + 8 + 9 & = & 8 + 27, \\ 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 & = & 27 + 64. \end{array}$$

Установите общий закон, заложенный в этом примере, выразите его математически и докажите.

**3.2.** Три числа являются членами арифметической прогрессии, три других числа – членами геометрической прогрессии. Складывая соответствующие члены двух прогрессий последовательно, мы получим

$$85, 76 \text{ и } 84$$

соответственно, а складывая все три члена арифметической прогрессии мы получим 126. Найдите члены обеих прогрессий.

**3.3.** С вершины горы вы видите две точки  $A$  и  $B$  на плоскости. Линии зрения, направленные на эти точки, составляют угол  $\gamma$ . Наклон первой линии зрения к горизонтальной плоскости равен  $\alpha$ , а второй линии  $\beta$ . Известно, что точки  $A$  и  $B$  находятся на одном уровне и что расстояние между ними равно  $c$ .

Выразите высоту  $x$  вершины над общим уровнем точек  $A$  и  $B$  через величины углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и расстояние  $c$ .

**3.4.** Первая сфера имеет радиус  $r_1$ . Около этой сферы описан правильный тетраэдр. Около этого тетраэдра описана вторая сфера с радиусом  $r_2$ . Около этой второй сферы описан куб. Около этого куба описана третья сфера с радиусом  $r_3$ .

Найти отношение  $r_1 : r_2 : r_3$  (которое должно быть, согласно Кеплеру, отношением средних расстояний от планет Марс, Юпитер и Сатурн до Солнца, но которое, в действительности, несколько отличается от истинного отношения).

## Задачи 4

4.1. Доказать, что нет такого числа в последовательности

$$11, 111, 1111, 11111, \dots,$$

которое является квадратом целого числа.

4.2. Три стороны треугольника имеют длину  $l$ ,  $m$  и  $n$  соответственно. Числа  $l$ ,  $m$  и  $n$  положительные и целые,

$$l \leq m \leq n.$$

(А) Положите  $n = 9$  и найдите количество различных треугольников описанного вида.

(В) Возьмите различные значения  $n$  и найдите общую закономерность.

4.3. (А) Докажите следующую теорему: точка лежит внутри равностороннего треугольника и расположена на расстоянии  $x$ ,  $y$  и  $z$  от трех его сторон соответственно;  $h$  – высота треугольника. Тогда

$$x + y + z = h.$$

(В) Установите и докажите аналогичную теорему в стереометрии относительно расстояний от внутренней точки до четырех граней правильного тетраэдра.

(С) Обобщите обе теоремы так, чтобы они были бы применимы к любой точке в плоскости или пространстве соответственно (а не только к точкам внутри треугольника или тетраэдра). Дайте четкую и ясную формулировку утверждения и если у вас будет время, также и доказательство.

## Задачи 5

### 5.1. Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1 - 4 &= -(1 + 2), \\ 1 - 4 + 9 &= 1 + 2 + 3, \\ 1 - 4 + 9 - 16 &= -(1 + 2 + 3 + 4). \end{aligned}$$

Установите общий закон в данном примере, выразите его математически и докажите.

**5.2.** Дан квадрат. Найти геометрическое место точек, из которых квадрат виден под углом (А)  $90^\circ$ , (В)  $45^\circ$ . (Пусть  $P$  является точкой вне квадрата, но в той же плоскости. Наименьший угол с вершиной  $P$ , содержащий в себе квадрат, является углом, под которым квадрат виден из точки  $P$ ). Набросайте отчетливо оба геометрических места точек, дайте их описание и докажите.

**5.3.** Назовем осью тела прямую линию, соединяющую две точки поверхности тела, и такую, что тело, повернутое вокруг этой линии на угол, который больше  $0^\circ$  и меньше  $360^\circ$ , совпадает с самим собой.

Куб имеет 13 различных осей, которые принадлежат трем различным классам. Ясно опишите расположение этих осей, найдите угол поворота, соответствующий каждой оси. Принимая, что ребро куба имеет единичную длину, вычислите среднее арифметическое длин 13 осей. Не используя вычислительных таблиц, проведите вычисления до двух десятичных знаков после запятой.

## Задачи 6

**6.1.** Периметр прямоугольного треугольника равен 60 дюймам, а длина высоты, перпендикулярной гипотенузе, равна 12 дюймам. Найдите стороны треугольника.

**6.2.** Четырехугольник разрезан на четыре треугольника его двумя диагоналями. Назовем два из этих треугольников "противоположными" если они имеют общую вершину и не имеют общих сторон. Доказать следующие утверждения:

(А) Произведение площадей двух противоположных треугольников равно произведению площадей двух других противоположных треугольников.

(В) Четырехугольник является трапецией тогда и только тогда, когда имеются два противоположных треугольника, равных по площадям.

(С) Четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда все четыре треугольника равны по площадям.

**6.3.** Рассмотрим прямой усеченный круговой конус. Плоскость, которая параллельна нижнему и верхнему основаниям усеченного конуса и расположена на равных расстояниях от обоих оснований, пересекает усеченный конус в "срединном круге". Усеченный конус и цилиндр имеют одинаковую высоту, и срединный круг конуса является основанием цилиндра.

Какое из этих двух тел имеет больший объем: усеченный конус или цилиндр? Докажите свой ответ!

(Возможным доказательством является алгебраическое: Выразите оба объема в подходящих переменных и преобразуйте их разность так, что знак этой разности становится очевидным).

## Задачи 7

**7.1.** Докажите утверждение: если сторона треугольника меньше, чем среднее (среднее арифметическое) двух других сторон, то ее противоположный угол меньше, чем среднее двух других углов.

**7.2.** Рассмотрим прямую усеченную пирамиду с квадратным основанием. Назовем "срединным сечением" пересечение пирамиды плоскостью, параллельной основанию и верхней плоскости пирамиды и расположенной на одинаковых расстояниях от обоих. Назовем "срединным прямоугольником" прямоугольник, у которого одна сторона равна стороне основания, а другая сторона равна стороне верхнего основания.

Четыре ваших друга согласны, что объем усеченной пирамиды равен высоте, умноженной на некоторую площадь, но они не согласны между собой относительно этой площади и высказывают следующие четыре предположения о том, что эта площадь является:

- I. средним сечением;
- II. средней величиной нижнего и верхнего оснований;
- III. средней величиной нижнего основания, верхнего основания и срединного сечения;
- IV. средней величиной нижнего основания, верхнего основания и срединного прямоугольника.

Пусть  $h$  является высотой усеченной пирамиды,  $a$  – стороной ее основания и  $b$  – стороной ее верхнего основания.

Выразите каждое из четырех предположений в математической форме, решите какое из предположений правильное и докажите свой ответ.

**7.3.** Доказать, что единственным решением уравнения

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$$

в целых числах  $x$ ,  $y$  и  $z$  является  $x = y = z = 0$ .

## Задачи 8

**8.1.** У Боба 10 карманов и 44 серебряных доллара. Он хочет распределить доллары по своим карманам так, чтобы в каждом кармане содержалось различное количество долларов.

(А) Сможет ли он сделать это?

(В) Обобщите проблему, полагая количество карманов равным и количество долларов равным  $n$ .

Проблема наиболее интересна, когда

$$n = \frac{(p+1)(p-2)}{2}.$$

Почему?

**8.2.** Заметьте, что значение

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \frac{3}{4!} + \cdots + \frac{n}{(n+1)!}$$

равно  $1/2$ ,  $5/6$ ,  $23/24$  для  $n = 1, 2, 3$  соответственно. Определите общую закономерность (давая  $n$  большие значения, если необходимо) и докажите ваш закон.

**8.3.** Найти  $x, y, u$  и  $v$ , удовлетворяющие системе четырех уравнений

$$\begin{aligned} x + 7y + 3v + 5u &= 16, \\ 8x + 4y + 6v + 2u &= -16, \\ 2x + 6y + 4v + 8u &= 16, \\ 5x + 3y + 7v + u &= -16. \end{aligned}$$

(Это может показаться долгим и скучным, но поищите путь покороче).

**8.4.** Четыре точки  $G, H, V$  и  $U$  являются (в указанном порядке) четырьмя вершинами четырехугольника. Геодезист хочет определить длину  $UV = x$ . Он знает длину  $GH = l$  и измеряет четыре угла

$$\angle GUH = \alpha, \quad \angle HUV = \beta, \quad \angle UVG = \gamma, \quad \angle GVH = \delta.$$



- (A) Выразите  $x$  через  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  и  $l$ .
- (B) Найдите путь проверить правильность результата.
- (C) Если у вас есть ясный план как сделать (A) охарактеризуйте его одним коротким предложением.

## Задачи 9

**9.1.** Рассмотрим равенства

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 3 + 5 &= 8, \\ 7 + 9 + 11 &= 27, \\ 13 + 15 + 17 + 19 &= 64, \\ 21 + 23 + 25 + 27 + 29 &= 125. \end{aligned}$$

Установите общий закон в данном примере, выразите его математически и докажите.

**9.2.** Сторона правильного шестиугольника имеет длину  $n$  ( $n$  является целым числом). С помощью равноотстоящих, параллельных его сторонам прямых, шестиугольник разбит на  $T$  равносторонних треугольников, каждый из которых имеет стороны длиной 1. Пусть  $V$  означает количество вершин, появившихся при разбиении, а  $L$  – количество граничных линий длиной 1. (Граничная линия принадлежит одному или двум треугольникам, вершина – двум или более треугольникам).

Когда  $n = 1$  (простейший случай),  $T = 6$ ,  $V = 7$ ,  $L = 12$ . Рассмотреть общий случай и выразить  $T$ ,  $V$  и  $L$  через  $n$ . (Догадка – хорошо, но доказательство – лучше).

**9.3.** Покажите, что невозможно определить (действительные или комплексные) числа  $a, b, c, A, B$  и  $C$  такие, что уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ax + by + cz)(Ax + By + Cz)$$

выполняется тождественно для независимых переменных  $x, y$  и  $z$ .

## Задачи 10

**10.1.** Боб хочет иметь кусок земли идеально ровный, который ограничен четырьмя линиями. Две граничные линии идут строго на север-юг, две другие – строго на восток-запад, и каждая граничная линия измеряется точно 100 футами. Сможет Боб купить такой кусок земли в США? Обоснуйте!

**10.2.** (А) Определите три числа  $p$ ,  $q$  и  $r$  такие, что уравнение

$$x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9 = (px^2 + qx + r)^2$$

выполняется тождественно для переменной  $x$ .

(В) Эта задача требует точного извлечения квадратного корня данного многочлена четвертой степени, которое может быть возможным в данном случае, хотя обычно это невозможно. Почему невозможно?

**10.3.** Боб, Петер и Пауль путешествуют вместе. Петер и Пауль – хорошие пешеходы; каждый проходит  $p$  миль в час. У Боба – большие ноги и он едет на маленькой машине, в которой могут ехать два человека, но не три; машина покрывает  $s$  миль в час. Трое друзей приняли следующий план: они стартуют вместе, Пауль едет в машине вместе с Бобом, а Петер идет пешком. После некоторого промежутка времени, Боб высаживает Пауля, который идет пешком; Боб поворачивает, чтобы забрать Петера и затем Боб и Петер едут в машине, пока не догонят Пауля. В этом месте они меняются: Пауль едет, а Петер идет пешком так же, как они начинали, и вся процедура повторяется столько, сколько это необходимо.

(А) Как далеко (сколько миль) продвигается компания за час.

(В) В течение какого промежутка от времени путешествия машина везет только одного человека?

(С) Проверьте предельные случаи  $p = 0$  и  $p = s$ .

**10.4.** Вершина пирамиды, расположенная против ее основания называется верхушкой.

(А) Назовем пирамиду "равнобедренной", если ее верхушка расположена на одинаковом расстоянии от всех вершин основания. Приняв это определение, доказать, что основание равнобедренной пирамиды вписывается в окружность, центр которой является основанием высоты пирамиды.

(В) Теперь назовем пирамиду равнобедренной, если ее верхушка расположена на одинаковом (по перпендикулярам) расстоянии от всех сторон основания. Приняв это определение (отличное от вышеприведенного), доказать, что основание равнобедренной пирамиды описывается около окружности, центр которой является основанием высоты пирамиды.

## Задачи 11

**11.1.** Дан правильный шестиугольник и точка в его плоскости. Провести прямую линию через данную точку, которая делит данный шестиугольник на две части равной площади.

**11.2.** Я утверждаю, что вы можете заплатить 50 центов в точности 50-ю различными способами. (Способ зависит от того, как много монет каждого вида – центов, пятицентовых монет, десятицентовых монет, четверть- и полдолларовых монет вы используете). Сколькими способами вы можете заплатить 25 центов? Прав ли я относительно 50 центов? Подтвердите ваш ответ как можно более четко и ясно.

**11.3.** Постройте шестиугольник путем добавления к произвольно заданному треугольнику  $\Delta$  трех внешних равнобедренных треугольников, каждый из которых имеет угол  $120^\circ$  против той стороны  $\Delta$ , которая образует его основание. Показать, что три вершины шестиугольника, которые не являются вершинами данного  $\Delta$ , являются вершинами равностороннего треугольника. (Достаточно выразить только одну сторону  $s$  упомянутого выше равностороннего треугольника через стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$  треугольника  $\Delta$ , доказав, что это выражение для  $s$  симметрично относительно  $a$ ,  $b$  и  $c$ ).

**11.4.** Десять человек сидят вокруг стола. Сумма в десять долларов должна быть распределена среди них по правилу, согласно которому каждый получает одну половину от суммы, которую его два соседа получают вместе. Есть ли только один путь, чтобы распределить деньги таким образом? Докажите ваш ответ.

## Задачи 12

**12.1.** Коллекция марок Боба состоит из трех альбомов. Две десятых его марок находятся в первом альбоме, несколько седьмых – во втором альбоме и 303 марки в третьем альбоме. Сколько марок у Боба? (Является ли условие достаточным, чтобы определить неизвестное?)

**12.2.** Назовем вершину тетраэдра трехпрямоугольной, если три ребра, начинающиеся от нее, перпендикулярны друг к другу. Имея площади  $A$ ,  $B$  и  $C$  трех граней, примыкающих к трехпрямоугольной вершине тетраэдра, определить площадь  $D$  четвертой грани противоположной этой вершине. (Какую задачу в планиметрии вы бы отнесли к аналогичной?)

**12.3.** Разбейте данный треугольник тремя прямыми секущими на семь частей, четыре из которых являются треугольниками (а оставшиеся три пятиугольниками). Одна из треугольных частей образована тремя секущими, каждая из трех других треугольных частей образована некоторой стороной данного треугольника и двумя секущими.

(А) Выберите три прямые секущие так, чтобы четыре треугольных части оказались конгруэнтными. Опишите ваш выбор и нарисуйте ясный чертеж.

(В) Какая часть площади данного треугольника является площадью треугольной части в рассечении, которое вы выбрали?

(Может быть полезным рассмотреть сначала частный вид данного треугольника, для которого решение является особенно простым).

## Задачи 13

**13.1.** Сколько лет капитану, сколько у него детей и какова длина его корабля? Дано число 32118, являющееся произведением трех искомых чисел (целых). Длина корабля дана в футах (и равна нескольким футам), капитан имеет двоих сыновей и дочерей, ему больше лет, чем детям, но ему еще не сто лет. (Обоснуйте ответ).

**13.2.** Определите  $x$ ,  $y$ ,  $u$  и  $v$  удовлетворяющих системе четырех уравнений

$$x + y + u = 4,$$

$$y + u + v = -5,$$

$$u + v + x = 0,$$

$$v + x + y = -8.$$

(Это может показаться долгим и скучным: поищите укороченный путь).

**13.3.** "В любом треугольнике сумма трех... больше, чем полупериметр".

Восстановите пропущенное (отмеченное точками) последовательно выбирая:

I. высоты;

II. медианы;

III. биссектрисы (углов).

Вы получаете три различных утверждения. Проверьте каждое утверждение: истинно оно или ложно? Докажите ваш ответ!

**13.4.** Обратите внимание, что значение

$$1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + n!n$$

равно 1, 5, 23, 119 для  $n = 1, 2, 3, 4$  соответственно. Установите общий закон (путем задания дальнейших значений если необходимо) и докажите ваше утверждение.

## Задачи 14

**14.1.** Эл и Билл живут на противоположных концах одной улицы. Элу необходимо доставить посылку к дому Билла, а Биллу – к дому Эла. Они вышли в один и тот же момент, каждый шел с постоянной скоростью и возвратился домой сразу же после оставления посылки в месте назначения. Они встретились в первый раз на расстоянии  $a$  ярдов от дома Эла и во второй раз на расстоянии  $b$  ярдов от дома Билла.

(А) Какова длина улицы?

(В) Если  $a = 300$  и  $b = 400$ , кто шел быстрее?

**14.2.** Монеты (равной окружности) расположены в регулярную структуру по всему очень большому столу (бесконечная плоскость). Рассмотрим две структуры.

В первой структуре каждая монета касается четырех других монет, и прямые линии, соединяющие центры контактирующих монет, пересекают плоскость на равные квадраты.

Во второй структуре каждая монета касается шести других монет и прямые линии, соединяющие центры соприкасающихся монет, разбивают плоскость на равные равносторонние треугольники.

Вычислите процент плоскости, покрытой монетами (кругами) для каждой структуры.

**14.3.** Доказать: если  $n$  является целым числом, большим 1, то  $n^{n-1} - 1$  делится на  $(n - 1)^2$  без остатка.

**14.4.** Постройте (внешний) квадрат на каждой стороне (произвольного) треугольника. Те 6 вершин этих трех квадратов, которые не совпадают с вершинами треугольника, образуют шестиугольник. Три стороны этого шестиугольника равны, конечно, соответствующим сторонам треугольника. Показать, что каждая из оставшихся трех сторон равна удвоенной медиане треугольника.



## Задачи 15

**15.1.** Новые шариковые ручки стоили 50 центов в магазине напротив школы, но покупателей этих ручек было немного. Когда, однако, магазин понизил цену, весь оставшийся запас ручек был продан за 31,93 доллара. Насколько была снижена цена? (Является ли условие достаточным для определения неизвестного?)

**15.2.** Точка  $P$  так расположена внутри прямоугольника, что расстояние от точки  $P$  до угла прямоугольника составляет 5 ярдов, от противоположного угла 14 ярдов, а от третьего угла 10 ярдов. Каково расстояние от точки  $P$  до четвертого угла?

**15.3.** Докажите тождество

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} = \frac{\sin \alpha}{8 \sin \frac{\alpha}{8}}$$

и обобщите его.

**15.4.** Из двенадцати конгруэнтных равносторонних треугольников восемь являются гранями правильного октаэдра, а четыре – гранями правильного тетраэдра. Найти отношение объема октаэдра к объему тетраэдра.

## Задачи 16

**16.1.** Решите следующую систему трех уравнений с неизвестными  $x$ ,  $y$  и  $z$ :

$$5732x + 2134y + 2134z = 7866,$$

$$2134x + 5732y + 2134z = 670,$$

$$2134x + 2134y + 5732z = 11464.$$

**16.2.** Был очень жаркий день, и четыре пары выпили вместе 44 бутылки кока-колы. Анна выпила 2, Бетти 3, Кэрол 4 и Дороти 5 бутылок. М-р Браун выпил столько же бутылок, сколько и его жена, но каждый из других мужчин выпил больше чем его жена: м-р Грин вдвое, м-р Вайт в три раза и м-р Смит в четыре раза. Назовите жен этих мужчин. (Докажите ваш ответ).

**16.3.** Решите следующую систему трех уравнений с неизвестными  $x$ ,  $y$  и  $z$  ( $a$ ,  $b$  и  $c$  заданы)

$$x^2y^2 + x^2z^2 = axyz,$$

$$y^2z^2 + y^2x^2 = byxz,$$

$$z^2x^2 + z^2y^2 = cxyz.$$

**16.4.** Пирамида называется "правильной", если ее основание является правильным многоугольником, а основание ее высоты находится в центре основания пирамиды. Правильная пирамида имеет шестиугольное основание, площадь которого является одной четвертой от общей площади поверхности  $S$  пирамиды. Высота пирамиды равна  $h$ . Выразите  $S$  через  $h$ .

## Задачи 17

**17.1.** Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4xy + 3y^2 &= 36, \\ 3x^2 - 4xy + 2y^2 &= 36. \end{aligned}$$

(Одно решение установить легко, но от вас требуется найти все решения. Знание аналитической геометрии не требуется для решения этой задачи, но может помочь понять результат – как?)

**17.2.** Каждое из четырех чисел  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  является положительным и меньше единицы. Показать, что не все четыре произведения

$$4a(1 - b), \quad 4b(1 - c), \quad 4c(1 - d), \quad 4d(1 - a)$$

больше единицы.

**17.3.** На каждой стороне прямоугольного треугольника построен наружный квадрат (как это обычно делается для иллюстрации теоремы Пифагора). Соедините вершину прямого угла треугольника с центром квадрата, построенного на гипотенузе, и соедините центры квадратов, построенных на двух других сторонах. Показать, что два отрезка прямых, полученных таким образом являются

- (А) перпендикулярными друг другу;
- (В) равной длины.

**17.4.** Пять ребер тетраэдра имеют одинаковую длину  $a$ , а шестое ребро имеет длину  $b$ .

(А) Выразите радиус сферы, описанной около тетраэдра, через  $a$  и  $b$ .

(В) Как вы могли бы использовать результат (А) для практического определения радиуса сферической поверхности (например линзы)?

## Задачи 18

**18.1.** В прямоугольном треугольнике,  $c$  – длина гипотенузы,  $a$  и  $b$  – длины двух других сторон, а  $d$  – диаметр вписанной окружности. Доказать, что

$$a + b = c + d.$$

**18.2.** Показать, что выражение

$$n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)$$

делится на 360 без остатка для  $n = 1, 2, 3, \dots$

**18.3.** Найдите все решения системы трех уравнений с неизвестными  $x$ ,  $y$  и  $z$

$$\begin{aligned} x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 8(yz + zx + xy) &= 36, \\ 6x^2 + y^2 + 5z^2 + 8(yz + zx + xy) &= 36, \\ 5x^2 + 6y^2 + z^2 + 8(yz + zx + xy) &= 36. \end{aligned}$$

(Одно решение найти легко).

**18.4.** Основание прямой призмы является правильным шестиугольником, а высота призмы равна диаметру окружности, вписанной в основание. Объем призмы равен объему правильного октаэдра.

Найти отношение площадей поверхностей этих двух тел.

Обратите внимание, что два тела имеют одинаковое количество граней, и одно из них является правильным телом, а другое – нет. Почему так?

## Задачи 19

**19.1.** Торт имеет форму прямой призмы с квадратным основанием; он имеет сахарную глазурь наверху торта и по его сторонам (то есть на четырех боковых гранях). Высота призмы равна  $5/16$  стороны основания. Разрежьте торт на 9 кусков так, чтобы каждый кусок имел одинаковое количество торта и глазури. Один из 9 кусков должен быть прямой призмой с квадратным основанием, с глазурью только на его верхней поверхности. Вычислите отношение его высоты к стороне его основания, и дайте четкое описание с эскизами всех 9 кусков.

**19.2.** Показать, что каждое число последовательности

$$49, 4489, 444889, 44448889, \dots$$

является точным квадратом.

**19.3.** Если площадь треугольника является рациональной (т.е. измеряется рациональным числом), то существует четыре возможных случая: треугольник может иметь три или две рациональных стороны, или только одну, или ни одной рациональной стороны. Показать на примерах (предпочтительно простых), что все четыре случая на самом деле возможны.

**19.4.** Экзамены по трем предметам: алгебре, биологии и химии сдавали 41 студент. Следующая таблица показывает, сколько студентов провалились на каждом предмете, и их различные комбинации:

Предмет	А	Б	Х	АБ	АХ	БХ	АБХ
Количество	12	5	8	2	6	3	1
провалившихся							

(К примеру, 5 студентов провалились по биологии, среди них 3 провалившихся как по биологии, так и по химии, и только один из этих 3 провалился по всем трем предметам).

Сколько студентов сдали все три экзамена?

(Можете ли вы обдумать подходящую диаграмму, которая прояснила бы лежащую в основе идею?).

**19.5.** Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  означают длины сторон треугольника, а  $d$  – длину биссектрисы угла, противоположного стороне длиной  $c$  и оканчивающуюся на этой стороне.

(А) Выразить  $d$  через  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

(В) Проверьте полученное выражение самыми различными путями, которые можете придумать (с помощью частных случаев, предельных случаев и т.д.)

## Задачи 20

**20.1.** "Сколько у Вас детей и сколько им лет?" – спросил гость у учителя математики.

"У меня три мальчика, – сказал м-р Смит. – Произведение их лет равно 72, а сумма их лет равна номеру улицы".

Гость пошел посмотреть номер, вернулся и сказал: "Проблема не определена".

"Да, это так, – сказал м-р Смит, – но я все еще надеюсь, что старший мальчик однажды выиграет конкурс Стэнфордского Университета".

Назовите возраст мальчиков, излагая ваши соображения.

**20.2.** Для прямоугольного треугольника даны длина гипотенузы  $c$  и площадь  $A$ . На каждой стороне треугольника начерчен квадрат, внешний к треугольнику, и рассматривается наименьшая выпуклая фигура, состоящая из трех квадратов (сформированная туго натянутой резиновой лентой вокруг них): это шестиугольник (который является неправильным, имеет по одной стороне общей с каждым квадратом, и одна из его оставшихся трех сторон, очевидно, имеет длину  $c$ ).

Определить площадь шестиугольника.

**20.3.** Пусть числа  $x$ ,  $y$  и 1 измеряют длины трех сторон некоторого треугольника и предположим, что

$$x \leq y \leq 1.$$

Пусть точка  $(x, y)$  с координатами  $x$  и  $y$  прямоугольной системы координат представляет треугольник на плоскости. Опишите четко и ясно набор этих точек на плоскости, который представляет

- (А) треугольники;
- (В) равнобедренные треугольники;
- (С) прямоугольные треугольники;
- (D) острые треугольники;
- (Е) тупые треугольники.

Определите положение точек, представляющих и другие, заслуживающие внимания треугольные фигуры.

**20.4.** Найти остаток от деления полинома

$$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81}$$

на полином  $x^3 - x$ .



## Часть третья

---

# Подсказки к решению задач

## Подсказки 1

1.1. *Не могли бы Вы вновь посмотреть на задачу?* Представьте, что Вы один из участников. Сколькими способами Вы можете выбрать себе пару? Подумайте, как проблема может быть разбита на две части:

(А) выбор Вашего противника и

(В) образование пар между оставшимися участниками.

1.2. *Посмотрите на неизвестные.* Неизвестной является объем тетраэдра, который может быть вычислен, когда основание и высота заданы. Но ни основание, ни высота не заданы в этой задаче. *Не могли бы Вы вообразить более доступную родственную задачу?* (Не видите ли Вы более доступного тетраэдра, который является кратной частью исходного тетраэдра?)

**1.3.** Доказательство любого из утверждений сведите к доказательству равенства или линейных отрезков, или углов. Знаете ли Вы теорему или теоремы, используемые при доказательстве их равенства? *Нарисуйте чертеж.* Может Вам ввести вспомогательные элементы, чтобы сделать возможным использование теорем?

## Подсказки 2

**2.1.** *Вот Вам задача:* если книга имеет точно 9 пронумерованных страниц, сколько цифр использовал печатник? (Ответ: 9). *А вот Вам другая задача:* если книга имеет точно 99 пронумерованных страниц, сколько цифр использовал печатник в этом случае?

**2.2.** *Вновь посмотрите на задачу.* Какими могут быть две стершиеся цифры, если общая цена, выраженная в центах делится на 72?

**2.3.** *Каковы условия?* Четыре корня должны образовывать арифметическую прогрессию. Еще: уравнение имеет специфическую черту – оно содержит только четные степени неизвестной  $x$ . Следовательно, если  $a$  является корнем, то  $-a$  также является корнем.

**2.4.** *Знаете ли Вы подходящую теорему?* Заметьте сходство между тремя тождествами, особенно в их левых частях. Если Вы установили одно тождество, как можно получить другие два?

## Подсказки 3

**3.1.** Применение метода индукции требует наблюдательности. Посмотрите на члены справа, начальные члены слева и члены в конце. Какова общая закономерность?

**3.2.** *Разделить различные части условия. Можете Вы записать их?* Пусть

$$a - d, \quad a, \quad a + d$$

будут членами арифметической прогрессии, а

$$bg^{-1}, \quad b, \quad bg$$

будут членами геометрической прогрессии.

**3.3.** *Разделите различные части условия. Можете Вы записать их?* Пусть  $a$  и  $b$  означают длины (неизвестных) линий зрения,  $\alpha$  и  $\beta$  – их наклон к горизонтальной плоскости соответственно. Мы можем отметить три части в условиях относительно

- (1) наклона линии  $a$ ,
- (2) наклона линии  $b$ ,
- (3) треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ .

**3.4.** *Посмотрите на неизвестные.* Имеются две неизвестные: отношение  $r_1 : r_2$  и отношение  $r_2 : r_3$ .

## Подсказки 4

**4.1.** *Вновь посмотрите на задачу.* Проблема, которую надо решить: "найти полный квадрат выражения  $1 + 10 + 10^2 + \dots + 10^k$ , где  $k$  – положительное целое число". *Разделите различные части условия. Можете Вы записать их?* Можно отметить две части в условии:

- (1)  $s$  должна быть квадратом,
- (2)  $s$  должна иметь требуемый вид.

**4.2.** Применение метода индукции требует наблюдательности. Можете Вы найти методику подсчета треугольников для данного значения  $n$ ?

**4.3.** *Знаете ли Вы подходящую теорему?* Высота равна  $h$ . Знаете ли Вы более простую теорему относительно высоты в треугольнике?

## Подсказки 5

**5.1.** Применение метода индукции требует наблюдательности. Рассмотрите переход от одного выражения к следующему.

**5.2.** *Знаете ли Вы родственную задачу?* Геометрическое место точек, из которых данный отрезок прямой линии виден под данным углом, состоит из двух дуг, оканчивающихся в крайних точках отрезка и симметричных друг относительно друга относительно отрезка.

**5.3.** Некоторые оси могут быть установлены просто осмотром, но являются ли все оси осями? *Можете Вы доказать*, что Ваш перечень осей исчерпывающий? Имеет ли Ваш перечень ясный принцип классификации?

## Подсказки 6

**6.1.** *Разделите различные части условия. Можете Вы записать их?* Можно отметить три части в условии относительно

- (1) периметра,
- (2) прямоугольного треугольника,
- (3) высоты к гипотенузе.

**6.2.** *Нарисуйте чертеж. Введите удобные обозначения.* Как можно показать, что площади (или произведения площадей) равны?

**6.3.** *Нарисуйте чертеж. Введите удобные обозначения.*

## Подсказки 7

**7.1.** Что такое гипотеза? Что такое умозаключение? Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  означают стороны, а  $A$ ,  $B$  и  $C$  – противоположные углы

соответственно. Тогда гипотезой является следующее неравенство

$$a \leq \frac{b+c}{2},$$

а умозаключением

$$A \leq \frac{B+C}{2}.$$

Посмотрите на умозаключение. Можете ли Вы переформулировать его?

**7.2.** *Знаете ли Вы родственную задачу? А более частную задачу? Что произойдет, если изменить данные в задаче?*

**7.3.** *Каковы условия? Сумма квадратов трех целых чисел должна быть удвоенным их произведением. Сумма должна быть четным числом.*

## Подсказки 8

**8.1.** Если у Боба очень много долларов, у него, очевидно, не было бы трудностей при заполнении каждого из своих карманов различным количеством долларов. *Можете ли Вы переформулировать задачу? Каково наименьшее количество долларов, которое может быть положено в 10 карманов так, чтобы никакие два различных кармана не содержали одинаковое их количество?*

**8.2.** *Узнаете ли Вы знаменатели 2, 6, 24? Знаете ли Вы родственную задачу? Аналогичную задачу?*

**8.3.** Чтобы решить такую систему, мы вынуждены комбинировать уравнения каким-либо образом. Подыщите связи между уравнениями, которые могли бы привести к особенно выгодной комбинации.

**8.4.** Ньютон однажды заметил, что в некоторой геометрической задаче получается та же система независимо от того,

какие величины рассматриваются как исходные данные, а какие – как неизвестные. Поэтому следует выбрать данные и неизвестные так, чтобы было легко вывести уравнение.

## Подсказки 9

**9.1.** Применение метода индукции требует наблюдательности. Обратите внимание на правые части, начальные члены в левой части и конечные члены. Какова общая закономерность?

**9.2.** *Нарисуйте чертеж.* Он может помочь Вам установить закон индуктивно или может привести Вас к соотношениям между  $T$ ,  $V$ ,  $L$  и  $n$ .

**9.3.** *Возможно ли удовлетворить условию? Является ли условие достаточным для определения неизвестного?* Как можно разделить условия на подходящие части?

## Подсказки 10

**10.1.** *В чем состоит вопрос?* Что имеется в виду? На самом деле, это вопрос интерпретации: вам следует рассматривать слова "ровный", "восток", "запад", "север" и "юг" на *идеализированном* абсолютно сферическом глобусе.

**10.2.** *Возможно ли удовлетворить условию? Является ли условие достаточным для определения неизвестных?* Как можно было бы разбить условия на подходящие части?

**10.3.** *Отделите различные части условия. Можете Вы записать их?* Между стартом и местом, где три друга встречаются опять имеются три различные фазы:

- (1) Боб едет с Паулем
- (2) Боб едет один
- (3) Боб едет с Петером

Пусть  $t_1$ ,  $t_2$  и  $t_3$  длительности этих фаз соответственно. Как можно разделить условие на подходящие части?

**10.4.** *Вы знаете подходящую теорему?* Основание высоты является срединной точкой основания в равнобедренном треугольнике. Эта теорема и ее доказательство должны быть знакомы Вам. Может, Вы используете ее метод? Теорема по равнобедренному треугольнику доказывается из конгруэнтности прямоугольных треугольников, у которых высота является общей стороной.

## Подсказки 11

**11.1.** *Можете Вы представить себе более доступную родственную задачу? Более общую задачу?*

**11.2.** *Можете Вы представить себе более доступную родственную задачу? Более общую задачу? Аналогичную задачу?* Есть очень простая аналогичная задача: сколькими способами Вы можете заплатить один цент? Есть более общая задача: сколькими способами Вы можете заплатить сумму в центов, используя центы, пятицентовые монеты, десятицентовые монеты, четверть- и поллларовые монеты? Эта задача может быть решена проверкой простых частных случаев, как показано в короткой таблице ниже (где  $E_n$  означает количество различных способов уплаты суммы в центов, использующих пять видов монет)

$n$	4	5	9	10	14	15	19	20	24
$E_n$	1	2	2	4	4	6	6	9	9

Мы, главным образом, интересуемся  $E_{25}$  и  $E_{50}$ , но наш вопрос, который является общим (чтобы посчитать  $E_n$  для общего  $n$ ) – все еще "выделен". Есть очень простая аналогичная задача: найти  $A_n$ , количество способов уплаты суммы в  $n$  центов используя только центы. ( $A_n = 1$ ).

**11.3.** *Нарисуйте чертёж. Введите удобные обозначения. Как можно получить выражение для  $s$ ? Методом Евклида?*

Методом аналитической геометрии? Тригонометрией? Какой представляется наиболее подходящим?

**11.4.** *Введите удобные обозначения. Каково условие? Как доля каждого человека связана с долей его соседей? А с долей его соседа слева? Кто получает наибольшую сумму денег?*

## Подсказки 12

**12.1.** *Что неизвестно? Каковы исходные данные? Каково условие?*

**12.2.** *Что является неизвестным? Площадь  $D$  треугольника. Как ее найти? Площадь треугольника может быть вычислена по формуле Герона, если известны три стороны. Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  означают длины сторон и пусть  $s = (a + b + c)/2$ ; тогда*

$$D^2 = s(s - a)(s - b)(s - c).$$

Стороны  $a$ ,  $b$  и  $c$  являются сторонами прямоугольных треугольников, чьи площади равны  $A$ ,  $B$  и  $C$  соответственно. Пусть стороны этих треугольников имеют длину  $p$ ,  $q$  и  $r$ , так что

$$a^2 = q^2 + r^2, \quad b^2 = r^2 + p^2, \quad c^2 = p^2 + q^2.$$

Но площади  $A$ ,  $B$  и  $C$  равны

$$A = \frac{1}{2}qr, \quad B = \frac{1}{2}rp, \quad C = \frac{1}{2}pq.$$

Мы имеем семь неизвестных  $D$ ,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $p$ ,  $q$ ,  $r$  и систему из семи уравнений для их определения. Все еще имеется препятствие: решение этой системы встречает значительные затруднения, и формула Герона может выглядеть не слишком привлекательной. Попробуем начать сначала.

*Что является неизвестной? Площадь  $D$  треугольника. Как ее можно определить? Наиболее обычный способ вычисления площади треугольника есть*

$$D = \frac{ah}{2},$$



где  $a$  – основание, а  $h$  – высота треугольника с площадью  $D$ . Пусть  $a$  имеет тот же смысл, что и выше, и введем  $h$  в чертеж.

**12.3.** *Можете ли Вы представить себе более доступную родственную задачу?*

## Подсказки 13

**13.1.** *Что неизвестно?* Пусть  $x$ ,  $y$  и  $z$  представляют собой количество детей, возраст капитана и длину корабля соответственно.

Мы можем представить себе задачу так: неизвестной является тройка  $(x, y, z)$  чисел.

*Отделите различные части условия. Можете Вы записать их?*

(А)  $x$ ,  $y$  и  $z$  положительные целые числа отличные от 1 и такие, что  $x y z = 32118$ .

(В)  $4 \leq x < y < 100$ .

Какой пункт (А) или (В) является более выполнимым?

**13.2.** Чтобы решить такую систему, необходимо комбинировать уравнения каким-нибудь способом. Заметим, что любая перестановка  $x$ ,  $y$ ,  $u$  и  $v$  оставляет систему в ее левой части неизменной. Эта симметрия подсказывает, что нам следует преобразовывать все четыре уравнения симметрично.

**13.3.** *Можете Вы представить себе более доступную родственную задачу? Более общую задачу? Что общего во всех трех суждениях? Не могли бы Вы сделать обобщение?*

Каждое суждение приводит к неравенству. Знаете ли Вы теорему, которая могла бы быть полезной?

**13.4.** Использование метода индукции требует наблюдательности. Видите ли Вы закономерность в рассматриваемых случаях?

## Подсказки 14

**14.1.** *Что является неизвестным? Каковы исходные данные? Каковы условия? Можете Вы написать уравнение, которое выражает часть условий? Вспомните, что уравнение выражает ту же величину двумя различными способами.*

**14.2.** *Нарисуйте чертеж. Каково соотношение между процентом плоскости, покрытой монетами, и процентом каждого равного квадрата или равного равностороннего треугольника, покрытого монетами?*

**14.3.** *Что такое гипотеза? Что такое умозаключение? Гипотезой является то, что  $n$  есть целое число большее 1. Умозаключением является то, что  $n^{n-1} - 1 = (n - 1)^2 P(n)$ , где  $P(n)$  означает целое число, зависящее от  $n$ .*

**14.4.** *Нарисуйте чертеж. Введите подходящие обозначения. Как можно показать, что линейные отрезки находятся в отношении 1:2?*

## Подсказки 15

**15.1.** *Что является неизвестным? Каковы исходные данные? Каково условие?*

**15.2.** *Можете Вы представить себе более доступную родственную задачу? Более общую задачу? Есть более общая задача: точка  $P$  лежит внутри прямоугольника, ее расстояния от четырех углов равны  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  в круговом порядке (по часовой стрелке). Найдите  $d$  через  $a$ ,  $b$  и  $c$ .*

**15.3.** *Вы знаете подходящую теорему? Попытайтесь придумать более простое аналогичное тождество.*

**15.4.** *Что является неизвестным?* Неизвестным является отношение объема правильного октаэдра к объему правильного тетраэдра. Что общего имеют октаэдр и тетраэдр? Их грани конгруэнтны равносторонним треугольникам; их ребра равны. *Можете ли Вы переформулировать задачу?* Вычислите объем правильного октаэдра и объем правильного тетраэдра с данной длиной ребра.

*Нарисуйте чертеж. Введите удобные обозначения.* Решение задачи в стереометрии часто зависит от *хорошего чертежа*, который открывает дверь к важным соотношениям.

## Подсказки 16

**16.1.** Чтобы решить такую систему, мы вынуждены каким-нибудь образом комбинировать уравнения. Левые части системы *симметричны* относительно  $x$ ,  $y$  и  $z$ , т.е. остаются неизменными при любых перестановках  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Это подсказывает, что нам следует преобразовывать все три уравнения симметрично.

**16.2.** Очевидно, количество возможностей ограничено с самого начала ( $4! = 24$ ). Если Вы находчивы, Вам не надо проверять все эти случаи. *Отделите различные части условия. Можете ли Вы записать их?* Пусть  $b$ ,  $g$ ,  $w$  и  $s$  означают количество бутылок, употребленных женами Брауна, Грина, Вайта и Смита соответственно.

**16.3.** Чтобы решить эту систему, необходимо каким-либо способом скомбинировать уравнения. Симметрия трех левых частей уравнений системы подсказывает, что все три уравнения симметричны. Естественным первым шагом является исключение произведения  $xuz$  в правой части системы путем деления, но это требует исследования случаев, в которых  $xuz$  равно нулю.

**16.4.** *Нарисуйте чертеж. Введите удобные обозначения.* Решение задачи в стереометрии часто зависит от *удачного чертежа*.

## Подсказки 17

**17.1.** Заметьте, что система *симметрична* по отношению к двум неизвестным  $x$  и  $y$ . Эта симметрия должна быть как-нибудь отражена в решении.

**17.2.** Заметьте, что набор из четырех произведений является *симметричным* по отношению к  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Эта симметрия должна быть как-нибудь отражена в решении.

**17.3.** *Нарисуйте чертеж. Введите подходящие обозначения.* Обозначим вершины треугольника  $A$ ,  $B$  и  $C$ , где  $C$  является вершиной прямого угла. Пусть  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$  являются центрами квадратов, построенных на сторонах  $BC$ ,  $CA$  и  $AB$  соответственно. На чертеже  $C$  оказалось лежащим на  $A'B'$ . Видите ли Вы здесь какую-нибудь пользу для доказательства этого предположения?

**17.4.** *Нарисуйте чертеж. Введите удобные обозначения.* Решение задачи в стереометрии очень часто зависит от *хорошего* чертежа.

## Подсказки 18

**18.1.** *Вернитесь к определениям.* Какова вписанная в треугольник окружность? *Знаете ли Вы теорему, которая может быть полезной?*

**18.2.** *Что такое умозаключение?* Выражение должно делиться на 360. Еще выражение имеет необычную черту: его три сомножителя могут сами быть представлены как сомножители, чтобы образовать произведение шести сомножителей.

**18.3.** Заметьте, что система *симметрична* по отношению к трем неизвестным  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Эту симметрию следовало бы как-нибудь отразить в решении.

**18.4.** Поскольку два тела имеют одинаковое количество

граней и одинаковый объем, попытайтесь установить, какой из них имеет меньшую площадь поверхности. Правильность Вашего результата менее важна, чем путь, которым Вы проверите это.

## Подсказки 19

**19.1.** *Что известно?* Отношение высоты прямой призмы к стороне ее квадратного основания. Как можно определить это отношение? Если Вы вычислите выражения для двух величин, Вы можете взять их отношение. Каковы эти величины? Как можно получить выражения для них?

**19.2.** Рассмотрите общий случай: каков  $n$ -ый член последовательности? Можете Вы установить, что у него может быть положительный квадратный корень? Как Вы могли бы проверить это?

**19.3.** Поскольку Вы вольны выбирать собственный пример в каждом случае, Вы могли бы выбрать треугольник, чья площадь легко может быть вычислена.

**19.4.** Каковы различные возможности для сдачи или провала трех предметов? Можете ли вы придумать некоторую методику подсчета того, сколько студентов провалилось в каждой категории?

**19.5.** *Нарисуйте чертеж. Введите удобные обозначения.* Биссектриса  $d$  делит сторону  $c$  на два отрезка, чьи длины мы обозначим через  $p$  и  $q$  соответственно; первый имеет общий конец с  $a$ , второй – с  $b$ . Теперь имеем

три данных:  $a$ ,  $b$  и  $c$ ;

три неизвестных:  $p$ ,  $q$  и  $d$ ;

три треугольника: первоначальный треугольник и два треугольника поменьше, из которого они получены разделением посредством  $d$ .

## Подсказки 20

**20.1.** *Разделите разные части условия. Можете Вы записать их?* Мы можем отметить четыре части в условии относительно

- (1) произведения лет мальчиков,
- (2) суммы их лет,
- (3) неопределенности задачи,
- (4) факта (чье открытие может пройти незамеченным), что один из мальчиков является старшим.

**20.2.** *Что известно?* Площадь шестиугольника. Как ее можно определить? *Является ли условие достаточным, чтобы определить неизвестное?*

**20.3.** *Что является неизвестным?* Есть пять неизвестных: набор точек (A) и четыре его поднабора. Как можно охарактеризовать такой набор? Путем установления координат  $x$ ,  $y$  точек, принадлежащих ему – путем соотношений между этими координатами!

**20.4.** *Что неизвестно?* Остаток после деления одного полинома на другой. *Можете ли Вы переформулировать задачу?* Обозначим частное как  $q(x)$ , а остаток как  $r(x)$ . Мы должны найти полином  $r(x)$  порядка не выше 2 такой, что

$$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81} = q(x)(x^3 - x) + r(x).$$

## Часть четвертая

---

# Решения задач

**Замечание.** Ссылки в квадратных скобках в конце решения каждой задачи означают номера книг или статей, в которых соответствующая задача появилась прежде (во многих случаях с решением данным здесь или очень похожим). Статья из журнала *American Mathematical Monthly*, содержащая полный набор задач [24], в эти ссылки не включена. Номера страниц указывают на место расположения задачи внутри ссылки. Обозначение "ср." (от слова "сравни") указывает на отличную, но родственную задачу или на задачи или на решения, несколько отличающихся от приведенных в этой книге. Заинтересованный читатель найдет решения, подсказки или комментарии в [9 – 21]. Список литературы, на которые даются ссылки, приведен в конце книги.

## Решения 1

**1.1.** Обозначим требуемое количество пар  $2n$  игроков как  $P_n$ . Если Вы участник, Вы можете сочетаться в пару с любым, одним из  $2n - 1$  игроков. Раз Ваш противник выбран, то

остается

$$2n - 2 = 2(n - 1)$$

игроков, которые могут подобрать себе пару  $P_{n-1}$  способами. Следовательно

$$P_n = (2n - 1)P_{n-1}.$$

[2; 18, с. 118].

**1.2.** Плоскость, проходящая через одно ребро длиной  $a$  и перпендикуляр длиной  $b$ , разбивает тетраэдр на два более удобных конгруэнтных тетраэдра, каждый с основанием  $ab/2$  и высотой  $a/2$ . Следовательно, требуемый объем равен

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2 b}{6}.$$

[2; 17, с. 235; ср. 20, с. 109 – 110, задача 4.17].

### 1.3.

(А) Утверждения I и IV, вообще говоря, истинны, но утверждения II и III ложны;

(В) Утверждения II и III ложны; прямоугольник и ромб являются контрпримерами соответственно. Утверждения II и III истинны для пятиугольника и следуют из утверждения II' и III' соответственно:

II'. Если многоугольник, вписанный в окружность, является равноугольным, любые две стороны, разделенные точно одной лежащей между ними стороной, являются равными.

III'. Если многоугольник, описанный около окружности, является равносторонним, любые два угла, разделенные точно одним лежащим между ними углом, являются равными.

Чтобы доказать утверждения I, II', III' и IV, соединим центр окружности с вершинами многоугольника, проведем перпендикуляры от центра к сторонам и выберем конгруэнтные треугольники.

[2; ср. 19, с. 161 – 162, задача 4].



## Решения 2

**2.1.** Том с 999 страницами требует

$$9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 = 2889$$

цифр. Если объемистый том в вопросе имеет  $x$  страниц

$$\begin{aligned} 189 + 3(x - 99) &= 1890, \\ x &= 666. \end{aligned}$$

[3; ср. 17, с. 234, задача 4].

**2.2.** Если  $-679-$  делится на 72, оно делится как на 8, так и на 9. Если оно делится на 8, сумма  $79-$  должна делиться на 8 (поскольку 1 000 делится на 8) и таким образом  $79-$  должна быть 792: последняя старшая цифра есть 2. Если  $-6792$  делится на 9, сумма ее цифр должна делиться на 9 (правило деления на 9) и таким образом первая старшая цифра должна быть 3. Стоимость одной индюшки была (во времена дедушки)  $367,92 \div 72 = 5,11$  долларов.

[3; 17, с. 234].

**2.3.** Если  $a$  и  $-a$  корни с наименьшим абсолютным значением, прогрессия будет иметь вид

$$-3a, \quad -a, \quad a, \quad 3a.$$

Следовательно

$$(x^2 - a^2)(x^2 - 9a^2) = x^4 - (3m + 2)x^2 + m^2.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях получаем систему

$$\begin{aligned} 10a^2 &= 3m + 2, \\ 9a^4 &= m^2. \end{aligned}$$

Исключение  $a$  дает

$$19m^2 - 108m - 36 = 0.$$

Следовательно,  $m = 6$  или  $-6/19$ .

[3; 17, с. 236].

**2.4.** Обозначим три тождества как  $(a)$ ,  $(b)$  и  $(c)$  соответственно. Если

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi,$$

то

$$(\pi - 2\alpha) + (\pi - 2\beta) + (\pi - 2\gamma) = \pi.$$

Мы можем идти от  $(a)$  к  $(b)$ , а также от  $(b)$  к  $(c)$  посредством подстановки  $\pi - 2\alpha$ ,  $\pi - 2\beta$  и  $\pi - 2\gamma$  вместо  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно. Остается подтвердить  $(a)$ , что может быть сделано многими способами. Например, подставим  $2u$ ,  $2v$  и  $\pi - 2u - 2v$  вместо  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  соответственно. Тогда  $(a)$  становится

$$\sin u \cos u + \sin v \cos v = [2 \cos u \cos v - \cos(u + v)] \sin(u + v).$$

Используйте теоремы сложения косинуса и синуса.

[3; 19, с. 162].

## Решения 3

**3.1.** Общий закон есть

$$(n^2 + 1) + (n^2 + 2) + \dots + (n + 1)^2 = n^3 + (n + 1)^3.$$

Члены слева образуют арифметическую прогрессию.

[4; 18, с. 8].

**3.2.** Условие легко разбивается на четыре части, выраженных четырьмя уравнениями

$$\begin{aligned} a - d + bg^{-1} &= 85, \\ a + b &= 76, \\ a + d + bg &= 84, \\ 3a &= 126. \end{aligned}$$

Последнее уравнение дает  $a = 42$ , тогда второе  $b = 34$ . Складывая оставшиеся два уравнения, получаем

$$2a + b(g^{-1} + g) = 169.$$

Поскольку  $a$  и  $b$  уже известны получаем квадратное уравнение относительно  $g$ . Оно дает

$$g = 2, \quad d = -26 \quad \text{или} \quad g = \frac{1}{2}, \quad d = 25.$$

Прогрессии таковы

$$68, \quad 42, \quad 16 \qquad 17, \quad 42, \quad 67$$

или

$$17, \quad 34, \quad 68 \qquad 68, \quad 34, \quad 17.$$

[4; 17, с. 236].

**3.3.** Три части условия выражаются посредством

$$\sin \alpha = \frac{x}{a},$$

$$\sin \beta = \frac{x}{b},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Исключение  $a$  и  $b$  дает

$$x^2 = \frac{c^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta}{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma}.$$

[4; 17, с. 237].

**3.4.** В тетраэдре высота является одной стороной прямоугольного треугольника, чья гипотенуза является ребром. Если ребро имеет длину  $a$  другая сторона треугольника имеет длину  $a/\sqrt{3}$  (это две трети от высоты грани). Поскольку длина высоты равна  $r_1 + r_2$  получаем

$$r_1 + r_2 = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Центр тетраэдра лежит на высоте и линейный отрезок длины  $r_2$ , соединяющий центр с противоположной вершиной прямоугольного треугольника, является гипотенузой второго прямоугольного треугольника, чьи стороны имеют длину  $r_1$  и  $a/\sqrt{3}$ . Следовательно

$$r_2^2 - r_1^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Разделив на предыдущее равенство, получаем систему

$$r_2 - r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{6},$$

$$r_2 + r_1 = \frac{a\sqrt{6}}{3},$$

чье решение равно  $r_1 = a\sqrt{6}/12$  и  $r_2 = a\sqrt{6}/4$ . Следовательно  $r_1 : r_2 = 1 : 3$ .

В кубе, если  $b$  является длиной ребра, то  $r_2 = b/2$  и  $r_3 = b\sqrt{3}/2$ . Следовательно  $r_2 : r_3 = 1 : \sqrt{3}$  и  $r_1 : r_2 : r_3 = 1 : 3 : 3\sqrt{3}$ .

[4; ср. 18, с. 203, пример 17].

## Решения 4

**4.1.** Если  $s$  есть число в последовательности,  $s$  должно иметь вид

$$11 + 100m = 4(25m + 2) + 3,$$

где  $m$  – неотрицательное целое число и поэтому  $s$  оставляет остаток 3, когда делится на 4. Но квадраты имеют вид  $4n^2$  или  $4n^2 + 4n + 1$  и, следовательно, оставляют остатки либо 0, либо 1, когда делятся на 4.

[5; 21, с. 192].

### 4.2.

(А) Значениям  $l$  от 1 до 9 включительно соответствуют 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 треугольников соответственно или  $5^2 = 25$  всех треугольников.

(В) Общий закон должен быть

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4},$$

смотря по тому, четно или нечетно  $n$ . Единый закон для обоих случаев: целое число, ближайшее к  $(n+1)^2/4$ .

[5; ср. 18, с. 9, пример 5].

### 4.3.

(А) Пусть  $a$  будет стороной равностороннего треугольника. Соединяя точку внутри треугольника с тремя вершинами, Вы разбиваете его на три треугольника с площадями, которые будучи сложенными вместе дают полную площадь:  $ax/2 + ay/2 + az/2 = ah/2$ . Разделите на  $a/2$ .

(В) Точка внутри правильного тетраэдра с высотой  $h$  расположена на расстояниях  $x, y, z$  и  $w$  от четырех граней соответственно. Тогда  $x + y + z + w = h$ . Доказательство аналогично: разделить правильный тетраэдр на четыре тетраэдра.

(С) Соотношение остается в силе в обоих случаях (А) и (В) для внешней точки, при условии, если расстояния  $x, y, z$  (и  $w$ ) берутся с соответствующим знаком: плюс (+), когда наблюдатель, расположенный в точке, видит сторону (грань) изнутри, минус (-), когда он видит ее снаружи. Доказательство, в сущности, то же самое.

[5; 19, с. 161].

## Решения 5

5.1. Общий закон есть

$$1 - 4 + 9 - 16 + \dots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

Шаг от  $n$  к  $n+1$  требует от нас проверить, что

$$(-1)^n(n+1)^2 = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)}{2} - (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

[6; 18, с. 116].

**5.2.** При любом расположении две стороны угла должны проходить через две вершины квадрата. Пока они проходят через эту пару вершин, вершина угла движется вдоль той же круговой дуги (по теореме упомянутой в указании). Следовательно, каждое из двух геометрических мест точек состоит из нескольких круговых дуг: из 4 полуокружностей в случае (А) и 8 четверть окружностей в случае (В). (См. рисунок в [17, с. 244]).

[6; ср. 17, с. 234 – 235, задача 7].

**5.3.** 13 осей могут быть классифицированы следующим образом:

(1) 4 оси, каждая проходит через две противоположные вершины; углы  $120^\circ$ ,  $240^\circ$ .

(2) 6 осей, каждая проходит через средние точки двух противоположных ребер; угол  $180^\circ$ .

(3) 3 оси, каждая проходит через центр двух противоположных граней; углы  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ .

Длины равны  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}$  и 1 соответственно и средняя равна

$$\frac{4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} + 3}{13} = 1,42.$$

[6; ср. 17, с. 235, задача 8].

## Решения 6

**6.1.** Пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  означают стороны, последняя – гипотенузу. Три части условия выражаются посредством

$$\begin{aligned} a + b + c &= 60, \\ a^2 + b^2 &= c^2, \\ ab &= 12c. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab,$$

получаем

$$(60 - c)^2 = c^2 + 24c.$$

Следовательно,  $c = 25$  и либо  $a = 15$ ,  $b = 20$ , либо  $a = 20$ ,  $b = 15$  (без разницы для треугольника).

[7; 17, с. 237].

**6.2.** Четырехугольник должен быть выпуклым. Назовем I, II, III, IV треугольники, которые получены разделением с помощью диагоналей; (I), (II), (III), (IV) – площади четырех треугольников соответственно; и  $p, q, r, s$  длины четырех линейных отрезков между вершинами и точкой пересечения диагоналей. Введем такой порядок, при котором сторона длиной  $p$  является общей для IV и I,  $q$  – для I и II,  $r$  – для II и III,  $s$  – для III и IV; I – противоположен III, II – противоположен IV;  $p + r$  есть длина одной диагонали,  $q + s$  есть длина другой диагонали. Пусть  $p$  и  $q$  образуют угол  $\alpha$ . Тогда

$$2(\text{I}) = pq \sin \alpha, \quad 2(\text{II}) = qr \sin \alpha,$$

$$2(\text{III}) = rs \sin \alpha, \quad 2(\text{IV}) = sp \sin \alpha.$$

Следовательно,

$$(A) \text{ I}(\text{III}) = (\text{II})(\text{IV});$$

(B) Основание в I параллельно основанию в III, тогда и только тогда, когда

$$p/q = r/s \quad \text{или} \quad (\text{II}) = (\text{IV});$$

(C) Четырехугольник есть параллелограмм тогда и только тогда, когда

$$p = r, \quad q = s \quad \text{или} \quad (\text{I}) = (\text{II}) = (\text{III}) = (\text{IV}).$$

[7; 19, с. 161].

**6.3.** Пусть  $h$  – общая высота, а  $a$  и  $b$  – радиусы нижнего и верхнего оснований усеченного конуса соответственно. Тогда радиус цилиндра равен  $(a + b)/2$ . Разность объемов усеченного конуса и цилиндра

$$\pi h \left[ \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \left( \frac{a + b}{2} \right)^2 \right] = \frac{\pi h (a - b)^2}{12}$$

положительна, если только  $a$  не равно  $b$  и тела не совпадают.  
[7; ср. 20, с. 51, пример 2.54].

## Решения 7

**7.1.** Поскольку  $A + B + C = 180^\circ$ , доказательство того, что  $A < (B + C)/2$  равносильно доказательству того, что  $A < (180^\circ - A)/2$  или  $A < 60^\circ$ . Но  $A < 60^\circ$  эквивалентно тому, что  $\cos A > 1/2$ , что наводит на мысль использовать теорему косинусов.

Примем, что  $b + c > 2a$ . Возводя в квадрат обе стороны и применяя теорему косинусов, получим

$$b^2 + 2bc + c^2 > 4(b^2 + c^2 - 2bc \cos A)$$

или

$$8bc \cos A > 3b^2 + 3c^2 - 2bc.$$

Вычитая  $4bc$  от обеих частей неравенства, получаем

$$4bc(2 \cos A - 1) > 3(b - c)^2 \geq 0.$$

Следовательно,  $\cos A > 1/2$ .

**7.2.** Согласно четырем предположениям, объем усеченного конуса равен соответственно

$$\text{I. } [(a + b)/2]^2 h,$$

$$\text{II. } [(a^2 + b^2)/2]h,$$

$$\text{III. } [a^2 + b^2 + (a + b)^2/4]h/3,$$

$$\text{IV. } [a^2 + b^2 + ab]h/3.$$

Если  $b = a$ , усеченный конус становится призмой с объемом  $a^2 h$ : все четыре предположения находятся в согласии с полученным правильным результатом. Если  $b = 0$ , усеченный конус становится пирамидой с объемом  $a^2 h/3$ : только IV дает это и поэтому другие должны, быть неверными.



Чтобы доказать, что IV, вообще говоря, правильно, обозначим через  $x$  высоту маленькой пирамиды, отрезанной от полной пирамиды, чтобы сделать ее усеченной. Если объемы усеченного конуса, полной пирамиды и маленькой пирамиды равны  $F$ ,  $A$  и  $B$  соответственно, то

$$F = A - B = \frac{a^2(x+h)}{3} - \frac{b^2x}{3} = [a^2h + (a^2 - b^2)x] \frac{1}{3}.$$

Часть плоскости фигуры, проходящей через высоту и параллельную одной стороне основания, содержит подобные треугольники, чьи стороны приводят к пропорции

$$\frac{x}{x+h} = \frac{b}{a}$$

так, что

$$x = \frac{bh}{a-b}.$$

Подставляя это значение  $x$  в выражение для  $F$ , получаем

$$F = \left[ a^2h + \frac{a^2 - b^2}{a-b}bh \right] \frac{1}{3} = [a^2 + b^2 + ab] \frac{h}{3}.$$

[19, с. 162; ср. 17, с. 210 – 211 и 21, с. 2 – 7].

**7.3.** Допустим, что  $x$ ,  $y$  и  $z$  целые. Пусть  $2^k$ ,  $k \geq 0$  является наибольшей степенью двойки, которая делит  $x$ ,  $y$  и  $z$  так, что  $x = 2^k x'$ ,  $y = 2^k y'$  и  $z = 2^k z'$ . Тогда, подставляя в данное уравнение и деля на  $2^{2k}$ , получаем

$$(x')^2 + (y')^2 + (z')^2 = 2^{k+1} x' y' z'.$$

Поскольку член в правой части является четным, то и левая сторона – четна, и либо  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  все четные; либо только одно из них. Но если  $x'$ ,  $y'$  и  $z'$  все не равны нулю (а если один равен нулю, то и другие равны нулю), они не могут все быть четными, потому что 2 не является их общим множителем. Допустим, что  $x'$  – четное, а  $y'$  и  $z'$  – нечетные. Вычитая  $(x')^2$  от обеих частей вышенаписанного уравнения, получаем

$$(y')^2 + (z')^2 = x'(2^{k+1} y' z' - x').$$

Как  $(y')^2$  так и  $(z')^2$  представляются в виде  $4n^2 + 4n + 1$  и поэтому левая часть, деленная на 4, оставляет в остатке 2, тогда как правая часть делится на 4 без остатка (как  $x'$  так и число в круглых скобках – четные): противоречие.

## Решения 8

### 8.1.

(А) Наименьшее возможное количество долларов в кармане равно, очевидно, 0. Следующее большее число равно, по крайней мере, 1, следующее большее – по крайней мере, 2, ..., и количество в последнем (десятом) кармане равно, по крайней мере, 9. Следовательно, количество требуемых долларов равно, по крайней мере,

$$0 + 1 + 2 + 3 + \dots + 9 = 45.$$

Боб не может выполнить свое желание: у него только 44 доллара.

(В) В общем случае, задача имеет решение, если

$$n \geq 0 + 1 + 2 + \dots + (p - 1) = \frac{p(p - 1)}{2}.$$

Решения нет, если

$$n \leq \frac{p(p - 1)}{2} - 1 = \frac{(p + 1)(p - 2)}{2}.$$

[8; 9, ср. 17, с. 234, задача 3].

8.2. Общий закон имеет вид

$$\frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{n}{(n + 1)!} = 1 - \frac{1}{(n + 1)!}.$$

Шаг от  $n$  к  $n + 1$  требует, чтобы

$$\frac{n + 1}{(n + 2)!} = -\frac{1}{(n + 2)!} + \frac{1}{(n + 1)!}$$

или

$$\frac{n+2}{(n+2)!} = \frac{1}{(n+1)!},$$

которое истинно для  $n = 1, 2, 3, \dots$

[8; 9; 17, с. 237].

**8.3.** Заметим, что первое и четвертое уравнения находятся в таком же соотношении, как второе и третье уравнения: левые части имеют те же коэффициенты, но в противоположном порядке, а правые части противоположны. Складывая первое уравнение с четвертым и второе с третьим, получаем

$$\begin{aligned} 6(x+u) + 10(y+v) &= 0, \\ 10(x+u) + 10(y+v) &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что  $x+u=0$  и  $y+v=0$ . Подставляя  $-x$  вместо  $u$  и  $-y$  вместо  $v$  в первоначальные уравнения, находим

$$\begin{aligned} -4x + 4y &= 16, \\ 6x - 2y &= -16. \end{aligned}$$

Следовательно,  $x = -2, y = 2, u = 2, v = -2$ .

[8; 9; 17, с. 235 – 236].

#### 8.4.

(А) Составляя уравнения, мы считаем, что  $x$  и углы  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  заданы, а  $l$  – неизвестна. Из  $\triangle UVG$  находим  $GV$  через  $x, \alpha + \beta$  и  $\gamma$  (теорема синусов). Из  $\triangle VUH$  находим  $HV$  через  $x, \beta$  и  $\gamma + \delta$  (теорема синусов). Из  $\triangle GHV$  находим  $l$  через  $GV, HV$  и  $\delta$  (теорема синусов), а используя выражения для  $GV$  и  $HV$ , получаем

$$l^2 = x^2 \left[ \frac{\sin^2(\alpha + \beta)}{\sin^2(\alpha + \beta + \gamma)} + \frac{\sin^2 \beta}{\sin^2(\beta + \gamma + \delta)} - \frac{2 \sin(\alpha + \beta) \sin \beta \cos \delta}{\sin(\alpha + \beta + \gamma) \sin(\beta + \gamma + \delta)} \right].$$

(В) В частном случае, в котором  $\alpha = \delta, \beta = \gamma, \alpha + \beta = \gamma + \delta = \pi/2$  верхнее уравнение дает  $x = l$ , как это и должно быть. Можно рассмотреть также случай, в котором  $\alpha = \delta, \beta = \gamma,$

но значение  $\alpha + \beta$ , не устанавливается, и случай, в котором  $\delta$ ,  $\gamma$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  подставляются вместо  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\delta$  соответственно. Окончательно, можете также проверить размерность (см. [17, с. 202 – 205]).

(С) Неизвестное и одно из данных меняются ролями.  
[8; 9; ср. 20, с. 49, пример 2.35].

## Решения 9

**9.1.** На  $n$ -ой строчке правая часть, по-видимому, будет  $n^3$ , а левая часть будет суммой  $n$  членов. Конечный член этой суммы равен нечетному числу  $m$  или  $2m - 1$ , где

$$m = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Следовательно, последний член суммы в левой части должен быть

$$2m - 1 = n^2 + n - 1.$$

Начальный член рассматриваемой суммы может быть установлен двумя способами: сперва путем возвращения назад на  $n - 1$  шагов от конечного члена, затем путем продвижения на один шаг от конечного члена предыдущей строки:

$$\begin{aligned} (n^2 + n - 1) - 2(n - 1) &= n^2 - n + 1, \\ ((n - 1)^2 + (n - 1) - 1) + 2 &= n^2 - n + 1. \end{aligned}$$

Но  $(n^2 - n + 1) + (n^2 - n + 3) + \dots + (n^2 + n - 1)$  является суммой  $n$  последовательных членов арифметической прогрессии, чья общая разность равна 2. Ее сумма равна

$$\frac{(n^2 - n + 1) + (n^3 + n - 1)}{2} \cdot n = n^3.$$

(Быстрая проверка убеждает, что  $n$ -ый ряд состоит из членов, среднее которых равно  $n^2$ ).

[10; 17, с. 237].

**9.2.** Периметр шестиугольника состоит из  $6n$  граничных линий длиной 1 и содержит  $6n$  вершин. Следовательно,

$$V = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \dots + n) = 3n^2 + 3n + 1.$$

Посредством 3 диагоналей, проходящих через его центр, шестиугольник разбивается на 6 (больших) равносторонних треугольников. Проверкой одного из них убеждаемся

$$T = 6(1 + 3 + 5 + \dots + 2n - 1) = 6n^2.$$

$T$  треугольников имеют совместно  $3T$  сторон. В этом общем числе  $3T$  каждая внутренняя линия разделения длиной 1 считается дважды, тогда как  $6n$  линий вдоль периметра шестиугольника считаются только один раз. Следовательно,

$$2L = 3T + 6n, \quad L = 9n^2 + 3n.$$

(Как следует из теоремы Эйлера для многоугольников  $T + V = L + 1$ ).

[10; 17, с. 237 – 238].

**9.3.** Раскрывая правую часть предполагаемого тождества и приравнивая соответствующие коэффициенты, получаем

$$aA = bB = cC = 1, \quad (1)$$

$$bC + cB = cA + aC = aB + bA = 0. \quad (2)$$

Из (2) устанавливаем, что

$$bC = -cB, \quad cA = -aC, \quad aB = -bA$$

и перемножая эти три выражения, получаем, что

$$abcABC = -abcABC,$$

откуда

$$abcABC = 0.$$

Также из (1) устанавливаем, что

$$abcABC = 1.$$

Следовательно, предполагаемое тождество невозможно.

[10; 20, с. 54].

## Решения 10

**10.1.** Требуемый кусок земли ограничен двумя меридианами и двумя параллельными окружностями. Поскольку дуга параллельной окружности, отделенная двумя неподвижными меридианами, постоянно укорачивается по мере удаления от экватора, центр земли, которую хочет Боб, должен лежать на экваторе; он не сможет получить его в США.

[11; 17, с. 234].

### 10.2.

(А) Сравнивая коэффициенты у одинаковых степеней в обеих частях тождества, получаем

$$\begin{array}{rcl} 1 = p^2, & 4 = 2pq, & -2 = q^2 + 2pr, \\ -12 = 2qr, & & 9 = r^2. \end{array}$$

Первые три уравнения, используемые последовательно, определяют две системы решений

$$p = 1, \quad q = 2, \quad r = -3 \quad \text{и} \quad p = -1, \quad q = -2, \quad r = 3,$$

обе из которых также удовлетворяют оставшимся двум уравнениям.

(В) Обычно невозможно удовлетворить системе с большим числом уравнений, чем число неизвестных.

[11; 20, с. 54].

### 10.3.

(А) Боб, Пауль и Петер проделали равный путь, поэтому имеем

$$ct_1 - ct_2 + ct_3 = ct_1 + pt_2 + pt_3 = pt_1 + pt_2 + ct_3.$$

Второе уравнение дает

$$(c - p)t_1 = (c - p)t_3.$$

Поскольку мы полагаем, что  $c > p$ , то  $t_1 = t_3$ , т.е. Петер идет пешком столько же, сколько и Пауль. Из первого уравнения находим, что

$$(c - p)t_3 = (c + p)t_2$$

и поэтому получаем

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{t_3}{t_2} = \frac{c+p}{c-p}.$$

Следовательно, продвижение за час равно

$$\frac{c(t_1 - t_2 + t_3)}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c(c+3p)}{3c+p}.$$

$$(B) \frac{t_2}{t_1 + t_2 + t_3} = \frac{c-p}{3c+p}.$$

(C) В экстремальном случае  $p = 0$ , (A) дает  $c/3$ , а (B) дает  $1/3$ . Если  $p = c$  (A) дает  $c$ , а (B) дает  $0$ . Эти значения интуитивно разумны.

[11; 17, с. 236; ср. 20, с. 53 – 54, пример 2.60 – 2.61].

**10.4.** Основание пирамиды является многоугольником с  $n$  сторонами. В случае (A)  $n$  боковых ребер пирамиды равны; в случае (B) высоты (проведенные из верхушки) ее  $n$  боковых граней равны. Проведите высоту пирамиды и соедините ее основание с  $n$  вершинами основания пирамиды в случае (A), но с основаниями высот  $n$  боковых граней в случае (B). В обоих случаях получаем  $n$  конгруэнтных прямоугольных треугольничка. Они имеют одну сторону (высоту пирамиды) общую, а гипотенуза – боковое ребро в случае (A) и боковая высота в случае (B) – одной и той же длины в каждом. Следовательно, третьи стороны в конгруэнтных треугольничках должны быть равны. Поскольку они проведены из той же самой точки (основания высоты) в той же плоскости (в основании), они образуют  $n$  радиусов круга, который описан около или вписан в основание пирамиды, в случаях (A) и (B) соответственно. В случае (B) остается показать, что  $n$  упомянутых радиусов перпендикулярны соответствующим сторонам основания, но это следует из хорошо известной теоремы стереометрии.

[11; 17, с. 235].

## Решения 11

**11.1.** Любая плоская фигура с центром симметрии разбивается прямыми линиями, проходящими через этот центр, на две конгруэнтные части, следовательно, две части равной площади. Требуемая линия проходит через центр симметрии.

[12; 17, с. 234].

**11.2.** Обозначим количество способов уплатить сумму в  $n$  центов как:

$A_n$ , если используются только центы,

$B_n$ , если используются центы и пятицентовые монеты,

$C_n$ , если используются центы, пятицентовые и десятицентовые монеты,

$D_n$  если используются центы, пятицентовые, десятицентовые и четверть долларовые монеты,

$E_n$  если используются центы, пятицентовые, десятицентовые, четверть- и полдолларовые монеты.

(Вы сможете увидеть сейчас причину для обозначения  $E_n$ ). Рассмотрим случай  $C_n$ . Если десятицентовые монеты не используются, количество способов равно  $B_n$ . Если по крайней мере используется одна десятицентовая монета,  $n - 10$  центов остаются для уплаты в центах, пятицентовых и десятицентовых монетах. Следовательно,

$$C_n = B_n + C_{n-10}.$$

Аналогично

$$B_n = A_n + B_{n-5},$$

$$D_n = C_n + D_{n-25},$$

$$E_n = D_n + E_{n-50}$$

Эти формулы остаются в силе, если положим

$$A_0 = B_0 = C_0 = D_0 = E_0 = 1$$

и будем считать любую из величин  $A_n, B_n, \dots, E_n$ , равной нулю для отрицательных  $n$ . Формулы позволяют подсчитать



величины рекурсивно, т.е. посредством возвращения к более низким значениям  $n$  или к предшествующим буквам алфавита. Это дает следующую таблицу, которая среди прочих содержит значения для  $E_{25}(=D_{25})$  и  $E_{50}$ :

$n$	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$A_n$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$B_n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$C_n$	1	2	4	6	9	12	16	20	25	30	36
$D_n$	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	49
$E_n$	1	2	4	6	9	13	18	24	31	39	50

[12; ср. 17, с. 238, задача 20 и 20, с. 97, пример 3.84].

**11.3.** Пусть  $\alpha$  означает угол противоположный стороне  $a$  треугольника  $\Delta$ . Равные стороны равнобедренных треугольников с основаниями  $b$  и  $c$  имеют длины  $b/\sqrt{3}$  и  $c/\sqrt{3}$  соответственно. Две из этих сторон образуют с  $s$  треугольник такой, что угол против  $s$  равен  $\alpha + \pi/3$ . Теорема косинусов примененная к этому треугольнику, дает

$$3s^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right).$$

Применяя теорему косинусов к данному треугольнику  $\Delta$ , чтобы выразить  $bc \cos \alpha$  и положив  $bc \sin \alpha = 2T$ , где  $T$  – площадь  $\Delta$ , получим

$$6s^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}T.$$

Поскольку  $T$  симметрично относительно  $a, b$  и  $c$ , то это искомое выражение.

[12; ср. 21, с. 26 – 28, раздел 8.4 и с.32, пример 8.3].

**11.4.** Пусть  $A, B, C, D, \dots, J$  являются сидящими вокруг стола людьми, а  $a, b, c, d, \dots, j$  – количество полученного ими соответственно;  $B$  сидит направо от  $A$ ,  $C$  – направо от  $B, \dots$ ,  $A$  – направо от  $J$ . Правило выражается равенствами

$$b = \frac{a+c}{2}, \quad c = \frac{b+d}{2}, \quad d = \frac{c+e}{2}, \quad \dots, \quad \frac{j+b}{2}.$$

**Первое решение.** Из верхних равенств следует, что

$$b - a = c - b = d - c = \dots = a - j,$$

так что доля каждого превышает долю его соседа слева на то же количество. Это постоянное превышение должно быть нулевым, поскольку

$$(b - a) + (c - b) + (d - c) + \dots + (a - j) = 0.$$

Существует только один способ распределить деньги: все доли равны.

**В т о р о е р е ш е н и е.** Один (или несколько) из сидящих за столом должен получить максимальное количество. Пусть таким будет  $B$ . Тогда ни одно из количеств  $a, \dots, j$  не будет больше чем  $b$  и, в частности,

$$b - a \geq 0, \quad b - c \geq 0.$$

Кроме того, согласно условию задачи

$$b - a = -(b - c).$$

Следовательно, обе величины  $b - a$  и  $b - c$  должны равняться нулю. Таким образом,  $c$  также достигает максимума как  $d$  и т.д. Следовательно,  $a = b = c = \dots = j$ .

[12].

## Решения 12

**12.1.** Боб имеет  $x$  марок, из которых  $y$  седьмых лежат во втором альбоме;  $x$  и  $y$  являются положительными целыми числами,

$$\frac{2x}{10} + \frac{yx}{7} + 303 = x$$

и следовательно,

$$x = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 101}{28 - 5y}.$$

Знаменатель на правой стороне должен быть положительным и нечетным числом, поскольку он должен делить числитель, который является нечетным. Это оставляет три возможности:

$y = 1, 3$  и  $5$ . Только последний случай дает делитель числителя. Следовательно, неизвестные определяются единственным образом:  $y = 5$  и  $x = 3535$ .

[13; 20, с. 55].

**12.2.** Плоскость, проходящая через  $h$  и трехпрямоугольную вершину, пересекает тетраэдр, сечением которого является прямоугольный треугольник с гипотенузой  $h$ , одной стороной  $p$  и другой стороной, скажем  $k$ , которая является высотой, перпендикулярной стороне  $a$  в треугольнике площадью  $A$ . Следовательно,

$$h^2 = k^2 + p^2 \quad \text{и} \quad A = \frac{1}{2}ak.$$

Поскольку  $2D = ah$ , из последних двух соотношений следует, что

$$4D^2 = a^2h^2 = a^2(k^2 + p^2) = 4A^2 + a^2p^2.$$

Используя соотношение, установленное перед этим (первоначально данное в указаниях), получим далее

$$4D^2 = 4A^2 + (r^2 + q^2)p^2 = 4A^2 + (rp)^2 + (pq)^2.$$

Используя два соотношения, установленных ранее, и деля на 4, получим окончательное выражение

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2,$$

которое аналогично теореме Пифагора.

[13; ср. 20, с. 34, раздел 2.5(2)].

**12.3.** Рассмотрим прежде всего простейший специальный случай равностороннего треугольника. Симметрия может привести нас к предположению, что в этом случае четыре треугольных части будут также равносторонними. Однако, если это так, стороны треугольных частей должны быть параллельны сторонам данного треугольника. Это замечание ведет к конфигурации, которая решает общий случай так же, как частный случай равностороннего треугольника: посредством четырех линий, параллельных стороне данного треугольника, пересекаем каждую из двух других сторон на пять равных отрезков. Выполняя это построение три раза по отношению к

каждой стороне данного треугольника, мы разделим его на 25 конгруэнтных треугольников, подобных ему. Из этих 25 треугольников мы легко извлечем четыре треугольника, упомянутых в задаче; площадь каждого из них равна  $1/25$  площади данного треугольника. (Единственность этого решения не доказана).

[13; 20, с. 50].

## Решения 13

**13.1.** Разложим 32118 на простые множители, т.е.  $2 \times 3 \times 53 \times 101$ . Существует только шесть способов разложить это число на произведение трех множителей, отличных от 1:

$$\begin{array}{ll} 6 \times 53 \times 101, & 2 \times 101 \times 159, \\ 3 \times 101 \times 106, & 2 \times 53 \times 303, \\ 3 \times 53 \times 202, & 2 \times 3 \times 5353. \end{array}$$

Только первое из этих разложений представляет собой два множителя между 4 и 100. Следовательно, у капитана 6 детей, ему 53 года и длина его корабля равна 101 футу.

[14; 20, с. 139].

**13.2.** Положив  $x + y + u + v = s$  (которое остается неизменным при любой перестановке  $x, y, u$  и  $v$ ) и складывая четыре уравнения, получим

$$s = -3$$

и система приводится к следующим четырем уравнениям:

$$s - v = 4, \quad s - x = -5, \quad s - y = 0, \quad s - u = -8.$$

Следовательно,  $x = 2, y = -3, u = 5, v = -7$ .

[14; ср. 20, с. 153, пример 6.24].

**13.3.** Утверждение I ошибочно; утверждения II и III – верны.

Когда три высоты, медианы или биссектрисы все лежат полностью внутри треугольника (как это и есть, кроме случая высот в тупом или прямоугольном треугольнике), мы имеем следующую ситуацию:  $A, B, C$  являются вершинами треугольника, а  $A', B', C'$  – внутренние точки на противоположных сторонах соответственно; и мы должны рассмотреть сумму  $AA' + BB' + CC'$ . Поскольку сумма двух любых сторон треугольника больше, чем третья сторона

$$\begin{aligned} AA' + A'B &> AB, \\ AA' + A'C &> AC. \end{aligned}$$

Складывая, получаем

$$2AA' + BC > AB + CA$$

и по аналогии

$$\begin{aligned} 2BB' + CA &> BC + AB, \\ 2CC' + AB &> CA + BC. \end{aligned}$$

Складывая последние три неравенства, получим

$$2(AA' + BB' + CC') > AB + BC + CA.$$

Следовательно, утверждения II и III верны, а утверждение I верно для острых треугольников.

В качестве контрпримера к утверждению I рассмотрим равнобедренный треугольник с основанием  $b$  и углами при основании  $A$ . Когда  $A$  стремится к 0, каждая высота стремится к нулю, в то время как периметр стремится к  $2b$ . Угол  $A$ , достаточно близкий к 0, опровергает утверждение I.

[14; 19, с. 214, пример 16.6.1].

**13.4.** Обследованные случаи наводят на мысль, что

$$1!1 + 2!2 + 3!3 + \dots + n!n = (n+1)! - 1.$$

Это может быть доказано математической индукцией или следующим способом:

$$(n+1)! - n! = n!(n+1) - n! = n!n.$$

Поэтому для  $n = 1, 2, 3, \dots, n$ :

$$\begin{aligned} 1!1 &= 2! - 1!, \\ 2!2 &= 3! - 2!, \\ 3!3 &= 4! - 3!, \\ &\dots \\ n!n &= (n+1)! - n! \end{aligned}$$

Сложение этих соотношений приводит после очевидных сокращений к требуемому результату.

[14].

## Решения 14

**14.1.** Используем следующие обозначения:

$u$  – скорость Эла,

$v$  – скорость Билла,

$t_1$  – время от начала до первой встречи,

$t_2$  – время от начала до второй встречи,

$d$  – длина улицы.

Тогда

$$\begin{aligned} ut_1 &= a, & ut_2 &= d + b, \\ vt_1 &= d - a, & vt_2 &= 2d - b. \end{aligned}$$

(А) Выражая  $u/v$  двумя различными способами, получаем

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d+b}{2d-b}.$$

Следовательно, после приведения подобных членов находим  $d = 3a - b$ .

(В) Эл придет быстрее. Численно:  $u/v = 3/2$ .

[20, с. 53].

**14.2.** Для первой структуры  $100\pi/4$ , а для второй  $100\pi/(2\sqrt{3})$  или приблизительно 78,54% и 90,69% соответственно. Переход

от большого (квадратного) стола к бесконечному, в действительности, включает понятие предела, но мы не настаиваем на этом, поскольку результат интуитивен.

[20, с. 50].

**14.3.** Отметим прежде, что если  $n$  больше 1, частное от  $n^{n-1} - 1$  и  $n - 1$  равно

$$n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1.$$

Можно понять эту сумму, как получающуюся из полинома

$$R(x) = (1+x)^{n-2} + (1+x)^{n-3} + \dots + (1+x) + 1,$$

если подставить в него  $n - 1$  вместо  $x$ . В раскрытии  $R(x)$  по степеням  $x$  (можно использовать формулу бинома) член, независимый от  $x$ , равен  $R(0) = n - 1$  и поэтому

$$R(x) = Q_{n-3}(x)x + n - 1,$$

где  $Q_{n-3}(x)$  — полином степени  $n - 3$ , чьи коэффициенты являются целыми. Подставляем  $n - 1$  вместо  $x$  и приходим к заключению:

$$\begin{aligned} n^{n-1} - 1 &= (n - 1)R(n - 1) = \\ &= (n - 1)[Q_{n-3}(n - 1)(n - 1) + n - 1] = \\ &= (n - 1)^2[Q_{n-3}(n - 1) + 1]. \end{aligned}$$

**14.4.** Пусть  $A$ ,  $B$  и  $C$  являются вершинами данного треугольника и пусть  $a$ ,  $b$  и  $c$  являются длинами противолежащих сторон соответственно. Рассмотрим сторону шестиугольника противоположную стороне длиной  $a$  и обозначим ее длину как  $a'$ . Рисуя различные фигуры и рассматривая крайние случаи, мы видим, что нам необходимо показать, что  $a' = 2a_m$ , где  $a_m$  — длина медианы  $\triangle ABC$ , проведенной к стороне длиной  $a$ . Продолжим  $AC$  к  $D$  так, что  $AD = b$  и соединим  $D$  с  $B$ . Тогда  $\triangle CDB \sim \triangle CAA'$ , где  $A'$  — средняя точка стороны  $BC$ , так что  $AA' = a_m$ . Следовательно, медиана  $\triangle ABC$  длины  $a_m$  параллельна  $BD$  и  $a_m = BD/2$ . Но треугольник, чьи стороны имеют длины  $a'$ ,  $b$  и  $c$  конгруэнтен  $\triangle ABD$  (по двум сторонам и углу между ними). Следовательно,  $a_m = a'/2$ .

## Решения 15

**15.1.** Если снижение цены равно  $x$  центов и имеется  $y$  ручек в оставшемся запасе  $x < 50$  и

$$xy = 3193.$$

Тогда  $3193 = 31 \times 103$  является произведением двух простых чисел и поэтому оно имеет точно четыре различных множителя 1, 31, 103 и 3193. Если мы положим что  $x$  — целое, то  $x = 1$  или 31. Если мы положим также, что  $x > 1$ , то  $x = 31$ .

[15; 20, с. 55].

**15.2.** Пусть расстояния от  $P$  до четырех сторон прямоугольника равны  $x, y, x', y'$  в указанном порядке. С выбранными обозначениями

$$\begin{aligned} a^2 &= y'^2 + x^2, & b^2 &= x^2 + y^2, \\ c^2 &= y^2 + x'^2, & d^2 &= x'^2 + y'^2, \end{aligned}$$

и поэтому

$$a^2 + c^2 = b^2 + d^2.$$

В нашем случае  $a = 5, b = 10, c = 14$  и поэтому

$$d^2 = 25 - 100 + 196 = 121, \quad d = 11.$$

Отметим, что данные  $a, b$  и  $c$ , которые определяют  $d$ , недостаточны, чтобы определить стороны  $x + x'$  и  $y + y'$  прямоугольника.

[15; 20, с. 50].

**15.3.** Напишем известное соотношение

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

и подставим в него последовательно  $\alpha/2, \alpha/4$  и  $\alpha/8$  вместо  $\alpha$ . Получим

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{2 \sin \frac{\alpha}{2}},$$



$$\cos \frac{\alpha}{4} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{2 \sin \frac{\alpha}{4}},$$

$$\cos \frac{\alpha}{8} = \frac{\sin \frac{\alpha}{4}}{2 \sin \frac{\alpha}{8}}.$$

Умножение трех равенств дает после очевидных сокращений требуемое тождество. Если мы последовательно продолжим эти равенства до  $n$ , то их произведение дает

$$\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{8} \cdots \cos \frac{\alpha}{2^n} = \frac{\sin \alpha}{2^n \sin \frac{\alpha}{2^n}}.$$

Можно также предположить эту более общую формулу и доказать ее методом математической индукции.

[15].

**15.4.** Пусть  $O$  означает объем октаэдра,  $T$  – объем тетраэдра, а  $a$  – длину ребра.

**Первое решение.** Октаэдр разделен соответствующей плоскостью на две конгруэнтные правильные пирамиды, чье общее квадратное основание имеет площадь  $a^2$ . Высота одной из этих пирамид равна  $a/\sqrt{2}$  (на хорошем чертеже она проходит через диагональ основания) и поэтому

$$O = 2 \frac{a^2}{3} \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}.$$

Проведем плоскость через высоту (длиной  $h$ ) тетраэдра и через боковое ребро. Сечение разделяется высотой на два прямоугольных треугольника, из которых получаем

$$h^2 = a^2 - \left( \frac{2a\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \left( \frac{a\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \left( \frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{2a^2}{3}$$

и поэтому

$$T = \frac{1}{3} \frac{a}{2} \frac{a\sqrt{3}}{2} \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}.$$

Окончательно

$$O = 4T.$$

**Второе решение.** Рассмотрим правильный тетраэдр с ребром  $2a$ ; его объем равен  $2^3T$ . Четыре плоскости, каждая из которых проходит через средние точки трех его ребер, оканчивающихся в той же вершине, пересекают его на четыре правильных тетраэдра, каждый объемом  $T$ , и правильный тетраэдр объемом  $O$ . Следовательно,

$$4T + O = 8T$$

и опять приходим к  $O = 4T$ .

[15; 20, с. 51].

## Решения 16

**16.1.** Простейшим выражением, которое симметрично по  $x$ ,  $y$  и  $z$ , является их сумма. Складывая три предложенных уравнения, получим

$$\begin{aligned} 10000x + 10000y + 10000z &= 20000, \\ x + y + z &= 2. \end{aligned}$$

Вычитая

$$2134x + 2134y + 2134z = 4268$$

из каждого из трех предложенных уравнений, получим три новых уравнения, решения которых равны  $x = 1$ ,  $y = -1$ ,  $z = 2$ .

[16; ср. 20, с. 153, пример 6.24].

**16.2.** Условие легко разбивается на две части, выраженные двумя уравнениями

$$\begin{aligned} b + g + w + s &= 14, \\ b + 2g + 3w + 4s &= 30. \end{aligned}$$

Вычитая первое из второго, получаем

$$g + 2w + 3s = 16,$$

которое показывает, что либо  $g$  и  $s$  оба нечетные, либо оба четные. Следовательно, есть только четыре случая, которые нуждаются в проверке:

$g$	$s$	$w = 8 - (g + 3s)/2$
3	5	- 1
5	3	1
2	4	1
4	2	3

Только последний случай приемлем. Следовательно,

$$s = 2, \quad w = 3, \quad g = 4, \quad b = 5$$

и леди имеют имена:

Анна Смит, Бетти Вайт, Кэрол Грин, Дороти Браун.

[16; 20, с. 149].

**16.3.** Если  $x = 0$ , второе (или третье) уравнение дает  $y^2 z^2 = 0$  и поэтому еще одно из неизвестных  $y$  или  $x$  должно быть равно нулю. Следовательно, либо  $x$ ,  $y$  и  $z$  все отличны от 0 или, наконец, два исчезают. Если любые два исчезают, уравнения удовлетворяются.

Теперь рассмотрим случай, в котором ни одно из трех неизвестных не равно 0. Делением получаем систему

$$\begin{aligned} \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} &= a, \\ \frac{yz}{x} + \frac{xy}{z} &= b, \\ \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} &= c. \end{aligned}$$

Складывая эти три уравнения и деля на 2, получаем

$$\frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} + \frac{xy}{z} = \frac{a + b + c}{2}.$$

Из этого уравнения вычитаем каждое из трех уравнений пред-

шествующей системы и получаем

$$\frac{yz}{x} = \frac{-a + b + c}{2};$$

$$\frac{zx}{y} = \frac{a - b + c}{2},$$

$$\frac{xy}{z} = \frac{a + b - c}{2}.$$

Произведение этих трех уравнений равно

$$xyz = (-a + b + c)(a - b + c)(a + b - c)/8. \quad (*)$$

Разделим его на каждое уравнение из предшествующей системы и после извлечения квадратного корня получим

$$x = [(a - b + c)(a + b - c)]^{1/2}/2,$$

$$y = [(-a + b + c)(a + b - c)]^{1/2}/2,$$

$$z = [(-a + b + c)(a - b + c)]^{1/2}/2.$$

Мы должны принять во внимание, однако, два значения квадратного корня.

Сосредоточимся на вызывающем на размышление частном случае и положим, что  $a$ ,  $b$  и  $c$  являются длинами трех сторон треугольника. Тогда из (\*),  $xyz$  положительно и, следовательно, только следующие четыре комбинации знаков допустимы:

$$\begin{array}{cccc} x & + & + & - \\ y & + & - & + \\ z & + & - & - \end{array}$$

[16; 21, с. 193].

**16.4.** Проведем плоскость через высоту пирамиды и через среднюю точку одной стороны (длиной  $a$ ) ее основания. Пересечением этой плоскости с пирамидой является равнобедренный треугольник, который может быть использован в качестве ключевого чертежа: его высота равна  $h$ , его стороны имеют длину  $l$  (где  $l$  – высота боковой грани пирамиды) и его

основание равно  $2b$  (где  $b$  – высота одного из шести конгруэнтных равносторонних треугольников, составляющих основание пирамиды). Площадь основания равна

$$\frac{S}{4} = \frac{6ab}{2},$$

площадь боковой поверхности равна

$$\frac{3S}{4} = \frac{6al}{2}$$

и поэтому

$$l = 3b.$$

Используя ключевой чертеж, получаем

$$h^2 + b^2 = l^2 = 9b^2$$

и поэтому

$$b^2 = \frac{h^2}{8}.$$

Имеем также

$$b^2 + \frac{a^2}{4} = a^2$$

и поэтому

$$a^2 = \frac{4b^2}{3} = \frac{h^2}{6}.$$

Следовательно,

$$S = 12ab = h^2\sqrt{3}.$$

[16; ср. 20, с. 51, пример 2.49].

## Решения 17

**17.1.** Нам требуется найти точки пересечения двух конгруэнтных эллипсов, симметричных друг относительно друга и по отношению к линии  $x = y$ . Вычитание уравнений дает  $x^2 = y^2$ .

Существует четыре точки пересечения:  $(6, 6)$ ,  $(-6, -6)$ ,  $(2, -2)$ ,  $(-2, 2)$ .

[Ср. 21, с. 162, пример 15.36].

**17.2.** Произведение четырех данных произведений симметрично по  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ . Если мы сможем показать, что

$$4a(1-b)4b(1-c)4c(1-d)4d(1-a) \leq 1,$$

то из этого будет следовать, что не все из четырех данных произведений больше, чем один. Нам дано, что  $0 < a < 1$ ,  $0 < b < 1$ ,  $0 < c < 1$  и  $0 < d < 1$ . Рассмотрим произведение  $4a(1-a)$ , которое положительно, т.к. его сомножители положительны; каков его максимум? Очевидно, что максимум равен 1, который достигается при  $a = 1/2$ . Для того, чтобы проверить это заметим, что

$$1 - 4a(1-a) = (1-2a)^2 \geq 1,$$

и что равенство достигается только, когда  $a = 1/2$ . Подобно этому произведения  $4b(1-b)$ ,  $4c(1-c)$  и  $4d(1-d)$  также положительны и не более единицы. Следовательно,

$$4a(1-a)4b(1-b)4c(1-c)4d(1-d) \leq 1.$$

Перегруппировывая члены,

$$4a(1-b)4b(1-c)4c(1-d)4d(1-a) \leq 1.$$

### 17.3.

(А) Поскольку  $\angle B'CA = \angle A'CB = 45^\circ$  и  $\angle C = 90^\circ$ , то  $C$  лежит на линейном отрезке  $A'B'$ .  $\triangle ABC$  и  $\triangle ABC'$  являются прямоугольными треугольниками; они могут быть вписаны в окружность с диаметром  $AB$ .  $\angle ACC'$  и  $\angle BCC'$  отделяют равные дуги окружности так, что они равны. Следовательно,  $\angle B'CC' = \angle A'CC' = 90^\circ$ .

(В) Если стороны треугольника имеют длины  $a$ ,  $b$  и  $c$ , то  $B'C$  имеет длину  $b/\sqrt{2}$ ,  $A'C$  — длину  $a/\sqrt{2}$ , и  $A'B'$ , следовательно, длину  $(a+b)/\sqrt{2}$ .

Пусть  $D$  является вершиной, противоположной  $A$ , в квадрате на стороне  $b$ . Тогда  $\triangle ACC' \sim \triangle ADB$  (пары соответствующих углов равны). Следовательно,  $CC' : AC = DB : AD$  и длина  $CC'$  также равна  $(a + b)/\sqrt{2}$ .

(Доказательство, использующее преобразование общего случая, в котором треугольник не обязательно является прямоугольным, дано в [22, с. 96 – 97]).

#### 17.4.

(А) Проведем плоскость через ребро длиной  $b$  и среднюю точку  $M$  противоположного ребра. Пересечением этой плоскости с тетраэдром является равнобедренный треугольник, который может быть использован как ключевой чертеж; его основание имеет длину  $b$ , его стороны имеют длину  $a\sqrt{3}/2$  (они являются высотами равносторонних граней тетраэдра) и, следовательно, его высота равна  $\sqrt{3a^2 - b^2}/2$ . Из-за симметрии, центр  $O$  описанной сферы лежит на линии, соединяющей  $M$  со средней точкой  $B$  основания этого треугольника. Также линия, соединяющая  $O$  с центром  $C$  одной из равносторонних граней тетраэдра, перпендикулярна этой грани. Точка  $C$  разделяет каждую высоту (или медиану) равносторонней грани в отношении  $1 : 2$ . Следовательно,  $CM$  имеет длину  $a\sqrt{3}/6$ . Треугольник  $OCM$  подобен каждому треугольнику, на которые ключевой чертеж разделен посредством  $MB$ . Следовательно, отношения соответствующих сторон равны. Если  $x$  является длиной  $OB$ , получаем

$$\frac{\frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2} - x}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3a^2 - b^2}}{2}}.$$

Решая это уравнение относительно  $x$ , получаем

$$x = \frac{2a^2 - b^2}{2\sqrt{3a^2 - b^2}}.$$

Если  $r$  – радиус описанной сферы

$$r^2 = x^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{(2a^2 - b^2)^2}{4(3a^2 - b^2)} + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2(4a^2 - b^2)}{4(3a^2 - b^2)}$$

и

$$r = \frac{a}{2} \sqrt{\frac{4a^2 - b^2}{3a^2 - b^2}}.$$

Заметим, что знаменатель равен нулю, когда  $b = a\sqrt{3}$ . Это предельный случай, поскольку для тетраэдра, рассмотренного в задаче,  $b < a\sqrt{3}$ .

(В) Радиус сферической поверхности может быть определен посредством способа, в котором четыре точки расположены так, чтобы образовать вершины двух конгруэнтных равносторонних треугольников, имеющих общую сторону и повернутых вокруг этой стороны. Пусть стороны треугольника имеют длину  $a$ . Располагая четыре точки в соприкосновении с поверхностью и измеряя расстояние  $b$  между двумя точками, которые не являются концевыми точками общей стороны, можно использовать результат (А), чтобы вычислить радиус сферы, определяемый четырьмя точками.

[21, с. 188].

## Решения 18

**18.1.** Каждая вершина треугольника равноотстоит от двух из трех точек, в которых стороны треугольника касательны вписанной окружности. Обозначим  $A$ ,  $B$  и  $C$  вершины против сторон  $a$ ,  $b$  и  $c$  соответственно. Тогда расстояния от  $C$  до двух ближайших точек касания равны  $d/2$ , расстояние от  $B$  до двух ближайших точек касания равно  $a - (d/2)$  и расстояние от  $A$  до двух ближайших точек касания равно  $b - (d/2)$ . Поскольку

$$a - (d/2) + b - (d/2) = c,$$

то

$$a + b = c + d.$$

[21, с. 188].

**18.2.** П е р в о е р е ш е н и е. Перепишем выражение в виде

$$n[(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)]$$



и заметим, что выражение в квадратных скобках является произведением пяти последовательных целых чисел. Мы замечаем, что  $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ . В любой последовательности пяти следующих друг за другом целых чисел одно должно быть кратно 5, следовательно, 5 делит без остатка выражение. Также одно из этих пяти целых чисел должно быть кратным 4 и поскольку, наконец, одно должно быть четным, 8 должно делить без остатка выражение. Если  $n$  кратно 3, то  $n^2$  кратно 9, и 9 делит без остатка выражение. Если  $n$  не кратно 3, то или  $n - 2$  и  $n + 1$  или  $n - 1$  и  $n + 2$  делится без остатка на 3 и, следовательно, 9 делит без остатка выражение. Поскольку выражение делится без остатка на 5, 8 и 9 и поскольку они не имеют общих множителей, то выражение должно делиться без остатка на их произведение.

Второе решение.

$$\begin{aligned} & \frac{n^2(n^2 - 1)(n^2 - 4)}{360} = \\ & = \frac{[(n + 3) + (n - 3)](n + 2)(n + 1)n(n - 1)(n - 2)}{6!} = \\ & = \binom{n + 3}{6} + \binom{n + 2}{6}, \end{aligned}$$

а биномиальные коэффициенты являются целыми числами.

[Ср. 21, с. 191, пример 3.65.1].

**18.3.** Вычитая по очереди второе уравнение из первого, третье из второго и первое из третьего, получим новую систему

$$\begin{aligned} -5x^2 + 4y^2 + z^2 &= 0, \\ x^2 - 5y^2 + 4z^2 &= 0, \\ 4x^2 + y^2 - 5z^2 &= 0. \end{aligned}$$

Мы можем исключить  $z^2$ , умножая первое уравнение в этой системе на  $-4$  и складывая его со вторым. Мы можем исключить  $x^2$ , умножая второе уравнение на  $-4$  и складывая его с третьим. Это дает

$$x^2 = y^2 = z^2.$$

Подстановка в первоначальную систему дает восемь решений

$$\begin{aligned} &(1, 1, 1), \quad (-1, -1, -1), \\ &(3, -3, -3), \quad (-3, 3, 3), \quad (-3, 3, -3), \\ &(3, -3, 3), \quad (-3, -3, 3), \quad (3, 3, -3). \end{aligned}$$

[Ср. 21, с. 163, пример 15.37 – 15.38].

**18.4.** Пусть  $r$  является радиусом окружности, вписанной в основание призмы. Основание состоит из шести равносторонних треугольников, чьи стороны имеют длину  $2r/\sqrt{3}$ . Объем призмы равен

$$6 \frac{r^2}{\sqrt{3}} 2r = 4\sqrt{3} \cdot r^3.$$

Площадь поверхности призмы равна

$$2 \cdot 6 \frac{r^2}{\sqrt{3}} + 6 \frac{2r}{\sqrt{3}} 2r = 4\sqrt{3} \cdot r^2 + 8\sqrt{3} \cdot r^2 = 12\sqrt{3} \cdot r^2.$$

Пусть  $a$  является длиной ребра правильного октаэдра, чей объем равен  $4\sqrt{3} \cdot r^3$ . Октаэдр может быть разделен на две конгруэнтные пирамиды, чье общее основание является квадратом со стороной длиной  $a$  и чья высота равна половине диагонали квадрата со стороной длиной  $a$ . Поэтому, объем октаэдра равен

$$2 \cdot \frac{1}{3} a^2 \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3} = 4\sqrt{3} \cdot r^3$$

и

$$a = \sqrt{6} \cdot r.$$

Площадь поверхности октаэдра равна

$$8 \frac{\sqrt{3} \cdot a}{2} \frac{a}{2} = 2\sqrt{3} \cdot a^2 = 2\sqrt{3} \cdot 6r^2 = 12\sqrt{3} \cdot r^2.$$

Следовательно, площади двух поверхностей равны.

Рассматривая два тела с одним и тем же числом граней и одинаковым объемом, естественно было бы ожидать, что если одно из них правильное, то оно будет иметь площадь поверхности меньшую, чем другое тело.

[Ср. 21, с. 162, пример 15.29 – 15.30].

## Решения 19

**19.1.** Пусть  $s$  является длиной стороны основания данной призмы (торта). Тогда высота данной призмы равна  $5s/16$ , объем равен  $5s^3/16$ , а поверхность (5 граней) с сахарной глазурью равна  $9s^2/4$ . Для требуемой призмы (кусочек торта) площадь основания равна  $s^2/4$ , а объем равен  $5s^3/(16 \times 9)$ . Высота равна  $5s/36$ , частному объема и площади основания. Сторона основания требуемой призмы равна  $s/2$ . Следовательно, требуемое отношение равно

$$\frac{5s}{36} \cdot \frac{2}{s} = \frac{5}{18}.$$

На верхней поверхности торта (квадрат) отметим concentрический квадрат. Стороны меньшего квадрата параллельны и равны половине длины сторон большего квадрата. Линейные отрезки соединяют соответствующие вершины и средние точки соответствующих сторон.

Каждый из 8 кусков с сахарной глазурью на стороне является прямой призмой, из которой вырезана более маленькая прямая призма; для обеих призм, большей и меньшей, основание является равнобедренным прямоугольным треугольником.

Другое решение может быть получено путем вращения квадратного куска около его центра на  $45^\circ$ .

[21, с. 188].

**19.2.** П е р в о е р е ш е н и е. Вспомните формулу для суммы геометрической прогрессии. Сумма последовательности, имеющей цифр  $2n$ , равна

$$\begin{aligned} 9 + 8(10 + 10^2 + \dots + 10^{n-1}) + 4(10^n + 10^{n+1} + \dots + 10^{2n-1}) &= \\ &= 1 + (8 + 4 \cdot 10^n)(1 + 10 + \dots + 10^{n-1}) = \\ &= 1 + 4(10^n + 2)(10^n - 1)/(10 - 1) = \left(\frac{2 \cdot 10^n + 1}{3}\right)^2. \end{aligned}$$

Это – квадрат целого числа, поскольку

$$(2 \cdot 10^n + 1)/3 = 1 + 6(10^n - 1)/9 = 666 \dots 67$$

число с  $n$  цифрами.

**В т о р о е р е ш е н и е.** Экспериментирование с некоторыми примерами

$$49 = 7^2, \quad 4489 = 67^2, \quad 444889 = 667^2$$

приводит к предположению, что  $n$ -ый член имеет вид  $(666 \dots 67)^2$  где  $666 \dots 67$  имеет  $n$  цифр. Чтобы подтвердить предположение доказательством, можно начать с замечания, что

$$\begin{aligned} 666 \dots 667 \times 6 &= 4000 \dots 002, \\ 666 \dots 667 \times 7 &= 4666 \dots 669 \end{aligned}$$

и увидеть обычный пример умножения целых чисел, записанных десятичными арабскими цифрами.

**19.3.** Приведем простые примеры прямоугольных треугольников:

стороны			площадь
3	4	5	6
1	1	$\sqrt{2}$	$1/2$
$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2	1
$3\sqrt{2}$	$4\sqrt{2}$	$5\sqrt{2}$	12

Существует много других примеров, но треугольники, которые не являются прямоугольными, менее удобны.

**19.4. П е р в о е р е ш е н и е.** По существу, мы рассматриваем здесь три множества  $A$ ,  $B$  и  $C$  и их пересечения. Если каждое множество представить точками внутри круга (диаграмма Венна или более правильно круг Эйлера), то три круга, каждое из которых пересекается с двумя другими, делят плоскость на восемь областей. Одна из этих областей вне трех кругов – бесконечна; задача заключается в том, чтобы определить количество индивидов, принадлежащих к этой бесконечной области. Начиная с области внутри всех трех кругов (с правого конца ряда данных чисел) и продвигаясь наружу (налево в ряду), можно посчитать, сколько индивидов в каждой области. Пусть  $\bar{X}$  означает множество индивидов вне множества  $X$ , пусть  $X \cap Y$  означает пересечение множеств  $X$  и  $Y$  и пусть  $[X]$  означает количество индивидов в множестве  $X$ .

Тогда количество индивидов в объединении  $A$ ,  $B$  и  $C$  дается выражением

$$\begin{aligned}
 [ABC] + [\overline{ABC}] + [A\overline{BC}] + [AB\overline{C}] + [\overline{ABC}] + [\overline{AB\overline{C}}] + [\overline{A\overline{BC}}] &= \\
 = 1 + 2 + 5 + 1 + 0 + 1 + 5 &= 15.
 \end{aligned}$$

Таким образом, требуемое число (студентов сдавших все три экзамена) равно  $41 - 15 = 26$ .

**В т о р о е р е ш е н и е.** Используем те же обозначения, что и в первом решении. Количество индивидов в объединении  $A$ ,  $B$  и  $C$  также дается выражением

$$\begin{array}{r}
 [A] \quad + \quad [B] \quad + \quad [C] \\
 - [AB] \quad - \quad [AC] \quad - \quad [BC] \\
 \quad \quad \quad + \quad [ABC]
 \end{array}$$

Индивид, который принадлежит точно одному из трех множеств, считается один раз в первой строчке и больше нигде. Индивид, который принадлежит точно двум множествам, считается дважды положительно в первой строке и один раз отрицательно во второй строке. Индивид, который принадлежит всем трем множествам, считается три раза положительно в первой строке, три раза отрицательно во второй и один раз положительно в третьей. Таким образом, предложенное выражение считает каждого из индивидов, которые должны быть посчитаны только один раз (и это может быть обобщено на большее число множеств).

Применяя общее выражение к нашему данному случаю, находим, что

$$\begin{array}{r}
 12 \quad + \quad 5 \quad + \quad 8 \\
 - \quad 2 \quad - \quad 6 \quad - \quad 3 \\
 \quad \quad \quad + \quad 1 \quad \quad \quad = \quad 15
 \end{array}$$

студентов провалили один или более предметов, и поэтому  $41 - 15 = 26$  сдали все три экзамена.

### 19.5.

(А) Наша задача значительно облегчается, если мы учили и помним классическое утверждение геометрии (Euclid VI 3):

отрезки основания  $p$  и  $q$  имеют то же отношение, что и смежные стороны  $a$  и  $b$

$$\frac{p}{q} = \frac{a}{b}.$$

Поскольку  $p + q = c$ , имеем

$$p = \frac{ac}{a+b}, \quad q = \frac{bc}{a+b}.$$

Применяя теорему косинусов дважды к двум различным треугольникам, которые оба содержат угол  $\alpha$ , противоположный стороне  $a$  в исходном треугольнике, получим

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha, \\ d^2 &= b^2 + q^2 - 2bq \cos \alpha. \end{aligned}$$

Исключая  $\cos \alpha$  и решая относительно  $d^2$  получим

$$d^2 = ab \left[ 1 - \left( \frac{c}{a+b} \right)^2 \right].$$

(Если Вы не знаете или не можете вспомнить это утверждение об отношении  $p/q$ , можно найти решение применением тригонометрических соотношений в трех треугольниках. Это следует, в действительности, из теоремы синусов, примененной дважды к двум меньшим треугольникам).

(В) Ч а с т н ы й с л у ч а й. Если  $a = b$ , данный треугольник является равнобедренным с основанием  $c$  и формула дает

$$d^2 = a^2 - \frac{c^2}{4}.$$

П р е д е л ь н ы й с л у ч а й. Если данный треугольник вырождается, сводится к линейному отрезку  $c$ , то  $a + b = c$  и формула дает  $d = 0$ .

Формула может быть также проверена на размерность [17, с. 202 – 205].

[21, с. 195].

## Решения 20

**20.1.** Если Вы запишете все двенадцать разложений 72 на три множителя и обратите внимание на сумму сомножителей, Вы обнаружите, что единственная сумма, встречающаяся дважды, равна  $14 (= 2 \cdot 6 \cdot 6 = 3 \cdot 3 \cdot 8)$ . Следовательно, номер улицы равен 14. Принимая во внимание старшего мальчика, возрасты равны 3, 3 и 8.

[21, с. 192].

**20.2.** Пусть  $a$  и  $b$  означает длины сторон. Шестиугольник состоит из трех квадратов площадью  $a^2$ ,  $b^2$  и  $c^2$  соответственно и четырех треугольников с одинаковой площадью  $A$ . Либо введите вспомогательный линейный отрезок в чертеже, чтобы доказать, что один из двух тупых треугольников имеет высоту  $a$  и основание  $b$ , а другой – высоту  $b$  и основание  $a$ , либо используйте тригонометрию:

$$A = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ac \sin \beta = \frac{1}{2}ac \sin(180^\circ - \beta).$$

Следовательно, площадь шестиугольника равна

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4A = 2c^2 + 4A.$$

[21, с. 187].

### 20.3.

- (А) Треугольник с вершинами  $(1, 1)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1/2, 1/2)$  и сторонами, расположенными на прямых линиях  $y = 1$ ,  $x = y$ , причем  $x + y > 1$ ;
- (В) Две стороны треугольника (А) на линиях  $y = 1$  и  $x = y$ ;
- (С) Дуга окружности  $x^2 + y^2 = 1$  внутри треугольника (А);
- (D) Часть треугольника (А) поверх дуги (С);
- (E) Часть треугольника (А) ниже дуги (С).

Точка  $(1, 1)$  представляет равносторонний треугольник; точка  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  представляет равнобедренный прямоугольный треугольник; точка  $(1/2, \sqrt{3}/2)$  представляет треугольник с

углами  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ; и сторона треугольника (А) на линии  $x + y = 1$  представляет вырожденные треугольники.

[Ср. 21, с. 146 – 149 и с. 158, пример 15.3].

**20.4.** Остаток  $r(x)$  является полиномом степени, не превышающей 2:

$$r(x) = a + bx + cx^2.$$

Тогда

$$x + x^9 + x^{25} + x^{49} + x^{81} = q(x)(x^3 - x) + a + bx + cx^2.$$

Это дает для  $x = -1, 0$  и  $1$  соответственно

$$\begin{aligned} -5 &= a - b + c, \\ 0 &= a, \\ 5 &= a + b + c. \end{aligned}$$

Следовательно,  $a = 0$ ,  $b = 5$ ,  $c = 0$  и требуемый остаток равен  $5x$ .

[Ср. 21, с. 139, пример 14.24].



---

# Литература

1. R. Creighton Buck. A look at mathematical competitions, *American Mathematical Monthly*, 1959, 66 p. 201–212.
2. Department of Mathematics, Stanford University, The Stanford University Mathematics Examination, *American Mathematical Monthly*, 1946, 53, p. 406–409.
3. –, Stanford University Mathematics Examination, *American Mathematical Monthly*, 1947, 54, p. 430.
4. –, Stanford University Competitive Examination, *American Mathematical Monthly*, 1948, 55, p. 448.
5. –, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 1949, 56, p. 496–497.
6. –, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 1950, 57, p. 651–652.
7. –, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 1952, 59, p. 127.

8. —, Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 1953, 60, p. 571–572.
9. G. Polya. The 1953 Stanford University Competitive Examination: problems, solutions and 'comments, *California Mathematics Council Bulletin*, 1953, (1), 11, p. 15–17.
10. —. The 1954 Stanford University Competitive Examination in Mathematics: problems, solutions and comments, *California Mathematics Council Bulletin*, 1954, (2), 12, p. 7–8.
11. —. The 1955 Stanford University Competitive Examination in Mathematics: problems, solutions and comments, *California Mathematics Council Bulletin*, 1955, (2), 13, p. 15–17.
12. —. The 1956 Stanford University Competitive Examination in Mathematics: problems, solutions and comments, *California Mathematics Council Bulletin*, 1956, (2), 14, p. 19–22.
13. —. The 1957 Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, 1957, (2), 15, p. 18–21.
14. —. The 1958 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics. *California Mathematics Council Bulletin*, 1958, (1), 16, p. 18–20.
15. —. The 1960 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, 1960, (2), 18, p. 16–17.
16. —. The 1961 Stanford-Sylvania Competitive Examination in Mathematics, *California Mathematics Council Bulletin*, 1961, (2), 19, p. 10–11.
17. —. *How to Solve It*, 2nd ed., Doubleday Anchor A 93, 1957, Princeton Paperback, 1971.
18. —. *Mathematics and Plausible Reasoning*, Vol. 1, Princeton Univ. Press, 1954.
19. —. *Mathematics and Plausible Reasoning*, Vol. 1, Princeton Univ. Press, 1968.

20. -. *Mathematical Discovery*, Vol. 1, Wiley, 1962.
21. -. *Mathematical Discovery*, Vol. 2, corrected printing, Wiley, 1968.
22. H.S.M. Coxeter and S.L. Greitzer. *Geometry Revisited*, Random House, 1967.
23. Hungarian Problem Book I, II, Random House, 1963.
24. G. Polya and J. Kilpatrick. The Stanford University Competitive Examination in Mathematics, *American Mathematical Monthly*, 1973, 80, p. 627-640.

Научно-популярное издание

ПОЙА Джордж  
КИЛПАТРИК Джереми

**СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ  
СТЭНФОРДСКОГО УНИВЕРСИТЕТА**  
с подсказками и решениями

Лицензия ЛР № 071872 от 24 мая 1999 г.

Подписано в печать 01.12.2001. Формат 60х90 1/16

Бумага офсетная. Гарнитура «Computer Modern». Печать офсетная. Усл.Печ.л. 6.

Зак. № 4634

НО Научный Фонд

«Первая Исследовательская Лаборатория имени академика В.А. Мельникова»

117997 г. Москва, ГСП-7, Нахимовский проспект, 36, к. 1, комн. 816 (ИМВС РАН).

e-mail: [mindia@mail.imvs.ru](mailto:mindia@mail.imvs.ru)

Отпечатано с оригинал-макета в ППП Типография «Наука»

121099, Москва, Шубинский пер., д.6.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции

ОК-005-93, том 2; 953000 — книги, брошюры

ISBN 5-901171-04-7



9 785901 171042 >