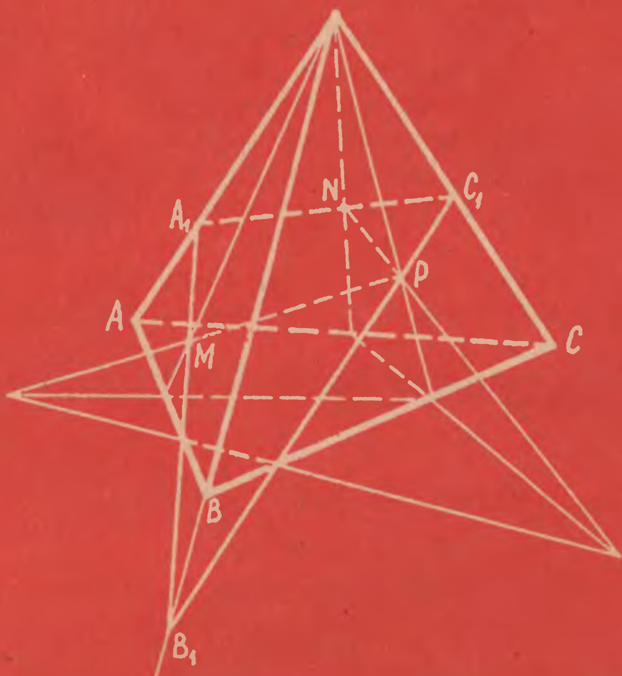
А.Г.МЕРЗЛЯК, В.Б.ПОЛОНСКИЙ, М.С.ЯКИР

НЕОЖИДАННЫЙ ШАГ ИЛИ СТО ТРИНАДЦАТЬ КРАСИВЫХ ЗАДАЧ



А.Г.МЕРЗЛЯК, В.Б.ПОЛОНСКИЙ, М.С.ЯКИР

НЕОЖИДАННЫЙ ШАГ ИЛИ СТО ТРИНАДЦАТЬ КРАСИВЫХ ЗАДАЧ

(методические рекомендации)

Киев
Агрофирма "Александрия"
1993

ОТ АВТОРОВ

В любом деле эффектная реклама играет далеко не последнюю роль. Не составляет исключение и деятельность учителя-предметника. В этом плане преподавателям химии в какой-то степени повезло: бросят кусочек калия в воду или капнут концентрированной серной кислотой в смесь бертолетовой соли с сахарозой — эффект потрясающий, изучаемый предмет, по меньшей мере, становится привлекательным. Немалым арсеналом аналогичных агитационных средств обладают и учителя физики.

Учитель математики лишен возможностей устраивать подобные «представления» на уроках. Однако это совершенно не означает, что в математике нет своих «фейерверков». Они несомненно есть, и их много: в первую очередь — это задачи и, конечно, красивые. Что же такое красивая задача? Ответ на этот вопрос, естественно, дело вкуса. Вместе с тем опыт показывает, что учащимся нравятся те задачи, решение которых доступно, по возможности короткое, а самое главное — неожиданное. Такие задачи-агитаторы могут и, на наш взгляд, должны стать предметом коллекционирования для каждого учителя. Настоящая книга как раз и представляет собой такого рода коллекцию.

Как правило, коллекционными экземплярами служат несобственные произведения. Однако мы рискнули включить в сборник и авторские задачи.

Мы понимаем, что было бы максимально корректным указать источник, а самое главное — автора каждой задачи. Вначале так и планировалось поступить. Но, с одной стороны, в ходе работы мы нередко сталкивались с тем, что в различных источниках под условиями одной и той же задачи стояли различные фамилии. С другой стороны, в сборник вошли задачи, давно ставшие математическим фольклором, и авторов которых мы просто не знаем. В силу этих причин нам пришлось отказаться от первоначальных намерений.

Понятно, что собранные в этой книге задачи отражают лишь «симпатии» авторов и, возможно, не всем придутся по вкусу. В то же время мы искренне желаем и надеемся, что каждый читатель найдет свои задачи, которые доставят ему удовольствие.

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ

1. При каком значении параметра a модуль разности корней уравнения $x^2 - 6x + 12 + a^2 - 4a = 0$ принимает наибольшее значение?

2. Найти наименьшее значение выражения $\sqrt{1 + x^2 - x} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

4. Доказать, что для положительных a, b, c выполняется неравенство $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geqslant \sqrt{a^2 + ac + c^2}$.

5. Имеет ли система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4, \\ x^2 + xz + z^2 = 9, \\ y^2 + yz + z^2 = 36 \end{cases}$$

положительные решения?

6. Доказать неравенство

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \geqslant$$
$$\geqslant \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}.$$

7. Доказать, что при любых x, y, z выполняется неравенство

$$\sqrt{x^2 + xy + y^2} + \sqrt{x^2 + xz + z^2} \geqslant \sqrt{y^2 + yz + z^2}.$$

8. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} + \sqrt{(x - 1)^2 + y^2}.$$

9. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 4)^2} + \sqrt{(x - 5)^2 + (y - 8)^2} = 5, \\ 3\,xy - 10\,y = 3. \end{cases}$$

10. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y + 3)^2}$, если $2\,|x| + |y| = 2$.

11. Найти наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 3)^2}, \text{ если } x - y - 3 = 0.$$

12. Доказать неравенство
$$\sqrt{a^2-c^2}+\sqrt{b^2-c^2}\leqslant\frac{ab}{c}\ (a>0,\ b>0,\ c>0).$$

13. Найти $S=xy+yz$, если $x>0, y>0, z>0$ и
$$\begin{cases}x^2+y^2=16,\\ y^2+z^2=48,\\ y^2=xz.\end{cases}$$

14. Найти $M=xy+2yz+3xz$, если $x>0, y>0, z>0$ и
$$\begin{cases}x^2+xy+\dfrac{y^2}{3}=25,\\ \dfrac{y^2}{3}+z^2=16,\\ z^2+zx+x^2=9.\end{cases}$$

15. Доказать, что $(x+y)(x+z)\geqslant 2$, если $x>0, y>0, z>0$ и $xyz(x+y+z)=1$.

16. Доказать неравенство $\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<\dfrac{100^2\pi}{4}$.

17. Доказать, что если $x_1\geqslant x_2\geqslant x_3\geqslant x_4\geqslant x_5>0$, то $x_1^2-x_2^2+x_3^2-x_4^2+x_5^2\geqslant(x_1-x_2+x_3-x_4+x_5)^2$.

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ

18. Числа a, b, c, d удовлетворяют условиям $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Доказать, что $|ac - bd| \leqslant 1$.

19. Известно, что $m^2 + n^2 = 1$, $p^2 + q^2 = 1$, $mp + nq = 0$. Вычислить $mn + pq$.

20. Доказать, что при $n \in N$, $n \geqslant 2$ и $|x| < 1$ имеет место неравенство $(1 + x)^n + (1 - x)^n < 2^n$.

21. Решить уравнение $\sqrt{1 - x^2} = 4x^3 - 3x$.

22. Решить уравнение $\sqrt{1 - x} = 2x^2 - 1 + 2x\sqrt{1 - x^2}$.

23. Решить уравнение $\left|x + \sqrt{1 - x^2}\right| = \sqrt{2}\,(2x^2 - 1)$.

24. Решить уравнение $\sqrt{\dfrac{1 + 2x\sqrt{1 - x^2}}{2}} + 2x^2 = 1$.

25. Действительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[-1; 1]$, причем сумма кубов этих чисел равна 0. Докажите, что $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leqslant \dfrac{n}{3}$.

26. Сколько корней на отрезке $[0; 1]$ имеет уравнение $8x(1 - 2x^2)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1$?

27. Сколько корней на отрезке $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ имеет уравнение $4\sqrt{2}\,|x|\,(x^2 - 1)(2x^4 - 4x^2 + 1) = 1$?

28. Среди всех решений $(a; b; c; d)$ системы

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 9, \\ c^2 + d^2 = 16, \\ ad + bc \geqslant 12 \end{cases}$$

найти такие, при которых выражение $b + d$ принимает наименьшее значение.

29. Доказать, что при любых действительных x, y

$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{(x + y)(1 - xy)}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \leqslant \frac{1}{2}.$$

30. Известно, что $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 2$. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $z = x^2 + xy + y^2$.

31. Найти наибольшее и наименьшее значения выражения $\dfrac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2}$.

32. Доказать, что $\dfrac{a-b}{1+ab} + \dfrac{b-c}{1+bc} + \dfrac{c-a}{1+ac} = \dfrac{a-b}{1+ab} \cdot \dfrac{b-c}{1+bc} \cdot \dfrac{c-a}{1+ac}$.

33. Пусть $f(t) = \sqrt{1+t^2} - t$. Вычислить значение выражения $f(x)f(y) + f(y)f(z) + f(z)f(x)$, если $xy + yz + zx = 1$, $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$.

34. Положительные числа a, b, c таковы, что $abc = a + b + c$. Докажите тождество

$$\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} + \frac{1}{1+c^2} + \frac{2}{\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)}} = 1.$$

35. Докажите, что из любых 13 чисел всегда можно выбрать два числа x и y такие, что $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

§ 3. ПОМОГАЮТ ВЕКТОРЫ

36. Числа a, b, c, d удовлстворяют условиям $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$. Доказать, что $|ac - bd| \leqslant 1$.

37. Доказать, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant \frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}}$, сcли $a > 0, b > 0, c > 0$.

38. Для положитсльных чисел a, b, c доказать нсравснство $(a^3 + b^3 + c^3)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant (a + b + c)^2$.

39. Доказать, что для любых x, y, z выполняется нсравснство $\sin x \sin y \sin z + \cos x \cos y \cos z \leqslant 1$.

40. Решить уравнснис

$$2\sqrt{x - 1} + 5x = \sqrt{(x^2 + 4)(x + 24)}.$$

41. Числа x, y, z таковы, что $x^2 + 3y^2 + z^2 = 2$. Найти наибольшсс и наимсньшсс значсния выражсния $2x + y - z$.

42. Решить уравнснис $\sqrt{x - 2} + \sqrt{4 - x} = x^2 - 6x + 11$.

43. Дано 8 дсйствитсльных чисел a, b, c, d, e, f, g, h. Докажитс, что хотя бы одно из шести чисел $ac + bd$, $ae + bf$, $ag + bh$, $ce + df$, $cg + dh$, $eg + fh$ нсотрицатсльно.

44. Доказать, что для любых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ выполняется нсравснство $\sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2} + \ldots + \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geqslant \sqrt{(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \ldots + b_n)^2}$.

45. На сторонах трсугольника ABC во внсшнюю сторону постросны параллслограммы AA_1B_1B, BB_2C_1C, CC_2A_2A. Могут ли отрсзки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 быть сторонами нскоторого трсугольника?

46. Доказать нсравснство $\cos A + \cos B + \cos C \leqslant \frac{3}{2}$, гдс A, B, C — углы трсугольника.

47. Доказать, что ссли A, B, C — углы трсугольника, то $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\frac{3}{2}$.

48. Пусть α, β, γ — плоские углы нскоторого трсхгранного угла. Доказать, что $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}$.

49. Доказать, что углы мсжду биссcктрисами плоских углов трсхгранного угла или всс острыс, или всс прямыс, или всс тупыс.

§ 4. ВОКРУГ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

50. Решить уравнение $4\cos^4\frac{x}{4} = \cos\frac{x}{2} + 2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x$.

51. Найти все решения системы уравнений

$$\begin{cases} (x+3)^3 = 3 - 2y, \\ z^2 + 4y^2 = 8y, \\ (2z - x)(x+3) = 5x + 16, \end{cases}$$

удовлетворяющие условию $z \geqslant 0$.

52. На плоскости xy укажите все точки, через которые не проходит ни одна из кривых семейства $y = x^2 - 4px + 2p^2 - 3$, где p — параметр.

53. Какая часть координатной плоскости xy покрыта всевозможными кругами вида $(x-a)^2 + (y-a)^2 \leqslant 2 + a^2$?

54. Один из корней уравнения $x^{12} - abx + a^2 = 0$ больше двух. Доказать, что $|b| > 64$.

55. Решить уравнение $\sqrt{5 - x} = x^2 - 5$.

56. Решить уравнение $x^3 - (\sqrt{2} + 1)x^2 + 2 = 0$.

57. Решить уравнение $x^4 - 2\sqrt{3}x^2 + x + 3 - \sqrt{3} = 0$.

58. Числа a, b, c такие, что $(a + b + c)c < 0$. Доказать, что $b^2 > 4ac$.

59. Положительные числа $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ удовлетворяют неравенствам $b_1^2 \leqslant 4a_1c_1$, $b_2^2 \leqslant 4a_2c_2$. Докажите, что $4(a_1 + a_2 + 7)(c_1 + c_2 + 2) > (b_1 + b_2 + 1)^2$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

60. Решить уравнение $5^x - 3^x = 16$.

61. Решить уравнение $4 \cdot 3^{3x+1} + 4 = 5 \cdot 2^{9x}$.

62. Решить уравнение $(\sqrt{3})^x - 2^{x-1} = 1$.

63. Решить систему

$$\begin{cases} x + \sqrt[6]{x} = y + \sqrt[6]{y}, \\ x^2 + xy + y^2 = 27. \end{cases}$$

64. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = \log_3 \dfrac{y}{x}, \\ 2^{x+2} + 8^x = 5 \cdot 4^y. \end{cases}$$

65. Решить уравнение $(2x+1)\left(2 + \sqrt{(2x+1)^2 + 3}\right) - 3x\left(2 + \sqrt{9x^2 + 3}\right) = 0$.

66. Решить систему

$$\begin{cases} \sin y - \sin x = x - y, \\ \sin y - \sin z = z - y, \\ x - y + z = \pi. \end{cases}$$

67. Решить уравнение $\log_2(5 + 3\cos 4x) = \sin^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

68. Решить уравнение $2^{|x|} - \cos y + \lg(1 + x^2 + |y|) = 0$.

69. Найти все пары действительных чисел x и y, удовлетворяющих равенству $(x+y)\left(\lg\left(x + y + \dfrac{1}{x+y}\right) - \lg 2\right) + (x^2 + y^2 - 1)^2 = 0$.

70. Решить уравнение $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 = 5 + \cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 4x\right)$.

71. Решить уравнение $\sin^5 x + \cos^5 x + \sin^4 x = 2$.

72. Решить систему

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} \geqslant 2 + x^2, \\ 2^{x+y-4} \leqslant \dfrac{1 - (z-x)^2}{1 + (4-y)^2}. \end{cases}$$

73. Решить систему

$$\begin{cases} 3-(y+1)^2=\sqrt{x-y}, \\ x+8y=\sqrt{x-y-9}. \end{cases}$$

74. Решить уравнение $2x\sin\dfrac{\pi x^2}{x^4+4}+\dfrac{x^2}{2}+1=0.$

75. Решить уравнение $x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$

76. Решить уравнение $\sqrt[3]{x+22}=x^3-6x^2+12x-32.$

77. Решить уравнение $\sqrt[3]{3x+9}=27(x+1)^3-6.$

78. Решить уравнение $e^x-1=\ln(x+1).$

79. Решить уравнение $a^5+x=\sqrt[5]{a-x}.$

§ 6. ПЕРЕХОД В ДРУГУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ

80. Найти все целые положительные n, при которых число $2^n - 1$ делится на 7. Доказать, что ни при каких целых положительных n число $2^n + 1$ не делится на 7.

81. При каких целых положительных k число $3^k - 1$ делится на 13? Доказать, что ни при каких целых положительных k число $3^k + 1$ не делится на 13.

82. В множестве N_0 всех целых неотрицательных чисел можно выделить два непустых непересекающихся подмножества A_1 и A_2, каждое из которых дополняется нулем, так, что любое число из N_0 может единственным образом быть представлено в виде суммы $a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Доказать.

83. Докажите, что существует подмножество M множества натуральных чисел, обладающее следующим свойством: любое натуральное число, не принадлежащее M, есть средним арифметическим каких-то двух различных чисел из M, а никакое число из M этим свойством не обладает.

§ 7. ПОМОГАЕТ ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

84. Существует ли пятиугольник, отличный от правильного, каждая диагональ которого параллельна противоположной стороне?

85. Существует ли пятиугольник, отличный от правильного, диагонали которого при пересечении образуют пятиугольник, подобный данному?

86. На сторонах CA и CB треугольника ABC взяты точки M и N такие, что $CM : CA = m$, $CN : CB = n$. Медиана CD пересекает отрезок MN в точке E. Найти отношение $ME : EN$.

87. Дан треугольник ABC площадью S. Точки M и N — середины его сторон AC и AB соответственно. Точки P и Q делят сторону BC на три равных отрезка так, что $BP = PQ = QC$. Найти площадь общей части четырехугольника $ANPQ$ и ΔBMC.

88. Внутри треугольника ABC взята произвольная точка M. Через эту точку проведены прямые EF, PQ, KN так, что $EF \parallel AB$, $PQ \parallel BC$, $KN \parallel AC$. Точки K и P, F и N, Q и E лежат соответственно на сторонах AB, BC, AC. Доказать, что $\dfrac{EF}{AB} + \dfrac{PQ}{BC} + \dfrac{KN}{AC} = 2$.

89. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части. Точки деления соединены с противоположными вершинами. Доказать, что диагонали, соединяющие противоположные вершины образовавшегося шестиугольника, пересекаются в одной точке.

§ 8. СТЕРЕОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ ПЛАНИМЕТРИИ

90. Из шести спичек сложить четыре правильных треугольника так, чтобы стороной каждого была целая спичка.

91. На плоскости даны три параллельные прямые и три точки, не лежащие на одной прямой и не принадлежащие ни одной из трех данных прямых. Постройте треугольник так, чтобы его вершины лежали на трех данных прямых, а каждая сторона (или ее продолжение) проходила через одну из заданных точек.

92. На плоскости даны три луча, имеющие общее начало, и три точки, не лежащие на одной прямой и не принадлежащие ни одному из трех данных лучей. Постройте треугольник так, чтобы его вершины лежали на трех данных лучах, а каждая сторона (или ее продолжение) проходила через одну из заданных точек.

93. На плоскости даны три круга, каждые два из которых имеют общую хорду и есть точки, общие для всех трех кругов. Доказать, что все три хорды проходят через одну точку.

94. На плоскости даны три окружности разных радиусов, и к каждым двум из них проведены две внешние общие касательные. Доказать, что три точки пересечения каждой из этих пар касательных принадлежат одной прямой.

95. (Теорема Дезарга). Если два треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ расположены на плоскости так, что соответствующие стороны не параллельны, а прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в одной точке, то три точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 расположены на одной прямой.

§ 9. РАСКРАСКИ

96. В вершинах шестиугольника $ABCDEF$ записаны числа 2, 7, 9, 10, 3, 12 соответственно указанному порядку букв. За один шаг к двум соседним вершинам можно прибавить или вычесть одно и то же число. Можно ли за несколько шагов из указанной шестерки чисел получить следующую: 5, 11, 6, 15, 8, 14, сохранив порядок соответствия чисел вершинам?

97. В каждой клетке доски 5×5 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние (по горизонтали или вертикали) клетки. Обязательно ли при этом останется пустая клетка?

98. В каждой клетке доски размером 9×9 сидит жук. В некоторый момент все жуки переползают на соседние клетки по диагонали. Доказать, что при этом не менее девяти клеток окажутся пустыми.

99. Мышка грызет куб сыра с ребром 3, разбитый на 27 единичных кубиков. Когда мышка съедает какой-либо кубик, она переходит к другому, имеющему с предыдущим общую грань. Может ли мышка съесть весь куб, кроме среднего кубика?

100. Дно прямоугольной коробки было выложено прямоугольными плитками 2×2 и 1×4. Плитки высыпали из коробки и при этом потеряли плитку размером 2×2. Вместо нее нашли плитку 1×4. Можно ли при этом выложить дно коробки?

101. На клетчатой бумаге даны произвольные n клеток. Докажите, что из них можно выбрать не меньше $\frac{n}{4}$ клеток, не имеющих общих точек.

102. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 1993×1993. Из него вырезали 399^2-1 квадратиков 3×3. Можно ли вырезать еще один такой квадратик?

§ 10. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

103. Плоскость покрыта квадратной решеткой. Можно ли через любой узел провести прямую, не проходящую больше ни через один узел решетки?

104. В трех вершинах квадрата сидят кузнечики и играют в чехарду. Это происходит следующим образом: кузнечик прыгает по прямой через другого кузнечика и приземляется на таком же расстоянии от него, как и был с другой стороны. Сможет ли какой-нибудь кузнечик попасть в четвертую вершину квадрата?

105. Доказать, что если прямая проходит через точку O так, что векторы $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, … , $\overline{OM_n}$ лежат в одной полуплоскости относительно проведенной прямой, то сумма этих векторов не может быть равной нулю.

106. $M_1M_2 \ldots M_n$ — правильный n-угольник. Доказать, что сумма векторов $\overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \ldots + \overline{OM_n}$ равна нулевому вектору, если O — центр n-угольника.

107. Упростить выражение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}.$$

108. Уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + c = 0$ имеет четыре различных действительных корня. Доказать, что $a^2 > \frac{32}{9} b$.

109. Доказать, что при любых действительных a_1, a_2, …, a_n уравнение $a_n \cos nx + a_{n-1} \cos (n-1)x + \ldots + a_1 \cos x = 0$ имеет хотя бы один корень.

110. Отрезок длиной l разделили на n отрезков. На каждом из них, как на диаметрах, построили полуокружности. Эту же операцию повторили, разделив данный отрезок на k частей. Найти отношение суммы длин полуокружностей первого и второго разбиений.

111. Существует ли многогранник, неустойчивый на любой из своих граней?

112. Доказать, что число $100007 \cdot 100013 \cdot 100001 + 55$ составное.

113. Каждая точка окружности окрашена в один из двух цветов — красный или синий. Доказать, что в эту окружность можно вписать равнобедренный треугольник с вершинами одного цвета.

РЕШЕНИЯ

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ

1. Переписав данное в условии уравнение в виде $(x-3)^2+(a-2)^2=1$, построим его график в системе координат xa (рис. 1). Теперь идея решения становится прозрачной.

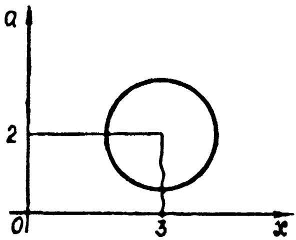


Рис. 1.

Очевидно модуль разности корней уравнения примет наибольшее значение в том случае, когда точки пересечения окружности с прямой, параллельной оси абсцисс, будут наиболее друг от друга удалены. Понятно, что эта прямая должна проходить через центр окружности.

Ответ. $a=2$.

2. Введем обозначение $f(x)=\sqrt{1+x^2-x}+\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$. Заметим, что для всех $x<0$ $f(x)>f(0)$. Теперь ясно, что точку, в которой функция достигает своего наименьшего значения, следует искать среди неотрицательных значений переменной.

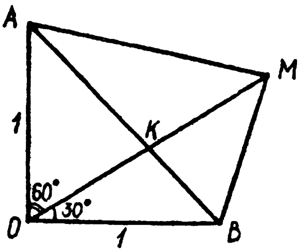


Рис. 2.

Рассмотрим случай, когда $x>0$. Тогда возможна следующая геометрическая интерпретация. Отложим два перпендикулярных отрезка OA и OB, а также отрезок OM так, что $OA=OB=1$, $OM=x$, $\angle MOB=30°$, $\angle MOA=60°$ (рис. 2).

По теореме косинусов из треугольников OMB и OMA получаем $MB=\sqrt{1+x^2-x\sqrt{3}}$ и $MA=\sqrt{1+x^2-x}$. Кроме того, $MA+MB\geqslant AB=\sqrt{2}$, причем равенство достигается лишь в том случае, когда точка M совпадает с точкой K, т. е. при $x=OK=\sqrt{3}-1$ (в этом легко убедиться).

Для случая $x = 0$ имеем $2 = f(0) > f(\sqrt{3} - 1) = \sqrt{2}$.

Ответ. $\sqrt{2}$.

3. Воспользуемся идеями предыдущей задачи. Очевидно, что при $x < 0$ $f(x) > f(0) = 2$ $\left(f(x) = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}\right)$.

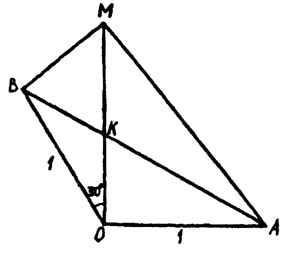


Рис. 3.

Теперь ясно, что решение следует искать среди положительных значений переменной, так как $f(0) = 2$. Отложим отрезки OA, OB и OM так, что $OA = OB = 1$, $OM = x$, $\angle AOB = 120°$, $\angle AOM = 90°$ и $\angle MOB = 30°$ (рис. 3). Тогда $MA = \sqrt{1 + x^2}$, $MB = \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}}$ и $MA + MB = \sqrt{1 + x^2} + \sqrt{1 + x^2 - x\sqrt{3}} \geqslant AB = \sqrt{3}$. Отсюда $x = OM = OK = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Ответ. $x = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

4. Рассмотрим отрезки OA, OB и OC такие, что $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ и $\angle AOB = 60°$, $\angle BOC = 60°$ (рис. 4). Имеем: $AB = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$, $BC = \sqrt{b^2 - bc + c^2}$, $AC = \sqrt{a^2 + ac + c^2}$ и, так как $AC \leqslant AB + BC$, то неравенство доказано.

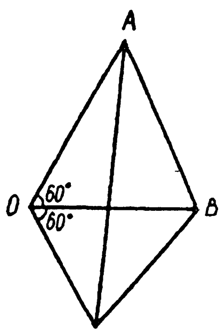


Рис. 4.

5. Здесь, как и в предыдущих четырех задачах, неравенство треугольника является ключом к решению.

Предположим, что существует тройка положительных чисел $(x; y; z)$, удовлетворяющая данной системе. Отложим отрезки OA, OB, OC такие, что $OA = x$, $OB = y$, $OC = z$ и $\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 120°$ (рис. 5). Тогда для отрезков AB, AC и BC должно выполняться неравенство треугольника, т.е.

$AB + AC > BC$. Но, учитывая уравнения системы, $AB = 2$, $AC = 3$, $BC = 6$.

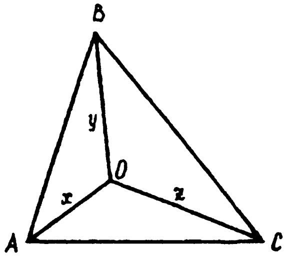


Рис. 5.

Ответ. Положительных решений нет.

6. На координатной плоскости xy рассмотрим точки $A\,(x_1;\,y_1)$, $B\,(x_2;\,y_2)$, $C\,(x_3;\,y_3)$. Тогда $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, $BC=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$ и $AC=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$, а так как для любых трех точек A, B, C выполняется соотношение $AB+BC \geqslant AC$, то неравенство доказано.

7. На координатной плоскости рассмотрим точки:

$$A\,(x;\,0),\ B\left(-\frac{y}{2};\,\frac{y\sqrt{3}}{2}\right),\ C\left(-\frac{z}{2};\,-\frac{z\sqrt{3}}{2}\right).$$

Тогда $AB=\sqrt{x^2+xy+y^2}$, $AC=\sqrt{x^2+xz+z^2}$, $BC=$ $=\sqrt{y^2+yz+z^2}$. Теперь опять-таки достаточно обратиться к неравенству треугольника.

8. На координатной плоскости xy рассмотрим точки $A\,(1;\,0)$, $B\,(0;\,1)$ и некоторую точку $M\,(x;\,y)$ (рис. 6). В такой интерпретации решение задачи становится почти очевидным. Действительно, сумма длин отрезков MB и MA, равная $\sqrt{x^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x-1)^2+y^2}$, будет наименьшей в том случае, когда точка M принадлежит отрезку AB, т. е. $MA+MB=AB=$ $=\sqrt{2}$. Подчеркнем, что наименьшее значение данного выражения достигается в любой точке отрезка AB.

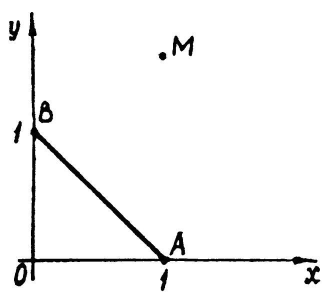


Рис. 6.

Ответ. $\sqrt{2}$.

9. Как и в предыдущей задаче, на координатной плоскости рассмотрим точки $A\,(2;\,4)$, $B\,(5;\,8)$ и $M\,(x;\,y)$ (рис. 7).

Тогда неравенство треугольника $MA + MB \geqslant AB$ в координатной форме выглядит так: $\sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} + \sqrt{(x-5)^2 + (y-8)^2} \geqslant 5$.

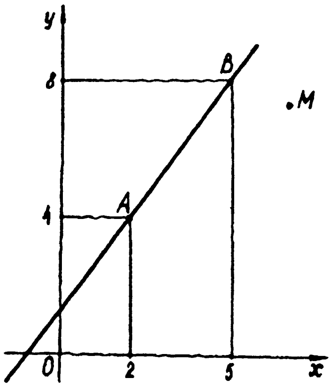


Рис. 7.

Ясно, что равенство возможно лишь в том случае, когда точка $M(x; y)$ принадлежит отрезку AB. Уравнение прямой AB имеет вид $4x - 3y + 4 = 0$. Получаем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 4x - 3y + 4 = 0, \\ 3xy - 10y = 3, \\ 2 \leqslant x \leqslant 5. \end{cases}$$

Ее решение не вызывает затруднений.

Ответ. $x = 3{,}5$, $y = 6$.

10. Легко показать, что графиком уравнения $2|x| + |y| = 2$ является ромб $ABCD$ (рис. 8). Тогда на геометрическом языке условие можно сформулировать так: найти наименьшее и наибольшее значения суммы длин отрезков MO и MK, где $O(0; 0)$, $K(0; -3)$, а точка M принадлежит ромбу $ABCD$. Рассмотрим треугольник MOK. Имеем $MO + MK \geqslant OK = 3$ (равенство достигается, если точка M совпадает с точкой C). Далее несложно показать (предоставляем это читателю сделать самостоятельно), что $MO \leqslant AO$ и $MK \leqslant AK$. Складывая два последних неравенства, получаем $MO + MK \leqslant AO + AK = 7$ (равенство достигается, если точки M и A совпадают).

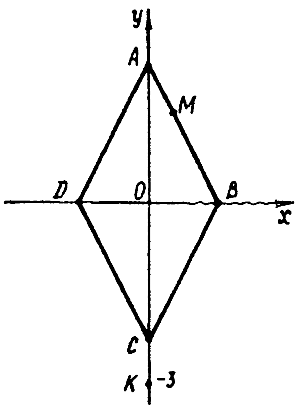


Рис. 8.

Ответ. Наибольшее значение выражения равно 7, наименьшее — 3.

11. На координатной плоскости xy рассмотрим точки $O(0; 0)$, $A(4; 3)$ и точку $M(x; y)$, принадлежащую прямой $y = x - 3$ (рис. 9). Задача свелась к тому, чтобы на прямой $y = x - 3$ найти такое положение точки M, при котором сумма $MA + MO$ будет наименьшей. Это хорошо известная задача. Напомним читателю ее решение. Рассмотрим точку $B(6; 1)$, симметричную точке A относительно данной прямой. Тогда искомое положение точки M — это точка пересечения прямых OB и $y = x - 3$.

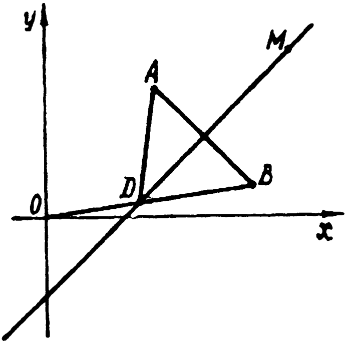


Рис. 9.

Для любой точки M, принадлежащей прямой, имеем $OM + AM = OM + MB \geqslant OB = \sqrt{37}$, причем равенство достигается, когда точка M совпадает с точкой $D\left(\frac{18}{5}; \frac{3}{5}\right)$.

Ответ. $\sqrt{37}$.

12. Если $a = c$ или $b = c$, то доказываемое неравенство очевидно. Остается рассмотреть случай, когда $a > c$ и $b > c$. Для таких a, b, c можно построить дельтоид $ABCD$, у которого $AB = AD = a$, $CB = CD = b$ и $DB = 2c$ (рис. 10). Тогда

$$c\sqrt{a^2 - c^2} = S_{DAB},$$
$$c\sqrt{b^2 - c^2} = S_{BCD}.$$

Имеем

$$c\sqrt{a^2 - c^2} + c\sqrt{b^2 - c^2} = S_{DAB} + S_{BCD} = S_{ABCD} = ab \sin ABC \leqslant ab.$$

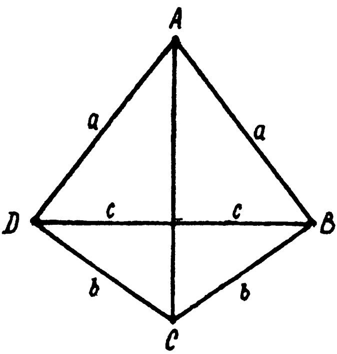


Рис. 10.

13. На отрезке AB таком, что $AB = AC + CB$, где $AC = z$, $CB = x$ (рис. 11), как на диаметре, построим полуокружность. Далее, через точку C проведем прямую, перпендикулярную AB и пересекающую полуокружность в точке D. Тогда с учетом третьего уравнения системы $CD = y$. Из уравнений

$x^2 + y^2 = 16$ и $y^2 + z^2 = 48$ следует, что $BD = 4$, $AD = 4\sqrt{3}$. Имеем

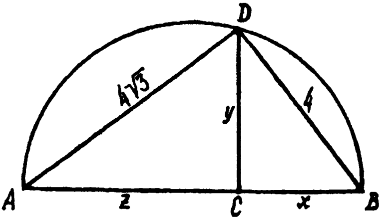


Рис. 11.

$$S = xy + yz = 2S_{BCD} + 2S_{ACD} = 2S_{ADB} = 16\sqrt{3}.$$

Ответ. $16\sqrt{3}$.

14. Построим отрезки $OB = \frac{y}{\sqrt{3}}$, $OC = z$ и $OA = x$ такие, что $\angle BOC = 90°$, $\angle COA = 120°$ и $\angle BOA = 150°$ (рис. 12). Тогда с учетом условия $AB = 5$, $BC = 4$, $AC = 3$ и $S_{ABC} = \frac{BC \cdot AC}{2} = 6$. Но $S_{ABC} = S_{BOC} + S_{COA} + S_{BOA} = \frac{yz}{2\sqrt{3}} + \frac{xz\sqrt{3}}{4} + \frac{xy}{4\sqrt{3}}$.

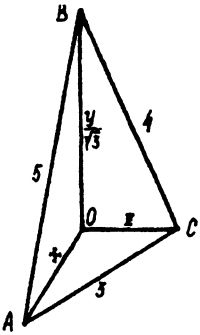


Рис. 12.

Теперь, умножив обе части равенства $\frac{yz}{2\sqrt{3}} + \frac{xz\sqrt{3}}{4} + \frac{xy}{4\sqrt{3}} = 6$ на $4\sqrt{3}$, получим $M = 24\sqrt{3}$.

Ответ. $24\sqrt{3}$.

15. Понятно, что при $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$ существует треугольник ABC такой, что $AB = c = x + y$, $BC = a = y + z$, $AC = b = x + z$ (рис. 13). Тогда K, M, N — точки касания вписанной окружности со сторонами AB, BC, AC соответственно. Имеем $x + y + z = p$, где p — полупериметр треугольника. Кроме того, $AK = AN = p - a = x$, $BK = BM = p - b = y$, $CM = CN = p - c = z$. Но по условию задачи $xyz(x + y + z) = p(p - a)(p - b)(p - c) = S^2 = 1$ или $S = 1$, где S — площадь треугольника ABC. С другой стороны, $2S = AB \cdot AC \sin BAC \leqslant AB \cdot AC = (x + y)(x + z)$. Тогда $(x + y)(x + z) \geqslant 2S = 2$.

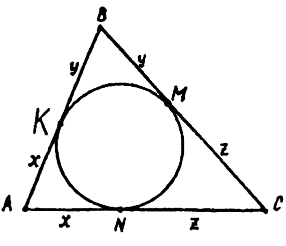


Рис. 13.

16. Рассмотрим четверть круга радиуса 1. Впишем в него ступенчатую фигуру, состоящую из 99 прямоугольников с нижним основанием, равным $\frac{1}{100}$ (рис. 14). Площадь первого прямоугольника равна $S_1 = OB \cdot AB = OB \cdot \sqrt{1 - OB^2} = \frac{1}{100}\sqrt{1 - \frac{1}{100^2}} = \frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2}$.

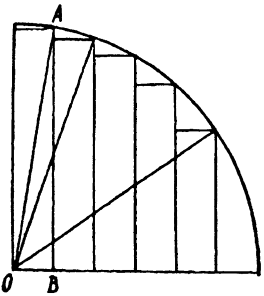


Рис. 14.

Для второго прямоугольника имеем $S_2 = \frac{1}{100}\sqrt{1 - \left(\frac{2}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2}$ и т. д. $S_{99} = \frac{1}{100} \times \sqrt{1 - \left(\frac{99}{100}\right)^2} = \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2}$. Площадь ступенчатой фигуры меньше площади четверти круга, т.е.
$\frac{\sqrt{99 \cdot 101}}{100^2} + \frac{\sqrt{98 \cdot 102}}{100^2} + \ldots + \frac{\sqrt{1 \cdot 199}}{100^2} \leqslant \frac{\pi}{4}$. Отсюда следует доказываемое неравенство.

17. Левая часть доказываемого неравенства — это сумма площадей заштрихованных фигур (рис. 15). Правая часть — это площадь квадрата со стороной $x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5$ (рис. 16). Каждая из полученных фигур состоит из одного квадрата и четырех трапеций, причем квадраты равны, а соответственные трапеции имеют равные вы-

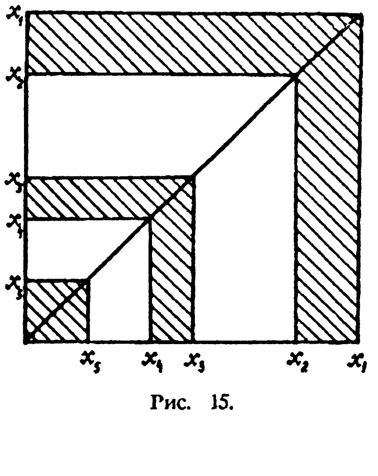


Рис. 15.

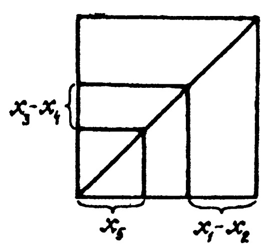


Рис. 16.

соты. Однако средние линии трапеций на рисунке 15 больше средних линий трапеций на рисунке 16. Поэтому площадь первой фигуры не меньше площади второй (равенство достигается в том случае, когда $x_2 = x_3$ и $x_4 = x_5$).

§ 2. ТРИГОНОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ АЛГЕБРЕ

18. Поскольку $a^2 + b^2 = 1$, $c^2 + d^2 = 1$, то существуют такие α и β, что $a = \sin\alpha$, $b = \cos\alpha$, $c = \sin\beta$, $d = \cos\beta$. Имеем $ac - bd = \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta = -\cos(\alpha + \beta)$. Следовательно, $|ac - bd| \leqslant 1$.

19. Положим $m = \sin\alpha$, $n = \cos\alpha$, $p = \sin\beta$, $q = \cos\beta$. Отсюда $mp + nq = \cos(\alpha - \beta)$. Из условия следует, что $\cos(\alpha - \beta) = 0$. Далее, $mn + pq = \sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta = \sin(\alpha + \beta)\cos(\alpha - \beta) = 0$.

Ответ. 0.

20. С учетом того, что $|x| < 1$, можем положить $x = \cos\alpha$, где $\alpha \in (0; \pi)$. Тогда достаточно доказать неравенство $2^n\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} + 2^n\sin^{2n}\frac{\alpha}{2} < 2^n$, т. е. $\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} + \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} < 1$. Так как $n \geqslant 2$ и $\frac{\alpha}{2} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, то $\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} < \cos^2\frac{\alpha}{2}$ и $\sin^{2n}\frac{\alpha}{2} < \sin^2\frac{\alpha}{2}$. Отсюда $\cos^{2n}\frac{\alpha}{2} + \sin^{2n}\frac{\alpha}{2} < \cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2} = 1$.

21. В данном уравнении $|x| \leqslant 1$. Положив $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$, приходим к уравнению

$$\sqrt{1 - \cos^2\alpha} = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha \text{ или } |\sin\alpha| = \cos 3\alpha.$$

Поскольку здесь $\sin\alpha \geqslant 0$, то $\sin\alpha = \cos 3\alpha$ или $\cos 3\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 0$. Это уравнение равносильно совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi n, \\ \alpha = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{array}\right.$$

Из полученных двух серий корней выберем лишь те, которые удовлетворяют условию $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$. Получим $\alpha_1 = \dfrac{\pi}{8}$, $\alpha_2 = \dfrac{5\pi}{8}$, $\alpha_3 = \dfrac{3\pi}{4}$.

Ответ. $x = \cos\dfrac{\pi}{8}$, или $x = \cos\dfrac{5\pi}{8}$, или $x = \cos\dfrac{3\pi}{4}$.

22. Пусть $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$. Выполнив подстановку, получим $\sqrt{2}\left|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right| = \cos 2\alpha + 2\cos\alpha\,|\sin\alpha|$. Так как $\sin\dfrac{\alpha}{2} \geqslant 0$ и $\sin\alpha \geqslant 0$, то имеем $\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2} = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$. Отсюда $\sin\left(\dfrac{3\alpha}{4} + \dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\dfrac{5\alpha}{4} + \dfrac{\pi}{8}\right) = 0$,

$$\left[\begin{aligned} &\alpha = -\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi k}{3}, \\ &\alpha = \frac{3\pi}{10} + \frac{4\pi n}{5}, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{aligned}\right.$$

В промежутке $[0; \pi]$ лежит только одно значение $\alpha = \dfrac{3\pi}{10}$.

Ответ. $x = \cos\dfrac{3\pi}{10}$.

23. Как и в двух предыдущих примерах, возможна замена $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$. Имеем $|\cos\alpha + \sin\alpha| = \sqrt{2}\cos 2\alpha$, $\sqrt{2}\left|\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right)\right| = \sqrt{2}\cos 2\alpha$. Это уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2 2\alpha, \\ \cos 2\alpha \geqslant 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} \dfrac{1 + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right)}{2} = \dfrac{1 + \cos 4\alpha}{2}, \\ \cos 2\alpha \geqslant 0, \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = -1,\\ \sin 2\alpha = \dfrac{1}{2},\end{array}\right.\\ \cos 2\alpha \geqslant 0,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\\ \alpha = \dfrac{\pi}{12} + \pi n, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.}\end{array}\right.$$

Учитывая ограничения для α, получим $\alpha_1 = \dfrac{3\pi}{4}$, $\alpha_2 = \dfrac{\pi}{12}$.

Ответ. $x = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $x = \cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

24. И в этом уравнении положим $x = \cos\alpha$, $\alpha \in [0; \pi]$. Тогда исходное уравнение становится таким $\sqrt{\dfrac{1+\sin 2\alpha}{2}} = -\cos 2\alpha$. Переходим к равносильной системе

$$\left\{\begin{array}{l}1 + \sin 2\alpha = 2 - 2\sin^2 2\alpha,\\ \cos 2\alpha \leqslant 0.\end{array}\right.$$

Отсюда

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = -1,\\ \sin 2\alpha = \dfrac{1}{2},\end{array}\right.\\ \cos 2\alpha \leqslant 0,\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\\ \alpha = \dfrac{5\pi}{12} + \pi n, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.}\end{array}\right.$$

Очевидно подходят только $\alpha_1 = \dfrac{3\pi}{4}$ и $\alpha_2 = \dfrac{5\pi}{12}$.

Ответ. $x = \cos\dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ или $x = \cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

25. Пусть $x_1 = \cos\alpha_1$, $x_2 = \cos\alpha_2$, ... , $x_n = \cos\alpha_n$, где $\alpha_i \in [0; \pi]$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Имеем $\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2 + \ldots +$

$$+\cos x_n = \frac{4\cos^3\alpha_1 - \cos 3\alpha_1}{3} + \frac{4\cos^3\alpha_2 - \cos 3\alpha_2}{3} + \ldots +$$

$$+\frac{4\cos^3\alpha_n - \cos 3\alpha_n}{3} = -\frac{1}{3}(\cos 3\alpha_1 + \cos 3\alpha_2 + \ldots + \cos 3\alpha_n) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{n}{3}.$$

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что знак равенства может достигаться при $n = 9k$, где $k \in Z$.

26. Поскольку $x = 0$ и $x = 1$ не являются корнями данного уравнения, то достаточно рассмотреть открытый промежуток $(0;\ 1)$. Пусть $x = \cos\alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Исходное уравнение становится таким: $8\cos\alpha\,(1 - 2\cos^2\alpha)\,(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) = 1$. Понятно, что для решения этой задачи достаточно узнать, сколько корней имеет это уравнение на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

После надлежащих преобразований получим $-8\cos\alpha\cos 2\alpha\ \cos 4\alpha = 1$. Так как $\sin\alpha \neq 0$, то можем записать $-8\sin\alpha\cos\alpha\ \cos 2\alpha\ \cos 4\alpha = \sin\alpha$, откуда $-\sin 8\alpha = \sin\alpha$, $2\sin\frac{9\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha}{2} = 0$, $\alpha = \frac{2}{9}\pi k$, $k \in Z$, или $\alpha = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi n}{7}$, $n \in Z$. Из первой и второй серий промежутку $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ принадлежат по два значения.

Ответ. Рассматриваемое уравнение на промежутке $[0;\ 1]$ имеет ровно четыре корня.

27. Так как левая часть исходного уравнения задает четную функцию, то достаточно исследовать количество его корней на промежутке $[0; \sqrt{2}]$. Замена $x = \sqrt{2}\cos\alpha$, $\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ ($x = 0$ и $x = \sqrt{2}$ не являются корнями исходного уравнения).

Имеем $8\cos\alpha(2\cos^2\alpha - 1)(8\cos^4\alpha - 8\cos^2\alpha + 1) = 1$. Упростив левую часть уравнения, получим $8\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha = 1$. Это уравнение на $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ равносильно такому: $\sin 8\alpha - \sin\alpha = 0$. Отсюда $\alpha = \frac{2\pi k}{7}$, $k \in Z$, или $\alpha = \frac{\pi}{9} +$

$+\dfrac{2\pi n}{9}$, $n \in Z$. Из первой серии подходит только один корень, а из второй — два. Итак, на $[0; \sqrt{2}]$ имеем три корня, значит, на $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ — шесть.

Ответ. Шесть корней.

28. Первые два уравнения системы подсказывают сделать следующие замены: $a = 3\cos\alpha$, $b = 3\sin\alpha$, $c = 4\cos\beta$, $d = 4\sin\beta$, где $\alpha \in (0; 2\pi]$, $\beta \in (0; 2\pi]$. Тогда неравенство системы становится таким: $12\cos\alpha\sin\beta + 12\cos\beta\sin\alpha \geqslant 12$, т.е. $\sin(\alpha+\beta) \geqslant 1$. Отсюда с учетом ограничений для α и β запишем $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ или $\alpha + \beta = \dfrac{5\pi}{2}$. Далее, $b + d = 3\sin\alpha + 4\sin\beta = 3\cos\beta + 4\sin\beta = 5\left(\dfrac{3}{5}\cos\beta + \dfrac{4}{5}\sin\beta\right) = 5\sin(\varphi+\beta)$, где $\sin\varphi = \dfrac{3}{5}$, $\cos\varphi = \dfrac{4}{5}$. Следовательно, $b + d \geqslant -5$. Здесь важно не сделать преждевременного вывода, что -5 — наименьшее значение выражения $b + d$. Надо обязательно показать, что найдутся такие b и d, при которых $b + d = -5$. Действительно, при $\cos\beta = -\dfrac{3}{5}$ и $\sin\beta = -\dfrac{4}{5}$ получим $b + d = 3\cos\beta + 4\sin\beta = -5$. И последний шаг: $\sin\alpha = \cos\beta = -\dfrac{3}{5}$, $\cos\alpha = \sin\beta = -\dfrac{4}{5}$.

Ответ. $(a; b; c; d) : \left(\dfrac{12}{5}; -\dfrac{9}{5}; -\dfrac{12}{5}; -\dfrac{16}{5}\right)$.

29. Условие задачи не накладывает никаких ограничений на переменные x и y. Порой в таких ситуациях может стать эффективной следующая замена: $x = \operatorname{tg}\alpha$, $y = \operatorname{tg}\beta$, где $\alpha \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\beta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Имеем $\dfrac{(x+y)(1-xy)}{(1+x^2)(1+y^2)} = \dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\beta)} = \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}\sin 2(\alpha+\beta)$. Отсюда следует справедливость доказываемого неравенства.

30. Для любых $x \in R$ и $y \in R$ существуют такие $r \in R$ и $\alpha \in (0; 2\pi]$, что $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$. Из условия следует, что $1 \leqslant r^2 \leqslant 2$, $z = r^2\left(1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$. Но $\dfrac{1}{2} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha \leqslant \dfrac{3}{2}$.

Следовательно, $\frac{1}{2} \leqslant z \leqslant 3$. Заметим, что если $x = y = 1$, то $z = 3$, а если $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ и $y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, то $z = \frac{1}{2}$.

Ответ. $\min z = \frac{1}{2}$, $\max z = 3$.

31. Пусть $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, где $r \in R$ и $r \neq 0$, $\alpha \in (0; 2\pi]$. Тогда $A = \frac{3xy - 4x^2}{x^2 + y^2} = \frac{3r^2\sin\alpha\cos\alpha - 4r^2\cos^2\alpha}{r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} =$
$= \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 4\cos^2\alpha = \frac{3}{2}\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha - 2 = \frac{5}{2}\left(\frac{3}{5}\sin 2\alpha -\right.$
$\left.- \frac{4}{5}\cos 2\alpha\right) - 2 = \frac{5}{2}\sin(2\alpha - \varphi) - 2$, где $\cos\varphi = \frac{3}{5}$, $\sin\varphi = \frac{4}{5}$. Следовательно, $-\frac{9}{2} \leqslant A \leqslant \frac{1}{2}$. Легко показать, что существуют такие α, при которых $A = -\frac{9}{2}$ и $A = \frac{1}{2}$. Для этого, например, достаточно установить, что уравнения $\frac{3}{2}\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -\frac{5}{2}$ и $\frac{3}{2}\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = \frac{5}{2}$ имеют решения.

Ответ. $\min A = -\frac{9}{2}$, $\max A = \frac{1}{2}$.

32. Воспользуемся заменой $a = \operatorname{tg}\alpha$, $b = \operatorname{tg}\beta$, $c = \operatorname{tg}\gamma$, где α, β, γ принадлежат промежутку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Доказываемое тождество становится таким: $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) + \operatorname{tg}(\beta-\gamma) + \operatorname{tg}(\gamma-\alpha) =$
$= \operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)$. Имеем $\operatorname{tg}(\alpha-\beta) + \operatorname{tg}(\beta-\gamma) +$
$+ \operatorname{tg}(\gamma-\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha-\gamma)(1 - \operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)) + \operatorname{tg}(\gamma-\alpha) =$
$= \operatorname{tg}(\alpha-\beta)\operatorname{tg}(\beta-\gamma)\operatorname{tg}(\gamma-\alpha)$.

33. Целесообразно провести следующую замену: $x = \operatorname{ctg}\alpha$, $y = \operatorname{ctg}\beta$, $z = \operatorname{ctg}\gamma$, где α, β, γ — острые углы. Из условия следует, что $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha = 1$ или $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. Покажем, что α, β, γ — углы одного треугольника. Действительно, $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta +$
$+ \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = 0$, $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = 0$. Поскольку α, β, γ — острые, то $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)\operatorname{tg}\gamma \neq 0$. Отсюда получаем $\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} + \frac{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = 0$, $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta) + \operatorname{ctg}\gamma = 0$,

$\dfrac{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}{\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma}=0$, $\sin(\alpha+\beta+\gamma)=0$, и с учетом ограничений для α,β,γ можно записать $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

$f(x)=\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{|\sin\alpha|}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Так как $\sin\alpha>0$, то $f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. Аналогично получаем $f(y)=\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}$, $f(z)=\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

Имеем $f(x)f(y)+f(y)f(z)+f(z)f(x)=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+$ $+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\right)+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\times$ $\times\operatorname{tg}\left(\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}\right)\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\right)+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\times$ $\times\left(1-\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\right)+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=1.$

Ответ. 1.

34. Пусть $a=\operatorname{tg}\alpha$, $b=\operatorname{tg}\beta$, $c=\operatorname{tg}\gamma$, где α,β,γ — острые углы. Имеем $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. Следовательно, α,β,γ — углы одного треугольника (см. предыдущую задачу).

Доказываемое тождество принимает вид

$$\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\beta}+\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\gamma}+2\sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}=1,$$

или $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=1$.

Запишем

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos2\beta}{2}+$$
$$+\cos^2\gamma-1=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2(\alpha+\beta)=$$
$$=\cos(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))=$$
$$=2\cos(\pi-\gamma)\cos\alpha\cos\beta=-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

35. $a_1, a_2, \dots, a_{13}$ — числа, о которых говорится в условии задачи. Пусть $a_i=\operatorname{tg}\alpha_i$, где $\alpha_i\in\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$, $i=1,2,\dots,13$. Разобьем промежуток $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ на 12 равных частей. Тогда из 13 углов α_i найдутся по крайней мере два угла α_m и α_n такие, что $0<\alpha_m-\alpha_n<\dfrac{\pi}{12}$. Отсюда $0<\operatorname{tg}(\alpha_m-\alpha_n)<\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$.

Обозначив $\operatorname{tg}\alpha_m = x$, $\operatorname{tg}\alpha_n = y$, получим $0 < \dfrac{x-y}{1+xy} < \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12}$. Осталось лишь заметить, что $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{12} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}$.

§ 3. ПОМОГАЮТ ВЕКТОРЫ

36. Напомним, что эта задача уже знакома читателю по параграфу «Тригонометрия помогает алгебре». Здесь (так же, как и в следующих семи задачах) идея решения основана на простых геометрических соображениях.

Рассмотрим два вектора $\overline{m} = \overline{(x_1; y_1; z_1)}$ и $\overline{n} = \overline{(x_2; y_2; z_2)}$. Очевидно, имеет место следующее неравенство $|\overline{m}\cdot\overline{n}| \leqslant |\overline{m}|\,|\overline{n}|$ или в координатной форме $|x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2| \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$. Именно это последнее неравенство является ключом к решению. Отметим, что равенство достигается при условии коллинеарности векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$.

Пусть векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$ такие, что $\overline{m} = \overline{(a; b)}$ и $\overline{n} = \overline{(c; -d)}$. Тогда с учетом условия $|\overline{m}| = \sqrt{a^2+b^2} = 1$, $|\overline{n}| = \sqrt{c^2+d^2} = 1$. Кроме того, $\overline{m}\cdot\overline{n} = ac - bd$. Имеем $|ac - bd| = |\overline{m}\cdot\overline{n}| \leqslant |\overline{m}|\,|\overline{n}| = 1$.

37. Введем векторы $\overline{m} = \overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}; \dfrac{1}{\sqrt{b}}; \dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)}$ и $\overline{n} = \overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{b}}; \dfrac{1}{\sqrt{c}}; \dfrac{1}{\sqrt{a}}\right)}$.

Теперь нетрудно заметить, что $|\overline{m}| = |\overline{n}| = \sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ и $\overline{m}\cdot\overline{n} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}} + \dfrac{1}{\sqrt{bc}} + \dfrac{1}{\sqrt{ac}}$. Отсюда получаем

$$\frac{1}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{\sqrt{bc}} + \frac{1}{\sqrt{ac}} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

38. В данной задаче выбор выгодных координат для векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$ не столь очевиден. Пусть $\overline{m} = \overline{(a\sqrt{a}; b\sqrt{b}; c\sqrt{c})}$, $\overline{n} = \overline{\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}; \dfrac{1}{\sqrt{b}}; \dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)}$. Тогда $|\overline{m}| = \sqrt{a^3+b^3+c^3}$, $|\overline{n}| = \sqrt{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}}$ и $\overline{m}\cdot\overline{n} = a+b+c$. Теперь запишем неравенство $a+b+c \leqslant \sqrt{a^3+b^3+c^3}\ \times$

$\times\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}$. Возведя обе части последнего в квадрат, получаем доказываемое неравенство.

39. Равенство единице модуля вектора $\overline{n}=(\sin x;\cos x)$ может быть подсказкой для выбора координат векторов. Итак, $\overline{n}=(\sin x;\cos x)$, $\overline{m}=(\sin y\sin z;\cos y\cos z)$. Тогда левая часть доказываемого неравенства задает скалярное произведение векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$. Имеем $\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\times$ $\times\cos z\leqslant\sqrt{\sin^2 x+\cos^2 x}\cdot\sqrt{\sin^2 y\sin^2 z+\cos^2 y\cos^2 z}=$ $=\sqrt{\sin^2 y\sin^2 z+\cos^2 y\cos^2 z}$. Теперь записав два очевидных неравенства $\sin^2 y\sin^2 z\leqslant\sin^2 y$ и $\cos^2 y\cos^2 z\leqslant\cos^2 y$ и сложив их, сразу получаем нужную оценку.

40. Введя векторы $\overline{m}=(2;x)$ и $\overline{n}=(\sqrt{x-1};5)$, оценим левую часть уравнения: $\overline{m}\cdot\overline{n}=2\sqrt{x-1}+5x\leqslant\ \leqslant|\overline{m}||\overline{n}|=$ $=\sqrt{(x^2+4)(x+24)}$. Так как равенство возможно лишь при условии коллинеарности векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$, то решения (если они существуют) следует искать среди решений уравнения $\frac{\sqrt{x-1}}{2}=\frac{5}{x}$, имеющего (в этом несложно убедиться) единственный корень $x=5$. Проверка показывает, что $x=5$ удовлетворяет исходному уравнению.

Ответ. $x=5$.

41. Ясно, что для оценки выражения $2x+y-z$ координаты векторов необходимо выбрать так, чтобы модуль одного из них был равен $\sqrt{x^2+3y^2+z^2}=\sqrt{2}$. Рассмотрим векторы $\overline{m}=(x;y\sqrt{3};z)$ и $\overline{n}=\left(2;\frac{1}{\sqrt{3}};-1\right)$. Тогда имеем

$$|2x+y-z|\leqslant\sqrt{x^2+3y^2+z^2}\cdot\sqrt{2^2+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+(-1)^2}=$$

$=4\sqrt{\frac{2}{3}}$. Следовательно, $2x+y-z\leqslant4\sqrt{\frac{2}{3}}$ и

$2x+y-z\geqslant-4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Те значения переменных, при которых достигается наибольшее и наименьшее значения, можно найти, используя условие коллинеарности векторов $\overline{m}$ и $\overline{n}$ и равенство x^2+ $+3y^2+z^2=2$, т.е. решив систему

$$\begin{cases} \frac{x}{2} = 3y = -z; \\ x^2 + 3y^2 + z^2 = 2. \end{cases}$$

Ответ. $\min(2x + y - z) = -4\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\max(2x + y - z) = 4\sqrt{\frac{2}{3}}$.

42. Оценим правую и левую части уравнения: $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \geqslant 2$, $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 1 \cdot \sqrt{x-2} + 1 \cdot \sqrt{4-x} \leqslant \sqrt{1^2 + 1^2} \cdot \sqrt{x - 2 + 4 - x} = 2$. Здесь векторы выбраны следующим образом: $\overline{n} = (\overline{1;\, 1})$, $\overline{m} = (\overline{\sqrt{x-2};\, \sqrt{4-x}})$. Теперь ясно, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 11 = 2, \\ \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2. \end{cases}$$

Ответ. $x = 3$.

43. Рассмотрим векторы $\overline{x} = (\overline{a;\, b})$, $\overline{y} = (\overline{c;\, d})$, $\overline{z} = (\overline{e;\, f})$ и $\overline{t} = (\overline{g;\, h})$ с общим началом в точке O (рис. 17). В такой интерпретации отрицательность всех указанных в условии шести чисел означает, что каждый из углов $\angle(\overline{x}\,\overline{y})$, $\angle(\overline{x}\,\overline{z})$, $\angle(\overline{x}\,\overline{t})$, $\angle(\overline{y}\,\overline{z})$, $\angle(\overline{y}\,\overline{t})$ и $\angle(\overline{z}\,\overline{t})$ — тупой, что очевидно невозможно.

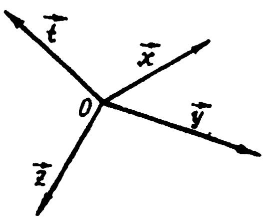


Рис. 17.

44. Пусть векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n$ такие, что $\overline{x}_1 = (\overline{a_1;\, b_1})$, $\overline{x}_2 = (\overline{a_2;\, b_2})$, ..., $\overline{x}_n = (\overline{a_n;\, b_n})$. Тогда доказываемое неравенство можно переписать так:

$$\sum_{i=1}^{n} |\overline{x}_i| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i\right|,$$

т.е. сумма модулей указанных n векторов не меньше модуля суммарного вектора. Отметим,

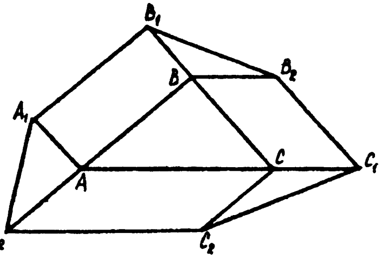


Рис. 18.

что равенство возможно лишь при условии сонаправленности всех векторов.

45. Покажем, что $\overline{A_2A_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{C_1C_2} = \overline{0}$ (рис. 18). Действительно, имеем $\overline{A_2A_1} + \overline{A_1B_1} + \overline{B_1B_2} + \overline{B_2C_1} + \overline{C_1C_2} + \overline{C_2A_2} = \overline{0}$. Кроме того, $\overline{A_1B_1} + \overline{B_2C_1} + \overline{C_2A_2} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \overline{0}$.

Казалось бы, решение завершено, однако здесь важно не упустить, что возможен случай, когда векторы $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ коллинеарны (рис. 19). В этом случае сумма двух рассматриваемых отрезков равна третьему и треугольник построить нельзя.

46. Пусть $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ — единичные векторы коллинеарные сторонам AB, BC и CA треугольника ABC соответственно (рис 20).

Рассмотрим очевидное неравенство $(\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3)^2 \geqslant 0$. Имеем $\overline{e}_1^{\,2} + \overline{e}_2^{\,2} + \overline{e}_3^{\,2} + 2(\overline{e}_1\overline{e}_2 + \overline{e}_1\overline{e}_3 + \overline{e}_2\overline{e}_3) \geqslant 0$ или $3 - 2(\cos B + \cos C + \cos A) \geqslant 0$,

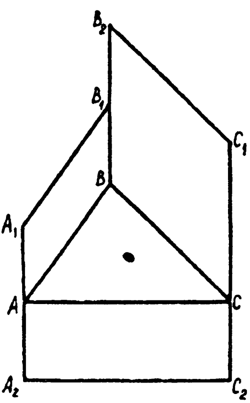


Рис. 19.

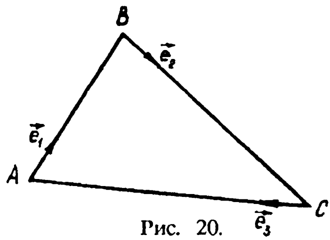


Рис. 20.

откуда и следует доказываемое неравенство.

47. Пусть O — центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC. Тогда $\angle AOB = 2\angle C$, $\angle BOC = 2\angle A$, $\angle AOC = 2\angle B$. (Если треугольник ABC — тупоугольный, например, $\angle A$ — тупой, то $\angle BOC = 360° - 2\angle A$). Запишем очевидное неравенство $(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})^2 \geqslant 0$. Отсюда $3R^2 + 2R^2(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geqslant 0$, где R — радиус описанной окружности. Далее, получаем $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geqslant -\dfrac{3}{2}$.

48. Выберем на ребрах трехгранного угла единичные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ (рис. 21).

Запишем четыре очевидных равенства $2\cos\alpha = 2\,\overline{e}_1\overline{e}_2$, $2\cos\beta = 2\,\overline{e}_2\overline{e}_3$, $2\cos\gamma = 2\,\overline{e}_3\overline{e}_1$, $3 = \overline{e}_1^{\,2} + \overline{e}_2^{\,2} + \overline{e}_3^{\,2}$. Складывая последние, получаем $3+2(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) = (\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + \overline{e}_3)^2 > 0$, так как векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ некомпланарны. Следовательно,

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma > -\frac{3}{2}.$$

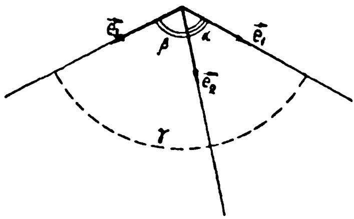


Рис. 21.

49. На ребрах трехгранного угла введем единичные векторы $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ (рис. 22). Тогда векторы $\overline{e}_1 + \overline{e}_2$, $\overline{e}_2 + \overline{e}_3$, $\overline{e}_3 + \overline{e}_1$ коллинеарны биссектрисам плоских углов α, β и γ соответственно.

Рассмотрим попарные произведения полученных векторов:

$$(\overline{e}_1 + \overline{e}_2)(\overline{e}_2 + \overline{e}_3) = \overline{e}_1\overline{e}_2 + \overline{e}_2\overline{e}_3 + \overline{e}_1\overline{e}_3 + 1,$$

$$(\overline{e}_1 + \overline{e}_2)(\overline{e}_3 + \overline{e}_1) = \overline{e}_1\overline{e}_3 + \overline{e}_2\overline{e}_3 + \overline{e}_2\overline{e}_1 + 1,$$

$$(\overline{e}_2 + \overline{e}_3)(\overline{e}_1 + \overline{e}_3) = \overline{e}_1\overline{e}_2 + \overline{e}_2\overline{e}_3 + \overline{e}_3\overline{e}_1 + 1.$$

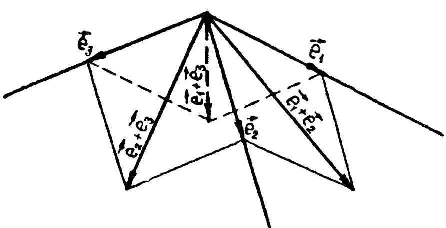


Рис. 22.

Так как все три скалярных произведения имеют один и тот же знак (более того — они равны), то углы $\angle((\overline{e}_1 + \overline{e}_2)(\overline{e}_2 + \overline{e}_3))$, $\angle((\overline{e}_1 + \overline{e}_2)(\overline{e}_3 + \overline{e}_1))$, $\angle((\overline{e}_2 + \overline{e}_3)(\overline{e}_1 + \overline{e}_3))$ одновременно либо острые, либо тупые, либо прямые.

50. Представим данное уравнение в таком виде

$$4\cos^4\frac{x}{4} = 2\cos^2\frac{x}{4} - 1 + 2\cos^2\frac{x}{4}\cos 2x,$$

$$4\cos^4\frac{x}{4} - 2\cos^2\frac{x}{4}\,(1 + \cos 2x) + 1 = 0.$$

Теперь становится ясным, что последнее уравнение выгодно рассматривать как квадратное относительно $\cos^2\frac{x}{2}$, для котрого $\frac{1}{4}D = (1 + \cos 2x)^2 - 4$. Так как $(1 + \cos 2x)^2 \leqslant 4$, то уравнение будет иметь решение, если $\cos 2x = 1$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ 4\cos^4\frac{x}{4} - 4\cos^2\frac{x}{4} + 1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ 2\cos^2\frac{x}{4} = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 1, \\ \cos\frac{x}{2} = 0. \end{cases}$$

Ответ. $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$.

51. Если «видеть» второе уравнение системы как квадратное относительно y, то его дискриминант будет равен $64 - 16z^2$. Потребовав, чтобы $64 - 16z^2 \geqslant 0$, получим $|z| \leqslant 2$. С учетом того, что $z \geqslant 0$, запишем $0 \leqslant z \leqslant 2$.

Представим третье уравнение системы как квадратное относительно x. Имеем $x^2 - 2x(z - 4) - 6z + 16 = 0$. $\frac{1}{4}D = (z - 4)^2 + 6z - 16 \geqslant 0$. Отсюда, не забыв, что $z \geqslant 0$, получим $z = 0$ или $z \geqslant 2$. Сравнивая результаты, приходим к выводу, что $z = 0$ или $z = 2$. Подставив найденные значения в исходную систему, легко получить ответ.

Ответ. $(-4; 2; 0)$, $(-2; 1; 2)$.

52. Если $(x_0; y_0)$ — точка, через которую не проходит ни одна из кривых заданного семейства, то координаты этой точки не удовлетворяют исходному уравнению. Следовательно, задача свелась к тому, чтобы найти зависимость между x и y, при которой данное в условии уравнение не имело бы решений. Нужную зависимость несложно получить, сосредоточив внимание не на переменных x и y, а на параметре p. В этом случае возникает продуктивная, но уже не новая идея: рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно p. Имеем $2p^2 - 4px + x^2 - y - 3 = 0$. Дискриминант $D = 8x^2 + 8y + 24$ должен быть отрицательным. Отсюда получаем $y < -x^2 - 3$. Следовательно, искомое множество — это все точки координатной плоскости, лежащие «под» параболой $y = -x^2 - 3$.

53. Имеем $x^2 - 2xa + a^2 + y^2 - 2ay + a^2 \leqslant 2 + a^2$, $a^2 - 2a(x + y) + x^2 + y^2 - 2 \leqslant 0$. Последнее неравенство как квадратичное относительно a должно иметь хотя бы одно решение. Это достигается требованием неотрицательности его дискриминанта. Запишем $\frac{1}{4}D = (x + y)^2 - (x^2 + y^2 - 2) \geqslant \geqslant 0$. Отсюда $xy \geqslant -1$. Следовательно, семейство кругов заполняет область, лежащую между ветками гиперболы $y = -\frac{1}{x}$.

54. Пусть x_0 — корень, о котором говорится в условии, т. е. $x_0 > 2$. Имеем $a^2 - abx_0 + x_0^{12} = 0$, $D(a) = b^2 x_0^2 - 4x_0^{12} \geqslant \geqslant 0$. Отсюда $b^2 \geqslant 4x_0^{10}$, $|b| \geqslant 2x_0^5 > 64$.

55. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 5 - x = (x^2 - 5)^2, \\ x^2 \geqslant 5. \end{cases}$$

Представим уравнение системы в виде квадратного... относительно 5. Получаем $5^2 - 5(1 + 2x^2) + x + x^4 = 0$. Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} 5 = \dfrac{(1 + 2x^2) + (1 - 2x)}{2}, \\ 5 = \dfrac{(1 + 2x^2) - (1 - 2x)}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - 4 = 0, \\ x^2 + x - 5 = 0. \end{array}\right.$$

Непосредственной проверкой устанавливаем, что системе удовлетворяют лишь два корня $x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ и $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

Ответ. $x = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}$ или $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$.

56. Будем «смотреть» на данное уравнение как на квадратное относительно $\sqrt{2}$. Имеем $(\sqrt{2})^2 - x^2\sqrt{2} + x^3 - x^2 = 0$. Переходим к равносильной совокупности

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{2} = \dfrac{x^2 + (x^2 - 2x)}{2}, \\ \sqrt{2} = \dfrac{x^2 - (x^2 - 2x)}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 - x - \sqrt{2} = 0, \\ x = \sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Ответ. $x = \sqrt{2}$ или $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{2}}}{2}$.

57. Представим данное уравнение как квадратное относительно $\sqrt{3}$. Имеем $(\sqrt{3})^2 - (2x^2 + 1)\sqrt{3} + x^4 + x = 0$. Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3} = \dfrac{2x^2 + 1 + (2x - 1)}{2}, \\ \sqrt{3} = \dfrac{2x^2 + 1 - (2x - 1)}{2}, \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x - \sqrt{3} = 0, \\ x^2 - x + 1 - \sqrt{2} = 0. \end{array}\right.$$

Ответ. $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4\sqrt{3}}}{2}$ или $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{3} - 3}}{2}$.

58. Заметим, что a и b одновременно равными нулю быть не могут. Если $a = 0$, то доказываемое неравенство становится очевидным. Разберем случай, когда $a \neq 0$. Рассмотрим квадратичную функцию $f(x) = ax^2 + bx + c$. Из условия следует, что $f(1)\,f(0) < 0$. А этого достаточно для того, чтобы парабола f пересекала ось абсцисс в двух точках. Следовательно, дискриминант соответствующего квадратного трехчлена должен быть положительным, т.е. $b^2 > 4ac$.

59. Рассмотрим квадратные трехчлены $a_1x^2 + b_1x + c_1$ и $a_2x^2 + b_2x + c_2$. По условию их дискриминанты неположительны, а старшие коэффициенты положительны. Тогда для любого x имеют место неравенства $a_1x^2 + b_1x + c_1 \geqslant 0$, $a_2x^2 + b_2x + c_2 \geqslant 0$. Вместе с тем $7x^2 + x + 2 > 0$ при всех x. Складывая три последних неравенства, получим $(a_1 + a_2 + 7)\,x^2 + (b_1 + b_2 + 1)x + c_1 + c_2 + 2 > 0$. Поскольку это квадратичное неравенство опять-таки выполняется для любого x, то дискриминант соответствующего квадратного трехчлена отрицателен, т.е. $4\,(a_1 + a_2 + 7)(c_1 + c_2 + 2) > (b_1 + b_2 + 1)^2$.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ

60. Легко заметить, что $x = 2$ — корень данного уравнения. Покажем, что он единственный. Перепишем исходное уравнение в таком виде $\left(\frac{5}{3}\right)^x - 1 = \frac{16}{3^x}$. Левая часть этого уравнения задает возрастающую функцию, а правая — убывающую. А, как известно, такие уравнения имеют не более одного корня.

Ответ. $x = 2$.

61. Переходим к равносильным уравнениям $12 \cdot 3^{3x} + 4 = 5 \cdot 8^{3x}$, $12 \cdot \left(\frac{3}{8}\right)^{3x} + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{3x} = 5$. Очевидно, $x = \frac{1}{3}$ — корень. Причем он единственный, так как левая часть последнего уравнения — убывающая функция, правая — константа.

Ответ. $x = \frac{1}{3}$.

62. Рассмотрим функцию $f(x) = (\sqrt{3})^x - 2^{x-1} - 1$. Тогда ее производная $f'(x) = (\sqrt{3})^x \ln \sqrt{3} - 2^{x-1} \ln 2$. Найдем критические точки функции f. Имеем $f'(x) = 0$, т.е. $(\sqrt{3})^x \ln 3 =$

$= 2^x \ln 2$, $x = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\log_3 2)$. Легко показать, что функция f возрастает на $(-\infty; x_0]$ и убывает на $[x_0; \infty)$, где $x_0 = \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} (\log_3 2)$. Следовательно, исходное уравнение может иметь не более двух корней. Нетрудно установить, что ими будут $x = 2$ и $x = 4$.

Ответ. $x = 2$ или $x = 4$.

63. Функция $f(t) = t + \sqrt[6]{t}$ — возрастающая. Тогда из первого уравнения системы следует, что $x = y$. Отсюда $3x^2 = 27$. Поскольку $x \geqslant 0$, то получаем $x = 3$.

Ответ. (3; 3).

64. Перепишем первое уравнение системы так: $\sqrt{x} + \log_3 x = \sqrt{y} + \log_3 y$. Поскольку функция $f(t) = \sqrt{t} + \log_3 t$ — возрастающая, то $x = y$. Второе уравнение системы принимает вид $2^{x+2} + 2^{3x} = 5 \cdot 2^{2x}$. Отсюда $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$, $2^x = 1$ или $2^x = 4$, $x = 0$ или $x = 2$. Так как $x > 0$, то подходит только $x = 2$.

Ответ. (2; 2).

65. Рассмотрим функцию $f(t) = t(2 + \sqrt{t^2 + 3})$, $f'(t) = 2 + \sqrt{t^2 + 3} + \dfrac{t^2}{\sqrt{t^2 + 3}} > 0$. Следовательно, функция f — возрастающая. Исходное уравнение выгодно переписать так $(2x + 1)\left(2 + \sqrt{(2x + 1)^2 + 3}\right) = 3x(2 + \sqrt{9x^2 + 3})$. Тогда левая часть этого уравнения — значение функции f в точке $t = 2x + 1$, а правая — в точке $t = 3x$. Поскольку f — строго монотонна, то $2x + 1 = 3x$. Отсюда $x = 1$.

Ответ. $x = 1$.

66. Функция $f(t) = t + \sin t$ является возрастающей, так как $f'(t) = 1 + \cos t > 0$ при всех t, кроме $t = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$, а для каждой из этих точек можно указать окрестность, в которой производная положительна. Тогда из первых двух уравнений системы следует, что $x = y = z$, а из третьего — $x = y = z = \pi$.

Ответ. $x = y = z = \pi$.

67. Поскольку $5 + 3\cos 4x \geqslant 2$, то $\log_2(5+3\cos 4x) \geqslant 1$. Но правая часть данного уравнения не превосходит 1. Следовательно, исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \log_2 (5 + 3\cos 4x) = 1, \\ \sin^2 \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 4x = -1, \\ \cos \left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi k}{2}, \\ x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{cases}$$

Ответ. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z.$

68. Запишем $2^{|x|} + \lg(1 + x^2 + |y|) = \cos y$. Очевидно, что $x^2 + |y| \geqslant 0$. Значит, $\lg(1 + x^2 + |y|) \geqslant 0$. Но $2^{|x|} \geqslant 1$. Следовательно, левая часть уравнения не меньше единицы, а правая — не больше. Таким образом, равенство может быть обеспечено лишь в том случае, если

$$\begin{cases} \cos y = 1, \\ |x| = 0, \\ x^2 + |y| = 0. \end{cases}$$

Ответ. $x = y = 0.$

69. Очевидно $x + y > 0$. Тогда $x + y + \dfrac{1}{x + y} \geqslant 2$, а значит, $\lg\left(x + y + \dfrac{1}{x + y}\right) \geqslant \lg 2$. Следовательно, левая часть уравнения — сумма двух неотрицательных слагаемых. Отсюда можно сделать вывод, что исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x + y} = 2, \\ x^2 + y^2 = 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$

Ответ. (0; 1), (1; 0).

70. $(\sin x + \sqrt{3}\cos x)^2 = \left(2\left(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)\right)^2 =$

$= 4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leqslant 4$. Но $5 + \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) \geqslant 4$. Значит, корни исходного уравнения — это решения системы

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3} + 4x\right) = -1, \\ \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}, \\ x = \frac{\pi}{6} + \pi n, \text{ где } n \text{ и } k \text{ — целые.} \end{cases}$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

71. Имеем $\cos^5 x + \sin^5 x = 2 - \sin^4 x$. Так как $\cos^5 x \leqslant \leqslant \cos^2 x$, $\sin^5 x \leqslant \sin^2 x$, то $\cos^5 x + \sin^5 x \leqslant \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

В то же время $2 - \sin^4 x \geqslant 1$. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin^5 x + \cos^5 x = 1, \\ 2 - \sin^4 x = 1, \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = -1, \\ \sin^5 x + \cos^5 x = 1, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \sin x = 1, \\ \sin^5 x + \cos^5 x = 1, \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sin x = -1, \\ \cos^5 x = 2, \end{cases} \\ \\ \begin{cases} \sin x = 1, \\ \cos^5 x = 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ. $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$.

72. Из первого неравенства видно, что $\sqrt{x + y} \geqslant 2$, т.е. $x + y \geqslant 4$. Вместе с тем правая часть второго неравенства не превосходит 1. Значит, $2^{x+y-4} \leqslant 1$. Отсюда $x + y \leqslant 4$. Следовательно, $x + y = 4$. Тогда первое неравенство системы становится таким $2 \geqslant 2 + x^2$. Получаем $x = 0$, а $y = 4$. Теперь легко установить, что $z = 0$.

Ответ. $x = 0,\ y = 4,\ z = 0$.

73. Первое уравнение системы выгодно представить в таком виде $-(y+1)^2 = \sqrt{x-y} - 3$. Отсюда $\sqrt{x-y} - 3 \leqslant 0$, т.е. $0 \leqslant x - y \leqslant 9$. Но из второго уравнения системы следует, что $x - y \geqslant 9$. Значит, $x - y = 9$. Тогда $9 + y + 8y = 0$, $y = -1$.

Ответ. $(8;\ -1)$.

74. Рассмотрим данное уравнение как квадратное относительно x. Его дискриминант $D = 4\sin^2\dfrac{\pi x^2}{x^4+4} - 2 \geqslant 0$. Отсюда $\left|\sin\dfrac{\pi x^2}{x^4+4}\right| \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. С другой стороны $\left|\sin\dfrac{\pi x^2}{x^4+4}\right| = \left|\sin\dfrac{\pi}{x^2+\dfrac{4}{x^2}}\right| \leqslant \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Следовательно, $\left|\sin\dfrac{\pi}{x^2+\dfrac{4}{x^2}}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. А это возможно, если только $x^2 = \dfrac{4}{x^2}$, т.е. $x = \pm\sqrt{2}$. Важно понимать, что найденные значения для x составляют лишь необходимое условие быть корнем уравнения. Поэтому надо сделать проверку. Она покажет, что подходит только $x = -\sqrt{2}$.

Ответ. $x = -\sqrt{2}$.

75. Представим исходное уравнение в таком виде: $\dfrac{x^3+1}{2} = \sqrt[3]{2x-1}$. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{2}(x^3+1)$. Она является монотонной на $D(f)$, а следовательно, обратимой. Легко показать, что функция $g(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ будет обратной для функции f. Поскольку функции f и g — возрастающие, то общие точки их графиков лежат на прямой $y = x$. Обратим внимание читателя на обязательность условия возрастания: например, функции $y = -x^3$ и $y = -\sqrt[3]{x}$ взаимно обратные, однако не все точки пересечения их графиков лежат на прямой $y = x$.

Итак, данное уравнение равносильно уравнению

$$\frac{x^3+1}{2} = x,\quad x^3 - 2x + 1 = 0,\quad (x-1)(x^2+x-1) = 0.$$

Ответ. $x = 1$, или $x = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, или $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

76. Имеем $\sqrt[3]{x+22} = (x-2)^3 - 24$, $\sqrt[3]{(x-2)+24} = (x-2)^3 - 24$. Функции $y = \sqrt[3]{t+24}$ и $y = t^3 - 24$ возрастающие и взаимно обратные. Тогда данное уравнение равносильно уравнению $(x-2)^3 - 24 = x - 2$, $(x-5)(x^2 - x + 6) = 0$.

Ответ. $x = 5$.

77. Как и в предыдущем примере, данное уравнение выгодно записать так: $\sqrt[3]{(3x+3)+6} = (3x+3)^3 - 6$. Свойства функций левой и правой частей уравнения позволяют сделать вывод, что это уравнение равносильно такому: $(3x+3)^3 - 6 = 3x + 3$, $(3x + 3 - 2)((3x+3)^2 + 2(3x+3) + 3) = 0$.

Ответ. $x = -\frac{1}{3}$.

78. Функция $f(x) = \ln(x+1)$ определена и возрастает на $D(f) = (-1; \infty)$. На этом промежутке функция $g(x) = e^x - 1$ является обратной для функции f. Поэтому исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} e^x - 1 = x, \\ x > -1. \end{cases}$$

Рассмотрим функцию $h(x) = e^x - x - 1$. Она определена и дифференцируема на R. $h'(x) = e^x - 1$. Следовательно, $h(x)$ убывает на $(-\infty; 0]$ и возрастает на $[0; \infty)$, $x = 0$ — точка минимума. Тогда для любого x $f(x) \geqslant f(0) = 0$. Следовательно, рассматриваемая функция обращается в нуль только в одной точке, и исходное уравнение имеет единственный корень $x = 0$.

Ответ. $x = 0$.

79. В этой задаче предоставим параметру a «права», равные правам переменной. Это выражается в следующем. Рассмотрим функцию $f(a) = a^5 + x$, ей обратная будет $g(a) = \sqrt[5]{a - x}$, причем f и g — возрастающие функции. Тогда исходное уравнение равносильно такому:

$$a^5 + x = a, \; x = a - a^5.$$

Ответ. $x = a - a^5$.

§ 6. ПЕРЕХОД В ДРУГУЮ СИСТЕМУ СЧИСЛЕНИЯ

80. Запишем числа $2^n - 1$, $2^n + 1$ и 7 в двоичной системе. Имеем $2^n - 1 = (\underbrace{11...1}_{n})_2$, $7 = 2^3 - 1 = (111)_2$, $2^n + 1 = (\underbrace{10...01}_{n+1})_2$. Теперь становится понятным, что $2^n - 1 \vdots 7$ только при $n = 3k$, где $k \in N$, $2^n + 1$ не делится на 7 ни при каких целых положительных n.

81. Перейдем в троичную систему: $3^k - 1 = (\underbrace{22...2}_{k})_3$, $3^k + 1 = (\underbrace{10...01}_{k+1})_3$, $13 = (111)_3$. Отсюда $3^k - 1 \vdots 13$ только при $k = 3n$, $n \in N$.

82. Переведем все числа из N_0 в двоичную систему. В множество A_1 поместим все числа, в двоичной записи которых 1 может стоять только на нечетных местах, считая справа. Множество A_2 будет содержать все числа, где 1 наоборот может стоять только на четных местах. Ясно, что любое число $n \in N_0$ может быть представлено в виде суммы $a_1 + a_2$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$. Приведем пример. Пусть $n = 1101110010$. Тогда $a_1 = 101010000$, $a_2 = 1010100010$.

83. Запишем все натуральные числа в троичной системе. Любое натуральное число, троичная запись которого не состоит только из 0 и 2, может быть представлено в виде суммы двух различных чисел из M, где M — множество всех натуральных чисел, записанных только с помощью нуля и единицы. Понятно, что число из $N \setminus M$, будучи умноженное на 2, не содержит в троичной записи только 0 и 2, а следовательно, оно может быть представлено в виде суммы двух различных чисел из M. А это и означает, что любое число из $N \setminus M$ равно среднему арифметическому каких-то двух различных чисел из M.

Вместе с тем любое число из M, умноженное на 2, имеет в троичной системе запись, в которой используются только 0 и 2. Значит, все числа из M указанным свойством не обладают.

§ 7. ПОМОГАЕТ ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

При решении задач этого параграфа нами будут использованы следующие свойства параллельного проектирования.

а) Любая прямая, не параллельная направлению проектирования, переходит в прямую.

б) Параллельные прямые, не параллельные направлению проектирования, переходят в параллельные прямые или в одну прямую.

в) Сохраняется отношение длин отрезков, лежащих на одной прямой или на параллельных прямых.

г) При параллельном проектировании сохраняется отношение площадей двух любых фигур, если направление проектирования не параллельно плоскостям фигур.

д) Любой треугольник можно рассматривать как параллельную проекцию данного треугольника с точностью до подобия.

84. Такой пятиугольник существует. Спроектировав правильный пятиугольник в любой, отличный от правильного, получим пятиугольник, обладающий нужным свойством.

85. Здесь решение полностью совпадает с решением, приведенным в задаче 84.

86. Спроектируем треугольник ABC в равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ (рис. 23). Тогда точки M, N и E перейдут в точки M_1, N_1, E_1 такие, что $\frac{C_1M_1}{C_1A_1} = \frac{CM}{CA} = m$, $\frac{C_1N_1}{C_1B_1} = \frac{CN}{CB} = n$ и $\frac{M_1E_1}{E_1N_1} = \frac{ME}{EN}$. Кроме того, медиана CD перейдет в медиану C_1D_1, для треугольника $A_1B_1C_1$ являющуюся также и биссектрисой. По теореме о биссектрисе угла треугольника имеем $\frac{M_1E_1}{E_1N_1} = \frac{C_1M_1}{C_1N_1} = \frac{mC_1A_1}{n\,C_1B_1} = \frac{m}{n}$.

Ответ. $\frac{ME}{EN} = \frac{m}{n}$.

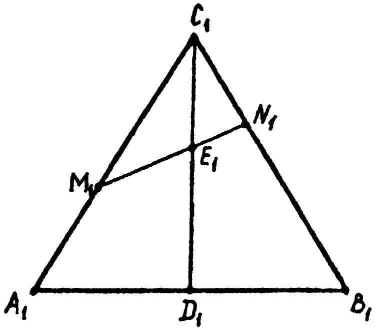


Рис. 23.

87. Спроектируем данный треугольник ABC в равносторонний треугольник $A_1B_1C_1$ с площадью S_1 (рис. 24). Имеем

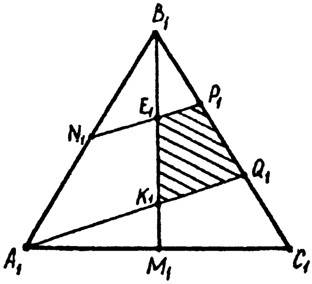


Рис. 24.

$$\frac{S_{N_1B_1P_1}}{S_1}=\frac{N_1B_1\cdot P_1B_1}{A_1B_1\cdot C_1B_1}=\frac{1}{6},$$ т.е. $S_{N_1B_1P_1}=\frac{S_1}{6}$. Кроме того, учитывая, что B_1E_1 — биссектриса треугольника $N_1B_1P_1$, легко получить $\frac{S_{B_1E_1P_1}}{S_{B_1E_1N_1}}=\frac{2}{3}$.

Отсюда $S_{B_1E_1P_1}=\frac{S_1}{15}$. Аналогично получаем $S_{B_1K_1Q_1}=\frac{4S_1}{15}$. Тогда $S_{K_1E_1P_1Q_1}=\frac{S_1}{5}$. Используя свойство параллельного проектирования (пункт г).), получаем

Ответ. $\frac{S}{5}$.

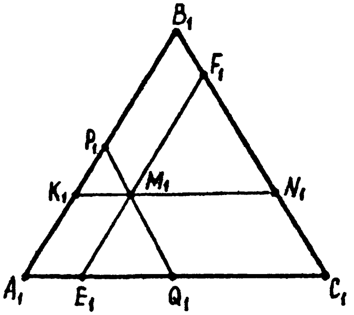


Рис. 25.

88. Так же, как и в предыдущих двух задачах, спроектируем треугольник ABC в равносторонний $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 25). Пусть $A_1B_1=a$. Тогда $\frac{EF}{AB}=\frac{E_1F_1}{A_1B_1}$, $\frac{PQ}{BC}=\frac{P_1Q_1}{B_1C_1}$, $\frac{KN}{AC}=\frac{K_1N_1}{A_1C_1}$. Имеем

$$\frac{E_1F_1}{A_1B_1}+\frac{P_1Q_1}{B_1C_1}+\frac{K_1N_1}{A_1C_1}=$$

$$=\frac{E_1M_1+M_1F_1+P_1M_1+M_1Q_1+K_1M_1+M_1N_1}{a}=$$

$$=\frac{(E_1M_1+M_1F_1+K_1M_1)+(P_1M_1+M_1Q_1+M_1N_1)}{a}=$$

$$= \frac{(A_1K_1 + P_1B_1 + K_1P_1) + (B_1F_1 + N_1C_1 + F_1N_1)}{a} = \frac{2a}{a} = 2.$$

89. При параллельном проектировании данного треугольника в равносторонний (рис. 26) получаем шестиугольник, диагонали которого (это несложно показать, исходя из соображений симметрии) принадлежат медианам треугольника. А это как раз и означает, что диагонали полученного шестиугольника, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке.

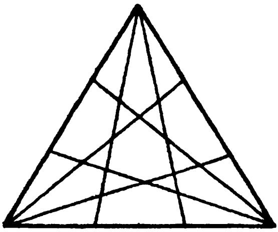


Рис. 26.

§ 8. СТЕРЕОМЕТРИЯ ПОМОГАЕТ ПЛАНИМЕТРИИ

90. Четыре треугольника в сумме дают 12 сторон. У нас 6 спичек. Следовательно, каждая спичка должна быть общей стороной двух треугольников (очевидно на плоскости отрезок не может являться общей стороной трех и более равных равносторонних треугольников). Рассмотрим один из правильных треугольников, составленный из трех спичек. Ясно, что вершина какого-либо другого правильного треугольника не может принадлежать ни стороне первого, ни его внутренней области. Вместе с тем, если указанная вершина будет лежать вне треугольника, то очевидно построить конфигурацию, в которой каждая спичка являлась бы общей стороной двух равносторонних треугольников, невозможно. Таким образом, такое построение на плоскости невыполнимо. Но если выйти в пространство, то задача становится тривиальной: достаточно из данных спичек сложить правильный тетраэдр (рис. 27).

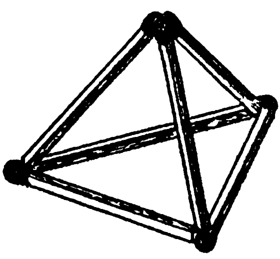


Рис. 27.

91. Будем рассматривать три данные параллельные прямые как параллельную проекцию ребер треугольной призматической поверхности. Тогда задача сводится к построению сечения треугольной призмы плоскостью, проходящей через три данные точки.

Пусть a, b, c — три прямые, а M, N, P — три точки, о которых говорится в условии (рис. 28). Построим н е к о т о р ы й треугольник ABC с вершинами на трех заданных прямых. Будем считать этот треугольник основанием треугольной призмы. На рисунке показано построение сечения. $A_1B_1C_1$ — иско-

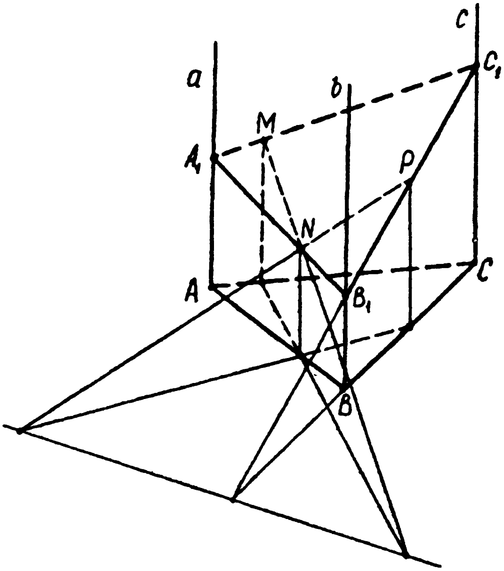


Рис. 28.

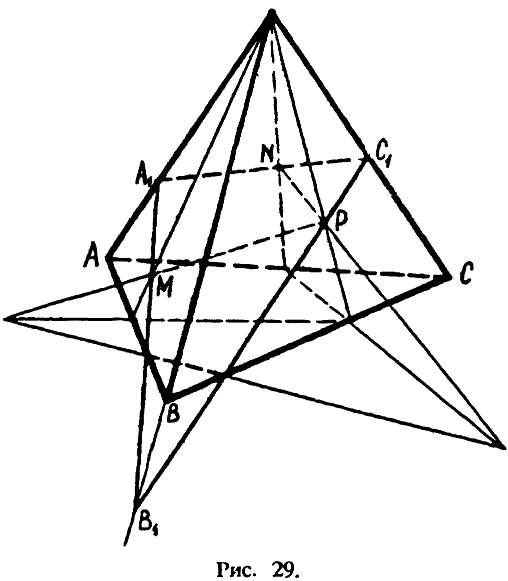


Рис. 29.

мый треугольник.

Заметим, что каждая из трех заданных точек M, N, P может принадлежать любой из трех плоскостей данной призматической поверхности. Поэтому в общем случае задача может иметь 6 различных решений.

92. Эта задача во многом аналогична предыдущей. Разница лишь в том, что мы будем строить сечение треугольной пирамиды. На рис. 29 показано решение для одного из шести возможных случаев расположения точек M, N, P.

93. Будем рассматривать данную конфигурацию (рис.30) как ортогональную проекцию трех сфер на плоскость, проходящую через их центры O_1, O_2, O_3. Каждые две сферы пересекаются по окружности, плоскость которой перпендикулярна плоскости $O_1O_2O_3$. Проекции окружностей на плоскость $O_1O_2O_3$ есть отрезки AB, CD, MN.

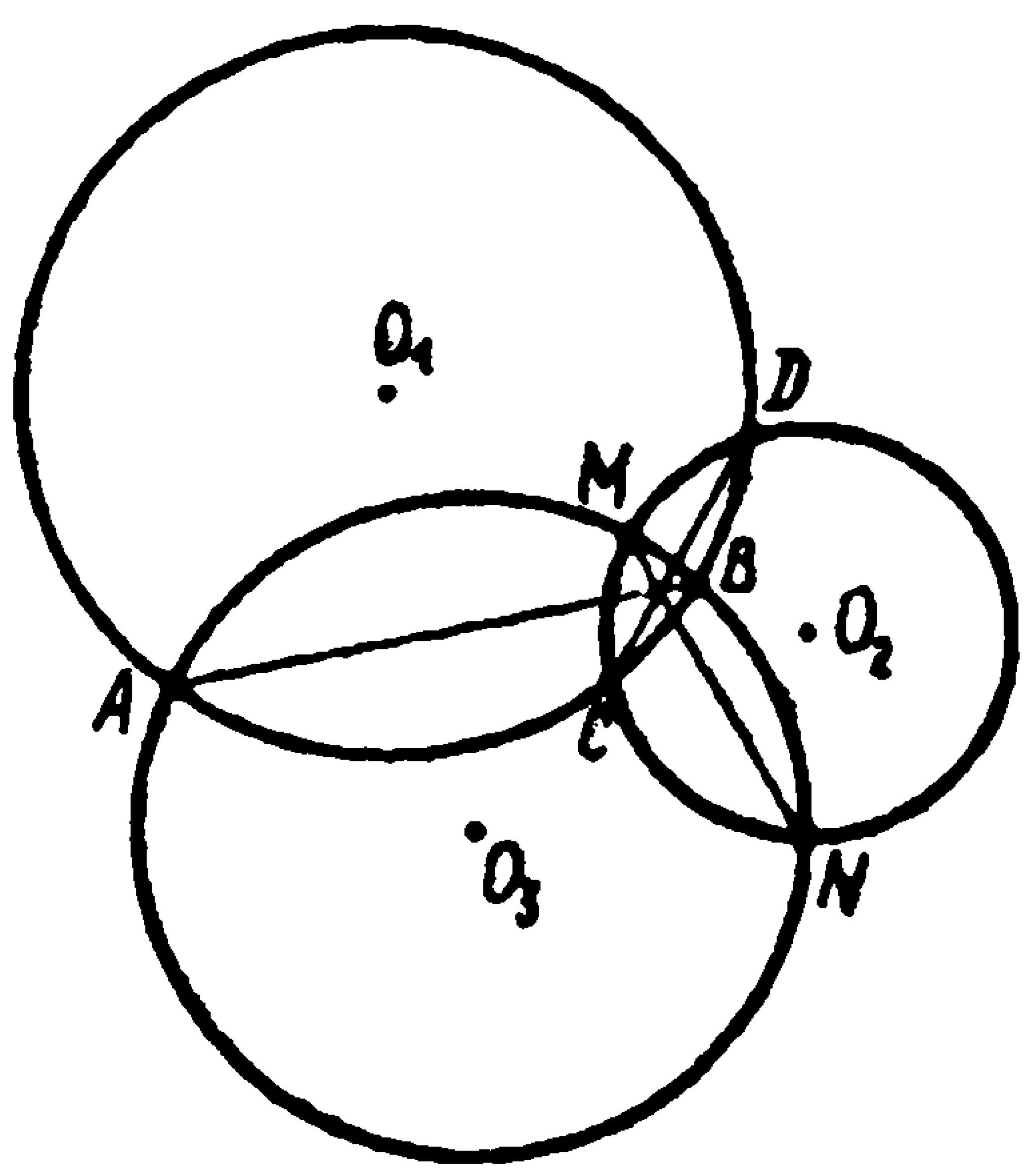


Рис. 30.

Понятно, что существуют ровно две точки, которые принадлежат всем трем сферам, причем эти точки симметричны относительно плоскости $O_1O_2O_3$. Тогда общая проекция этих точек на плоскость $O_1O_2O_3$ принадлежит каждому из

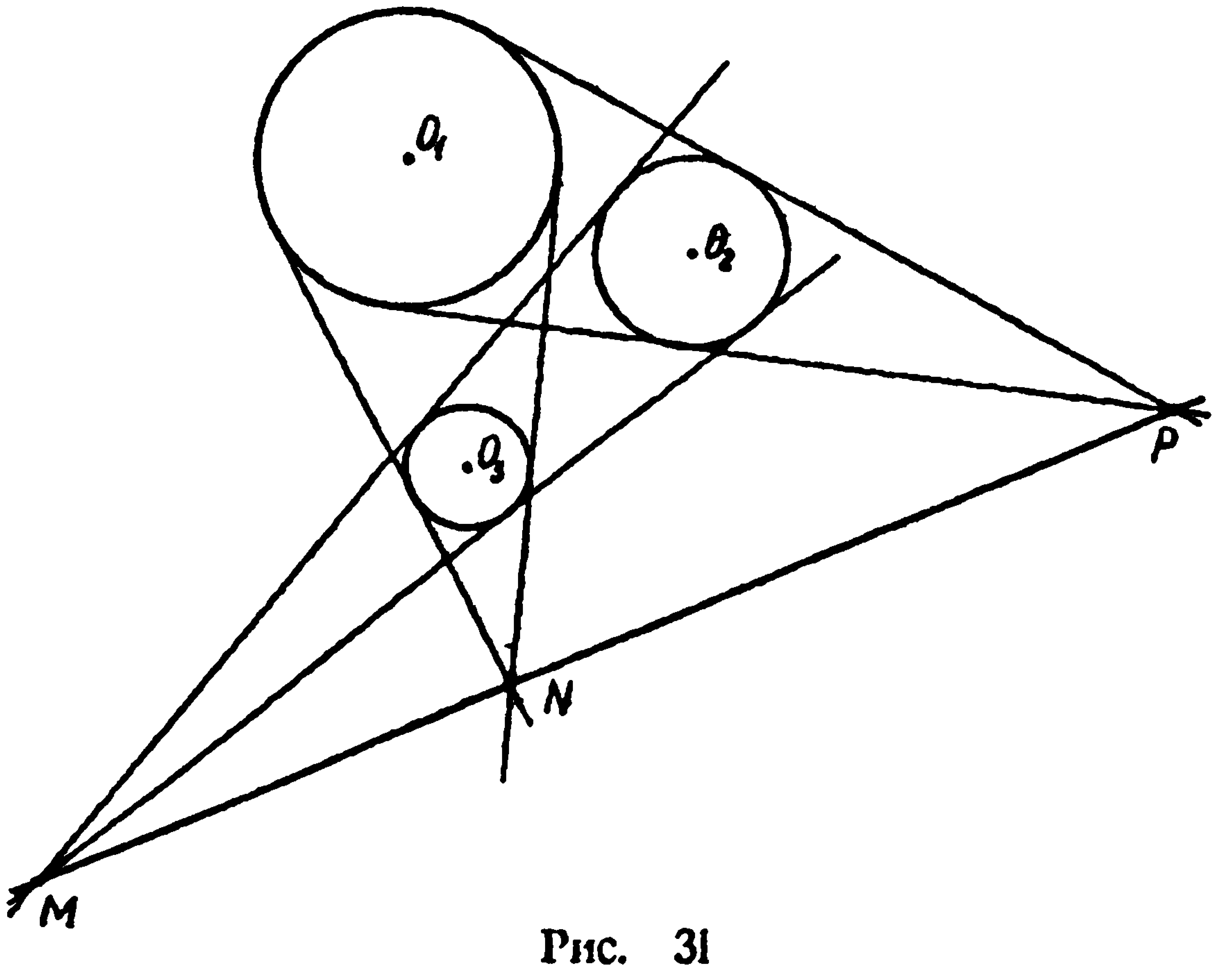


Рис. 31

отрезков AB, CD, MN, т.е. является точкой пересечения этих отрезков.

94. Данную конфигурацию (рис. 31) можно рассматривать как ортогональную проекцию трех сфер, каждые две из которых вписаны в одну коническую поверхность, на плоскость $O_1O_2O_3$, проходящую через центры сфер. Очевидно вершины трех конических поверхностей принадлежат плоскости $O_1O_2O_3$.

Рассмотрим еще одну плоскость, касающуюся трех сфер так, чтобы точки O_1, O_2, O_3 лежали в одном полупространстве относительно этой плоскости. Очевидно указанная плоскость касается конических поверхностей по образующим. Тогда вершины конусов принадлежат этой плоскости. Таким образом, мы показали, что точки M, N, P являются общими для двух различных плоскостей. Следовательно, M, N, P лежат на одной прямой.

95. Пусть прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пересекаются в точке S (рис. 32). Тогда три луча SA_2, SB_2, SC_2 можно рассматривать как параллельную проекцию трехгранного угла. Поскольку никакие из сторон треугольников, лежащие в одной грани трехгранного угла, не параллельны, то и не параллельны плоскости $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$. Понятно, что точки пересечения сторон A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 являются общими для плоскостей $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, а следовательно, лежат на одной прямой.

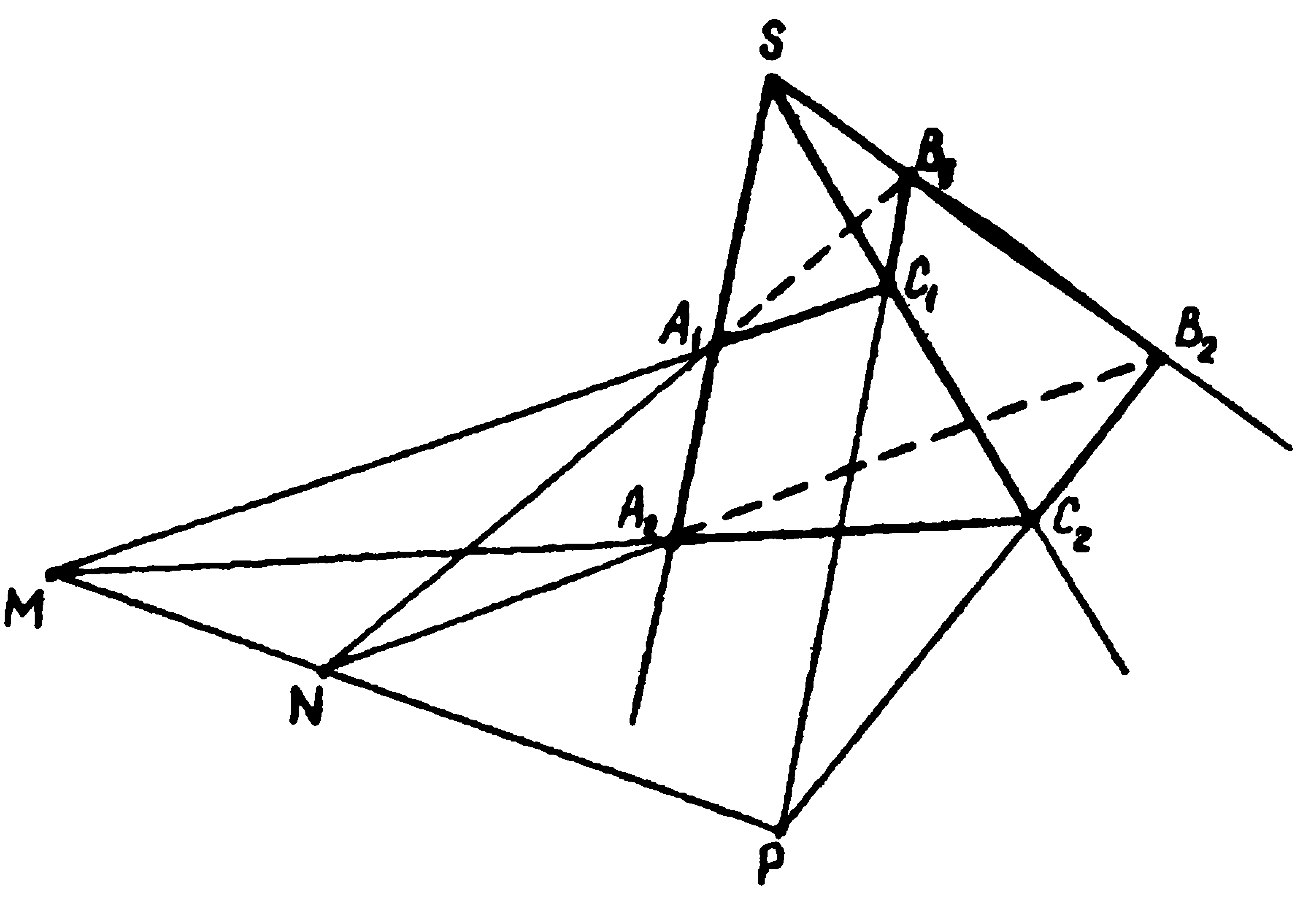


Рис. 32.

§ 9. РАСКРАСКИ

96. Раскрасим вершины шестиугольника через одну в два цвета (рис. 33). Обозначим сумму чисел, стоящих в черных вершинах, S_1, сумму чисел, стоящих в белых вершинах, — S_2. Теперь ясно, что при выполнении указанной в условии операции S_1 и S_2 одновременно увеличиваются или уменьшаются на одно и то же число, т.е. разность $S_2 - S_1$ постоянна.

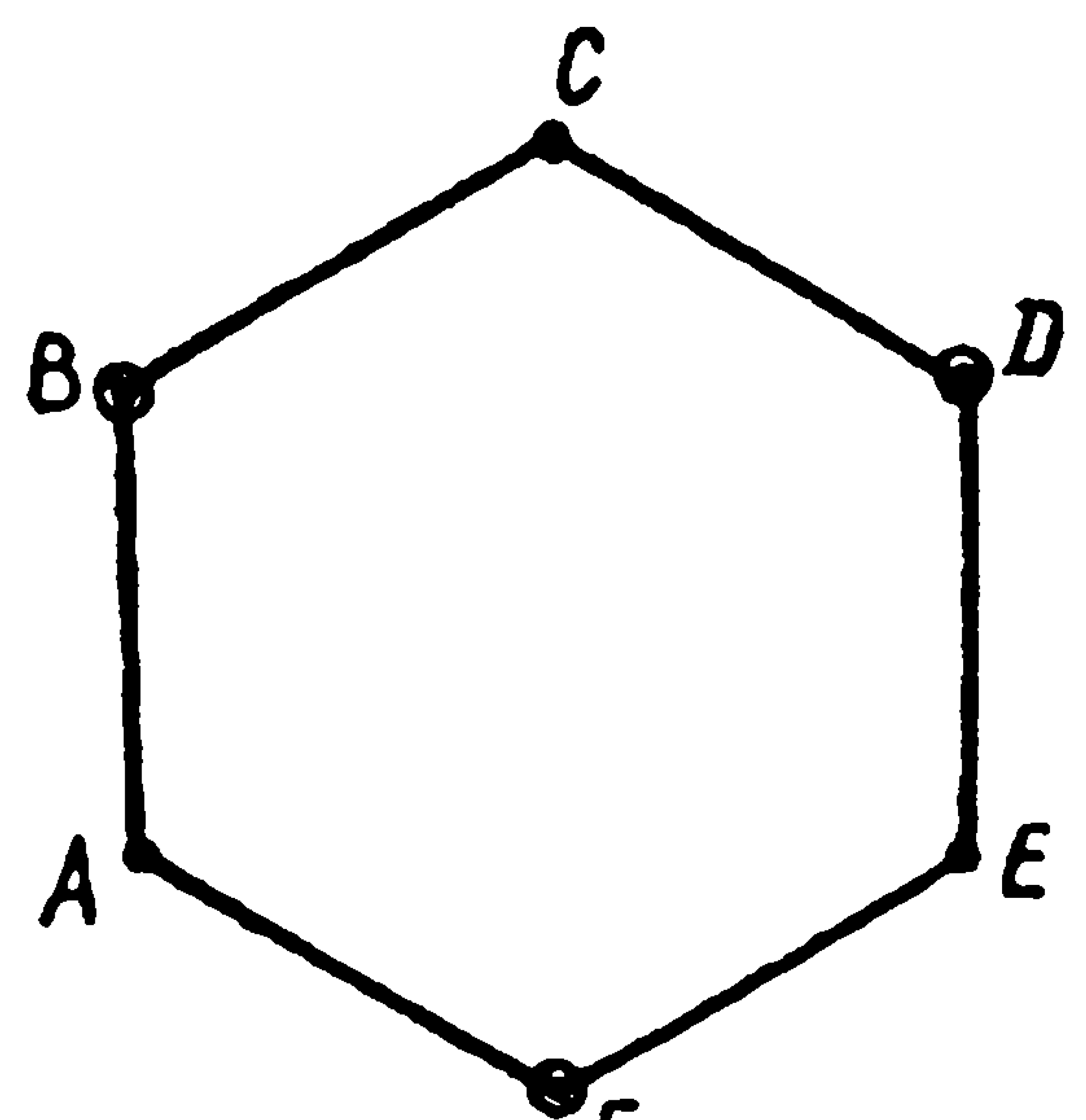


Рис. 33.

В нашем случае в начальной расстановке чисел $S_2 - S_1 = 15$, в конечной $S_2 - S_1 = 21$.

Ответ. Указанную шестерку чисел получить нельзя.

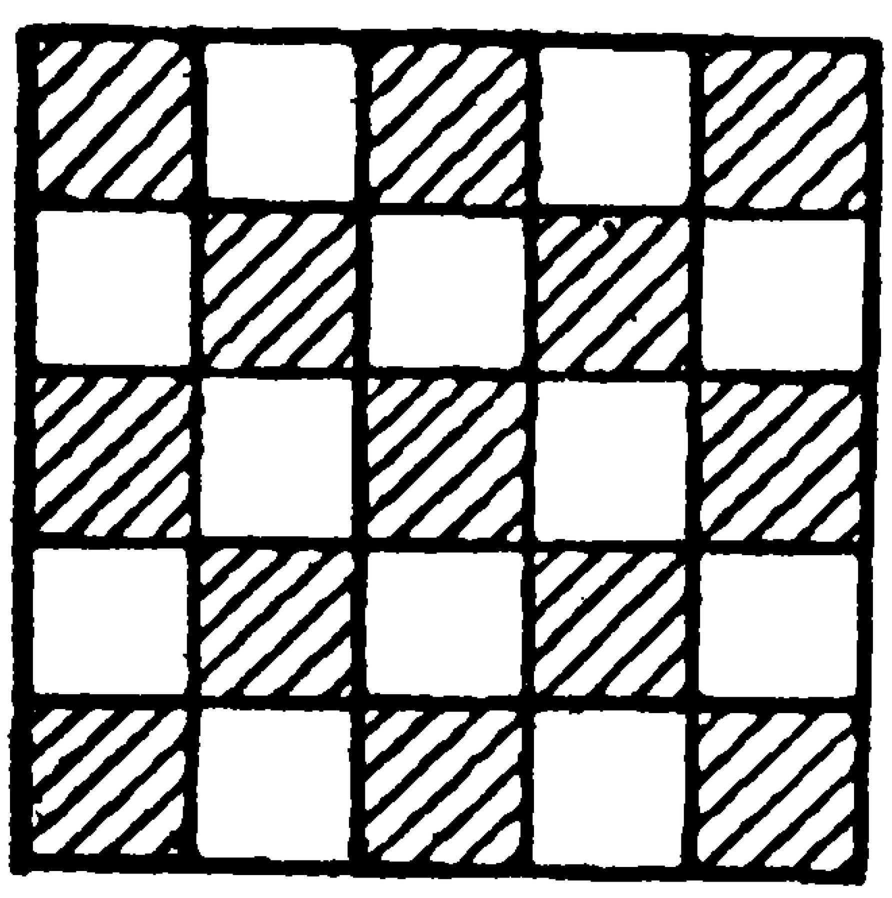


Рис. 34.

97. Раскрасим клетки доски так, как показано на рис. 34. Тогда, переползая, каждый жук меняет цвет клетки. Но жуков, сидящих в черных клетках, 13, а в белых — 12. Это означает, что по крайней мере одна черная клетка останется пустой.

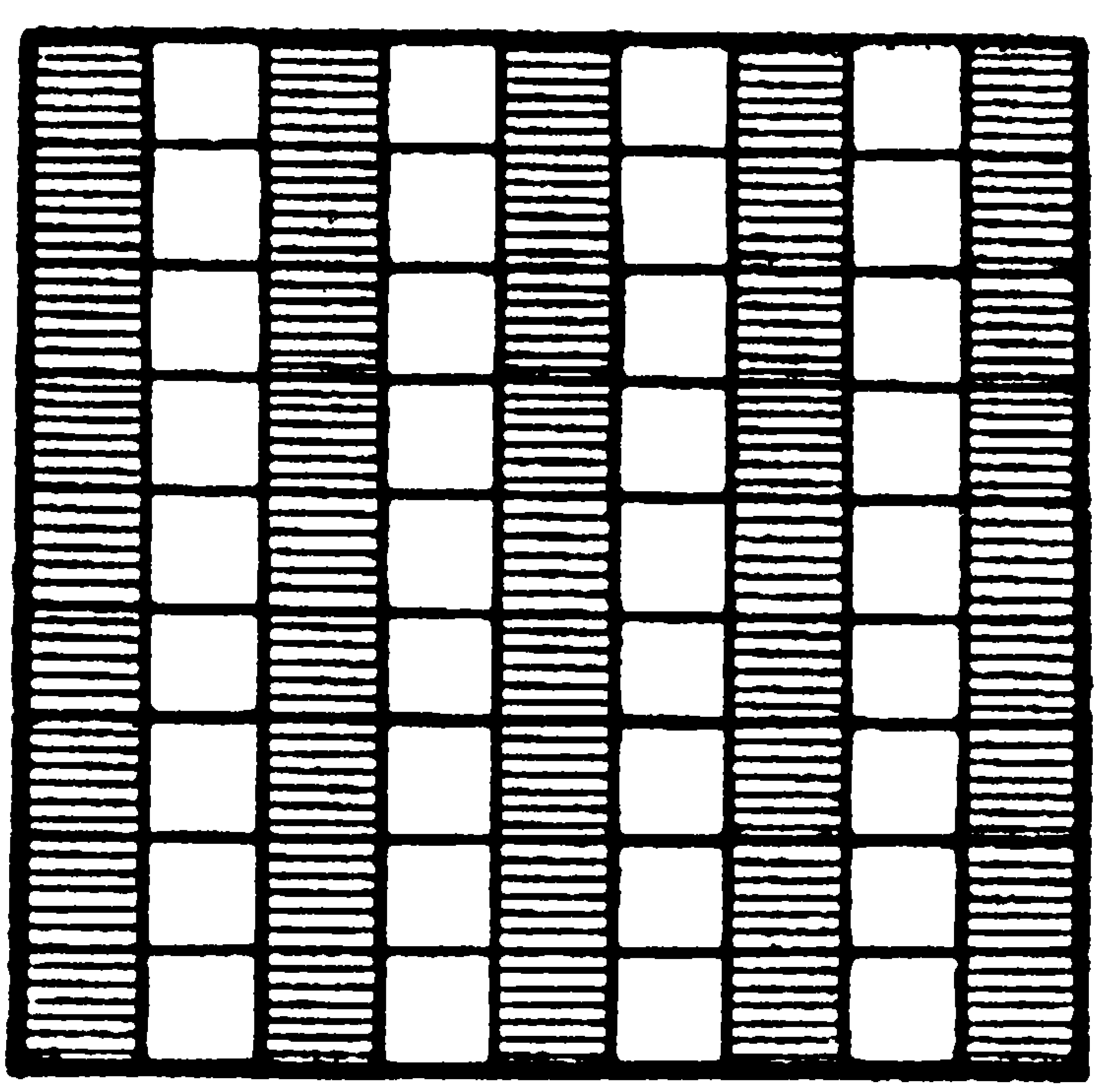


Рис. 35.

98. Как и в предыдущей задаче, доску следует раскрасить так, чтобы каждый жук, переползая, менял цвет клетки (рис. 35).

Теперь понятно, что 45 жуков, сидящих в черных клетках, переползут на белые, в то время как их места могут занять лишь 36 белых жуков, т.е. по крайней мере 9 черных клеток окажутся пустыми.

99. Раскрасим данный кубик так, как показано на рис. 36, и предположим, что мышка может «выполнить свою задачу». В этом случае ей пришлось бы съесть 26 кубиков, т.е. одинаковое количество белых и черных, но это невозможно, т.к. белых кубиков всего 13 и должен остаться один, черных — 14, и должны быть съедены все.

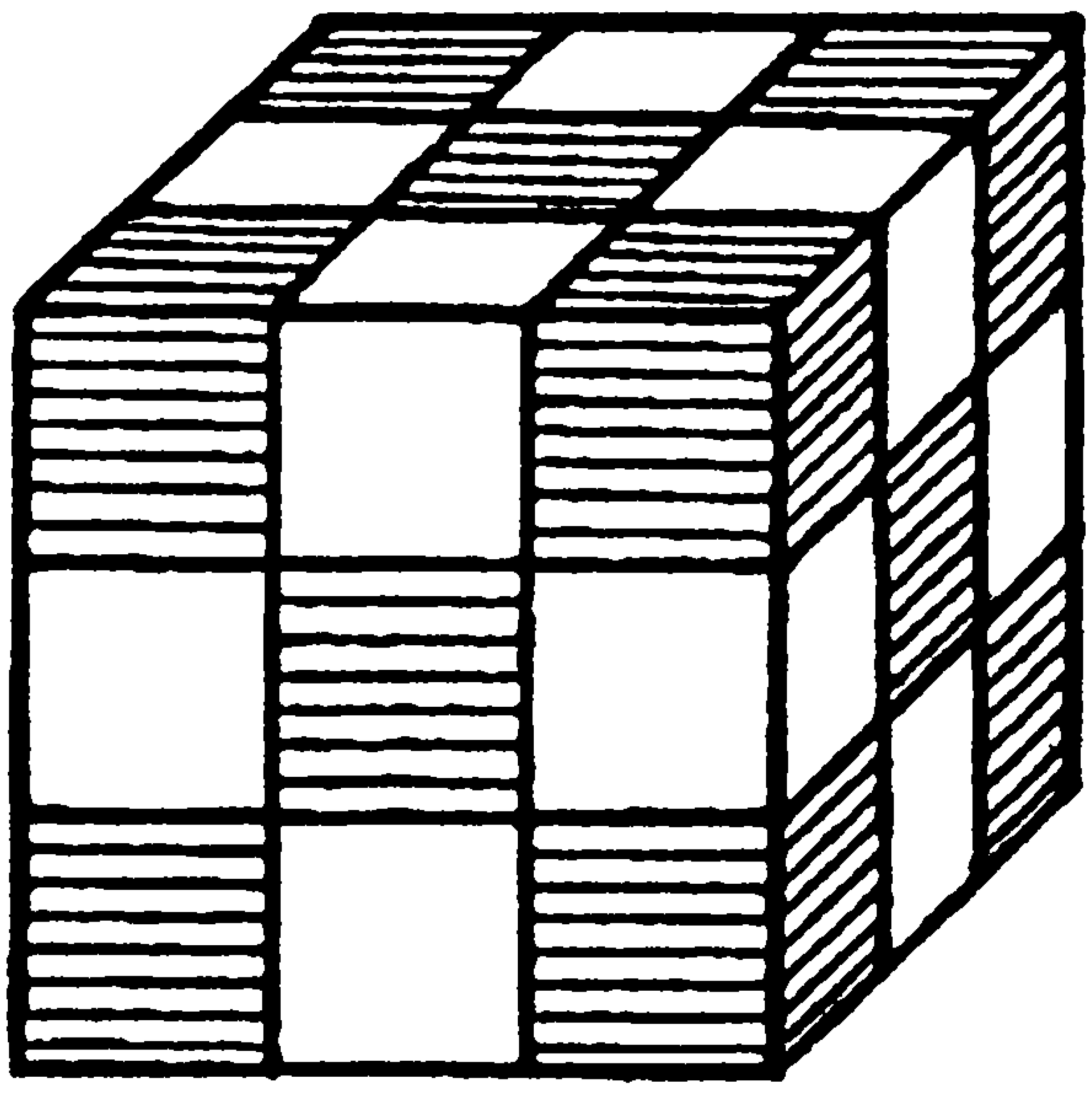


Рис. 36.

100. Разобъем дно коробки на квадраты 1×1 и раскрасим его так, как показано на рис. 37. Каждая плитка 2×2 накрывает ровно одну закрашенную клетку, а плитка 1×4 — две или ни одной, т.е. четность числа закрашенных клеток совпадает с четностью плиток 2×2. Поэтому при потере плитки 2×2 останется непокрытой только одна закрашенная клетка. Поэтому замена плиток невозможна.

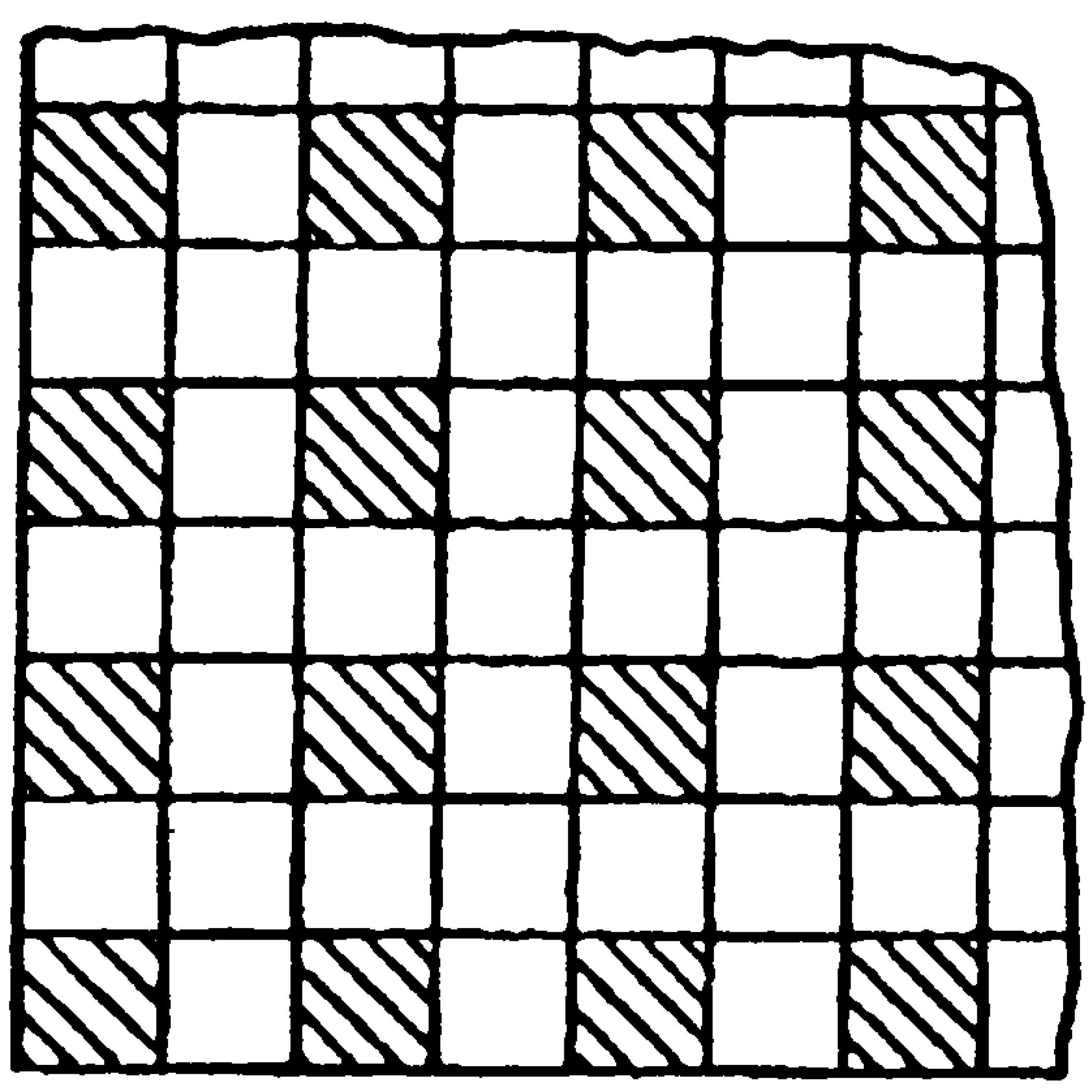


Рис. 37.

101. Раскрасим клетки в четыре цвета так, как показано на рис.38. Тогда среди любых n клеток можно выбрать по крайней мере $\frac{n}{4}$ клеток одного цвета, а клетки одного цвета не имеют общих точек.

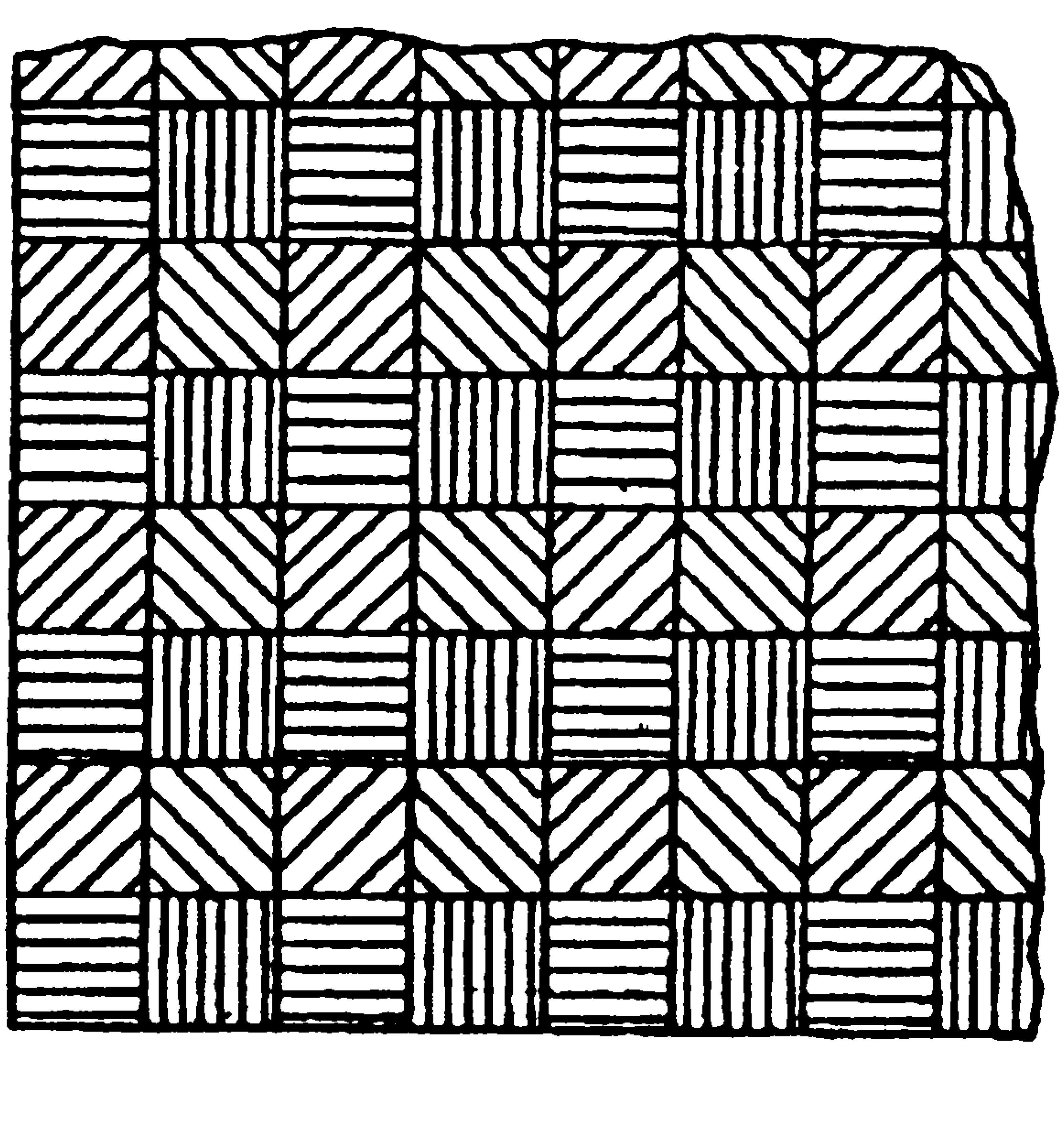


Рис. 38.

102. Раскрасим квадрат 1993×1993 так, как показано на рис. 39. Легко сосчитать, что таким образом нами отмечено 399^2 квадратов 3×3.

Теперь ясно, что как бы мы ни вырезали квадратики 3×3, каждый раз будет «затронут» один и только один отмеченный квадрат. Поскольку выре-

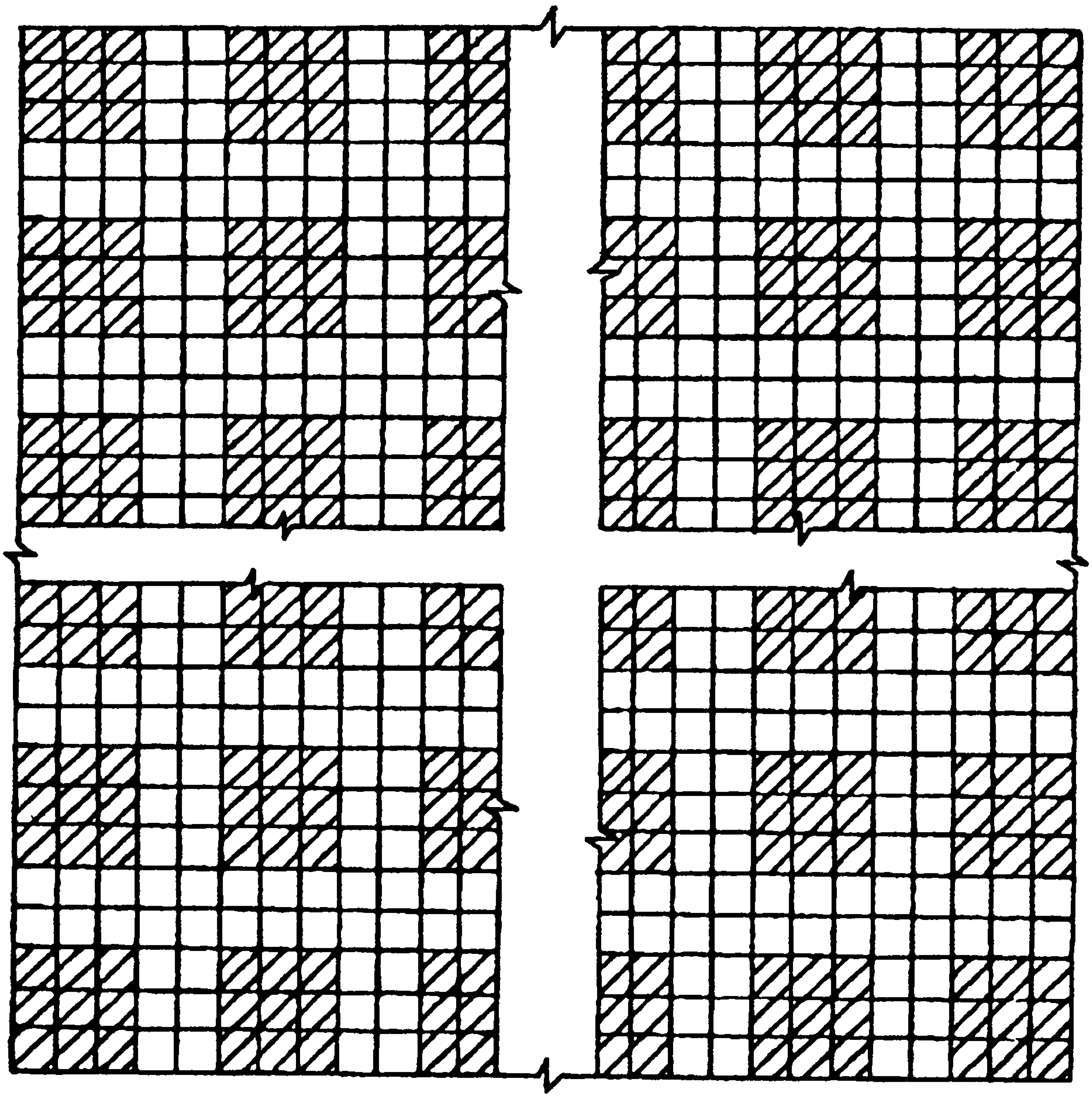


Рис. 39.

зается $399^2 - 1$ квадратиков, то обязательно останется незадстым ровно один закрашенный квадрат.

§ 10. РАЗНЫЕ ЗАДАЧИ

103. Рассмотрим систему координат с началом отсчета в произвольном узле решетки. При этом оси координат направлены так, как показано на рис. 40. За единичный отрезок примем длину стороны квадрата. Понятно, что в этом случае каждый узел решетки будет иметь целые координаты.

Проведем прямую $y = x\sqrt{2}$. Если на этой прямой лежит еще один узел с координатами $(m; n)$, где $m \in Z$ и $n \in Z$, отличный от точки $(0; 0)$, то имеет место равенство $m = n\sqrt{2}$. В левой части этого равенства стоит рациональное число, а в правой — иррациональное. Получили противоречие. Таким образом, существует бесконечно много прямых, содержащих только один узел данной решетки. Все эти прямые образуют семейство $y = \alpha x$, где α — иррациональное число.

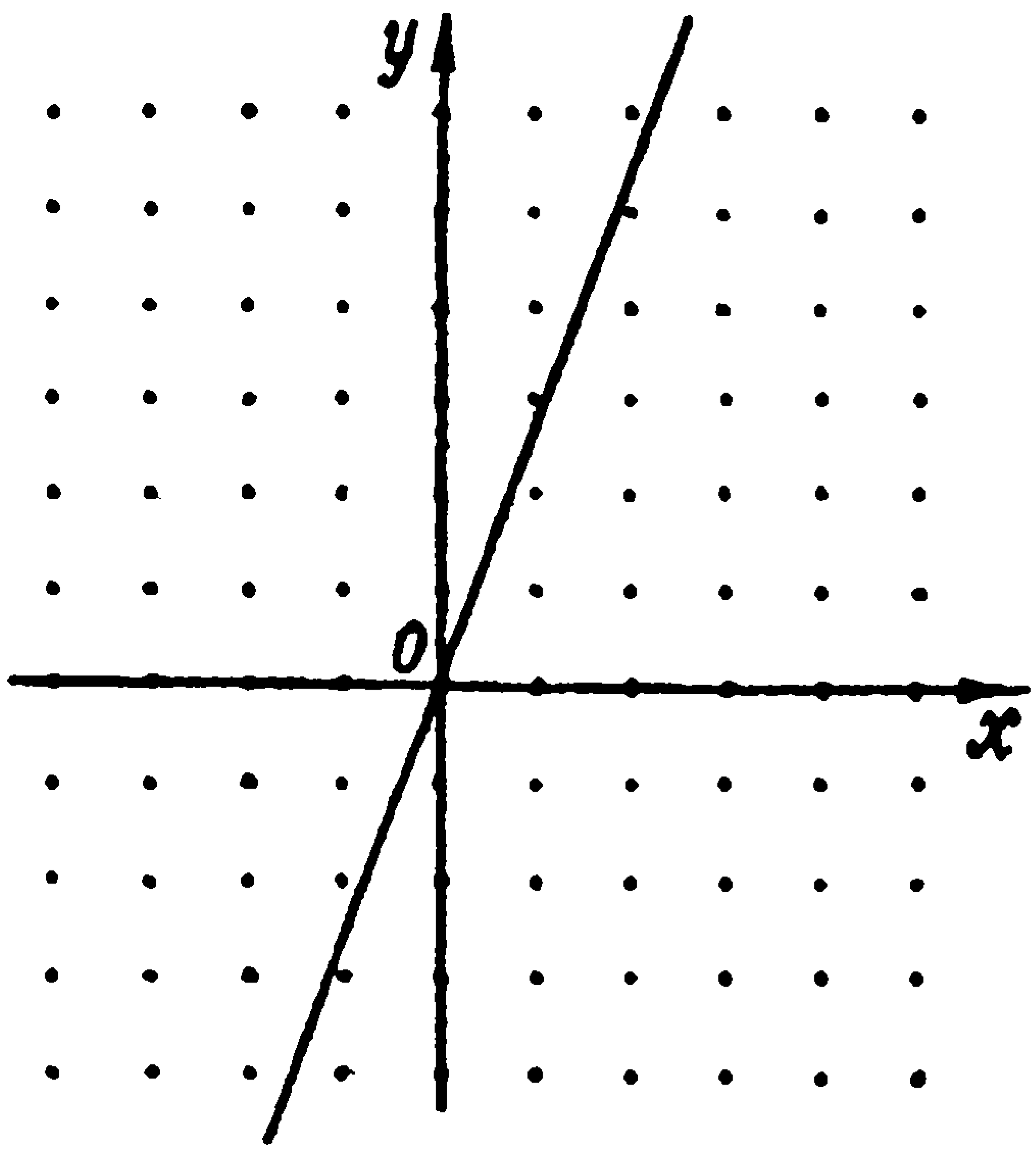


Рис. 40.

104. Пусть кузнечики находятся в вершинах O, A, B квадрата (рис. 41). Введем систему координат так, как показано на рисунке. Так как кузнечики O, A, B имеют целые координаты, то при перемещении «путем чехарды» они попадут опять-таки в точки с целыми координатами. Если кузнечик с координатами $(x_1; y_1)$ прыгает через кузнечика $(x_0; y_0)$ и приземляется в точку $(x_2; y_2)$, то $x_2 = 2x_0 - x_1$, $y_2 = 2y_0 - y_1$. Следовательно, у кузнечиков при прыжках не меняется четность координат. Таким образом, чтобы попасть в четвертую вершину $(1; 1)$ данного квадрата, надо иметь хотя бы одного кузнечика, у которого обе координаты были бы нечетными. Но кузнечики O, A, B таким свойством не обладают.

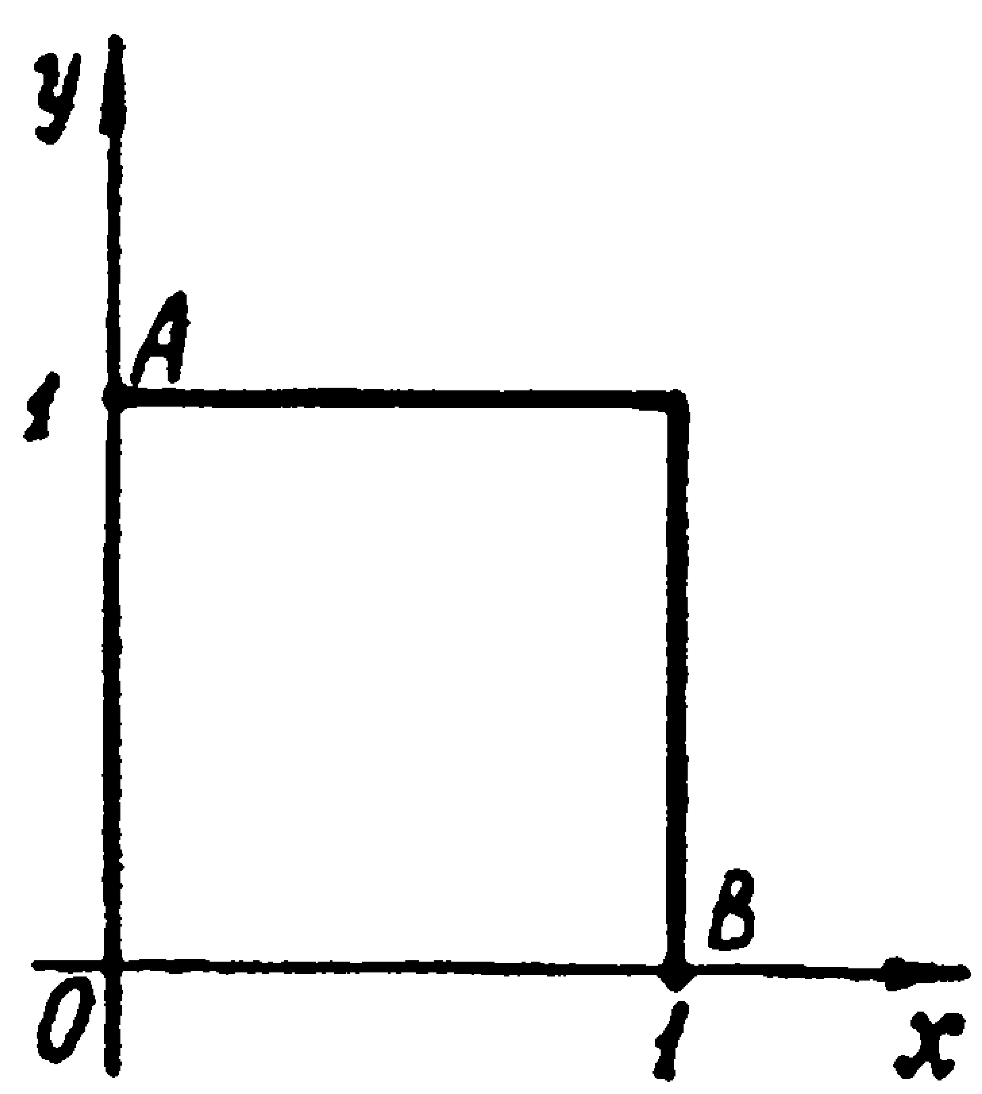


Рис. 41.

105. Примем проведенную прямую за ось абсцисс. Тогда ординаты точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ будут одного знака. Следовательно, сумма ординат не равна нулю. Поэтому сумма данных векторов не может быть равна вектору с нулевыми координатами.

106. Пусть $\overline{OM_1}$, $\overline{OM_2}$, $\ldots$, $\overline{OM_n}$ — какие-то векторы сил. Ясно, что при повороте данной системы на угол $\dfrac{360^\circ}{n}$ равнодействующая сил не изменится. Следовательно, равнодействующая не зависит от направления. А таким свойством обладает только нуль-вектор.

107. Обозначим данное выражение через $f(x)$. Понятно, что $f(x)$ — многочлен степени не выше второй. Очевидно, что $f(a) = f(b) = f(c) = 1$, причем числа a, b, c различные. Следовательно, f — линейная функция, причем константа. Значит, $f(x) \equiv 1$.

108. Воспользуемся следующим свойством дифференцируемой функции. Если функция f дифференцируема на промежутке I, $x_1 \in I$, $x_2 \in I$, причем $f(x_1) = f(x_2) = 0$, то существует по крайней мере одна точка $C \in (x_1; x_2)$ такая, что $f'(c) = 0$.

Иными словами: между двумя нулями дифференцируемой функции лежит нуль ее производной. Наглядно это свойство очевидно (рис. 42).

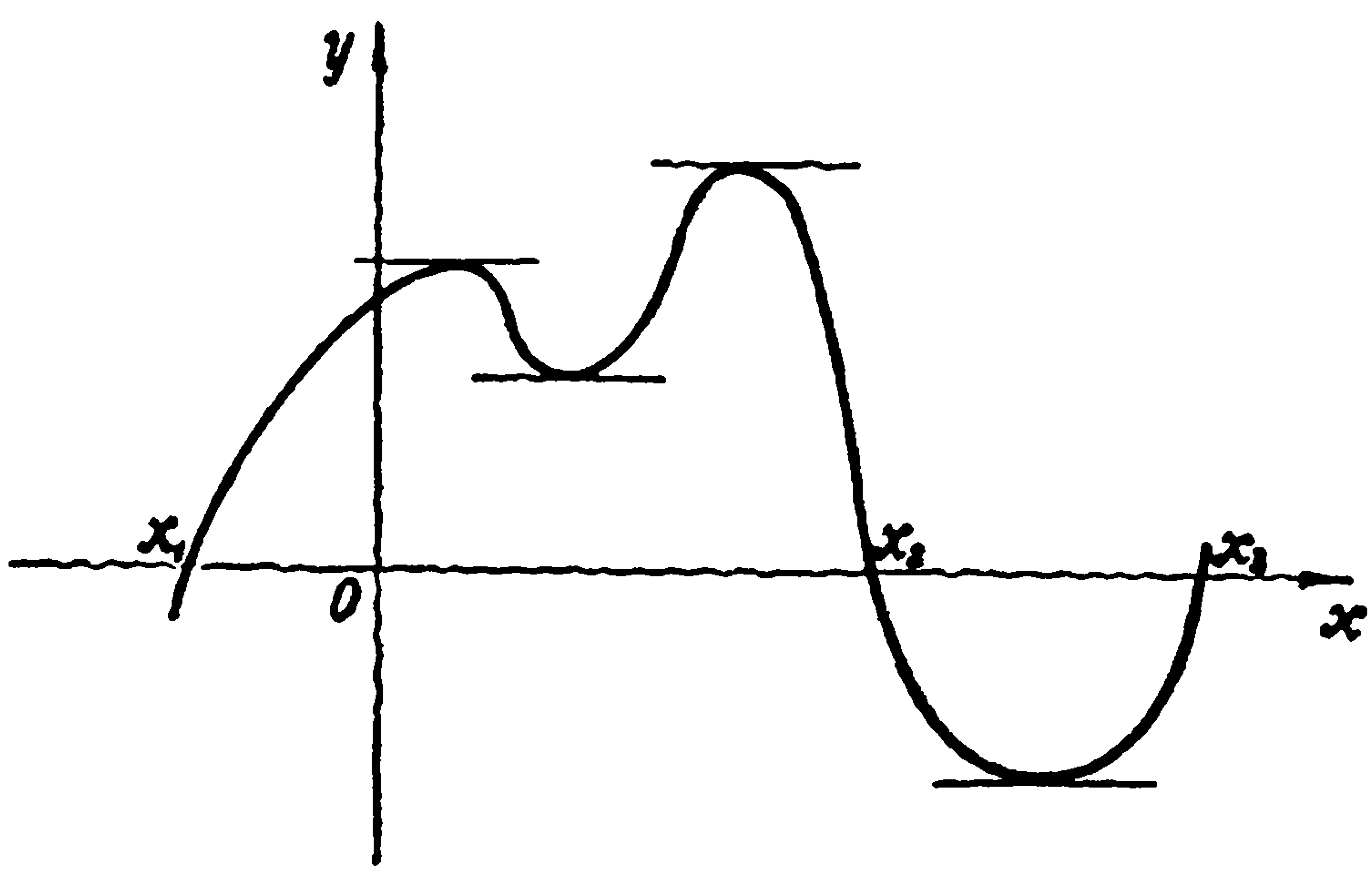


Рис. 42.

Из этого свойства следует, что если многочлен степени n имеет ровно n различных действительных корней, то производная этого многочлена имеет ровно $n - 1$ различных действительных корней.

Обозначим левую часть данного уравнения через $f(x)$. По условию уравнение $f(x) = 0$ имеет четыре различных действительных корня. Тогда уравнение $f'(x) = 0$ имеет ровно три различных действительных корня. Имеем $4x^3 + 3ax^2 + 2bx = 0$. Это уравнение имеет корень $x = 0$. Следовательно, квадратное уравнение $4x^2 + 3ax + 2b = 0$ имеет два различных корня. Его дискриминант $D = 9a^2 - 32b$. Так как $D > 0$, то $a^2 > \frac{32b}{9}$.

109. Совершенно очевидно, что если $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$, то уравнение имеет корни. Рассмотрим случай, когда не все a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ одновременно обращаются в нуль. Пусть данное уравнение не имеет корней. Обозначим его нулевую часть через $f(x)$. Тогда в силу непрерывности функции f она сохраняет постоянный знак. Значит, $\int\limits_0^{2\pi} f(x)\,dx \neq$ $\neq 0$. На самом деле это не так, в чем легко убедиться.

110. Пусть $d_1, d_2, \ldots, d_n$ и $d'_1, d'_2, \ldots, d'_n$ — длины отрезков соответственно первого и второго разбиений. Тогда в первом случае сумма длин всех полуокружностей равна $S_1 = \frac{\pi d_1}{2} + \frac{\pi d_2}{2} + \ldots + \frac{\pi d_n}{2} = \frac{\pi(d_1 + d_2 + \ldots + d_n)}{2} = \frac{\pi l}{2}$, а во втором случае —

$$S_2 = \frac{\pi d'_1}{2} + \frac{\pi d'_2}{2} + \ldots + \frac{\pi d'_n}{2} = \frac{\pi(d'_1 + d'_2 + \ldots + d'_n)}{2} = \frac{\pi l}{2}.$$

Отсюда $S_1 : S_2 = 1$.

111. Не существует. Неустойчивый многогранник на любой своей грани — ничто иное, как вечный двигатель.

112. Обозначив $100005 = x$, данное в условии числовое выражение перепишем в виде $(x + 2)(x + 8)(x - 4) + 55 =$ $= x^3 + 6x^2 - 24x - 9$.

Многочлен, стоящий в правой части последнего равенства, легко разложить в произведение двух многочленов с целыми коэффициентами. Имеем $x^3 + 6x^2 - 24x - 9 =$ $= (x - 3)(x^2 + 9x + 3)$. Теперь ясно, что

$$100007 \cdot 100013 \cdot 100001 + 55 =$$
$$= 100002\,(100002^2 + 9 \cdot 100002 + 3),$$

откуда сразу следует нужное утверждение.

113. Впишем в эту окружность правильный пятиугольник. Тогда из пяти вершин пятиугольника обязательно найдутся три, имеющие один цвет. Однако любые три вершины правильного пятиугольника служат вершинами равнобедренного треугольника.

СОДЕРЖАНИЕ

А.Г.Мерзляк, В.Б.Полонский, М.С.Якир

Неожиданный шаг или сто тринадцать красивых задач (Методическое пособие)

Подписано в печать 5.05.93 г. Формат 84×108 /32. Бумага книжно-журнальная. Печать высокая. Усл. печ. л. 3,28. Зак. 3-156. Тираж 25 000 экз.

Отпечатано по заказу КИЦ «Инкопресс» на Киевской книжной фабрике, 252054, Киев-54, ул. Воровского, 24.